

Certification et pilotage des stratégies de couplage non-intrusif

Outils de vérification basés sur les résidus d'équilibre pondérés

Sommaire

7.1	Méthode des résidus pondérés dans le cadre du couplage non-intrusif	80
7.1.1	Formulation faible du couplage pour l'estimation d'erreur	80
7.1.2	Estimateur d'erreur en résidus pour un problème couplé	80
7.2	Stratégie d'adaptation	81
7.2.1	Définition des indicateurs d'erreur	81
7.2.2	Implémentation des indicateurs d'erreur	82
7.2.3	Procédure d'adaptation	83

Dans ce chapitre, nous établissons l'estimation d'erreur sur une quantité d'intérêt (introduite dans le chapitre 3) à partir de la méthode des résidus d'équilibre pondérés pour le couplage global-local non-intrusif. Nous montrons qu'il est possible de séparer l'estimateur d'erreur en plusieurs indicateurs d'erreur permettant de mettre en évidence les erreurs venant du modèle grossier choisi pour le couplage, du raffinement des maillages et du nombre d'itérations afin d'adapter la définition du couplage vis-à-vis d'une quantité d'intérêt, ce qui permet de calculer juste au juste coût. En outre, nous montrons l'utilisation d'un couplage non-intrusif s'avère être bénéfique pour le calcul des différents indicateurs d'erreur. Ces travaux font l'objet de l'article [157].

7.1 Méthode des résidus pondérés dans le cadre du couplage non-intrusif

7.1.1 Formulation faible du couplage pour l'estimation d'erreur

Sur l'exemple des notations introduites pour le problème de référence dans (3.2) et (3.3), nous introduisons les notations suivantes dans le cas d'un problème couplé :

$$\begin{aligned} a_L(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega_L} \mathcal{K} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) \quad ; \quad a_{0\Omega}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathcal{K}_0 \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) \quad ; \\ a_{0L}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega_L} \mathcal{K}_0 \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) \quad ; \\ b_{\Gamma}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}) &= \int_{\Gamma} \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{u} \quad ; \quad l_L(\mathbf{v}) = \int_{\Omega_L} \mathbf{f}_d \cdot \mathbf{v} \quad ; \quad l_0(\mathbf{v}) = \int_{\Omega_0} \mathbf{f}_d \cdot \mathbf{v} + \int_{\partial_F \Omega} \mathbf{F}_d \cdot \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (7.1)$$

En prenant en compte le schéma de résolution par point fixe, la formulation faible à l'itération n découlant de (2.14-2.10) s'écrit :

trouver $(\mathbf{u}_G^{H(n)}, \mathbf{u}_L^{h(n)}, \boldsymbol{\lambda}^{h(n)}) \in \mathcal{V}^H \times \mathcal{V}_L^h \times \mathcal{M}^h$ tel que

$$\begin{aligned} &a_{0\Omega}(\mathbf{u}_G^{H(n)}, \mathbf{v}_G^H) + a_L(\mathbf{u}_L^{h(n)}, \mathbf{v}_L^h) - b_{\Gamma}(\boldsymbol{\lambda}^{h(n)}, \mathbf{v}_L^h) + b_{\Gamma}(\boldsymbol{\mu}^h, \mathbf{u}_L^{h(n)} - \mathbf{u}_G^{H(n)}) \\ &= l_0(\mathbf{v}_G^H) + l_L(\mathbf{v}_L^h) + a_{0L}(\mathbf{u}_G^{H(n-1)}, \mathbf{v}_G^H) - b_{\Gamma}(\boldsymbol{\lambda}^{h(n-1)}, \mathbf{v}_G^H) \\ &\quad \forall (\mathbf{v}_G^H, \mathbf{v}_L^h, \boldsymbol{\mu}^h) \in \mathcal{V}^H \times \mathcal{V}_L^h \times \mathcal{M}^h, \end{aligned} \quad (7.2)$$

où $\mathcal{V}^H, \mathcal{V}_L^h$ et $\mathcal{M}^h$, sont les espaces EF associés respectivement aux maillages τ^H sur Ω et τ^h sur Ω_L .

Cette formulation faible à l'itération n peut être réécrite de façon condensée comme suit :

$$\begin{aligned} &a_{LG}^{(n)}((\mathbf{u}_G^{H(n)}, \mathbf{u}_L^{h(n)}, \boldsymbol{\lambda}^{h(n)}), (\mathbf{v}_G^H, \mathbf{v}_L^h, \boldsymbol{\mu}^h)) = l_{LG}^{(n)}(\mathbf{v}_G^H, \mathbf{v}_L^h, \boldsymbol{\mu}^h) \\ &\quad \forall (\mathbf{v}_G^H, \mathbf{v}_L^h, \boldsymbol{\mu}^h) \in \mathcal{V}^H \times \mathcal{V}_L^h \times \mathcal{M}^h. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Cela permet de déterminer la solution approchée de type Dirichlet $\mathbf{u}_{LG}^{hH(n)} \in \mathcal{V}$ disponible dans le calcul et définie ainsi :

$$\mathbf{u}_{LG}^{hH(n)} = \begin{cases} \mathbf{u}_L^{h(n)} & \text{in } \Omega_L \\ \mathbf{u}_G^{H(n)} & \text{in } \Omega_0 \end{cases}. \quad (7.4)$$

7.1.2 Estimateur d'erreur en résidus pour un problème couplé

La méthode des résidus pondérés sur une quantité d'intérêt nous amène à étudier l'erreur $Q(\mathbf{u}) - Q(\mathbf{u}_{LG}^{hH(n)})$ (mesure locale). En utilisant la représentation précédente de l'erreur (3.8-3.9), on développe ici un estimateur d'erreur sur $Q(\mathbf{u})$ calculable. On commence par écrire :

$$Q(\mathbf{u}) - Q(\mathbf{u}_{LG}^{hH(n)}) = R(\mathbf{u}_{LG}^{hH(n)}, \tilde{\mathbf{u}}). \quad (7.5)$$

Dans le cas d'un couplage local-global, l'enrichissement de l'espace d'approximation du problème adjoint permettant de calculer le second terme de (7.5) se traduit par :

- une zone locale Ω_L suffisamment large dans laquelle le modèle haute-fidélité initial est préservé (cet enrichissement est noté avec l'exposant " L^+ " dans la suite) ;
- une maillage τ^h suffisamment raffiné dans cette zone (cet enrichissement est noté avec l'exposant " h^+ " dans la suite) ;

- une quasi-convergence de l'algorithme de couplage itératif (noté avec l'exposant " ∞ " dans la suite).

Remarque 20 *Généralement, le couplage local-global non-intrusif est seulement vu comme une substitution de comportement sur Ω_L (un zoom numérique) venant d'un comportement initial régulier défini sur tout le domaine Ω . Nous choisissons dans la suite un autre point de vue, où le problème couplé dérive d'un modèle de référence initial dans lequel un comportement complexe est introduit partout sur Ω . Cela permet d'avoir une définition consistante de la solution de référence pour laquelle les mesures d'erreur sont définies dans la suite.*

Ainsi, après avoir calculé $\tilde{\mathbf{u}}_{L+G}^{h+H(\infty)} \in \mathcal{V}$ avec une zone locale $\tilde{\mathbf{u}}_{L+}^{h+} \in \mathcal{V}_{L+}^{h+}$, un estimateur global d'erreur sur Q et intégralement calculable est :

$$\eta_{Q,res}^{tot} = R(\mathbf{u}_{LG}^{hH(n)}, \tilde{\mathbf{u}}_{L+G}^{h+H(\infty)}). \quad (7.6)$$

Vu que le chargement spécifique du problème adjoint est concentré à l'intérieur de Ω_L , on s'attend à ce que l'algorithme itératif converge assez rapidement quand on cherche à calculer $\tilde{\mathbf{u}}_{L+G}^{h+H(\infty)}$.

Remarque 21 *Dans le cas non-linéaire, la définition du problème adjoint permettant d'obtenir $\tilde{\mathbf{u}}_{L+G}^{h+H(\infty)}$ nécessite de projeter la solution primale disponible $\mathbf{u}_{LG}^{hH(n)}$ sur un espace enrichi $\mathcal{V}^H \times \mathcal{V}_{L+}^{h+}$.*

Par ailleurs, afin de réduire encore plus le coût de calcul sans trop dégrader la qualité de l'estimateur d'erreur, il est possible d'approximer la fonctionnelle des résidus R (initialement définie à partir du modèle de référence) en considérant l'espace d'approximation enrichi utilisé pour résoudre le problème adjoint. Néanmoins, une telle approximation ne permet pas d'éliminer les projections entre les maillages afin de calculer $R(\mathbf{u}_{LG}^{hH(n)}, \tilde{\mathbf{u}}_{L+G}^{h+H(\infty)})$. Cette alternative ne sera pas étudiée dans cette thèse.

7.2 Stratégie d'adaptation

7.2.1 Définition des indicateurs d'erreur

L'estimateur (7.6) comprend les différentes sources d'erreur. Comme décrit dans la section 3.1.2, elles sont au nombre de trois : le modèle, la discrétisation et la convergence de l'algorithme local-global. En effet, l'erreur sur Q peut être séparée de la façon suivante :

$$Q(\mathbf{u}) - Q(\mathbf{u}_{LG}^{hH(n)}) = \underbrace{[Q(\mathbf{u}) - Q(\mathbf{u}_{LG}^H)]}_{\Delta_Q^{mod}} + \underbrace{[Q(\mathbf{u}_{LG}^H) - Q(\mathbf{u}_{LG}^{hH})]}_{\Delta_Q^{dis}} + \underbrace{[Q(\mathbf{u}_{LG}^{hH}) - Q(\mathbf{u}_{LG}^{hH(n)})]}_{\Delta_Q^{conv}}, \quad (7.7)$$

où $\mathbf{u}_{LG}^H$ est la solution du couplage dans lequel le local n'est pas discrétisé tandis que $\mathbf{u}_{LG}^{hH}$ est celle du couplage avec les deux modèles local et global discrétisés. Δ_Q^{mod} , Δ_Q^{dis} , et Δ_Q^{conv} correspondent, respectivement, aux sources d'erreur de modèle, de discrétisation et de convergence. Les indicateurs de ces sources d'erreur sont définis de la façon suivante :

- l'indicateur sur l'erreur de convergence, noté $\eta_{Q,res}^{conv}$, est construit à partir d'une solution adjointe approchée convergée $\tilde{\mathbf{u}}_{LG}^{hH(\infty)} \in \mathcal{V}$ sans enrichissement en terme de maillage τ^h et la zone locale Ω_L est utilisée. On le calcule comme suit :

$$\eta_{Q,res}^{conv} = R_{LG}(\mathbf{u}_{LG}^{hH(n)}, \tilde{\mathbf{u}}_{LG}^{hH(\infty)}), \quad (7.8)$$

où le résidu R_{LG} est défini comme suit :

$$\begin{aligned} R_{LG}(\mathbf{u}_{LG}^{hH(n)}, \tilde{\mathbf{u}}_{LG}^{hH(\infty)}) = & l_0(\tilde{\mathbf{u}}_G^{H(\infty)}) + l_L(\tilde{\mathbf{u}}_L^{h(\infty)}) \\ & - a_{0\Omega}(\mathbf{u}_G^{H(n)}, \tilde{\mathbf{u}}_G^{H(\infty)}) + a_{0L}(\mathbf{u}_G^{H(n)}, \tilde{\mathbf{u}}_G^{H(\infty)}) \\ & - a_L(\mathbf{u}_L^{h(n)}, \tilde{\mathbf{u}}_L^{h(\infty)}). \end{aligned} \quad (7.9)$$

Cet indicateur est tel que $\eta_{Q,res}^{conv} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Il donne une indication quantitative de l'erreur de convergence Δ_Q^{conv} , permettant ainsi de déterminer un critère d'arrêt adéquat pour le solveur itératif local-global.

