

# Circuits eulériens

## 1. Introduction

Sept ponts enjambent Königsberg (fig1) reliant quatre quartiers de la ville, les habitants se demandent s'il existe un trajet leur permettant d'emprunter une seule fois tous les ponts. Euler modélise le problème (fig2) et œuvre ainsi une théorie en 1736.

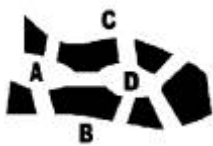


figure 1

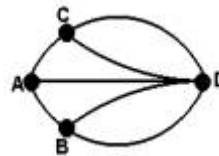


figure 2

Les quartiers sont les sommets du graphe, les ponts les arêtes. On a quatre sommets de degré 3 et l'ordre du graphe est de 4.

Le problème posé induit deux questions :

- Existe-t-il un trajet partant d'un point donné, passant par toutes les arêtes (arcs) une et une seule fois dans un même sens (chemin eulérien).
- Existe-t-il un chemin eulérien revenant au point de départ (circuit eulérien)

La réponse a été fournie en 1736 par le mathématicien Euler à travers le théorème 2.1, qui suffit pour détecter un chemin ou circuit eulérien dans un graphe.

**Définition 1.1.** Une chaîne d'un graphe orienté  $G=(S,A)$  est une séquence d'arcs :  $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$  ;  $a_i \in A \forall i=1,2,\dots, n$  ; telle que chaque arc  $a_i$  ait une extrémité commune avec l'arc précédent  $a_{i-1}$ . Le premier arc  $a_1$  est l'arc initial tandis que le dernier arc  $a_n$  est le final.

**Définition 1.2.** Une chaîne (un chemin) est eulérienne si elle (s'il) est simple et passe par toutes les arcs d'un graphe. Si les extrémités initiale et finale coïncident on a un cycle (un circuit) eulérien. Un graphe qui possède une chaîne (un chemin) eulérienne est semi-eulérien s'il contient cycle (chemin) eulérien il est **eulérien**.

## 2. Théorèmes de caractérisation de circuit Eulérien.

**Théorème 2.1.** Soit  $G : (A, S)$  un graphe à  $n$  sommets, alors  $G$  admet un chemin eulérien si et seulement si  $G$  est connexe et possède 2 sommets de degrés impaire ; ou alors admet un circuit eulérien si  $G$  est connexe et possède 0 sommet degré impair.

**Preuve.** Nous montrons la première implication ( $\Rightarrow$ )

Comme  $G$  est eulérien, il contient un chemin  $N_e$  passant une seule fois par tous les arcs (arêtes) et au moins une fois par tous les sommets. En conséquences, il est connexe.

Dans ce chemin  $N_e$ , tout sommet intermédiaire est de degré impaire pour chaque passage au niveau d'un tel sommet implique 2 arcs, l'aller et le retour. Les sommets intermédiaires sont de degré paire.

Les extrémités initiale et finale du chemin  $N_e$  sont de degré 0.

Le chemin est un circuit et de degré impaire si le chemin est non fermé.

Pour montrer l'implication ( $\Leftarrow$ ) nous raisonnons par induction :

pour  $n=2$ , le cas est trivial. Les deux sommets sont de degré impaire .

pour  $n=3$ , soit  $G$  est un triangle donc tous les sommets degré 2.

Et soit  $G$  possède deux arcs avec deux sommets de degré impaire

Supposons l'hypothèse d'induction vraie pour tout graphe  $n-1$  sommets ,et démontrons la pour  $n$  sommets .

Soit  $v_0$  un sommet du graphe  $G$  qui un des deux sommets de degré impaire si  $G$  en possède Considérons tous les arcs allant de  $\{v_0\}$  à  $S - \{v_0\}$  et un chemin contenant tous ces arcs .

Ce chemin existe car  $G$  est connexe. Le chemin est un circuit si  $v_0$  et degré pair .Enlevons ce chemin  $N_0$  du graphe ; le graphe résultant  $G_0$  est connexe et possède 0 ou 2 sommets de degré impaire. Il satisfait l'hypothèse d'induction car possède moins de  $n-1$  sommets. En conséquence ;  $G_0$  possède un chemin eulérien .Il suffit d'y adjoindre le chemin  $N_0$  pour obtenir un chemin eulérien de  $G$ . Ce chemin est un circuit s'il est fermé et possède 0 sommet de degré impaire.

