CATÉGORIES ET POINTS FIXES

Ce chapitre est une introduction aux notions de théorie des catégories qui seront utiles dans les autres chapitres de cette thèse. La section 2.1 établit simplement les notations, relatives aux catégories, qui seront utilisées par la suite et fait le point sur les connaissances qui sont attendues de la part du lecteur. Quant aux sections 2.2 à 2.4, elles établissent la version catégorique de la théorie des points fixes, qui modélise notamment l'induction et la coinduction en programmation fonctionnelle. Un bon tutoriel des notions d'induction et de coinduction traitées dans ces sections est (Jacobs et Rutten, 1997), toutefois complété ici pour cadrer avec les systèmes dirigés d'équations, introduits dans (Santocanale, 2001) et revus (avec une nouvelle présentation) dans (Fortier et Santocanale, 2013). Ensuite, à la section 2.5, on décrit une solution canonique aux systèmes dirigés d'équations dans la catégorie des ensembles, telle que démontrée dans (Santocanale, 2002b). Enfin, la section 2.6 décrit le cadre général dans lequel on peut interpréter les systèmes dirigés d'équations, soit celui des catégories μ-bicomplètes.

2.1 Ce qu'il faut savoir sur les catégories

Pour le néophyte, il faut savoir qu'une catégorie $\mathcal{C}$ est un graphe orienté (possiblement *très* infini) dont chaque sommet $A \in \mathcal{C}$ (ci-dessous appelé ***objet***) est muni d'une ***flèche identité*** $\mathtt{id}_A : A \to A$. Étant donné deux flèches $f : A \to B$ et $g : B \to C$, on doit avoir défini leur ***composition*** $f \cdot g : A \to C$ de sorte que les propriétés suivantes soient satisfaites.

Associativité. $f \cdot (g \cdot h) = (f \cdot g) \cdot h$, pour toutes flèches f, g, h composables.

Éléments neutres. $\mathtt{id}_A \cdot f = f = f \cdot \mathtt{id}_B$, pour tout $f : A \to B$.

Un exemple primordial de catégorie est donné par la catégorie $\mathcal{E}ns$, dont les objets sont les ensembles et les flèches sont les fonctions (la source et la cible de ces flèches sont respectivement le domaine et le codomaine).

Notons que, pour des raisons visuelles et contrairement à ce qui est souvent présenté, on prendra l'habitude de composer les fonctions (et les flèches en général) dans la direction vers laquelle elles pointent et en utilisant l'opérateur $'\cdot'$. L'usage est plutôt (à cause de l'importance de la catégorie $\mathcal{E}ns$) de dénoter la composition par $'\circ'$ et de composer à rebours. On suivra toutefois cette dernière convention pour la composition de foncteurs ou pour le passage d'un argument (qui se fera à droite). En résumé :

$$(f \cdot g)(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Du reste, puisque cette thèse n'est pas un ouvrage d'introduction aux catégories, on prendra pour acquis que le lecteur soucieux d'en comprendre les détails possède au moins une connaissance de base en théorie des catégories. Une telle connaissance peut être acquise dans l'excellent livre de Awodey (2006) ou encore dans les premiers chapitres de (Mac Lane, 1998).

Plus précisément, on n'introduira pas les concepts suivants, qui seront réputés familiers : diagramme commutatif, foncteur, transformation naturelle, objet initial, objet final, produit (cartésien), coproduit, catégorie bicartésienne et catégorie opposée (qu'on dénotera $\overline{\mathcal{C}}$ plutôt que $\mathcal{C}^{op}$). Le lecteur est, d'ailleurs, présumé à l'aise avec le principe de dualité.