- l'indicateur sur l'erreur de discrétisation, noté $\eta_{Q,res}^{dis}$, est construit à partir d'une solution approchée convergée $\tilde{\mathbf{u}}_{LG}^{h^+H(\infty)} \in \mathcal{V}$ calculée avec un maillage local plus fin τ^{h^+} , tandis que la forme de la zone locale Ω_L reste inchangée par rapport à celle utilisée pour calculer $\mathbf{u}_{LG}^{hH(n)}$. On le calcule comme suit :

$$\eta_{Q,res}^{dis} = R_{LG}(\mathbf{u}_{LG}^{hH(n)}, \tilde{\mathbf{u}}_{LG}^{h^+H(\infty)}) - \eta_{Q,res}^{conv}, \quad (7.10)$$

et est tel que $\eta_{Q,res}^{dis} \xrightarrow{h \rightarrow h^+} \approx 0$. Il permet de donner une indication quantitative pertinente de l'erreur de discrétisation Δ_Q^{dis} sous réserve que h^+ soit assez petit.

- finalement, l'indicateur d'erreur de modèle, noté $\eta_{Q,res}^{mod}$, est construit à partir de la solution approchée convergée $\tilde{\mathbf{u}}_{L+G}^{hH(\infty)} \in \mathcal{V}$ calculée avec une zone locale plus large Ω_{L+} , tandis que le maillage τ^h reste inchangé par rapport à celui utilisé pour calculer $\mathbf{u}_{LG}^{hH(n)}$. On le calcule comme suit :

$$\eta_{Q,res}^{mod} = R(\mathbf{u}_{LG}^{hH(n)}, \tilde{\mathbf{u}}_{L+G}^{hH(\infty)}) - \eta_{Q,res}^{conv}, \quad (7.11)$$

et est tel que $\eta_{Q,res}^{mod} \xrightarrow{\Omega_L \rightarrow \Omega_{L+}} \approx 0$. Il donne une indication quantitative appropriée de l'erreur de modèle Δ_Q^{mod} à condition que Ω_{L+} soit assez large.

Une façon alternative de calculer l'indicateur $\eta_{Q,res}^{mod}$, donnant en pratique des valeurs légèrement différentes en diminuant le nombre de solutions adjointes, découle de la définition suivante :

$$\eta_{Q,res}^{mod} = \eta_{Q,res}^{tot} - \eta_{Q,res}^{conv} - \eta_{Q,res}^{dis}. \quad (7.12)$$

7.2.2 Implémentation des indicateurs d'erreur

D'un point de vue de l'implémentation numérique, le calcul de l'estimateur $\eta_{Q,res}^{tot}$ ainsi que des indicateurs $\eta_{Q,res}^{dis}$ et $\eta_{Q,res}^{mod}$ est en adéquation avec l'utilisation d'un couplage non-intrusif. En effet la définition des espaces enrichis pour calculer les solutions approchées $\tilde{\mathbf{u}}_{L+G}^{h^+H(\infty)}$, $\tilde{\mathbf{u}}_{LG}^{h^+H(\infty)}$, et $\tilde{\mathbf{u}}_{L+G}^{hH(\infty)}$ nécessite seulement des modifications de $\mathcal{V}_L^h$ tandis que $\mathcal{V}^H$ reste inchangé.

Par ailleurs comme déterminé précédemment, le calcul de l'indicateur de modèle peut s'avérer assez coûteux, nous calculons donc en premier l'estimateur $\eta_{Q,res}^{tot}$ ainsi que des indicateurs $\eta_{Q,res}^{dis}$ et $\eta_{Q,res}^{conv}$ afin de déterminer $\eta_{Q,res}^{mod}$ en se référant à (7.12).

Mais le calcul de l'estimateur d'erreur globale calculé à partir de la solution $\tilde{\mathbf{u}}_{L+G}^{h+H(\infty)}$ nécessite lui aussi un important coût de calcul car la zone locale doit être la plus large possible et avec un maillage fin partout. En pratique, en utilisant l'aspect non-intrusif du couplage dans lequel le problème global reste inchangé même si le problème local change, cet estimateur peut être facilement évalué en additionnant les contributions d'erreur d'un ensemble de problèmes adjoints dont la zone locale se déplace sur tout le domaine.

De plus, en faisant varier la position de la zone locale Ω_L sur le domaine, il est possible de déterminer les zones qui influencent le plus la quantité d'intérêt choisie même si ces zones sont loin de la quantité d'intérêt (effet de pollution). L'évolution spatiale de l'erreur sert dans la suite pour améliorer l'exactitude du modèle.

Les solutions des problèmes primal et adjoint définies suite à un algorithme local-global doivent être reconstruites afin d'obtenir les solutions sur tout le domaine (voir (9.1)). Afin de simplifier la reconstruction de ces champs (et dans la suite leur communication lors des calculs des résidus) qui peuvent être de tailles différentes (dû à un maillage plus large ou plus fin), ils sont tous projetés sur une grille très fine. Les fonctions de forme EF classiques et leurs dérivées sont évaluées aux points de Gauss de cette grille ce qui permettra de calculer les déformations $\epsilon(\mathbf{u})$ et $\epsilon(\tilde{\mathbf{u}})$.

D'un point de vue purement numérique, ces différents estimateur et indicateurs sont calculés comme suit :

- l'estimateur d'erreur global s'exprime comme :

$$- \epsilon(\tilde{\mathbf{u}})^T \mathbb{K} \epsilon(\mathbf{u}) + \tilde{\mathbf{U}}_G^T \mathbf{F}, \quad (7.13)$$

où $\mathbb{K}$ et $\mathbf{F}$ sont les opérateurs du problème de référence.

- l'indicateur d'erreur de convergence, pour lequel les solutions primale et adjointe sont définies sur des espaces similaires donc pour lequel la projection sur la grille fine n'est pas nécessaire, s'exprime comme :

$$\tilde{\mathbf{U}}_G^T (\mathbf{F}_0 - \mathbb{K}_{0\Omega} \mathbf{U}_G) + \sum_{n_{patch}} \tilde{\mathbf{U}}_G^T \mathbb{K}_{0L} \mathbf{U}_G + \tilde{\mathbf{U}}_L^T (\mathbf{F}_L - \mathbb{K}_L \mathbf{U}_L), \quad (7.14)$$

où n_{patch} est le nombre de patches constituant la zone locale Ω_L .

- l'indicateur d'erreur de discrétisation, qui lui nécessite une projection sur la grille fine car les zones locales des problèmes primal et adjoint n'ont pas le même raffinement, est défini comme :

$$\epsilon(\tilde{\mathbf{u}})^T (-\mathbb{K}_{0\Omega} + \mathbb{K}_{0L}) \epsilon(\mathbf{u}) - \epsilon(\tilde{\mathbf{u}}_L)^T \mathbb{K}_L \epsilon(\mathbf{u}_L) + \tilde{\mathbf{U}}_G^T \mathbf{F}_0 + \tilde{\mathbf{U}}_L^T \mathbf{F}_L. \quad (7.15)$$

7.2.3 Procédure d'adaptation

A l'aide de l'estimateur d'erreur $\eta_{Q,res}^{tot}$ et des indicateurs $(\eta_{Q,res}^{conv}, \eta_{Q,res}^{dis}, \eta_{Q,res}^{mod})$ précédemment explicités, on définit un algorithme d'adaptation. Nous proposons ici un algorithme glouton relativement proche de ceux proposés dans [9, 120, 121, 134, 144, 158, 165] (dénommé algorithme GOALS). La méthode a pour but d'automatiquement améliorer les paramètres de la méthode de couplage local-global (forme de Ω_L , taille du maillage dans τ^h , nombre d'itérations local-global) afin de prédire la quantité d'intérêt Q dans une tolérance prédéfinie γ_{tol} tout en optimisant le coût de calcul. Cela est atteint en générant une séquence de solutions approchées $(\mathbf{u}_{app}^{(k)}, \tilde{\mathbf{u}}_{app}^{(k)})$ si bien que pour un entier k_0 , la solution globale sur Q vérifie :

$$|Q(\mathbf{u}) - Q(\mathbf{u}_{app}^{(k_0)})| \leq \gamma_{tol} \cdot |Q(\mathbf{u}_{app}^{(k_0)})|. \quad (7.16)$$

A chaque étape du processus d'adaptation, et avant de stopper l'intégralité de l'algorithme quand la tolérance d'erreur est atteinte (information quantitative donnée par $\eta_{Q,res}^{tot} \leq \gamma_{tol} \cdot |Q(\mathbf{u}_{app}^{(k_0)})|$), le but est de réduire la source d'erreur majoritaire qui est identifiée en comparant les différents indicateurs $\eta_{Q,res}^{conv}$, $\eta_{Q,res}^{dis}$ et $\eta_{Q,res}^{mod}$. Les adaptations de discrétisation et de modèle sont réalisées de façon locale après avoir décomposé ces indicateurs sur chaque sous-domaine prédéfini dans Ω_L et Ω_0 , respectivement. Les sous-domaines de Ω_L sont des éléments de τ^h , tandis que ceux de Ω_0 peuvent être définis à partir des éléments du maillage grossier τ^H (même si des sous-domaines plus larges sont utilisés). Cette décomposition est possible en observant que les indicateurs $\eta_{Q,res}^{dis}$ et $\eta_{Q,res}^{mod}$ sont des termes de résidus définis à partir d'une intégration spatiale.

Après avoir initialisé Ω_L (comme la zone proche de l'endroit où la quantité d'intérêt est définie) et τ^h , et après avoir spécifié une certaine tolérance d'erreur γ_{tol} pour la quantité d'intérêt, l'algorithme d'adaptation se déroule comme suit :

0. Calculer la solution adjointe $\tilde{\mathbf{u}}_{L+G}^{h+H(\infty)}$ (en utilisant des espaces enrichis appropriés) ;
1. Définir $n = 1$;
2. Résoudre le problème primal initial pour déterminer $\mathbf{u}_{LG}^{hH(n)}$;
3. Calculer l'estimateur $\eta_{Q,res}^{tot}$;
4. Si $|\eta_{Q,res}^{tot}/Q(\mathbf{u}_{LG}^{hH(n)})| \leq \gamma_{tol}$ alors STOP. Sinon aller à l'étape 5 ;
5. Calculer les solutions adjointes $\tilde{\mathbf{u}}_L^{hH(\infty)}$, $\tilde{\mathbf{u}}_{L+G}^{hH(\infty)}$, et $\tilde{\mathbf{u}}_{LG}^{h+H(\infty)}$ afin de déterminer les indicateurs $\eta_{Q,res}^{conv}$, $\eta_{Q,res}^{dis}$, et $\eta_{Q,res}^{mod}$:
 - si $\max(|\eta_{Q,res}^{conv}|, |\eta_{Q,res}^{dis}|, |\eta_{Q,res}^{mod}|) = |\eta_{Q,res}^{conv}|$, augmenter $n+1 \rightarrow n$ et retourner à l'étape 2 ;
 - si $\max(|\eta_{Q,res}^{conv}|, |\eta_{Q,res}^{dis}|, |\eta_{Q,res}^{mod}|) = |\eta_{Q,res}^{dis}|$, décomposer $\eta_{Q,res}^{dis}$ et raffiner localement τ^h jusqu'à atteindre $|\eta_{Q,res}^{dis}/Q(\mathbf{u}_{LG,N}^{hH(n)})| \leq \gamma_{tol}/3$, puis retourner à l'étape 0 ;
 - si $\max(|\eta_{Q,res}^{conv}|, |\eta_{Q,res}^{dis}|, |\eta_{Q,res}^{mod}|) = |\eta_{Q,res}^{mod}|$, décomposer $\eta_{Q,res}^{mod}$ et agrandir localement Ω_L jusqu'à atteindre $|\eta_{Q,res}^{mod}/Q(\mathbf{u}_{LG,N}^{hH(n)})| \leq \gamma_{tol}/3$, puis retourner à l'étape 0.