### Algorithme de circuit eulérien.

\_\_\_\_\_Construction d'un circuit eulérien\_\_\_\_\_

Initialisation

Choisir un sommet  $v_1 \in S$

Construire un circuit noté commençant par  $v_1$

Il suffit à partir de  $v_1$  ajouter successivement des arcs jusqu'à trouver  $v_1$

Poser  $H = G - C$

Tant que  $H$  pose de un arc faire

Déterminer un sous circuit noté SC dans  $H$

Poser  $H = H - SC$  et faire  $C = C \cup SC$

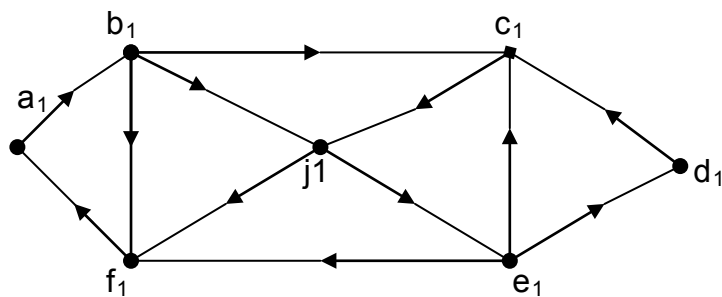
Fin tant que

**Théorème 2.2.** Un graphe connexe est eulérien si et seulement si pour tout sommets  $v$  de  $G$ , on a :  $d^+(v) = d^-(v)$ .

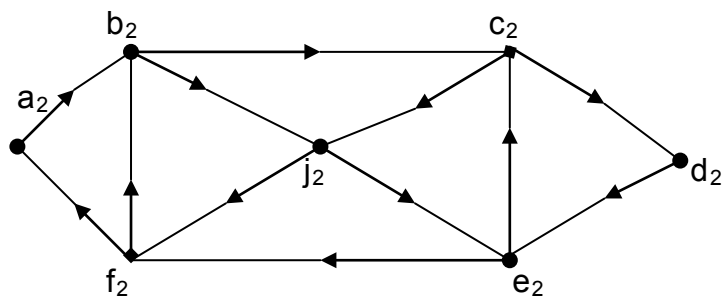
**Preuve.** La preuve devient pluviale car, on voit que pour tout sommet  $v$  le degré est forcément pair du fait que  $d(v) = d^+(v) + d^-(v) = 2d^+(v) = 2d^-(v)$

**Exemple .**  $G_1$  est non eulérien car  $d^-(b_1) = 3 \neq d^+(b_1) = 1$ .

$G_2$  vérifie le théorème 2.2, le circuit est :  $\{f_2, a_2, b_2, j_2, e_2, c_2, d_2, e_2, f_2, b_2, c_2, j_2, f_2\}$



$G_1$



$G_2$

figure 3

### 3. Approche matricielle

**Théorème 3.1.** Soit  $G=(S,A)$  un graphe orienté,  $S=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ,  $M=(a_{ij})_{n \times n}$  sa matrice d'incidence alors  $G$  est eulérien si et seulement si :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

**Preuve.**  $(\Rightarrow)$   $G$  contient un circuit eulérien alors d'après le théorème 2.2  $d^+(a_i) = d^-(a_i) \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$  or :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{\substack{j=1 \\ a_{ij} \leq 0}}^n a_{ij} + \sum_{\substack{j=1 \\ a_{ij} \geq 0}}^n a_{ij} = d^+(a_i) - d^-(a_i) = 0$$

$$(\Leftarrow) \text{ Si } \sum_{j=1}^n a_{ij} = 0 \text{ alors } \sum_{\substack{j=1 \\ a_{ij} \leq 0}}^n a_{ij} + \sum_{\substack{j=1 \\ a_{ij} \geq 0}}^n a_{ij} = d^+(a_i) - d^-(a_i) = 0$$

d'où  $d^+(a_i) = d^-(a_i) \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$  donc  $G$  est eulérien d'après le théorème 2.2.