Au plan des notations, un objet initial sera généralement dénoté $\mathbf{0}$ et l'unique flèche $\mathbf{0} \to A$ sera dénotée $?_A$. Un objet final, quant à lui, sera dénoté par $\mathbf{1}$ et l'unique flèche qu'il impose pour chaque objet sera dénotée $!_A : A \to \mathbf{1}$. Quant aux notations relatives aux produits et coproduits, on peut les retrouver dans les diagrammes commutatifs suivants.

$$
\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "\langle f, g \rangle"] \arrow[dr, "g"] & \\
A & A \times B \arrow[l, "\mathtt{pr}_0"] \arrow[r, "\mathtt{pr}_1"'] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\mathtt{in}_0"] \arrow[dr, "f"'] & A + B \arrow[d, dashed, "\{f, g\}"] & B \arrow[l, "\mathtt{in}_1"'] \arrow[dl, "g"] \\
 & Z &
\end{tikzcd}
$$

Figure 2.1 Diagrammes du produit et du coproduit

De plus, étant donné deux ensembles $I \subseteq J$ et une collection d'objets $(A_j)_{j \in J}$ d'une catégorie $\mathcal{C}$, on dénote par $\mathtt{pr}^J_I : \prod_{j \in J} A_j \to \prod_{i \in I} A_i$ la projection canonique. Si $I = \{i\}$ est un singleton, on se permettra d'écrire $\mathtt{pr}^J_i$ au lieu de $\mathtt{pr}^J_{\{i\}}$. De façon duale, on définit $\mathtt{in}^J_I : \coprod_{i \in I} A_i \to \coprod_{j \in J} A_j$ comme étant l'injection canonique.

Si $\mathcal{C}$ est une catégorie localement petite, alors étant donné deux objets $A, B \in \mathcal{C}$, l'ensemble des flèches $f : A \to B$ est dénoté $\mathcal{C}(A, B)$, au lieu de $\hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ comme c'est souvent le cas. Rappelons que $\mathcal{C}(\_, \_) : \overline{\mathcal{C}} \times \mathcal{C} \to \mathcal{E}ns$ est un foncteur. On peut généraliser cette notation comme suit. Étant donné deux foncteurs $F : \mathcal{D}_0 \to \mathcal{C}$ et $G : \mathcal{D}_1 \to \mathcal{C}$, soit $\mathcal{C}(F, G)$ le foncteur défini par la composition suivante :

$$\overline{\mathcal{D}_0} \times \mathcal{D}_1 \xrightarrow{\overline{F} \times G} \overline{\mathcal{C}} \times \mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}(\_, \_)} \mathcal{E}ns \,.$$

Pour plus de clarté, décrivons l'action de $\mathcal{C}(F, G)$ sur les objets et les flèches de $\overline{\mathcal{D}_0} \times \mathcal{D}_1$. On dénotera ces objets $x = (\overline{x_0}, x_1)$ ou $y = (\overline{y_0}, y_1)$ pour $x_0, y_0 \in \mathcal{D}_0$ et $x_1, y_1 \in \mathcal{D}_1$. On a alors $\mathcal{C}(F, G)(x) = \mathcal{C}(Fx_0, Gx_1)$ et similairement pour y.

Une flèche $f : x \to y$ de $\overline{\mathcal{D}_0} \times \mathcal{D}_1$ est de la forme $f = (\overline{u}, v)$ où $u : y_0 \to x_0$ est une flèche de $\mathcal{D}_0$ et $v : x_1 \to y_1$ est une flèche de $\mathcal{D}_1$. On décrit alors $\mathcal{C}(F,G)(f) : \mathcal{C}(Fx_0, Gx_1) \to \mathcal{C}(Fy_0, Gy_1)$ comme la fonction qui envoie chaque $h \in \mathcal{C}(Fx_0, Gx_1)$ sur la composition suivante :

$$Fy_0 \xrightarrow{Fu} Fx_0 \xrightarrow{h} Gx_1 \xrightarrow{Gv} Gy_1.$$

Lemme 2.1. *Soit I un ensemble d'indices et $\mathcal{C}$ une catégorie localement petite. Pour tout $i \in I$, soit $F_i : \mathcal{D}_0 \to \mathcal{C}$ et $G_i : \mathcal{D}_1 \to \mathcal{C}$ des foncteurs. Soit enfin*

$$F = (F_i)_{i \in I} : \mathcal{D}_0 \to \mathcal{C}^I \qquad , \qquad G = (G_i)_{i \in I} : \mathcal{D}_1 \to \mathcal{C}^I \,.$$