Cet algorithme d'adaptation évite des itérations local-global inutiles dans le problème primal (quand l'erreur de discrétisation ou de modèle est supérieure à celle de convergence). Il indique aussi, à la fin de la procédure d'adaptation, la définition adaptée de Ω_L et τ^h pour atteindre la tolérance d'erreur.

Bilan : Dans ce chapitre, nous avons reformulé l'expression de l'erreur en résidus dans le cas particulier d'un couplage non-intrusif. L'erreur globale faite sur ce couplage vis-à-vis d'une quantité d'intérêt (déplacement, contrainte...) a été séparée en trois sources d'erreur : l'erreur de modèle, l'erreur d'itération et l'erreur de discrétisation. Un algorithme glouton a été mis en place à partir des indicateurs d'erreur correspondants afin d'adapter le couplage pour lui certifier une certaine exactitude vis-à-vis d'une quantité d'intérêt. Le caractère non-intrusif du couplage permet d'évaluer localement l'impact des contributions d'erreur (en ajoutant des patches locaux dans le problème adjoint). La solution du problème adjoint ne nécessite donc pas de ressources de calcul supplémentaires mais simplement la définition de problèmes individuels et contrôlés qui peuvent être résolus en parallèle. L'évaluation des différents indicateurs d'erreur de couplage et la mise en place d'un algorithme adaptatif est développé dans le chapitre 8 sur différents exemples.

Application numérique de l'erreur en résidus

Sommaire

8.1	Poutre en traction en dimension 1	86
8.1.1	Définition des problèmes primal et adjoint	86
8.1.2	Estimation de l'erreur globale de couplage	87
8.1.3	Procédure d'adaptation	89
8.2	Plaque en traction avec inclusion locale d'affaiblissements	91
8.2.1	Variation homogène du Module de Young	92
8.2.2	Variation hétérogène du Module de Young	95
8.3	Plaque trouée en flexion	96
8.3.1	Quantité d'intérêt en déplacement	99
8.3.2	Quantité d'intérêt en contrainte	101

Dans ce chapitre, le but est de présenter les calculs de l'estimateur d'erreur global et des différents indicateurs ainsi que leur utilisation pour adapter le problème vis-à-vis d'une quantité d'intérêt choisie au préalable. Un exemple élastique en dimension 1 permet de mettre en place les différentes erreurs et d'appréhender le processus d'adaptation. Des exemples élastiques, en dimension deux, plus complexes mettront en évidence la performance de la méthode.

8.1 Poutre en traction en dimension 1

Le premier exemple est une simple structure élancée en traction. Le but est d'illustrer, sur cet exemple simple, la séparation des différentes sources d'erreur et la procédure d'adaptation. Cette structure poutre de longueur $L = 1$ et d'épaisseur b est encastée du côté gauche et un effort de traction uniforme $F = 1$ est appliqué sur sa partie droite (voir Figure 8.1).

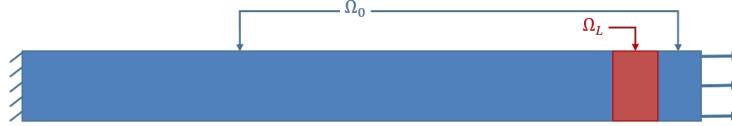


FIGURE 8.1 – Configuration initiale du couplage et conditions aux limites du problème.

La poutre est constituée d'un matériau élastique isotrope, et le module de Young est choisi comme variable suivant la coordonnée longitudinale x . Sa valeur nominal $E_0 = 1$ est ainsi affaiblie dans certaines zones afin de mettre en évidence un phénomène local qui nécessitera sûrement d'être pris en compte en utilisant un couplage local-global. Les affaiblissements locaux du module de Young sont définis à l'aide de fonctions de Gauss. Les deux configurations pour l'évolution de $E(x)$ sont décrites sur la Figure 8.2. Afin de simplifier les notations dans la suite, Cas 1 et Cas 2 se réfèrent respectivement aux configurations des Figures 8.2a et 8.2b.

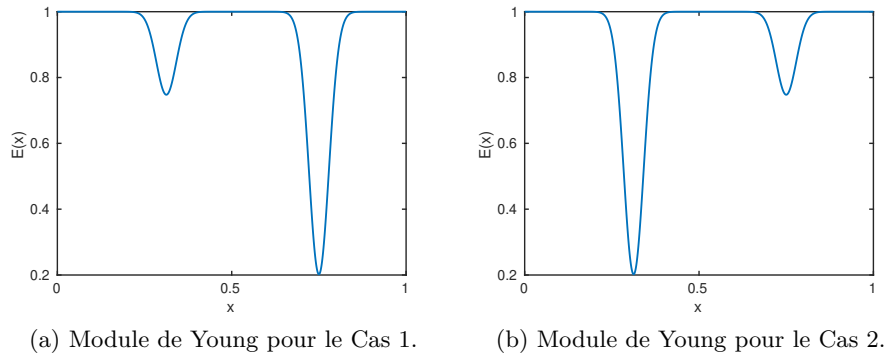


FIGURE 8.2 – Deux évolutions du module de Young le long de la poutre

Le coefficient de Poisson est constant et fixé tel que $\nu = 0$, on n'a alors qu'un effet 1D dans ce problème.

Au niveau de la géométrie, le maillage global τ^H est constitué de 16 éléments quadratiques répartis le long de la poutre (la longueur de chaque élément est donc de $1/16$) et l'épaisseur de chaque élément est identique à celle de la poutre (i.e. il n'y a qu'un seul élément dans l'épaisseur pour le maillage associé au modèle global). La même taille de maillage transversal (un élément dans l'épaisseur) est appliqué au maillage local τ^h .

8.1.1 Définition des problèmes primal et adjoint

La solution du problème de référence est déterminée à l'aide d'un algorithme de couplage non-intrusif qui fait communiquer, tel que décrit précédemment dans la section 2.2 :

- un modèle global défini sur toute la structure Ω où le module de Young est constant : $E_0 = 1$;

- un modèle local défini sur le sous-domaine Ω_L qui correspond à un ensemble d'éléments macro de τ^H , et dans lequel la variation du module de Young est prise en compte. Un maillage plus fin τ^h peut aussi être utilisé dans cette zone si nécessaire.

Un exemple de la configuration de couplage associé est présenté sur la Figure 8.1. La zone d'intérêt ω_Q se situe en fin de poutre, dans la zone $\frac{13}{16} \leq x \leq \frac{15}{16}$. Plusieurs types de quantité d'intérêt (déplacement, contrainte, déformation...) peuvent être choisis.

En pratique et de façon générale, le choix d'une quantité d'intérêt impacte la création du second membre du problème adjoint associé, ainsi pour une quantité d'intérêt telle que :

- le déplacement moyen sur ω_Q , le problème adjoint est soumis à un effort réparti $f_\Sigma = \frac{8}{b}$ horizontal si on s'intéresse respectivement à u_x ;
- la contrainte moyenne σ_{xx} sur ω_Q , le problème adjoint est soumis à une pré-contrainte :

$$\sigma_\Sigma = \frac{1}{|\omega_Q|} \mathcal{K} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{|\omega_Q|} \cdot \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \nu \end{bmatrix}, \quad (8.1)$$

dans ω_Q . De façon équivalente, le problème adjoint est soumis à un effort volumique $\mathbf{f}_{Sigma} = -\mathbf{div}(\sigma_\Sigma)$ dans ω_Q et une traction $\sigma_\Sigma \mathbf{n}$ sur la frontière $\partial\omega_Q$ de ω_Q ;

- la déformation moyenne ε_{xx} sur ω_Q , le problème adjoint est soumis à une pré-contrainte :

$$\sigma_\Sigma = \frac{1}{|\omega_Q|} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (8.2)$$

dans ω_Q . De façon équivalente le problème adjoint est soumis à une traction $\sigma_\Sigma \mathbf{n}$ sur la frontière $\partial\omega_Q$ de ω_Q .

Les problèmes adjoints seront aussi résolus grâce à une stratégie de couplage non-intrusif. L'avantage d'utiliser cette méthode de couplage est la facilité avec laquelle la zone locale pourra être modifiée sans besoin de recalculer la partie globale (identique pour le problème primal et les problèmes adjoints). Dans la suite, cela permet une grande flexibilité dans la définition des calculs, ainsi qu'une rapidité des calculs ainsi parallélisables.

8.1.2 Estimation de l'erreur globale de couplage

D'après le chapitre 7, l'estimateur d'erreur global nécessite la solution d'un problème adjoint à convergence dont la zone locale serait plus grande et plus raffinée que celle du problème primal. En pratique, afin de réduire le coût de calcul, ce problème adjoint est remplacé par un ensemble de problèmes adjoints avec des zones locales plus petites. A l'aide de la méthode de couplage non-intrusif, chacun de ces problèmes adjoints peut être calculé en parallèle. Bien que la combinaison résultante des différentes solutions adjointes correspondantes ne coïncide pas exactement avec celle obtenue par une approche monolithique, cela mène quand même à des résultats similaires en terme d'estimation d'erreur dû aux propriétés d'orthogonalité.

Ainsi dans le cas de la poutre en 1D, un ensemble de problèmes adjoints est défini. Chaque zone locale comprend un premier patch situé au niveau de la quantité d'intérêt, soit l'intervalle $[13/16-15/16]$ et un second situé dans une des zones suivantes : $[1/16-3/16]$, $[3/16-5/16]$, $[5/16-7/16]$, $[7/16-9/16]$, $[9/16-11/16]$, $[11/16-13/16]$ (voir leurs positions sur la Figure 8.3).

La zone locale du problème adjoint, ensemble de deux patches, est prise assez raffinée et l'algorithme de couplage est mené jusqu'à convergence.

A partir de la configuration initiale du problème primal (une itération dans l'algorithme de couplage, un raffinement macro et la zone locale P0), il est possible de tracer l'évolution de l'erreur globale en fonction de la position du second patch de la zone locale. La répartition de l'erreur globale pour une quantité d'intérêt en déplacement dans le Cas 1 (resp. Cas 2) est tracée sur la Figure 8.4a (resp. 8.5a). On observe que dans le Cas 1, l'erreur globale est plus

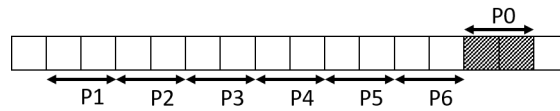


FIGURE 8.3 – Différentes positions du second patch de la zone locale, le premier se trouvant toujours au niveau de P0. Un patch est constitué de deux éléments macro.

importante dans la zone $[11/16 - 13/16]$ tandis que pour le Cas 2, l'erreur maximale est située dans la partie $[3/16 - 7/16]$. Cela est en bonne adéquation avec les répartitions respectives du module de Young ; en effet vu que la zone locale est initialement dans l'intervalle $[13/16 - 15/16]$ (en gardant E_0 dans tout le reste de la poutre), l'erreur est importante dans les zones où la valeur exacte de E est loin de E_0 et impacte ainsi la quantité d'intérêt.