**Proposition .** Soit  $G=(S,A)$  un graphe orienté,  $S=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ,  $M=(a_{ij})_{n \times n}$  sa matrice d'incidence alors :

$$\sum_{j=1}^n |a_{ij}| = d(a_i)$$

**Preuve.**  $|a_{ij}| = 1$  si  $(a_i, a_j) \in A$  ou  $(a_j, a_i) \in A$ . D'où

$$\sum_{j=1}^n |a_{ij}| = 2 \sum_{\substack{j=1 \\ a_{ij} \geq 0}}^n a_{ij} + \sum_{\substack{j=1 \\ a_{ij} < 0}}^n (-a_{ij}) = 2d^+(a_i) = d(a_i)$$

## Algorithme de circuit eulérien à l'aide de la matrice d'incidence.

\_\_\_\_\_Existence et détermination de circuit Eulérien \_\_\_\_\_  
G =(S, A) un graphe orienté tels que  
S ={1,2, ...,N}

1. Détermination de la matrice d'incidence  $(M_{ij}); i \in S ; j \in S$  de G

2. Existence de circuit Eulérien

Si  $\sum_{j=1}^N M_{ij} = 0 \quad \forall i \in \{1,2,...,N\}$  alors G contient un circuit Eulérien

3. Détermination des degrés de sommets

$$\sum_{j=1}^N |M_{ij}| = d(i)$$

4. Posons  $\text{Max } d(i) = d_{\max} \quad \forall i \in \{1,2,...,N\}$

5. Détermination du circuit

a) On choisit i tel que  $d(i) = d_{\max}$

b) Ligne i on cherche j tel que  $M(i,j)=1$  et on utilise le chemin (i,j)

Pour le circuit non parcouru  $d(i) = d_{\max} - 1$

Ligne j on cherche k tel que  $M(j, k)=1$  et on utilise le chemin (i, j,k)

Si  $k=i$  :

-Si pour le circuit non parcouru  $d(i) = 0$  Fin

-Si non recommencer b)

Fin tant que

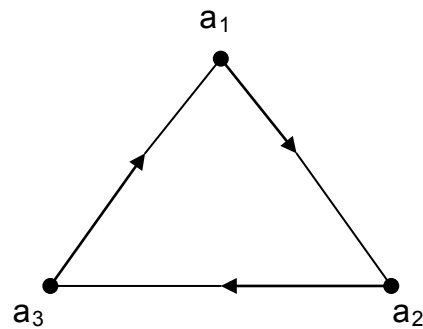
---

### Application.

$G=(S,A)$  ;  $n$  =nombre de sommets ;  $m$  =nombre d'arcs.

**Exemple1.**  $n=3$  ;  $m=3$ .

1.



G

M =

|       | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $\sum a_{ij}$ | $\sum_{j=1}^3  M_{ij} $ |
|-------|-------|-------|-------|---------------|-------------------------|
| $a_1$ | 0     | 1     | -1    | 0             | 2                       |
| $a_2$ | -1    | 0     | 1     | 0             | 2                       |
| $a_3$ | 1     | -1    | 0     | 0             | 2                       |

2.  $\sum_{j=1}^3 |a_{ij}| = 0$  donc G contient un circuit Eulérien

3.  $d_{\max} = 1$  ou 2 ou 3

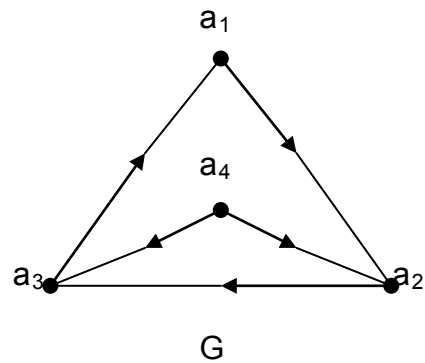
5.  $a_{12} = 1$  on utilise le chemin  $a_1 \rightarrow a_2$

$a_{23} = 1$  on utilise le chemin  $a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow a_3$

$a_{31} = 1$  on utilise le chemin  $a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow a_3 \rightarrow a_1$  on retrouve  $a_1$  donc on passe au  
tous les arcs ont été parcourus si oui le circuit cherché est :

