

CHAPITRE X : CALCUL DES ELEMENTS DE LA SUPERSTRUCTURE

I. Calcul de la charpente métallique : Poutre latérale et arc en treillis

Description du système

L'ouvrage est composé par un arc circulaire, des suspentes et par un tablier horizontal. L'arc est en treillis, de section constante et encastré aux naissances.

Le tablier est le seul élément directement chargé, constitué par deux poutres de rigidité en treillis et de section constante, des poutres transversales qui transmettent les charges aux poutres principales et d'une dalle orthotrope, il forme un ensemble purement métallique.

Les suspentes sont supposées inextensibles et ne transmettent que des réactions verticales.

Le système est divisé en trois sous-système (voir la figure 40) étudiés indépendamment les uns des autres, dont :

- Le premier sous-système concerne la tronçon CA' de la poutre : on l'assimile à une poutre continue s'appuyant sur des appuis rigides et encastrée à l'extrémité droite.
- Le second sous-système rassemble l'arc et la travée A'B' de la poutre : pour étudier ce système, on prend comme système d'axes, l'axe horizontale Ax et l'axe verticale Ay ayant comme origine la naissance de l'arc à gauche (voir figure 40). Le système est alors formé par un arc et une poutre solidarisés par des suspentes verticales.
- Et la troisième sous-système s'agit de la tronçon A'B de la poutre : l'étude de ce système est identique à celui du premier sous-système.

Comme le premier est identique à la troisième, nous avons donc deux systèmes à étudier.

Dans les calculs, l'arc à treillis est assimilé à un arc d'inertie équivalente I_1 et la poutre en treillis à une poutre d'inertie équivalente I_2 .