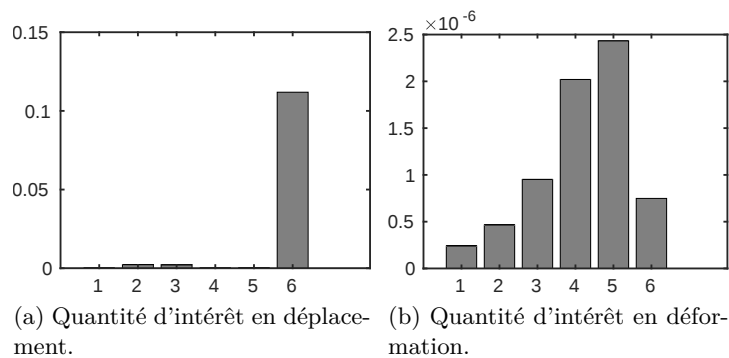


FIGURE 8.4 – Erreur globale en fonction de la position du patch local pour le Cas 1 (voir Figure 8.2a) pour différentes quantités d'intérêt.

La répartition de l'erreur globale pour une quantité d'intérêt en déformation dans le Cas 1 (resp. Cas 2) est tracée sur la Figure 8.4b (resp. 8.5b). Dans ces deux cas la répartition de l'erreur est plus étalée sur toute la poutre mais sa valeur est très faible, de l'ordre de 10^{-6} .

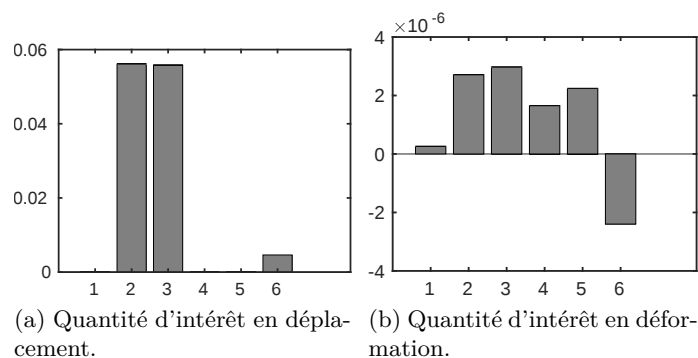


FIGURE 8.5 – Erreur globale en fonction de la position du patch local pour le Cas 2 (voir Figure 8.2b) pour différentes quantités d'intérêt.

Les solutions du problème adjoint étant calculées à convergence et avec une zone locale bien raffinée, les Figures 8.4 et 8.5 peuvent aussi être interprétées comme la répartition de l'erreur de modèle le long de la poutre. Elles servent ainsi à déterminer quel patch doit être ajouté dans la zone locale du problème primal quand l'erreur de modèle est la plus importante.

En sommant les différentes contributions d'erreur on obtient l'erreur globale sur toute la structure. Cette erreur est identique à celle qu'on aurait obtenu en prenant une solution de problème adjoint à zone locale sur toute la longueur de la poutre, soit sur l'intervalle $[1/16 - 15/16]$.

8.1.3 Procédure d'adaptation

Dans cette partie, nous présentons l'ensemble des résultats obtenus pour la structure poutre en traction avec deux répartitions du module de Young. La procédure d'adaptation (voir 7.2.3) est mise en place.

8.1.3.1 Déplacement moyen en bout de poutre

On s'intéresse tout d'abord à la quantité d'intérêt qu'est le déplacement moyen sur $\omega_Q = [13/16 - 15/16]$. La zone locale initiale comprend le patch support de la quantité d'intérêt, soit $\Omega_L = \omega_Q$. La tolérance d'erreur relative est fixée à 5%.

L'estimateur d'erreur η_Q^{tot} et les différents indicateurs d'erreur $\eta_{Q,res}^{conv}$, $\eta_{Q,res}^{dis}$, et $\eta_{Q,res}^{mod}$ sont calculés à chaque pas d'adaptation.

Les résultats de la Figure 8.6 montrent l'évolution de ces valeurs normalisées par la valeur de la quantité d'intérêt (i.e. sous la forme $|\cdot/Q(\mathbf{u}_{LG}^{hH(n)})|$), à chaque pas d'adaptation. Le nombre d'itérations n dans l'algorithme de couplage local-global est indiqué sur les graphes (numéro rouge). L'évolution de la zone locale Ω_L du problème primal est donnée en dessous du graphe. Cette représentation montre bien que lorsque l'indicateur sur l'erreur de modèle $\eta_{Q,res}^{mod}$ est le plus grand, la zone locale Ω_L est élargie (e.g. un nouveau patch est ajouté dans la zone locale). Pour les exemples choisis, l'erreur de discrétisation dans Ω_L est faible et impacte donc peu la quantité d'intérêt. De plus, on peut noter que pour une tolérance de 5%, il n'est pas nécessaire de modéliser le faible affaiblissement du module de Young ; seul le plus grand pic des Figures 8.4 et 8.5 est considéré.

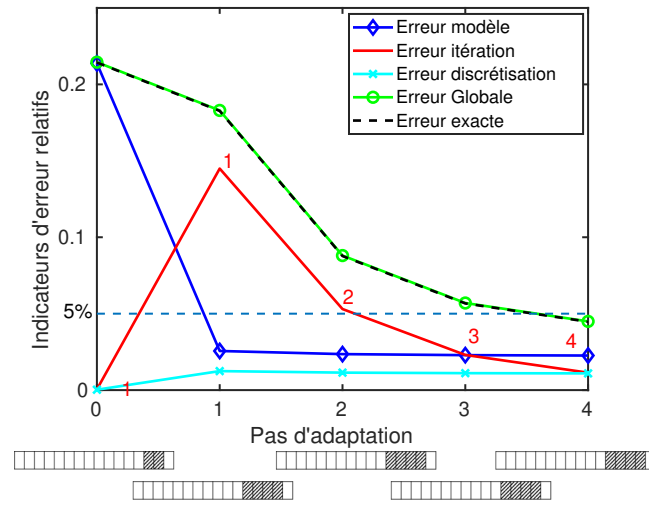
En conclusion, les configurations idéales de couplage pour ces exemples sont les suivantes :

- pour le Cas 1 : une zone locale Ω_L définie par un seul patch dans la zone $[11/16 - 15/16]$, sans raffinement spécifique de τ^h et 4 itérations ($n = 4$) dans l'algorithme de couplage, en se référant à la Figure 8.6a ;
- pour le Cas 1 : une zone locale Ω_L définie par des patches dans la zone $[3/16 - 7/16]$ et $[13/16 - 15/16]$, sans raffinement spécifique de τ^h et 3 itérations ($n = 3$) dans l'algorithme de couplage, en se référant à la Figure 8.6b.

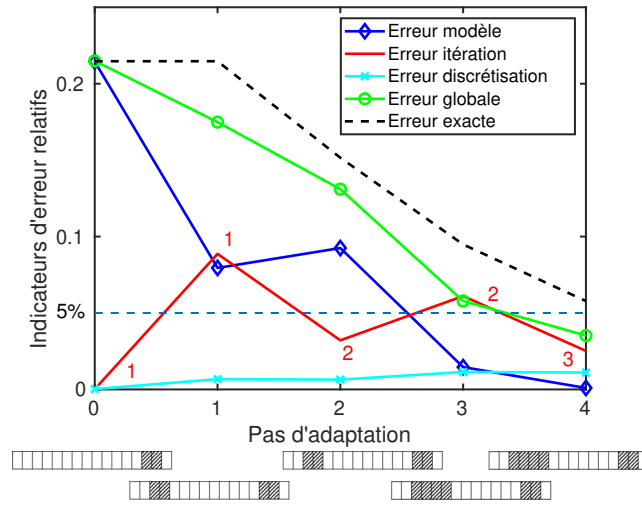
Des travaux supplémentaires pour une tolérance fixée à 1%, donnent l'évolution des erreurs comme indiqués sur la Figure 8.7. Dans ces cas, le petit affaiblissement du module de Young est inclus dans la zone locale.

8.1.3.2 Autres quantités d'intérêt

D'autres quantités d'intérêt peuvent être étudiées. Les études ont été menées sur la contrainte moyenne σ_{xx} et la déformation moyenne ε_{xx} dans la zone $\omega_Q = [13/16; 15/16]$. La définition de l'effort du problème adjoint associé pour ces cas est donné dans les Équations (8.1) et (8.2). Dans ces deux cas, l'algorithme indique qu'aucun pas d'adaptation n'est nécessaire (que la tolérance soit de 5% ou 1%). En effet, les champs de contrainte et de déformation dépendent peu de la configuration en amont. Ainsi, la quantité d'intérêt peut être calculée de façon très précise avec très peu d'efforts numériques.



(a) Adaptation pour le Cas 1.



(b) Adaptation pour le Cas 2.

FIGURE 8.6 – Différents estimateurs d'erreur en fonction des pas d'adaptation pour les deux configurations du module de Young.

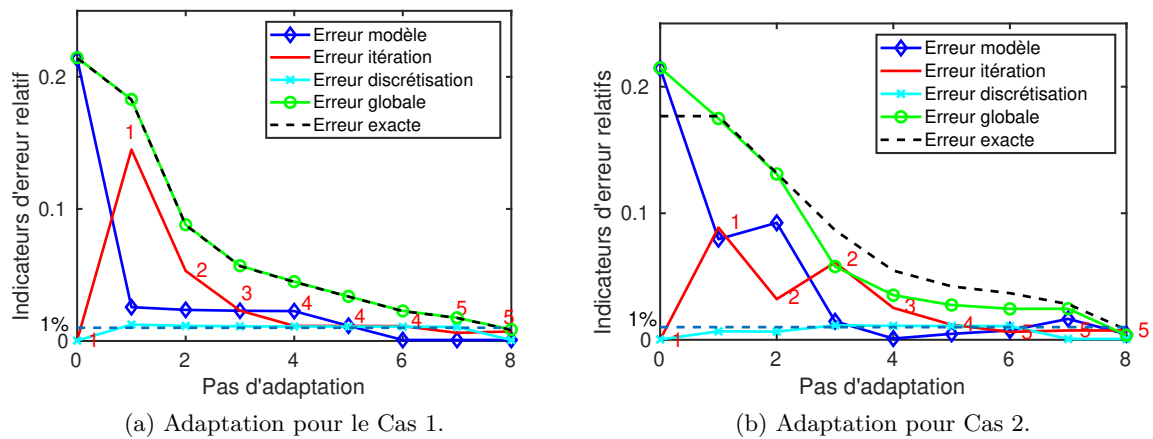


FIGURE 8.7 – Différents estimateurs d'erreur en fonction des pas d'adaptation pour les deux configurations du module de Young.

8.2 Plaque en traction avec inclusion locale d'affaiblissements

Dans cette partie, nous étudions une plaque carrée (taille $L \times L$ avec $L = 1$) dans laquelle des affaiblissements locaux du module de Young sont considérés. La structure représentée sur la Figure 8.8 est encadrée sur son bord gauche tandis que le bord droit est soumis à un effort de traction uniforme. Les autres bords de la plaque sont libres. Le maillage global τ^H est constitué de 100 (10x10) éléments quadratiques d'ordre 1.

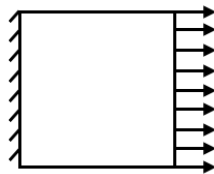


FIGURE 8.8 – Problème de référence de la plaque carrée en traction.

Les variations locales du module de Young $E(x, y)$ sont présentes dans cinq zones et jouent ainsi le rôle d'inclusions dans le matériau, dans lesquelles le module de Young est plus faible que sa valeur nominale $E_0 = 1$.