$a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow a_3 \rightarrow a_1$

**Exemple2.**  $n=4$  ;  $m = 5$

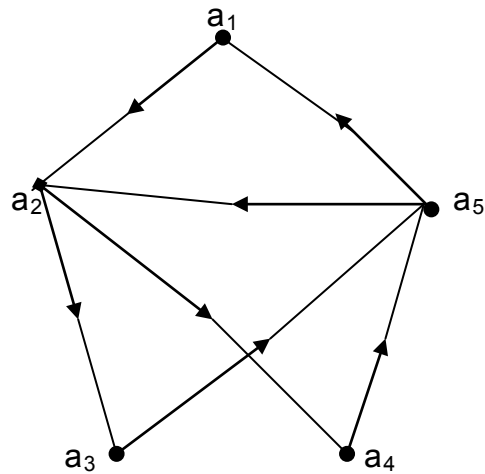


M =

|       | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $\sum a_{ij}$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|---------------|
| $a_1$ | 0     | 1     | -1    | 0     | 0             |
| $a_2$ | -1    | 0     | 1     | -1    | -1            |
| $a_3$ | 1     | -1    | 0     | -1    | -1            |
| $a_4$ | 0     | 1     | 1     | 0     | 2             |

$\sum_{j=1}^n a_{ij} \neq 0 \forall i \in \{1,2,\dots,N\}$  donc G ne contient pas de circuit Eulérien.

**Exemple 3.**  $n = 5$  ;  $m = 7$



G

|       | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $\sum a_{ij}$ | $\sum_{j=1}^n  a_{ij} $ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|---------------|-------------------------|
| $a_1$ | 0     | 1     | 0     | 0     | -1    | 0             | 2                       |
| $a_2$ | -1    | 0     | -1    | 1     | 1     | 0             | 4                       |
| $a_3$ | 0     | 1     | 0     | 0     | -1    | 0             | 2                       |
| $a_4$ | 0     | -1    | 0     | 0     | 1     | 0             | 2                       |
| $a_5$ | 1     | -1    | 1     | -1    | 0     | 0             | 4                       |

$\sum_{j=1}^n a_{ij} = 0 \quad \forall i \in \{1,2,3,4,5\}$  donc G est eulerien.

$d_{\max} = d(a_2)$  ou  $d(a_5)$  on choisit  $a_2$

$a_{24} = 1$  on utilise le chemin  $a_2 \rightarrow a_4$

$a_{45} = 1$  on utilise le chemin  $a_2 \rightarrow a_4 \rightarrow a_5$

$a_{51} = 1$  on utilise le chemin  $a_2 \rightarrow a_4 \rightarrow a_5 \rightarrow a_1$

$a_{12} = 1$  on utilise le chemin  $a_2 \rightarrow a_4 \rightarrow a_5 \rightarrow a_1 \rightarrow a_2$

on retrouve  $a_2$  mais  $d(a_2)$  restant n'est pas nul, on continue

$a_{23} = 1$  on utilise le chemin  $a_2 \rightarrow a_4 \rightarrow a_5 \rightarrow a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow a_3$

$a_{35} = 1$  on utilise le chemin  $a_2 \rightarrow a_4 \rightarrow a_5 \rightarrow a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow a_3 \rightarrow a_5$

$a_{52} = 1$  on utilise le chemin  $a_2 \rightarrow a_4 \rightarrow a_5 \rightarrow a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow a_3 \rightarrow a_5 \rightarrow a_2$

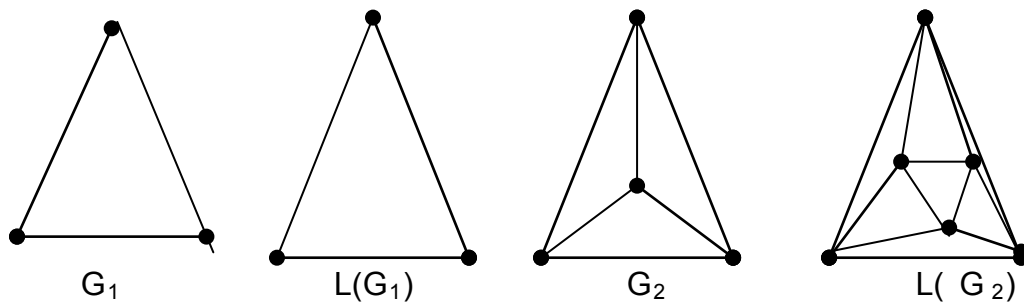
Qui est le circuit recherché car  $d(a_2)$  restant est maintenant nul,



#### 4. Liens entre cycles Hamiltoniens et Eulériens

**Définition 4.1.** Soit  $G = (S, A)$  un graphe non orienté, on appelle graphe ligne de  $G$  noté par  $L(G)$  un graphe dont les sommets correspondent un à un avec des arêtes de  $G$ .