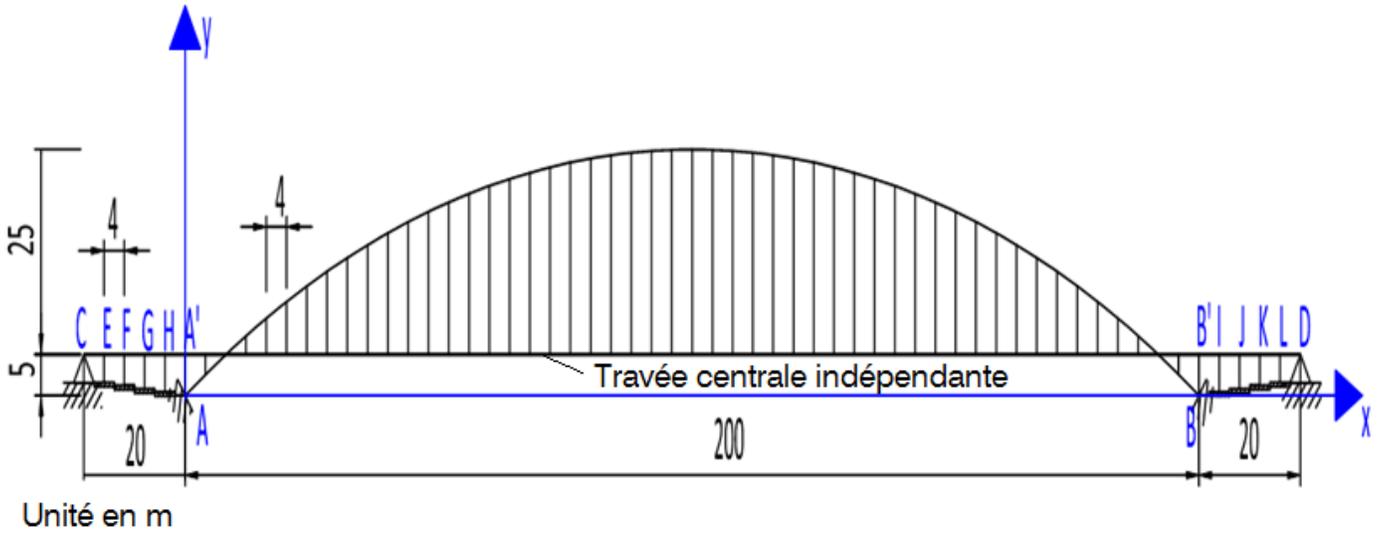


Figure 40 : Modélisation d'ensemble du système

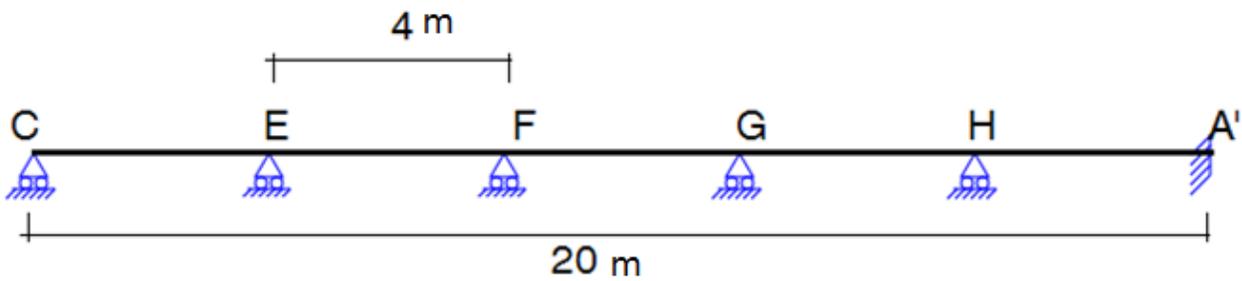


Figure 41 : Modélisation du sous-système 1

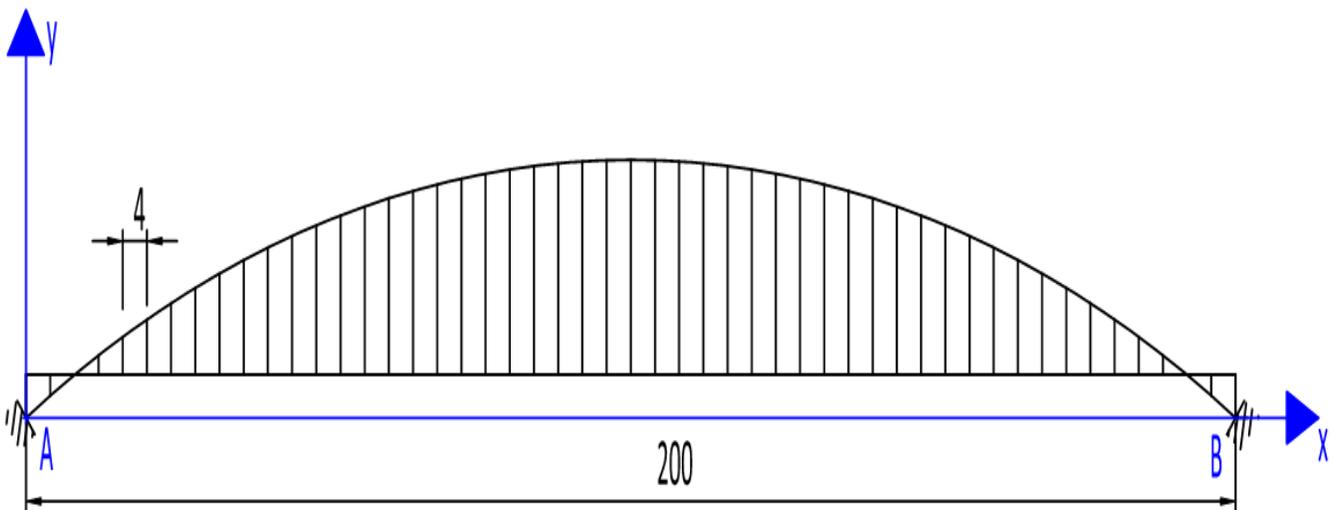


Figure 42 : Modélisation du sous-système 2

I. 1. Chargement de la poutre

I. 1. 1. Coefficient de Répartition Transversale

Les charges du tablier sont transmises aux poutres latérales par le biais des pièces de pont qui sont considérées s'appuyer simplement sur les poutres. Théoriquement, toutes les charges réparties sur le pont se divisent entre les poutres principales, en parties égales si leurs moments d'inertie sont égaux et si les charges sont réparties de façon à ce que le point d'application de leur résultante se situe sur l'axe du pont. Mais comme ce n'est pas toujours le cas, on joint aux chargements un coefficient de répartition transversale (CRT) η qui dépend de l'excentricité de ces derniers par rapport à l'axe du pont.

Comme la longueur du pont ($L= 240$ m) est supérieure à deux fois sa largeur ($2b=2.8,5m=17m$), et comme nous ne disposons que deux poutres principales, ce coefficient est donné par la formule de Courbon suivante :

$$\eta = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2 \cdot e}{l} \right)$$

Avec, e : excentricité de la résultante P des charges ;

l : distance entre les deux poutres principales.

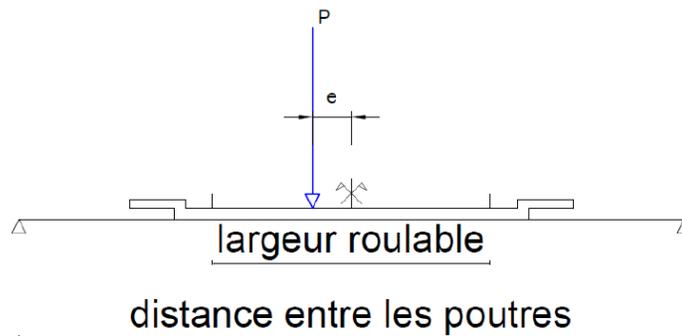


Figure 43: Illustration de l'excentricité de la résultante P

Pour les charges permanentes, l'excentricité $e = 0$, d'où la CRT, $\eta = 0,5$.

Pour les charges de trafics, on a :

Tableau 30 : Coefficients de répartition transversale des charges de trafics

Groupes de chargement	Gr1a	Gr1b	Gr2	Gr3	Gr5
Excentricité : e [m]	-1,63	-2,5	-1,63	0	-1,66
CRT : η	0,7	0,79	0,7	0,5	0,7

I. 1. 2. Charge permanente g pour une poutre de rigidité

Les charges permanentes auxquelles est soumise une poutre de rigidité sont :

- Son poids propre
- La charge du tablier avec les équipements fixes

Les charges permanentes sont toutes réparties linéairement le long de la poutre.

I. 1. 2. 1. Poids propre

Les poutres latérales sont en treillis Warren, elles sont constituées des barres de section en Té 300*300*20 comme membrure supérieure et inférieure et deux barres UPN 120 forment une diagonale. Pour une poutre de 240[m], de hauteur 1,5[m], la masse totale est de 67 284 [kg], donc en considérant que son propre est uniformément reparti le long de sa longueur, on a :

$$\mathbf{g_{pp} = 2,8 \text{ [kN/ml]}}$$

I. 1. 2. 2. Charge du tablier

La charge du tablier comprend, le poids du platelage, celui du trottoir, des équipements et des entretoises. La totalité de ces poids pour le pont en entier vaut : $P_{\text{Tablier}} = 8\,740,74[\text{kN}]$.