Dans les deux premiers exemples, les zones impactées par un affaiblissement de E sont incluses dans un élément macro. L'affaiblissement de E dans ces zones est soit fort : $E_{min} = 0,0026$ soit faible : $E_{min} = 0,45$.

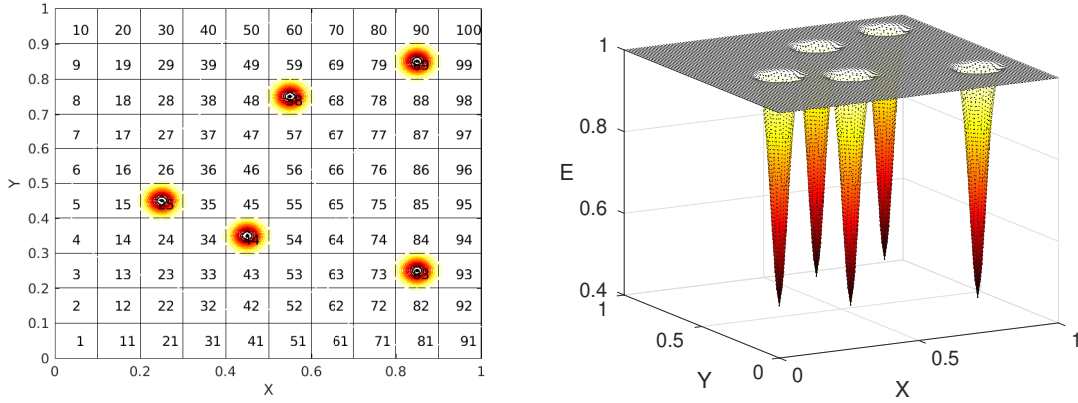
Le dernier exemple a un affaiblissement faible du module de Young ($E_{min} = 0.45$) mais une des zones impactées est plus large qu'un élément macro.

Dans tous les cas le coefficient de Poisson vaut $\nu = 0,3$.

La quantité d'intérêt étudiée est dans chacun de ces exemples, sauf indication contraire, un déplacement moyen sur le bord droit où l'effort de traction est appliqué. Le but de l'algorithme d'adaptation est de trouver la configuration optimale du problème couplé vis-à-vis de cette quantité d'intérêt et en respectant une certaine tolérance sur l'erreur. Sauf indication contraire, la tolérance est fixée à 0,5% afin de pouvoir déterminer l'impact même faible du module de Young modifié sur la quantité d'intérêt.

8.2.1 Variation homogène du Module de Young

Les éléments impactés par la variation homogène du Module de Young sont présentés sur la Figure 8.9a, tandis que l'évolution de $E(x, y)$ pour un affaiblissement fort est tracée sur la Figure 8.9b. Les numéros des éléments impactés sont donc les suivants : 25, 44, 58, 83, 89.



(a) Position des éléments impactés (n° 25, 44, 58, 83 et 89). (b) Évolution du module de Young dans la plaque avec affaiblissements faibles.

FIGURE 8.9 – Évolution du module de Young dans la plaque et éléments impactés.

Vu que la quantité d'intérêt choisie est le déplacement moyen sur le bord droit, la zone locale du problème couplé est initialement composée des éléments 91 à 100 supports de la quantité d'intérêt.

La discrétisation de la zone locale est identique à celle du maillage globale (i.e. $\tau^h = \tau^H$), et une seule itération est réalisée dans l'algorithme de couplage.

Nous montrons donc dans cette partie les résultats de la procédure d'adaptation pour des variations homogènes, faibles ou fortes, du module de Young.

8.2.1.1 Affaiblissement faible

La solution de référence du problème à faible affaiblissement, en terme de champ de déformation ε_{xx} , est tracée sur la Figure 8.10a. En parallèle sur la Figure 8.10b, la solution du problème couplé tel que défini initialement est donnée. On observe que les modifications du module de Young ne sont initialement pas prises en compte car la zone locale initiale n'est pas constituée d'éléments impactés. Ainsi la solution est identique à la solution d'une poutre en traction avec un module de Young égal à 1 partout. De plus, au niveau des éléments limites du bord gauche, on observe l'effet de l'encastrement car un maillage grossier est utilisé dans cette zone.

Sur la Figure 8.11a, les différents estimateurs et indicateurs d'erreurs relatives (c.à.d. normalisés par rapport à la valeur approchée de la quantité d'intérêt) sont donnés pour chaque pas d'adaptation. Ce sont les termes $|\eta_{Q,res}^{tot}/Q(\mathbf{u}_{LG,N}^{hH(n)})|$, $|\eta_{Q,res}^{conv}/Q(\mathbf{u}_{LG,N}^{hH(n)})|$, $|\eta_{Q,res}^{dis}/Q(\mathbf{u}_{LG,N}^{hH(n)})|$ et $|\eta_{Q,res}^{mod}/Q(\mathbf{u}_{LG,N}^{hH(n)})|$, définis précédemment.

Trois pas d'adaptation sont réalisés : deux se réfèrent à de l'adaptation de modèle par ajout des éléments 83 et 89 dans la zone locale du problème primal et le dernier augmente d'une itération l'algorithme de couplage. La tolérance d'erreur est atteinte après le quatrième pas d'adaptation et la solution du problème couplé à cette étape est montrée sur la Figure 8.11b. Dans cette configuration finale, on a :

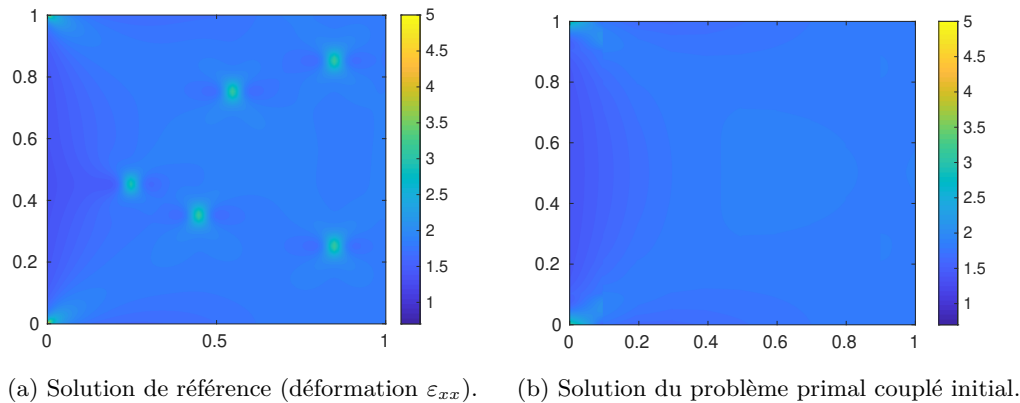


FIGURE 8.10 – Champ ε_{xx} du problème de référence (a) et du problème primal avec le couplage initial non optimisé (b).

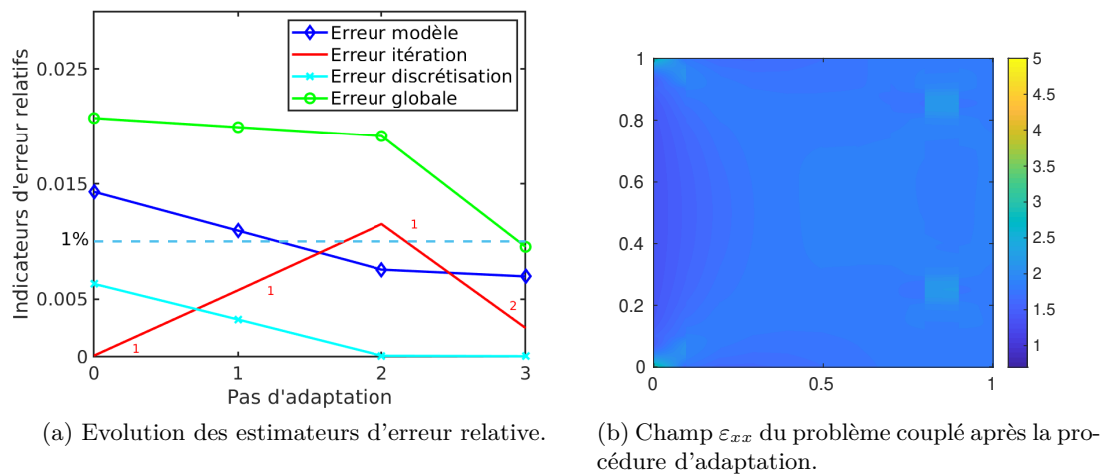


FIGURE 8.11 – Résultats pour une variation locale faible du module de Young. (a) est l'évolution des différents indicateurs d'erreur à chaque pas d'adaptation, (b) est le champ ε_{xx} du problème couplé à la fin de l'adaptation.

- ajout de seulement deux éléments (83 et 89) dans la zone locale du problème primal. Ces éléments sont impactés par une modification de E et sont les plus proches du bord droit où se trouve la quantité d'intérêt,
- deux itérations dans l'algorithme de couplage non-intrusive global-local,
- aucun raffinement dans la zone locale.

Bien que la solution du problème en configuration finale (voir Fig. 8.11b) est assez éloignée de la solution de référence (voir Figure 8.10a), cette configuration est suffisante pour approximer la solution vis-à-vis de la quantité d'intérêt choisie. En particulier, certaines variations locales du module de Young n'ont pas d'impact sur le déplacement moyen du bord droit et ne nécessitent donc pas d'être représentées (éléments 25, 44 et 58).

Remarque 22 Une étude similaire a été réalisée avec un contraste plus faible du module de Young ($E = 0.8$). Dans ce cas, la procédure d'adaptation montre que l'erreur majoritaire, qui est une erreur de modèle, se situe au niveau des éléments 1 et 10. Ces éléments se situent dans les angles où les conditions aux limites de Dirichlet sont appliquées et donc où on trouve un fort

gradient (concentration de contrainte). Deux patches raffinés doivent ainsi être placés dans cette zone afin de diminuer l'erreur sur la quantité d'intérêt.

8.2.1.2 Affaiblissement fort

Quantité d'intérêt en déplacement Dans ce cas, les éléments impactés sont les mêmes que ceux présentés sur la Figure 8.9a et l'évolution du module de Young dans la plaque est donnée sur la Figure 8.12a. La solution de référence (déformation ε_{xx}) est tracée sur la Figure 8.12b. La solution du problème couplé initial est identique à celle de la Figure 8.10b car la configuration initiale est similaire.

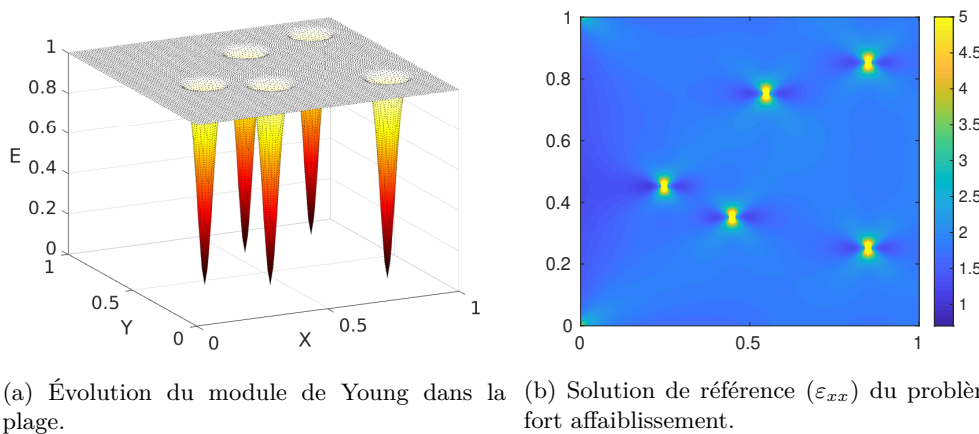


FIGURE 8.12 – Influence de l'évolution du module de Young à fort affaiblissement (a) sur la solution de référence (b).