Alors

$$\prod_{i \in I} \mathcal{C}(F_i, G_i) = \mathcal{C}^I(F, G)\,.$$

Démonstration. Il suffit de dérouler la définition de chacun des deux foncteurs (à gauche et à droite de l'égalité) et de comparer les résultats sur les objets et les flèches de $\overline{\mathcal{D}_0} \times \mathcal{D}_1$. Commençons par le foncteur du côté gauche.

– *Objets.* Soit $x = (\overline{x_0}, x_1) \in \overline{\mathcal{D}_0} \times \mathcal{D}_1$. Alors on a

$$\begin{aligned}\Big(\prod_{i \in I} \mathcal{C}(F_i, G_i)\Big)(x) &= \prod_{i \in I}\Big(\mathcal{C}(F_i, G_i)(x)\Big) \\ &= \prod_{i \in I} \mathcal{C}(F_i x_0, G_i x_1) \\ &= \big\{\vec{h} = (h_i)_{i \in I} : \forall i, h_i \in \mathcal{C}(F_i x_0, G_i x_1)\big\}.\end{aligned}$$

– *Flèches.* Soit $f = (\overline{u}, v) : x \to y$ une flèche de $\overline{\mathcal{D}_0} \times \mathcal{D}_1$. Alors pour tout $\vec{h} = (h_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathcal{C}(F_i, G_i)(x)$, on a

$$\begin{aligned}\Big(\prod_{i \in I} \mathcal{C}(F_i, G_i)(f)\Big)(h) &= \Big(\big(\mathcal{C}(F_i, G_i)(f)\big)(h_i)\Big)_{i \in I} \\ &= \big(F_i u \cdot h_i \cdot G_i v\big)_{i \in I}\,.\end{aligned}$$

Procédons maintenant au même exercice pour le côté droit de l'équation.

– *Objets.* Soit $x = (\overline{x_0}, x_1) \in \overline{\mathcal{D}_0} \times \mathcal{D}_1$. Alors on a

$$\begin{aligned}\big(\mathcal{C}^I(F,G)\big)(x) &= \mathcal{C}^I(Fx_0, Gx_1)\\ &= \mathcal{C}^I\big((F_i x_0)_{i\in I}, (G_i x_1)_{i\in I}\big)\\ &= \big\{\vec{h} = (h_i)_{i\in I} : \forall i, h_i \in \mathcal{C}(F_i x_0, G_i x_1)\big\}.\end{aligned}$$

– *Flèches.* Soit $f = (\overline{u}, v) : x \to y$ une flèche de $\overline{\mathcal{D}_0} \times \mathcal{D}_1$. Alors pour tout $\vec{h} = (h_i)_{i\in I} \in \mathcal{C}^I(F,G)(x)$, on a

$$\begin{aligned}\big(\mathcal{C}^I(F,G)(f)\big)(h) &= Fu \cdot h \cdot Gv\\ &= (F_i u)_{i\in I} \cdot (h_i)_{i\in I} \cdot (G_i v)_{i\in I}\\ &= \big(F_i u \cdot h_i \cdot G_i v\big)_{i\in I}.\end{aligned}$$

□

2.2 Algèbres initiales et induction

Définition. Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ un endofoncteur. Une ***F-algèbre*** est une paire (A, a) où A est un objet de $\mathcal{C}$ et $a : F(A) \to A$ est une flèche de $\mathcal{C}$. On dit alors que A est le ***support*** et a est la ***structure*** de l'algèbre.