Pour une poutre, on a :

$$\mathbf{g_t = \eta \cdot P_{\text{Tablier}}/L}$$

$L = 240[\text{m}]$ étant la longueur de la poutre ;

$\eta = 0,5$ le CRT des charges permanentes.

Ainsi,

$$\mathbf{g_t = 20,35 \text{ [kN/ml]}}$$

De ce fait, nous avons une charge permanente répartie sur la longueur d'une poutre de :

$$\mathbf{g = 22,63 \text{ [kN/ml]}}$$

I. 1. 3. Charges d'exploitation

Les surcharges d'exploitation sont les charges du trafic, les effets de vent et les effets de la température définies dans le troisième chapitre.

Pour le groupe de chargement gr1a (groupe de charge qu'on va considérer dans les calculs du système défini précédemment), on a les valeurs de surcharges pour le calcul de la poutre suivantes :

- Effet du vent :

Le vent n'a d'effet dans cette direction.

- Variation de température

La valeur de la variation de température utilisée dans les calculs est :

$$\Delta T = 59,5^\circ$$

- Surcharge de trafic UDL uniformément répartie sur la chaussée :

$$q = \eta \cdot (\alpha_{q1} \cdot q_{1k} \cdot l_{q1} + \alpha_{q2} \cdot q_{2k} \cdot l_{q2} + \alpha_{qr} \cdot q_{rk} \cdot l_{qr}) = 0,7 \cdot (9 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 1) = 27,3 \text{ kN/ml}$$

- Surcharge de trottoir q_{fk}

Repartie sur une largeur de 0,5m de part et d'autre de la chaussée, on a pour une poutre latérale :

$$q_{fk} = \eta \cdot (2 \cdot 3 \cdot 0,5) = 0,5 \cdot (2 \cdot 3 \cdot 0,5) = 1,5 \text{ kN/m}^2$$

- Surcharge de trafic TS (charges ponctuelles)

Comme on a 2 essieux distants de 1,2m sur chaque voie, pour la totalité de la chaussée, on a deux charges ponctuelles Q distantes de 1,2 m, dont l'intensité est la somme des deux essieux.

Ainsi pour une poutre, on a :

$$TS = 2 \times Q, \text{ avec } Q = \eta \cdot (\alpha_{Q1} \cdot Q_{1k} + \alpha_{Q2} \cdot Q_{2k}) = 0,7 \cdot (200 + 300) = 350 \text{ kN}$$

Pour cette surcharge qui est une charge roulante, il faut déterminer sa position correspondant au cas le plus défavorable. Comme il s'agit de poutre et d'arc à treillis, cette position correspond à celle qui donne un effort maximal dans les barres.

Il convient de déterminer la position défavorable pour les deux sous-systèmes.

La détermination de cette position pour le sous-système 1 se fait à l'aide des lignes d'influences.

Comme il s'agit de poutre à treillis, cette position correspond à celle qui donne un effort maximal ou minimal dans les barres.

Par contre, pour le second sous-système, il est plus pratique de se baser sur les lignes d'influences des moments.

Rappelons d'abord que la ligne d'influence d'un effet (F) est la courbe représentative de la valeur de cet effet dans une section sous l'action d'une charge unitaire verticale d'abscisse variable α .

Pour la tronçon CA', nous avons les quelques fonctions de ligne d'influence des moments dans la figure qui suit,