Les résultats de la procédure d'adaptation dans ce cas sont donnés sur la Figure 8.13. L'évolution des différents indicateurs relatifs est donnée pour chaque pas d'adaptation sur la Figure 8.13a. On observe dorénavant que 7 pas d'adaptation sont nécessaires pour atteindre la tolérance ; cinq sont des adaptations de modèles afin d'ajouter tous les éléments avec une variation de E dans la zone locale du problème primal et les deux autres pas d'adaptation sont des ajouts d'itérations dans l'algorithme de couplage.

Durant les trois premières étapes de la procédure d'adaptation, l'erreur est globalement due à l'erreur de modèle si bien que les éléments 89, 83 et 58 sont ajoutés successivement dans la zone locale du problème primal. Les deux autres éléments (44 et 32) sont quant à eux ajoutés lors des pas 5 et 7 respectivement. Dans ce cas, l'algorithme d'adaptation montre que la zone locale du problème primal doit recouvrir l'intégralité des éléments où le module de Young est modifié afin d'atteindre la tolérance d'erreur sur la quantité d'intérêt. Néanmoins, la modification du module de Young n'a pas besoin d'être décrite précisément comme aucun raffinement n'est nécessaire dans la zone locale. Nous pouvons noter par ailleurs, en se référant aux erreurs à l'étape 8 sur la Figure 8.13a, que le raffinement du maillage serait l'étape suivante si une tolérance plus basse était choisie.

Bien que l'approximation de la solution obtenue à la fin de l'adaptation (voir Figure 8.13b) est une approximation assez grossière du champ de déformation, elle est suffisante pour prédire correctement la quantité d'intérêt.

Quantité d'intérêt en déformation On s'intéresse dorénavant à une quantité d'intérêt en déformation sur un élément voisin d'un trou. La zone locale Ω_L est donc constituée des éléments

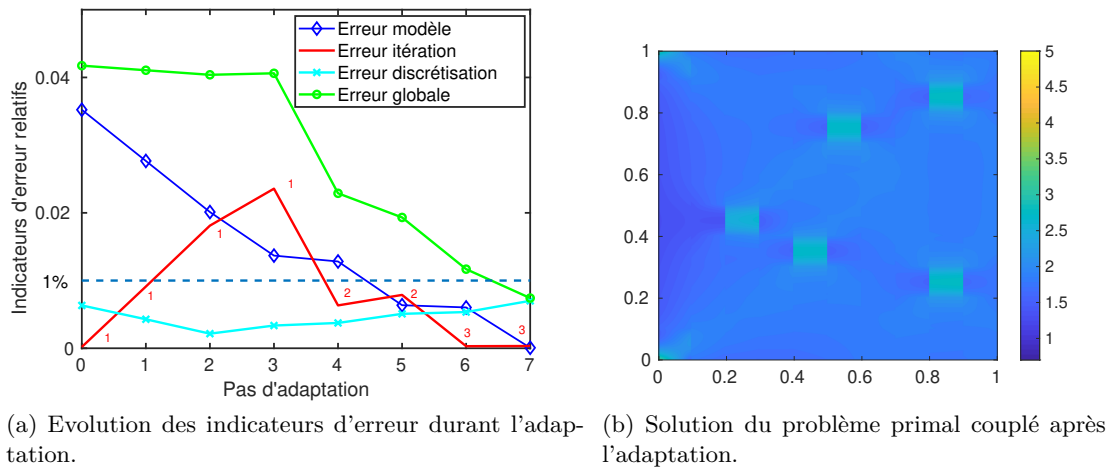


FIGURE 8.13 – Résultats pour une variation locale forte du module de Young. (a) est l'évolution des différents indicateurs d'erreur à chaque pas d'adaptation, (b) est le champ ε_{xx} du problème couplé à la fin de l'adaptation.

macro 58 et 68 (là où se situe l'affaiblissement et la quantité d'intérêt). Si on ne place pas initialement l'élément macro 58 comprenant le trou dans la zone locale, une erreur de modèle est initialement prédominante et nécessitera de rajouter cet élément dans la zone locale du problème primal.

Afin de mettre en évidence d'autres phénomènes, cet élément est au préalable inclus dans la zone locale. En effet, en appliquant la procédure d'adaptation pour cette quantité, on montre que les erreurs sont principalement dues à l'itération et la discrétisation. Ainsi le maillage τ^h doit être raffiné dans la zone locale Ω_L afin d'atteindre la tolérance d'erreur $\gamma_{tol} = 2\%$. Cette tolérance atteinte après 4 pas d'adaptation nécessite aussi $n = 3$ itérations local-global mais pas d'extension supplémentaire de Ω_L .

Sur la Figure 8.14, nous montrons quelques caractéristiques de l'erreur sur une quantité d'intérêt ; la solution du problème adjoint (qui met en évidence de forts gradients localisés à proximité de la région d'intérêt) est donnée sur la Figure 8.14a, l'évolution de l'estimateur d'erreur et des indicateurs durant la procédure d'adaptation est tracée sur la Figure 8.14b, tandis que le maillage local τ^h et la configuration finale de la solution approchée couplée sont présentés respectivement sur les Figures 8.14c et 8.14d.

8.2.2 Variation hétérogène du Module de Young

Dans cette partie, on considère que la variation du module de Young de l'élément 58 impacte plus d'un élément comme on peut le voir sur la Figure 8.15a. L'évolution du module de Young dans la plaque prend alors l'allure décrite sur la Figure 8.15b. On s'intéresse toujours à la quantité d'intérêt qu'est le déplacement moyen sur le bord droit.

La solution de référence pour cette variation de E est donnée sur la Figure 8.16a. La procédure d'adaptation, dont l'évolution des erreurs est représentée sur la Figure 8.16b, aboutit à une solution du problème primal en Figure 8.16c. Onze pas d'adaptation sont nécessaires pour atteindre une tolérance d'erreur de 1% et obtenir la configuration optimale du couplage.

Afin de détailler la procédure d'adaptation, la distribution spatiale de l'erreur de modèle par élément macro est évaluée à chaque pas d'adaptation (voir Figure 8.17). La position du patch local est en gris tandis que les nouveaux éléments ajoutés à la zone locale pour un pas d'adaptation donné sont en noir. A la fin de la procédure d'adaptation, on aboutit au couplage

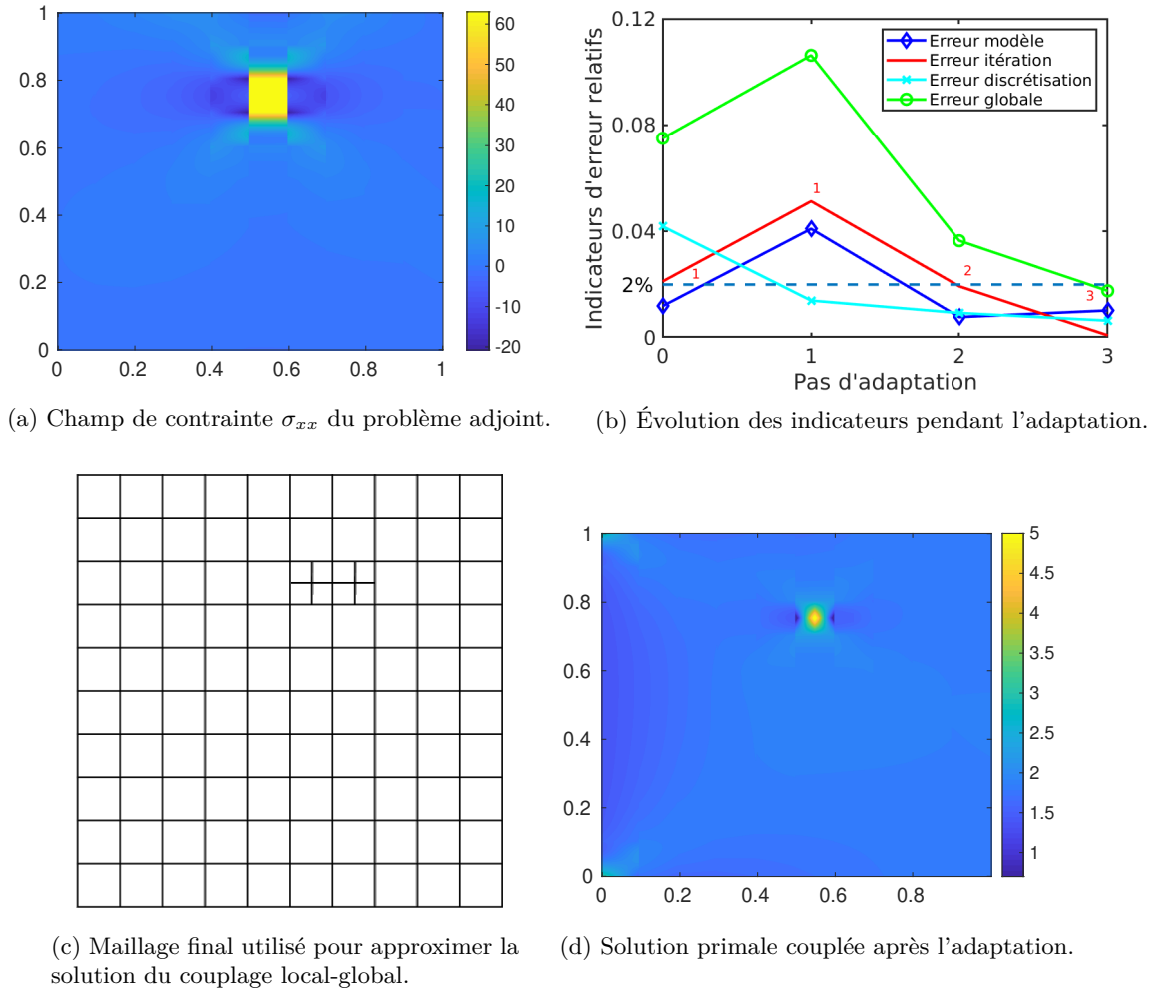


FIGURE 8.14 – Influence d'une variation hétérogène de E sur les éléments impactés et sa variation.

suivant :

- zone locale avec l'ensemble des éléments suivants : $\{91-100, 58, 59, 57, 25, 83, 68, 48, 89\}$ (apparition dans l'ordre d'ajout des éléments),
- 3 itérations de l'algorithme de couplage global-local,
- pas de raffinement local nécessaire.

8.3 Plaque trouée en flexion

La dernière application est une plaque avec une distribution régulière (périodique) de 160 trous, de rayon $r = 0,15$, soumise à un effort de flexion. Les conditions aux limites et les dimensions de la plaque sont données sur la Figure 8.18a. Le module de Young est $E = 1$.