Exemple 1. La plupart des structures algébriques définies couramment en mathématiques sont des algèbres dans le sens présent. Par exemple, un groupe est un ensemble A (le support) muni d'un élément choisi (l'élément neutre), c'est-à-dire une flèche $e : \mathbf{1} \to A$ dans $\mathcal{E}ns$, d'une opération d'inversion $(-)^{-1} : A \to A$ puis d'une opération binaire $* : A \times A \to A$ satisfaisant certains axiomes. La structure algébrique naît donc de ces trois fonctions, e, $(-)^{-1}$ et $*$, ou de façon équivalente, de la fonction suivante.

$$a = \{e, (-)^{-1}, *\} : \mathbf{1} + A + (A \times A) \to A$$

La paire (A, a) est alors une algèbre du foncteur $F(X) = \mathbf{1} + X + (X \times X)$. ■

Étant donné un endofoncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, on peut former la catégorie $\mathcal{Alg}(F)$ dont les objets sont les F-algèbres, et dont les flèches $f : (A, a) \to (B, b)$ sont les flèches f de $\mathcal{C}$ pour lesquelles le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "a"'] & F(B) \arrow[d, "b"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd} .$$

La structure de catégorie de $\mathcal{Alg}(F)$ est alors induite par celle de $\mathcal{C}$. Une ***F*-algèbre initiale** est simplement un objet initial de la catégorie $\mathcal{Alg}(F)$.

Exemple 2. Considérons par exemple (toujours dans $\mathcal{Ens}$), l'algèbre des nombres naturels, donnée par le choix d'un élément $0 : \mathbf{1} \to \mathbb{N}$ et d'une opération *successeur*, $\texttt{Suc} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Il s'agit donc d'une algèbre du foncteur $F(X) = \mathbf{1} + X$. Il s'agit en fait de la F-algèbre initiale, puisqu'étant donné une autre F-algèbre $\mathbf{1} + A \xrightarrow{\{z,g\}} A$, on peut définir une *unique* fonction f faisant commuter le diagramme ci-dessous (c'est définir f par *induction sur* $\mathbb{N}$) :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1} + \mathbb{N} \arrow[r, dashed, "\mathbf{1} + f"] \arrow[d, "\{0, \texttt{Suc}\}"'] & \mathbf{1} + A \arrow[d, "\{z, g\}"] \\ \mathbb{N} \arrow[r, dashed, "f"'] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{aligned} f(0) &= z\,, \\ f(\texttt{Suc}\ n) &= g(f(n))\,. \end{aligned}$$

■

Plus généralement, la propriété universelle des algèbres initiales encode le concept d'*induction structurelle.*

Exemple 3. Toujours dans la catégorie des ensembles, soit $F(X) = \mathbf{1} + (A \times X)$, où A est un ensemble fixé. La F-algèbre initiale est le monoïde libre A^* (vu à la Section 1.1) dont la structure est donnée par une fonction $\texttt{Nil} : \mathbf{1} \to A^*$ dont l'image est le mot vide ε et la fonction $\texttt{Cons} : A \times A^* \to A^*$ (appelée *constructeur*) définie par $\texttt{Cons}(a, u) = a{:}u$. La propriété universelle de cette algèbre initiale permet de définir des fonctions par induction sur les mots, via le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1} + (A \times A^*) \arrow[r, dashed, "\mathbf{1} + (A \times f)"] \arrow[d, "\{\texttt{Nil}, \texttt{Cons}\}"'] & \mathbf{1} + (A \times X) \arrow[d, "\{z, g\}"] \\ A^* \arrow[r, dashed, "f"'] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{aligned} f(\varepsilon) &= z\,, \\ f(a{:}w) &= g(a, f(w))\,. \end{aligned}$$

■

Exemple 4. Changeons un peu de catégorie. Rappelons qu'un *treillis complet* est un ensemble partiellement ordonné $(T, \leq)$ tel que chaque sous-ensemble $E \subseteq T$ admet un infimum et un supremum. Or, les ensembles partiellement ordonnés correspondent à des catégories $\mathcal{T}$ dont les objets sont les éléments de T, et dont il existe une et une seule flèche $f_{a,b} : a \to b$ si et seulement si $a \leq b$ (Awodey, 2006, §1.4). Un endofoncteur $F : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ est alors, tout simplement, une fonction croissante de T vers T.