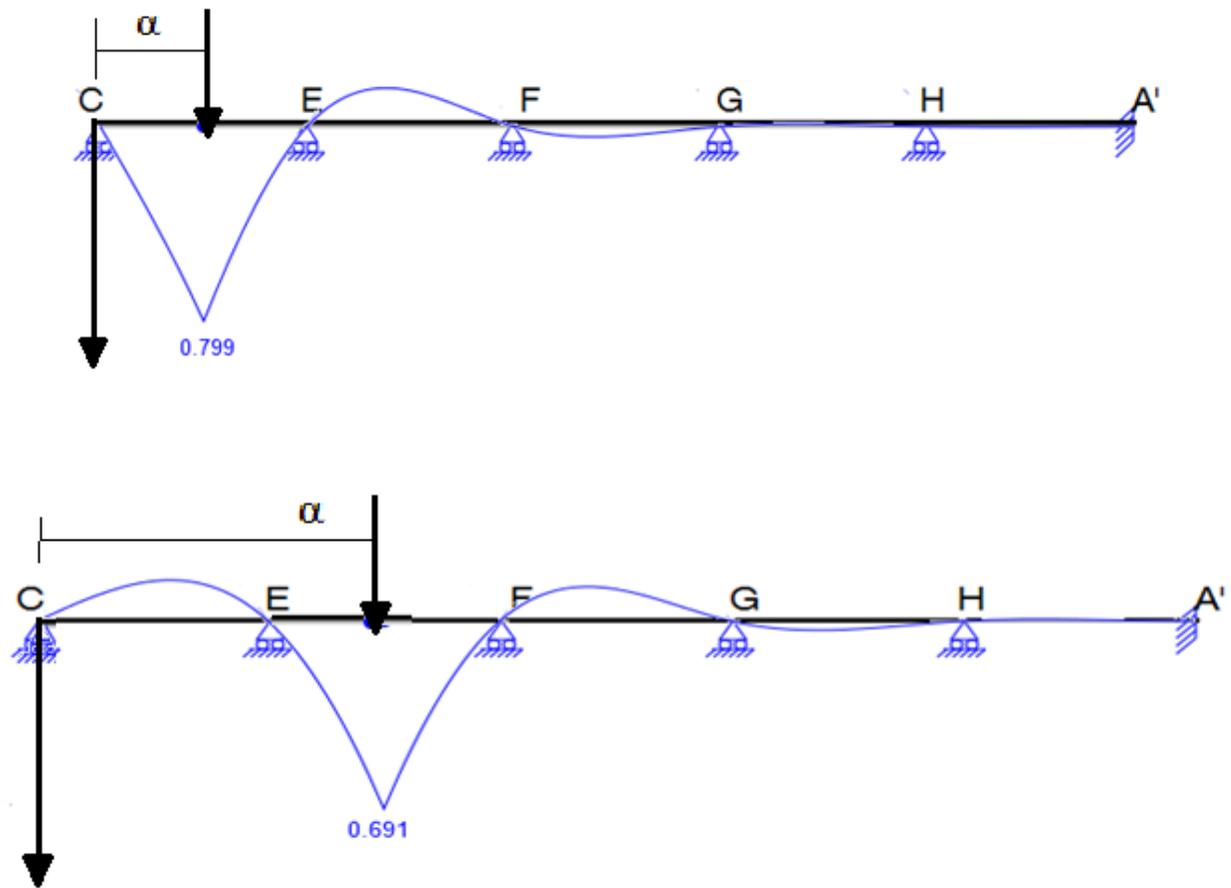
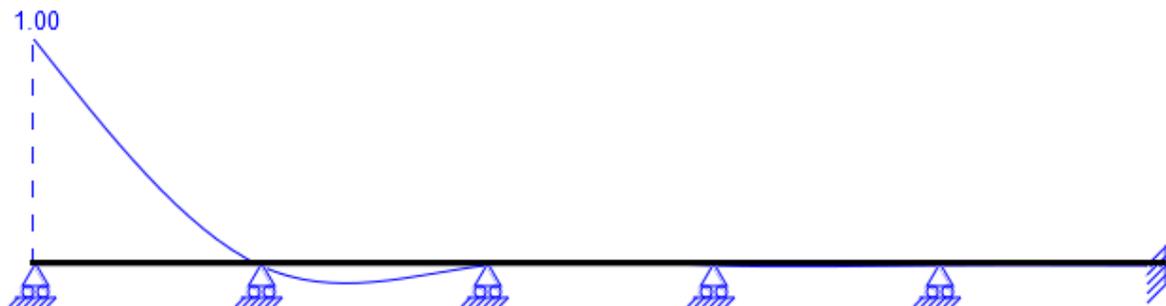


Figure 44 : Lignes d'influences du moment sur la poutre continue CA'

Nous avons aussi les fonctions d'influence des réactions aux appuis dans la figure suivante :



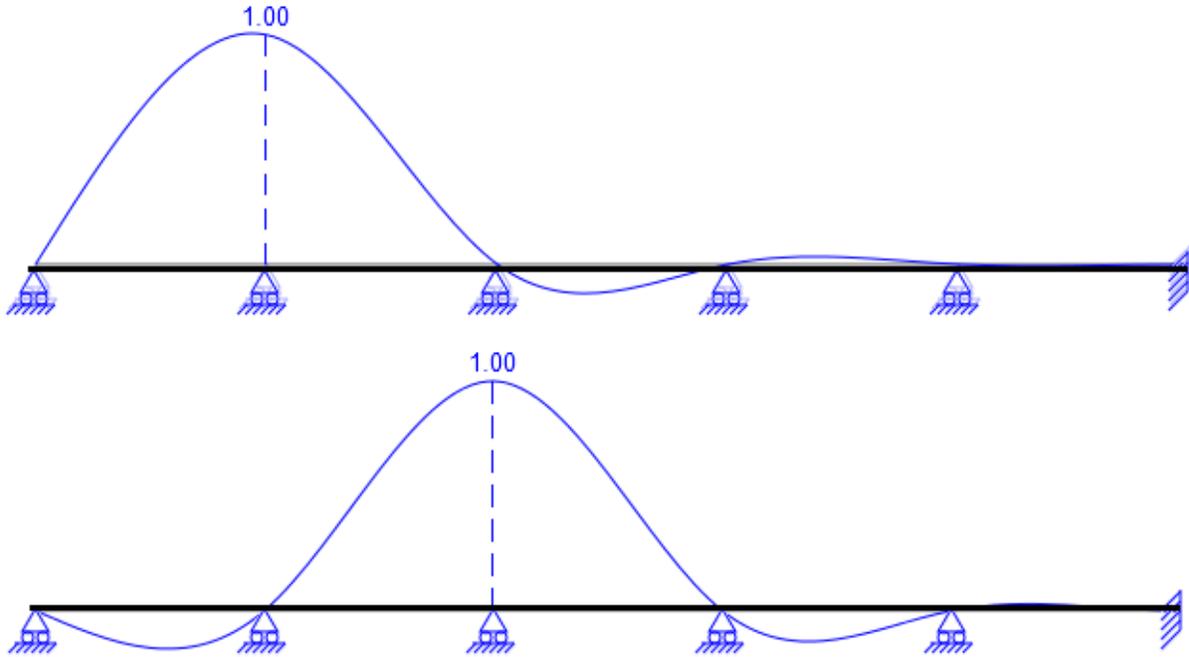


Figure 45: Ligne d'influence des réactions aux appuis

Par ces lignes d'influence, on constate que la réaction à un appui est maximale lorsque la charge est appliquée au droit de cet appui.