En utilisant un point de vue local-global, la solution est approchée en considérant :

- un modèle global de la plaque sans trous avec un module de Young moyen $E_0 = (1 - \pi r^2)E$. Le maillage global utilisé est composé de 8×20 éléments quadratiques d'ordre 1.
- un modèle local constitué d'un ensemble de patches. Chaque patch représente un trou (voir Figure 8.18b). La taille d'un patch est de 1×1 , le module de Young vaut 1, et un

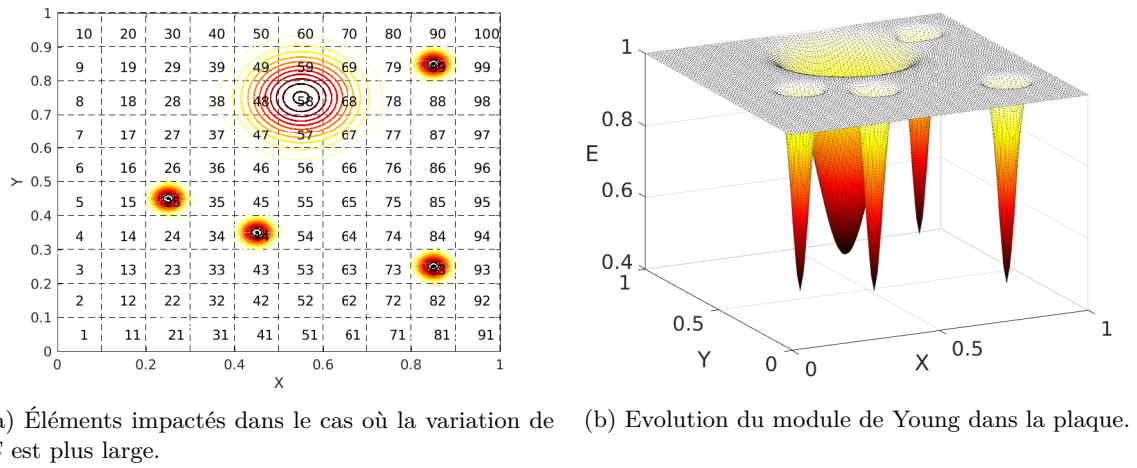


FIGURE 8.15 – Influence d'une variation hétérogène de E sur les éléments impactés et sa variation.

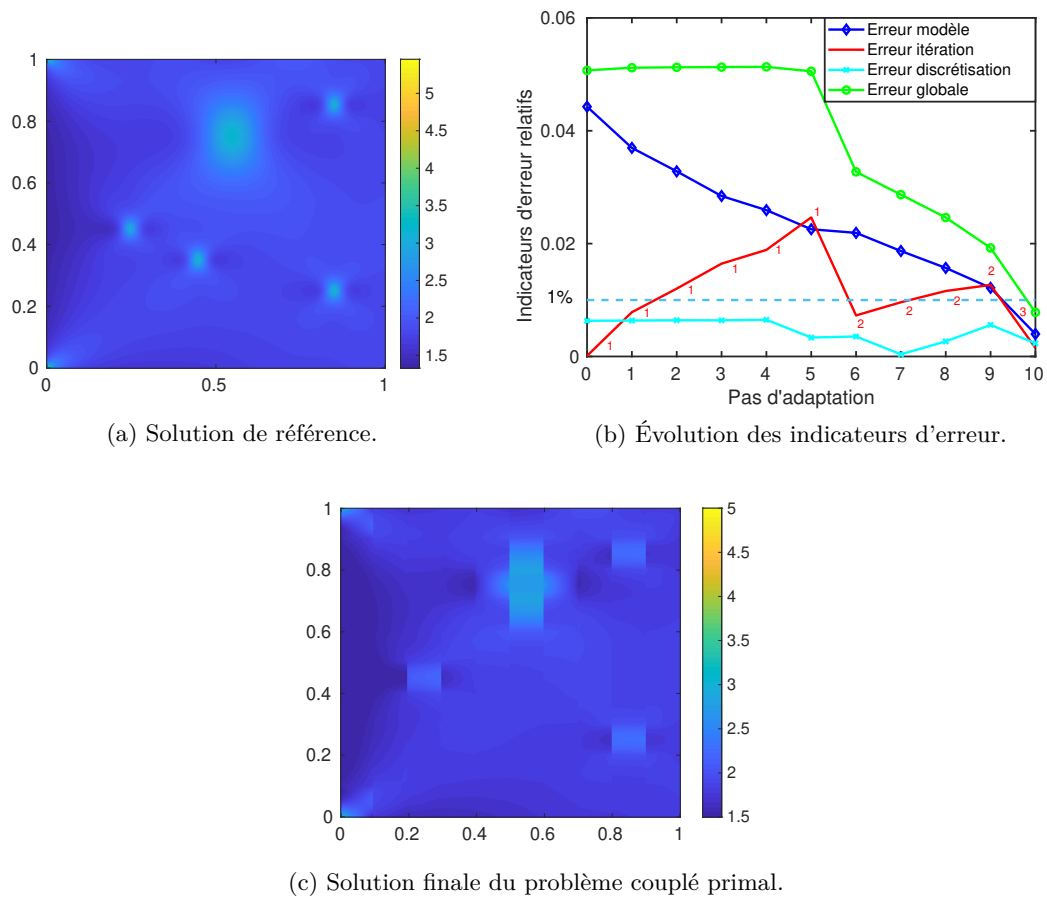


FIGURE 8.16 – Résultats pour une variation locale forte du module de Young. (a) et (c) représentent respectivement les champs ε_{xx} du problème de référence et du problème couplé à la fin de l'adaptation, (b) est l'évolution des différents indicateurs d'erreur à chaque pas d'adaptation.

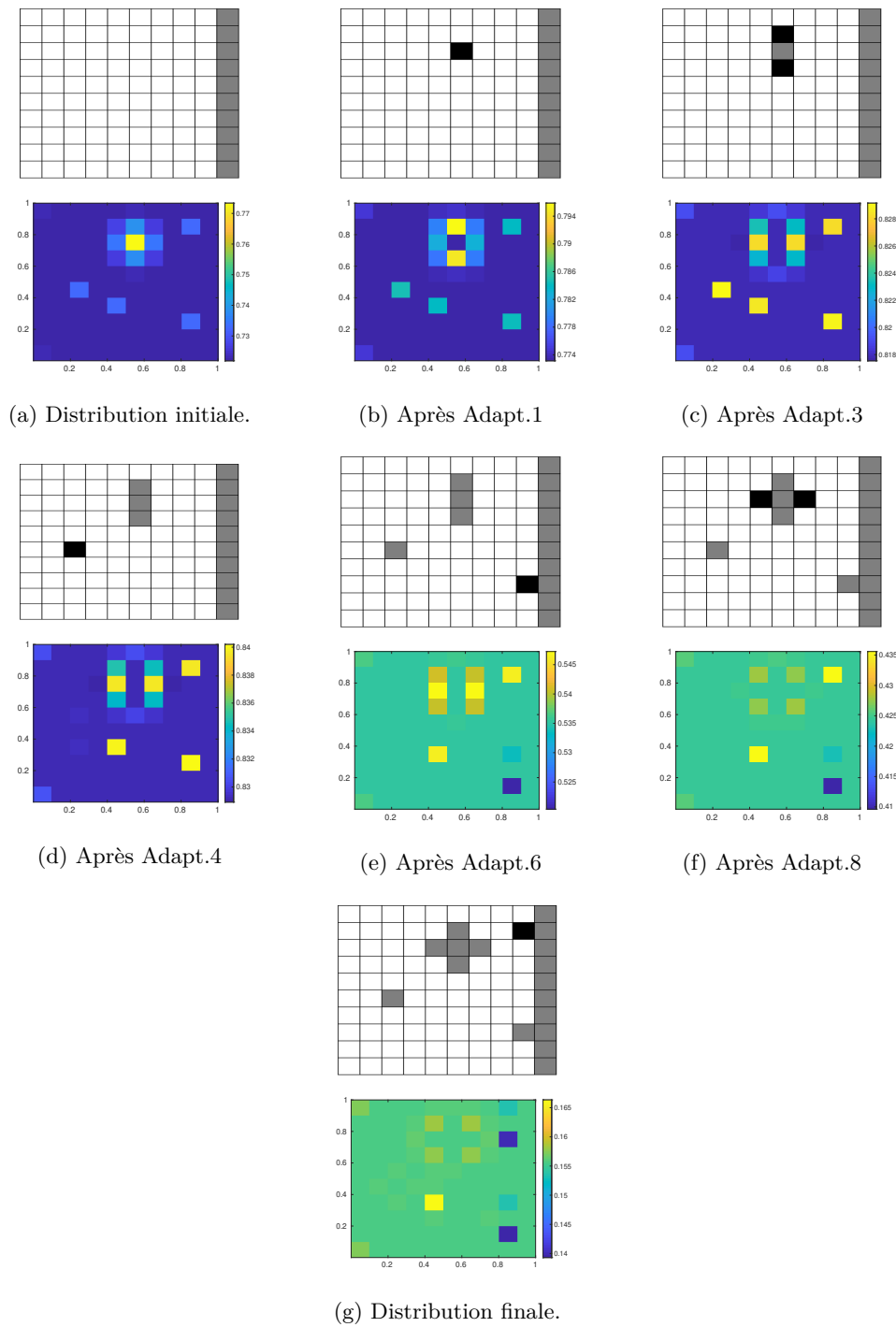


FIGURE 8.17 – Distribution de l'erreur globale à différentes étapes de la procédure d'adaptation. Sur la figure du dessus à chaque étape, la zone locale est en gris et les éléments nouvellement inclus dans cette zone sont en noir.

maillage non-structuré d'éléments triangles d'ordre 1 y est défini.

La solution de référence sur la composante ε_{yy} du champ de déformation est donnée sur la Figure 8.19a : l'ensemble de 160 trous est considéré dans ce cas.

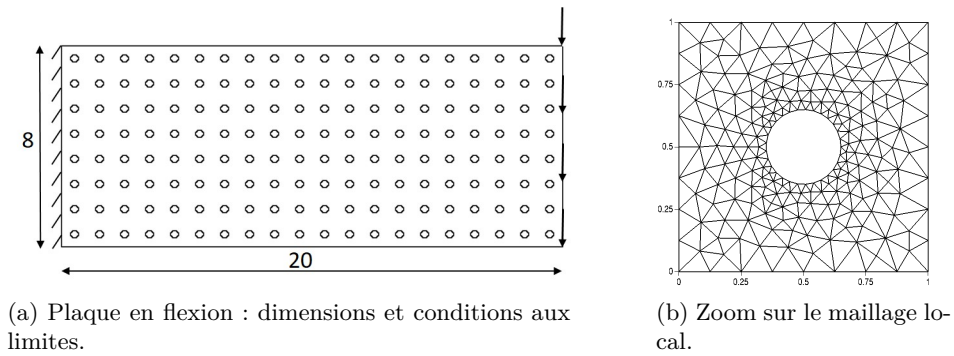


FIGURE 8.18 – Description du problème de plaque en flexion. La géométrie de référence (a) est composée de 160 trous qui peuvent chacun être représenté par un patch (b) dans l'approximation numérique.

8.3.1 Quantité d'intérêt en déplacement

Dans un premier temps, la quantité d'intérêt étudiée est le déplacement vertical moyen en bout de plaque où l'effort de flexion est appliqué, la zone locale se situe donc initialement dans cette zone. La solution approchée du problème primal couplé avec une telle zone locale est donnée sur la Figure 8.19b. Dans cette zone locale seulement il y a prise en compte des trous comme on peut le distinguer sur la droite de la Figure 8.19b.

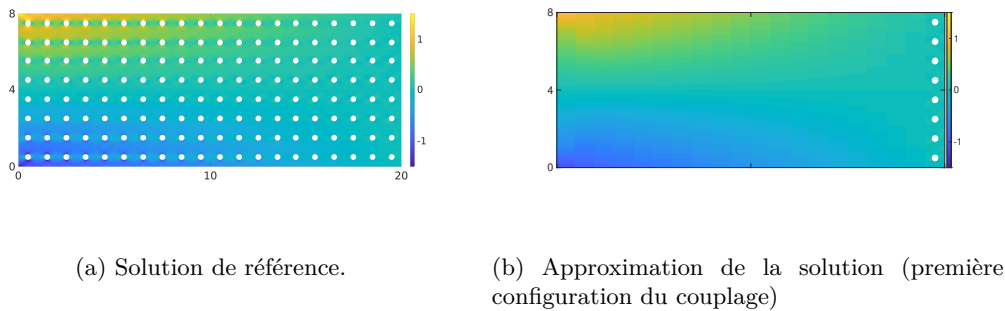


FIGURE 8.19 – Champs de déformation ε_{yy} pour le problème de plaque considéré : (a) tous les nœuds sont considérés (solution de référence, sans couplage), (b) une stratégie de couplage global-local est utilisée et seule une couche d'éléments macro en bout de poutre se trouve dans la zone locale où le trou est pris en compte.