**Exemple 4.1.**



**Proposition 4.1.** Soit  $G$  est eulérien alors  $L(G)$  est hamiltonien et eulérien

**Preuve.** Soit  $G = (S, A)$  et  $L(G) = (S', A')$

Si  $G$  est eulérien tous ces arêtes sont parcourues une et une seule fois d'où tous les sommets de  $L(G)$  sont parcourus une et une seule fois donc  $L(G)$  est hamiltonien.

$\forall u \in A \exists a, b \in S$  tel que  $u = (a, b)$

$\forall u \in A \exists v \in S'$  et  $\forall v \in S' \exists u \in A$

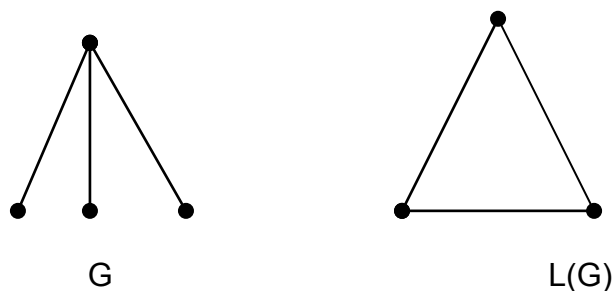
on a  $d(v) = d(a) + d(b)$

$G$  est eulérien donc  $d(a) = 2k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) ;  $d(b) = 2k'$  ( $k' \in \mathbb{N}$ ) donc  $v \in S'$  on a  $d(v) = 2(k+k')$

d'où  $L(G)$  est eulérien .

**Remarque** .La réciproque de ce théorème est fausse, car dans l'exemple suivant  $L(G)$  est eulérien et  $G$  ne l'est pas .

**Exemple 4.2.**  $L(G)$  est eulérien et hamiltonien mais  $G$  est non hamiltonien



## Conclusion générale :

L'étude des problèmes eulériens ou hamiltoniens remonte aux origines de la théorie des graphes.

L'intérêt porté aujourd'hui à ces problèmes s'explique par leurs applications nombreuses comme les tournées de distribution (« postier chinois », « voyageur de commerce »), tracé automatique sur l'ordinateur, problèmes d'ordonnances d'ateliers, etc....

Les domaines d'applications seraient plus intéressants dans le chapitre des couplages et des problèmes polynomiaux. On peut dire que cette partie est un outil essentiel, presque indispensable dans la résolution des problèmes en théorie des graphes. On remarque que la plupart des conditions suffisantes pour qu'un graphe soit hamiltonien font intervenir les degrés, néanmoins on a cité d'autres sur le nombre de connexité et le nombre de stabilité. Dans cet mémoire après avoir cité ces dernières nous avons travaillé directement sur les arêtes avec une méthode constructive en fin d'obtenir des propositions nécessaires et suffisantes très simples. Ces propositions ouvre une nouvelle méthode appelée << théorie des opposés >> qui ne se limite pas seulement sur la caractérisation oui ou non d'un graphe hamiltonien mais va jusqu'à la détermination du nombre de cycle hamiltonien contenu dans un graphe.

Sur les graphes eulérien différemment des graphes hamiltoniens le travail a été bouclé par le père de la théorie des graphes Euler en 1736 en donnant un théorème nécessaire et suffisant. Mais l'algorithme de détermination était trop générale et ne permettait pas d'obtenir rapidement un circuit eulérien contenu dans un graphe cause pour laquelle on a proposé dans la mémoire une autre algorithme très facile à manier avec l'aide des matrices d'incidences.

Il reste maintenant à développer cette matière dans l'enseignement général car elle demeure inconnue jusqu'en 3<sup>e</sup> cycle sinon dans les écoles de formations professionnelles en télécommunication et en informatique.

Toutefois on l'utilise dans beaucoup de cas sans le savoir la théorie des graphes est un grand champ de recherche.