En ce qui concerne le sous-système 2 ;

Pour les membrures supérieures, la fonction d'influence des efforts est donnée par :

$$F_{MSi} = \begin{cases} -\frac{(L-x) \cdot \alpha}{h \cdot L} & \text{si } \alpha \leq x \\ -\frac{(L-\alpha) \cdot x}{h \cdot L} & \text{si } \alpha \geq x \end{cases}$$

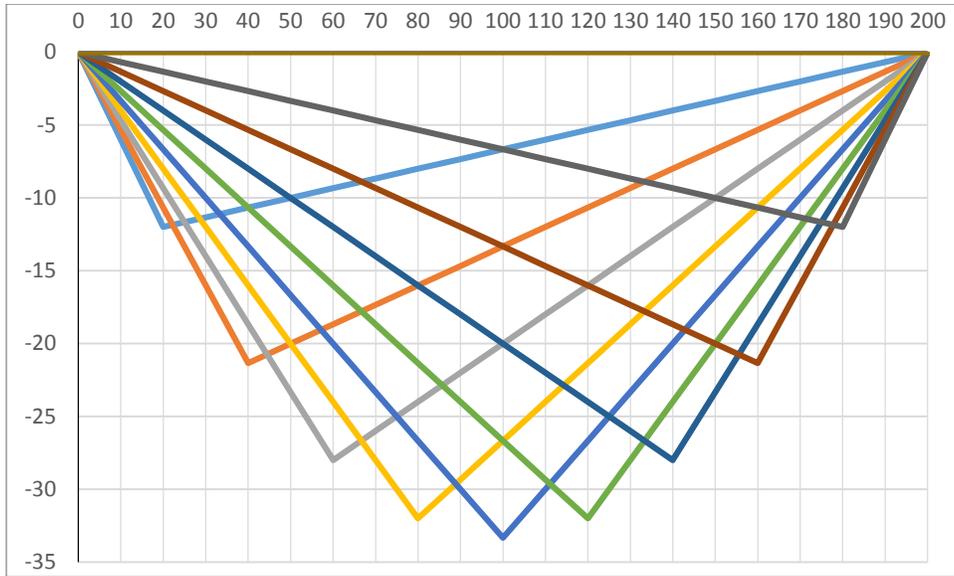


Figure 46: Ligne d'influence des efforts dans la membrure supérieure du sous-système2

Pour les membrures inférieures, la fonction d'influence des efforts est donnée par :

$$F_{Mii} = \begin{cases} \frac{(L-x) \cdot \alpha}{h \cdot L} & \text{si } \alpha \leq x \\ \frac{(L-\alpha) \cdot x}{h \cdot L} & \text{si } \alpha \geq x \end{cases}$$

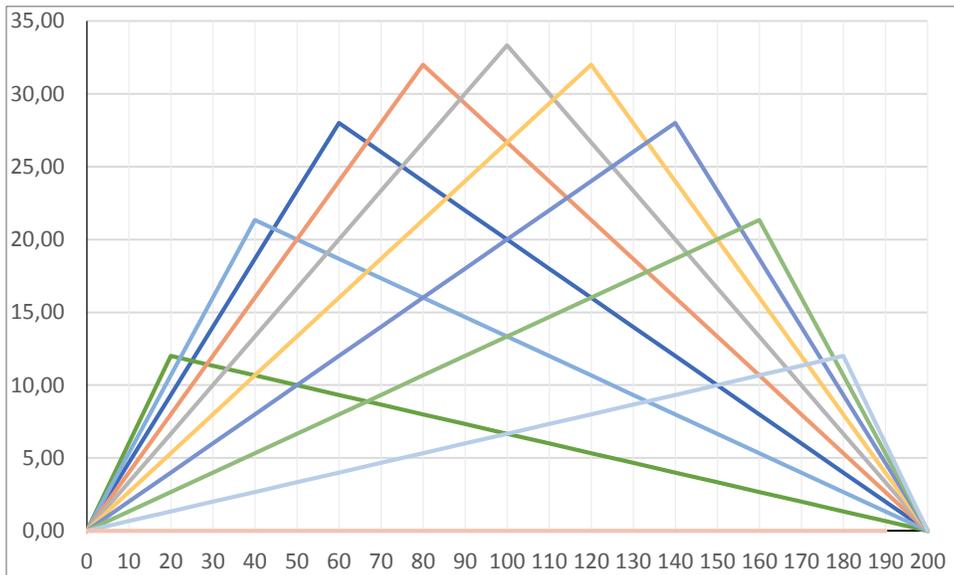


Figure 47: Ligne d'influence des efforts dans la membrure inférieure du sous-système2

Pour les diagonales, la fonction d'influence des efforts est donnée par :

$$F_{Di} = \begin{cases} \frac{\alpha}{L \cdot \cos\theta} \text{ si } \alpha \leq x \\ \left(1 - \frac{\alpha}{L}\right) \frac{1}{\cos\theta} \text{ si } \alpha \geq x \end{cases}$$