Pour la procédure d'adaptation, on considère dans ce cas que le maillage de la zone locale est assez fin par rapport à la zone globale si bien que l'erreur de discrétisation est négligée dans la zone locale. En conséquence, le but de la procédure d'adaptation est ici de déterminer le nombre d'itérations nécessaire pour l'algorithme de couplage local-global ainsi que les trous qui ont besoin d'être représentés par un patch local. La tolérance d'erreur est choisie égale à 2%. La procédure d'adaptation est initiée avec la configuration précédemment décrite (voir la position de la zone locale sur la Figure 8.21a) et une itération dans l'algorithme de couplage. Grâce au couplage non-intrusif, les zones critiques sont analysées en ajoutant des patches dans le problème adjoint pour prendre en compte les sources d'erreur associées. L'ensemble des problèmes adjoints ainsi défini peut être résolu en parallèle.

Les résultats de l'adaptation sont montrés sur la Figure 8.20, où l'évolution des estimateurs d'erreur relatifs (en terme d'itérations et de modèle) sont évalués tout au long de la procédure (voir Figure 8.20a ainsi que la solution approchée du couplage final vérifiant la tolérance sur la quantité d'intérêt en déplacement (voir Figure 8.20b).

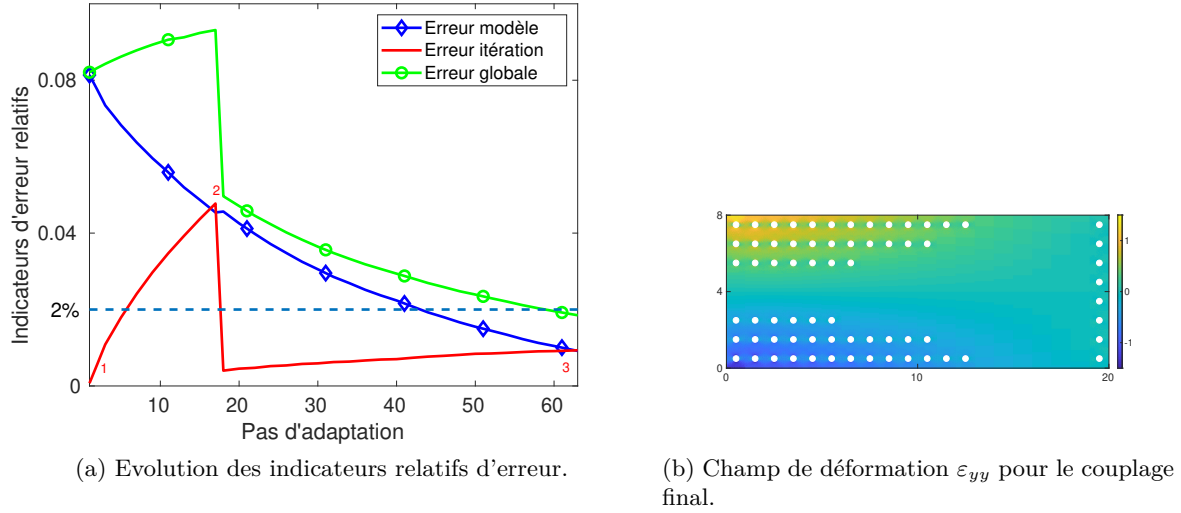


FIGURE 8.20 – Évolutions des estimateurs d'erreur et configuration finale du couplage pour contrôler la quantité d'intérêt dans une plaque avec des trous.

La configuration finale, optimale, du couplage est obtenue après 63 pas d'adaptation. Elle nécessite 3 itérations dans l'algorithme de couplage et un agrandissement de la zone locale pour prendre en compte l'effet de pollution venant du modèle global grossier. La procédure d'adaptation peut être développée de la façon suivante :

- des étapes 1 à 16, l'erreur de modèle prédomine si bien qu'un certain nombre de patches sont ajoutés à la zone locale. L'évolution de la zone locale au pas 16 est donnée sur la Figure 8.21b ;
- au pas 17, une itération supplémentaire est nécessaire ;
- des étapes 18 à 62, des nouveaux patches sont inclus dans la zone locale. L'évolution de cette zone au pas 62 est visible sur la Figure 8.21c ;
- au pas 63, une itération de plus est faite dans l'algorithme de couplage et l'erreur globale atteint la tolérance γ_{tol} .

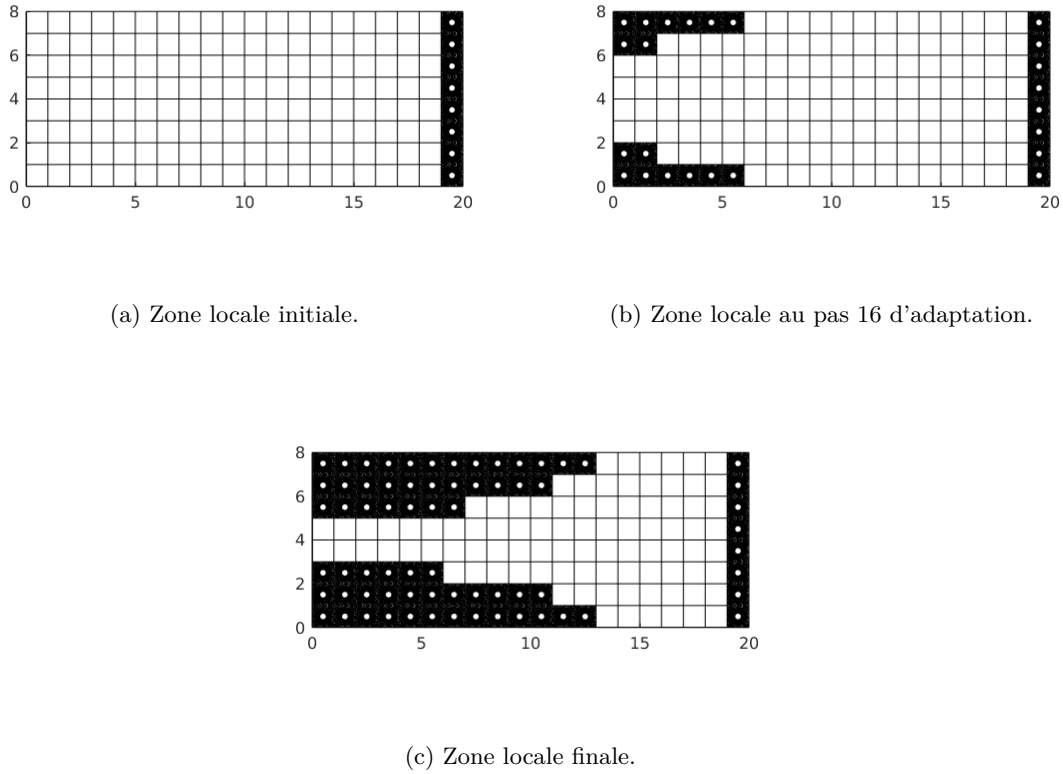
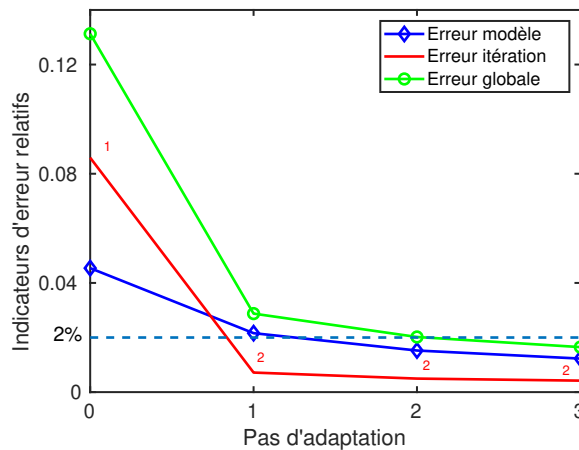


FIGURE 8.21 – Évolution de la zone locale au cours des pas d'adaptation.

8.3.2 Quantité d'intérêt en contrainte

On s'intéresse dorénavant à une quantité d'intérêt en contrainte moyenne de σ_{xx} dans la zone locale $\omega_Q \in \Omega$ qui correspond à l'élément macro de τ^H en haut à gauche. Pour cette quantité, le chargement de l'adjoint correspond à une pré-contrainte dans ω_Q . On commence la procédure d'adaptation avec $\Omega_L = \omega_Q$ et une tolérance d'erreur $\gamma_{tol} = 2\%$. Les résultats de l'adaptation sont donnés sur la Figure 8.22.

L'évolution de l'estimateur et des indicateurs d'erreur relatifs, sur la Figure 8.22a, indique que la tolérance d'erreur choisie est atteinte en 4 pas d'adaptation avec $n = 2$ itérations du couplage local-global et une zone locale Ω_L élargie. La configuration finale de Ω_L est décrite sur la Figure 8.22b et la solution approchée finale du couplage local-global est montrée sur la Figure 8.22c. Il est intéressant de noter que dans ce cas, seuls trois trous sur les 160 initialement présents dans la plaque ont besoin d'être représentés pour atteindre l'erreur de tolérance sur la quantité d'intérêt fixée. Ainsi très peu de ressources de calculs sont nécessaires.



(a) Évolution de l'estimateur d'erreur et des indicateurs.

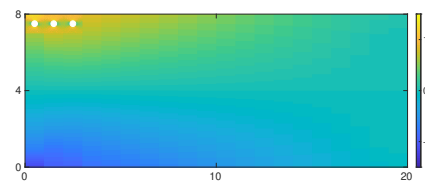
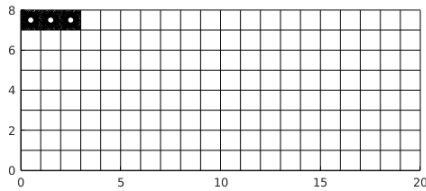

 (b) Emplacement final de Ω_L et Ω_0 , avec les maillages associés, à l'intérieur de la structure globale.
 (c) Champ de déformation ε_{xx} de la solution finale du couplage local-global.

FIGURE 8.22 – Évolution de la zone locale au cours des pas d'adaptation.

Bilan : Au cours de ce chapitre, nous avons mis en place la séparation des sources d'erreur et l'algorithme adaptatif sur plusieurs exemples. Plusieurs types de quantités d'intérêt ont été étudiés. La démarche adoptée a permis de définir la configuration du couplage en terme de position de la zone locale, de son raffinement et du nombre d'itérations de l'algorithme de couplage, qui est suffisant pour approximer la quantité d'intérêt choisie. Ainsi on a pu montrer que la zone locale avait besoin d'être placée uniquement dans certaines zones, et que l'algorithme de couplage n'avait pas besoin d'être mené à convergence pour décrire la quantité d'intérêt choisie. Néanmoins, nous avons pour le moment limité notre implémentation sur des cas linéaires. Comme précisé dans le chapitre 3, cette méthode n'est pas suffisante pour garantir les bornes d'erreurs, des techniques de type erreur en relation de comportement vont donc être utilisées dans le chapitre 9 pour traiter des cas linéaires et non-linéaires.