Étant donné un tel foncteur, en déroulant la définition d'une F-algèbre, on constate qu'il s'agit simplement un élément $x \in T$ tel que $F(x) \leq x$, c'est-à-dire s'il s'agit d'un *point préfixe*. Le point x est la F-algèbre initiale si, pour tout autre point préfixe y, on a $x \leq y$. En d'autres mots, l'algèbre initiale est le point $x = \inf\{y \in T : F(y) \leq y\}$, qui existe parce que T est complet. ■

Lemme 2.2 (Lambek, 1968)**.** *Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ un endofoncteur qui admet une algèbre initiale (A, a). Alors la flèche $a : F(A) \to A$ est inversible.*

Démonstration. Considérons le diagramme suivant, où f est obtenue par la propriété universelle des algèbres initiales :

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, dashed, "F(f)"] \arrow[d, "a"'] & F(F(A)) \arrow[r, "F(a)"] \arrow[d, "F(a)"] & F(A) \arrow[d, "a"] \\
A \arrow[r, dashed, "f"'] & F(A) \arrow[r, "a"'] & A
\end{tikzcd} .$$

Le carré gauche du diagramme commute par construction et le carré droit commute trivialement. Donc le rectangle extérieur commute. Par unicité, on trouve donc $f \cdot a = \mathtt{id}_A$. Ensuite, puisque le carré gauche est commutatif, on trouve

$$a \cdot f = F(f) \cdot F(a) = F(f \cdot a) = F(\mathtt{id}_A) = \mathtt{id}_{F(A)} . \qquad \square$$

En d'autres mots, le lemme de Lambek affirme que les F-algèbres initiales sont des *points fixes* de F (à isomorphisme près). Ainsi, on écrira « $A =_\mu F(A)$ » † pour indiquer que A est le support de l'algèbre initiale du foncteur F.

Définition. Soit $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ deux catégories et $F : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ un foncteur. Supposons que pour chaque objet $D \in \mathcal{D}$, le foncteur $F(-, D) : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ admette une algèbre initiale (A_D, a_D). L'***algèbre initiale paramétrée*** de F est la paire (F^μ, α) où $F^\mu : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ est le foncteur défini comme suit :

– **Sur les objets :** Pour tout $D \in \mathcal{D}$, on pose $F^\mu(D) := A_D$;
– **Sur les flèches :** Pour tout $f : X \to Y$ dans $\mathcal{D}$, $F^\mu(f) : A_X \to A_Y$ est l'unique

---

†. La terminologie usuelle est plutôt celle du μ-calcul : « $A = \mu X.F(X)$ ». On préférera toutefois la nôtre car on souhaite représenter des structures plus complexes par des systèmes d'équations (voir Section 2.4).

flèche h qui fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
F(A_X, X) \arrow[r, dashed, "F(h,X)"] \arrow[dd, "a_X"'] & F(A_Y, X) \arrow[d, "F(A_Y, f)"] \\
 & F(A_Y, Y) \arrow[d, "a_Y"] \\
A_X \arrow[r, dashed, "h"'] & A_Y
\end{tikzcd} \quad ;$$

et où $\alpha : F(F^\mu -, -) \to F^\mu$ est la transformation naturelle $\alpha = (a_D)_{D \in \mathcal{D}}$.

Exemple 5. Soit $F : \mathcal{Ens} \times \mathcal{Ens} \to \mathcal{Ens}$ le foncteur $F(X, Y) = \mathbf{1} + (Y \times X)$. Par l'Exemple 3, pour tout ensemble Y, l'algèbre initiale du foncteur $F(-, Y)$ est le monoïde libre Y^* avec la structure suivante :