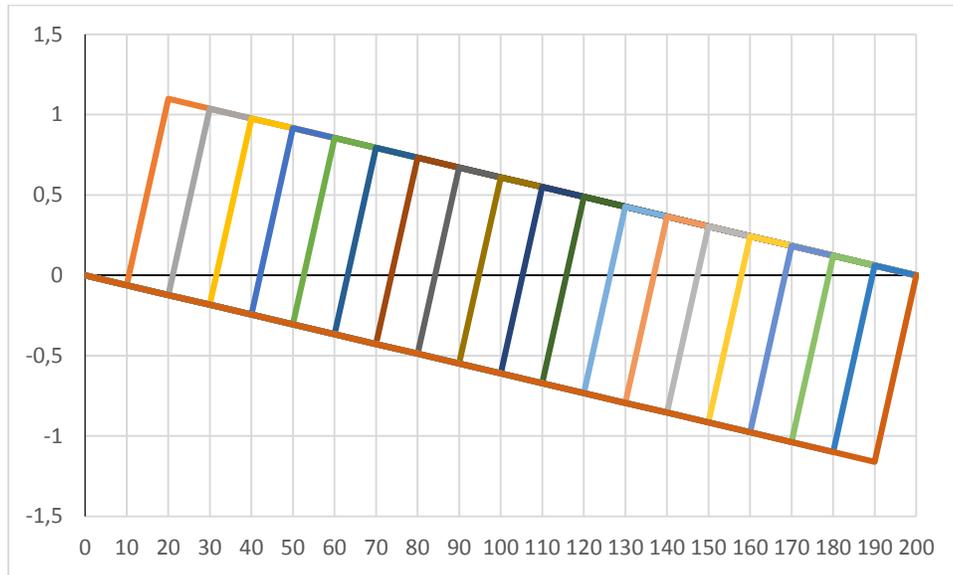


Figure 48 : Ligne d'influence des efforts dans les diagonales du sous-système2

I. 2. Calcul des sollicitations

I. 2. 1. Hypothèses

Le calcul consiste à déterminer les sollicitations dans les différents éléments du pont.

Désignons, par A et B, les naissances de l'arc ;

Par A' et B' les projections de A et B sur la poutre ;

Par C et D, les extrémités de la poutre, comme illustrés dans la figure 41 ;

Par θ , l'angle que fait la tangente d'un point d'abscisse x de l'arc avec

l'horizontale ;

Par $L = 240$ m la longueur de la poutre et $l = 200$ m l'ouverture de l'arc ;

Par $\Delta\theta$ la variation de température ;

Par α le coefficient de dilatation thermique linéaire ;

Par M' , le moment fléchissant de l'arc ;

Par M'' , le moment fléchissant de la poutre ;

Par N' , l'effort normal de l'arc ;

Par N'' , l'effort normal de la poutre ;

Par V' , l'effort tranchant de l'arc ;

Par V'' , l'effort tranchant de la poutre ;

Par E , le module d'élasticité longitudinale de l'acier constituant l'arc et la poutre ;

Par I' , S' et I'' , S'' les moments d'inerties et les sections réduits, respectivement, de l'arc et de la poutre et $I = I' + I''$;

Par Γ' , R' , Q' et Γ'' , R'' les composantes de la réaction complémentaire de l'appui de gauche, respectivement, de l'arc et de la poutre ;

Par v' , u' , w' et v'' , u'' , w'' les déplacements verticales, déplacements horizontales et rotations respectives de l'arc et de la poutre ;

Par $\mu(x)$ le moment fléchissant en travée produit par les charges dans la poutre indépendante de portée L ;

Par $\nu(x)$ le moment fléchissant produit par les efforts de traction des suspentes dans une poutre sur appuis simples de portée l ;

La ligne moyenne de l'arc, de flèche 30m et d'ouverture 200m, est supposée décrire un parabole régulière d'équation :

$$y = \frac{3}{1000} x(200 - x) .$$

Nous allons adopter les deux systèmes sus cités pour la détermination des sollicitations.

I. 2. 2. Calcul des sollicitations dans le sous-système 1 (figure41)

Le système est assimilé à une poutre continue reposant sur des appuis simples. Pour le calcul des sollicitations dans cette poutre, nous allons utiliser l'équation des trois moments (de CLAPEYRON).

I. 2. 2.1. Moments fléchissant

On a l'expression suivante pour obtenir $M(x)$, le moment en travée de la poutre continue :

$$M(x) = \mu_1(x) + M_g + \frac{M_d - M_g}{l_i} . x$$

Avec, $\mu_1(x)$: moment isostatique de la travée considérée ;

M_g, M_d : Moment aux appuis respectivement de gauche et de droite de la travée ;

l_i : longueur de la travée.

M_g et M_d sont obtenue en appliquant l'équation des trois moments à la poutre continue :

Soit l'appui i , l'appui de référence,

$$M_{i-1} \cdot l_{i-1} + 2(l_{i-1} + l_{i+1})M_i + M_{i+1} \cdot l_{i+1} = -6 \cdot E \cdot I'' \cdot (\omega_i^d - \omega_i^g)$$

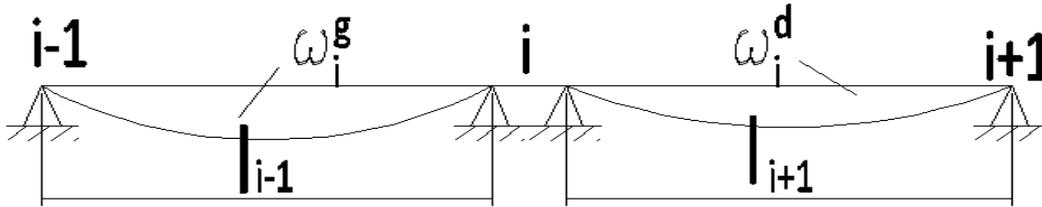


Figure 49 : Méthode des trois moments sur poutre continue

En considérant successivement les 4 appuis centraux comme appuis de référence, et en remplaçant l'encastrement en A' par deux appuis simples A'_1 et A'_2 , avec longueur de la travée $l_{A'_1 A'_2} = 0$; on a les 5 équations suivantes pour déterminer les moments aux appuis,

$$\begin{cases} 16 \cdot M_E + 4 \cdot M_F = -6E \cdot I'' \cdot (\omega_E^d - \omega_E^g) \\ 4 \cdot M_E + 16 \cdot M_F + 4 \cdot M_G = -6E \cdot I'' \cdot (\omega_F^d - \omega_F^g) \\ 4 \cdot M_F + 16 \cdot M_G + 4 \cdot M_H = -6E \cdot I'' \cdot (\omega_G^d - \omega_G^g) \\ 4 \cdot M_G + 16 \cdot M_H + 4 \cdot M_{A'_1} = -6E \cdot I'' \cdot (\omega_H^d - \omega_H^g) \\ 4 \cdot M_G + 16 \cdot M_H + 4 \cdot M_{A'_1} = -6E \cdot I'' \cdot (\omega_H^d - \omega_H^g) \\ 4 \cdot M_H + 4 \cdot M_{A'_1} = -6E \cdot I'' \cdot (\omega_{A'_1}^d - \omega_{A'_2}^g) \end{cases}$$

Avec ω_-^d et ω_-^g dépendent du mode de chargement de la travée à droite ou à gauche.

- Pour le cas de la charge permanente $g = 22,63\text{kN/ml}$, nous avons les équations de trois moments suivantes pour la poutre fictive :

$$\begin{cases} 16 \cdot M_E + 4 \cdot M_F = -\frac{6}{4} \cdot \left(2 \cdot 2 \cdot \frac{g \cdot l_i^2}{8} \cdot \frac{l_i}{3} \right) \\ 4 \cdot M_E + 16 \cdot M_F + 4 \cdot M_G = -\frac{6}{4} \cdot \left(2 \cdot 2 \cdot \frac{g \cdot l_i^2}{8} \cdot \frac{l_i}{3} + 2 \cdot 2 \cdot \frac{g \cdot l_i^2}{8} \cdot \frac{l_i}{3} \right) \\ 4 \cdot M_F + 16 \cdot M_G + 4 \cdot M_H = -\frac{6}{4} \cdot \left(2 \cdot 2 \cdot \frac{g \cdot l_i^2}{8} \cdot \frac{l_i}{3} + 2 \cdot 2 \cdot \frac{g \cdot l_i^2}{8} \cdot \frac{l_i}{3} \right) \\ 4 \cdot M_G + 16 \cdot M_H + 4 \cdot M_{A'_1} = -\frac{6}{4} \cdot \left(2 \cdot 2 \cdot \frac{g \cdot l_i^2}{8} \cdot \frac{l_i}{3} + 2 \cdot 2 \cdot \frac{g \cdot l_i^2}{8} \cdot \frac{l_i}{3} \right) \\ 4 \cdot M_H + 4 \cdot M_{A'_1} = -\frac{6}{4} \cdot \left(2 \cdot 2 \cdot \frac{g \cdot l_i^2}{8} \cdot \frac{l_i}{3} \right) \end{cases}$$

Avec, $l_i = 4\text{m}$: la portée des autres travées.

En résolvant ces équations, nous avons les moments aux appuis, dus à la charge permanente g , donnés dans le tableau suivant :

Tableau 31: Expressions des moments aux appuis de gauche et de droite des travées soumises aux charges permanentes

Travées	CE	EF	FG	GH	HA'
M_g [kN/ml]	0	-38,2	-28	-30,7	-30
M_d [kN/ml]	-38,2	-28	-30,7	-30	-30,2
$\mu_1(x)=$	$\mu_1(x) = g \cdot \frac{x}{2} \cdot (l - x)$				
	$22,6 \cdot \frac{x}{2} \cdot (4 - x)$				

Les moments en travées sont obtenus par l'expression suivante :

$$M(x) = 11,3 \cdot x(4 - x) + M_g + \frac{M_d - M_g}{4} \cdot x$$

L'application de cette expression nous donne les résultats dans le tableau suivant :

Tableau 32: Expression du moment dû aux charges permanentes en travée dans le sous-système 1

Travées		Moments M [kNm]
CE	M''_{CE}	$-11,3x^2 + 35,65x$
EF	M''_{EF}	$-11,3x^2 + 47,75x - 38,2$
FG	M''_{FG}	$-11,3x^2 + 44,525x - 28$
GH	M''_{GH}	$-11,3x^2 + 45,375x - 30,7$
HA'	M''_{HA}	$-11,3x^2 + 45,15x - 30$

- Pour la surcharge de chaussée UDL et la surcharge de trottoir q_{fk} : $UDL + q_{fk} = 28,8$ kN/ml, en passant par cette même méthode, nous avons les résultats suivants :

Tableau : Expressions du moment aux appuis de gauche et de droite des travées soumises à la surcharge de chaussée UDL + $q_{fk} = 28,8$ kN/ml

Travées	CE	EF	FG	GH	HA'
M_g [kN/ml]	0	-48,7	-35,6	-39,1	-38,2
M_d [kN/ml]	-48,7	-35,6	-39,1	-38,2	-38,5
$\mu_1(x) =$	$\mu_1(x) = q \cdot \frac{x}{2} \cdot (l - x)$				
	$\mu_1(x) = 14,4x \cdot (4 - x)$				

Le moment réel est :

$$M(x) = 14,4x \cdot (4 - x) + M_g + \frac{M_d - M_g}{4} \cdot x$$

Tableau 33 : Expression du moment dû à la surcharge de chaussée UDL + q_{fk} en travée dans le sous-système 1

Travées	Moments M [kNm]	
CE	M_{CE}	$- 14,4 x^2 + 45,425 x$
EF	M_{EF}	$- 14,4 x^2 + 60,875 x - 48,7$
FG	M_{FG}	$- 14,4 x^2 + 56,725 x - 35,6$
GH	M_{FG}	$- 14,4 x^2 + 57,825 x - 39,1$
HA'	M_{GH}	$- 14,4 x^2 + 57,5x - 38,2$

- Pour le cas de la surcharge mobile TS, avec la position défavorable déduite précédemment, nous avons les valeurs suivantes :

Tableau 34 : Expression des moments de gauche et de droite des travées de la poutre soumise à la surcharge TS

Travées	CE	EF	FG	GH	HA
M_g [kNm]	0	2,64	-10,6	39,6	-147,8
M_d [kNm]	2,64	-10,6	39,6	-147,8	-403,8
$\mu_1(x)$ [kNm]	0				$\begin{cases} 350 \cdot x, & \text{pour } 0 \leq x \leq 1,4 \\ 490 & \text{pour } 1,4 \leq x \leq 2,6 \\ 350 \cdot (4 - x) & \text{pour } 2,6 \leq x \leq 4 \end{cases}$

Le moment réel est :

$$M(x) = \mu_1(x) + M_g + \frac{M_d - M_g}{4} \cdot x$$

Tableau 35 : Expression du moment réel dû à la surcharge TS en travée dans le sous-système I

Travées	Moments M[kNm]	
CE	M_{CE}	0,66 x
EF	M_{EF}	-3,31x + 2,64
FG	M_{FG}	12,55x - 10,6
GH	M_{GH}	-46,85 x + 39,6
HA'	M_{HA}	$\begin{cases} 286x - 147,8 \text{ pour } 0 \leq x \leq 1,4 \\ -64x + 342,2 \text{ pour } 1,4 \leq x \leq 2,6 \\ -414x + 1252,2 \text{ pour } 2,6 \leq x \leq 4 \end{cases}$

I. 2. 2.2. Effort tranchant

L'effort tranchant V'' est obtenu en dérivant le moment fléchissant par rapport à x :

$$V = \frac{d M(x)}{dx}$$

Ainsi, les valeurs de l'effort tranchant dans le tableau suivant,

Tableau 36 : Effort tranchant V[kN] de la poutre dans le sous-système I

Chargements		G		Udl + qfk	TS
Travées	CE	V_{CE}	-22,6x + 35,65	- 28,8 x + 45,425	0,66
	EF	V_{EF}	-22,6x + 47,75	- 28,8 x + 60,875	-3,31
	FG	V_{FG}	-22,6x + 44,525	- 28,8 x + 56,725	12,55
	GH	V_{GH}	-22,6x + 45,375	- 28,8 x + 57,825	-46,85
	HA'	V_{HA}	-22,6x + 45,15	- 28,8 x + 57,5	$\begin{cases} 286 \text{ pour } 0 \leq x \leq 1,4 \\ -64 \text{ pour } 1,4 \leq x \leq 2,6 \\ -414 \text{ pour } 2,6 \leq x \leq 4 \end{cases}$

I. 2. 2.2. Réactions aux appuis

Puisque la poutre est supposée s'appuyer sur des appuis simples, il n'y a que des réactions verticales à ses appuis.

Les réactions aux appuis sont obtenues par la formule suivante :

$$R_i = R_g + R_d + \frac{M_{i-1} - M_i}{l_i} + \frac{M_{i+1} - M_i}{l_{i+1}}$$

Avec, R_g : réaction isostatique de l'appui de gauche ;

R_d : réaction isostatique de l'appui de droite ;

l_i : longueur de la travée à gauche de l'appui i ;

l_{i+1} : longueur de la travée de droite de l'appui i ;

M_i : moment réel de l'appui i ;

M_{i-1} : moment de l'appui de gauche ;

M_{i+1} : moment de l'appui de droite.

Les résultats pour les différents cas de chargement sont récapitulés dans le tableau suivant :

Tableau 37 : Réactions des appuis de la poutre

Cas de chargement	Appuis	C et D	E et L	F et K	G et J	H et I
Charge permanente g	Réaction maximale R_{\max} [kN]	53,4	0	2 050	0	29 830
	Réaction minimale R_{\min} [kN]	0	-636,8	0	-8 106	0
Charge de trafic UDL+ q_{fk}	R_{\max} [kN]	0	811,5	0	10 329	0
	R_{\min} [kN]	-68	0	-2 612	0	-38 013
Charge de trafic TS	R_{\max} [kN]	569,4	673,2	668,6	2 195	669
	R_{\min} [kN]	-48,9	-78,7	-585,3	-102,7	-8 191

I. 2. 3. Calcul des sollicitations dans le sous-système 2 (figure 42)

Pour ce tronçon, nous avons les équations des moments suivantes :

$$M'(x) = v(x) + \Gamma' + R' \cdot x - Q \cdot y$$

$$M''(x) = \mu(x) - v(x)$$

Entre les points A et B, on suppose que les suspentes sont assez rapprochées pour que les déplacements v' de l'arc soient égaux aux déplacements v'' de la poutre.