$$\{\mathtt{Nil}, \mathtt{Cons}\} : \mathbf{1} + (Y \times Y^*) \to Y^* .$$

L'algèbre initiale paramétrée de F est donc le foncteur $F^\mu(Y) = Y^*$ et, pour tout $f : A \to B$, $F^\mu(f) : A^* \to B^*$ est la fonction définie comme suit :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} + (A \times A^*) \arrow[r, dashed, "\mathbf{1} + A \times F^\mu(f)"] \arrow[dd, "\{\mathtt{Nil}, \mathtt{Cons}\}"'] & 1 + (A \times B^*) \arrow[d, "1 + (f \times B^*)"] \\
 & 1 + (B \times B^*) \arrow[d, "\{\mathtt{Nil}, \mathtt{Cons}\}"] \\
A^* \arrow[r, dashed, "F^\mu(f)"'] & B^*
\end{tikzcd} \qquad \begin{array}{r} F^\mu(f)(\varepsilon) = \varepsilon \\ F^\mu(f)(a{:}w) = f(a){:}F^\mu(f)(w) . \end{array}$$

En d'autres mots, on a $F^\mu(f)$ est la fonction $\mathtt{map}_f$ qui associe, à une liste d'éléments de A, la liste des images de ces éléments par f. ■

On aura besoin de deux propriétés des algèbres initiales paramétrées dans le cadre de cette thèse, apparaissant dans (Santocanale, 2001). La première, le Lemme de

Bekić, est un outil permettant de résoudre des systèmes d'équations fonctorielles du type

$$\left\{ \begin{array}{l} X =_{\mu} F(X,Y) \\ Y =_{\mu} G(X,Y) \end{array} \right\}$$

où $F : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ et $G : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ sont deux foncteurs. Le résultat dit que pour résoudre un tel système, il suffit de le résoudre d'abord en X, pour obtenir :

$$\left\{ \begin{array}{l} X = \ \ F^{\mu}(Y) \\ Y =_{\mu} G(X,Y) \end{array} \right\}$$

qu'on peut transformer, en substituant la première équation dans la seconde, en :

$$Y =_{\mu} G(F^{\mu}(Y), Y)\,.$$

Il ne reste plus ensuite qu'à résoudre cette équation en Y.

Lemme 2.3 (Bekić)**.** *Soit deux foncteurs, $F : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ et $G : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{D}$. Soit (F^{μ}, α) l'algèbre initiale paramétrée de F (dont on suppose l'existence) et supposons, de plus, qu'il existe $X \in \mathcal{C}$, $Y \in \mathcal{D}$ et deux flèches,*

$$x : F^{\mu}(Y) \to X \qquad \textit{et} \qquad y : G(X,Y) \to Y\,,$$

tels que la paire $\big((X,Y),(x,y)\big)$ soit l'algèbre initiale du foncteur

$$\langle F^{\mu} \circ \mathtt{pr}_{\mathcal{D}}\,,\, G\rangle \;:\; \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{C} \times \mathcal{D}\,.$$

Alors la paire $\big((F^{\mu}(Y), Y)\,,\,(f,g)\big)$, où

$$f = \alpha_Y \qquad \textit{et} \qquad g = G(x,Y) \cdot y\,,$$

est l'algèbre initiale du foncteur $\langle F, G\rangle : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{C} \times \mathcal{D}$.

Démonstration. Voir (Santocanale, 2002b, Proposition 2.1). □

Au Chapitre 4, on travaillera avec des transformations naturelles $\beta_{X,Y}$ de la forme de l'équation (2.1) ci-dessous. Le résultat qui suit est un théorème d'existence d'un point fixe paramétré pour ces transformations.

Proposition 2.4. *Soit $\mathcal{C}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ trois catégories, dont $\mathcal{C}$ admet les produits finis. Soit F, G et Q trois foncteurs comme suit :*

$$F : \mathcal{C} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{C}\,,$$
$$G : \mathcal{Z} \to \mathcal{C}\,,$$
$$Q : \overline{\mathcal{C}} \times \overline{\mathcal{Y}} \times \mathcal{Z} \to \mathcal{E}ns\,.$$

Considérons une transformation naturelle en $x \in \mathcal{C}$, $y \in \mathcal{Y}$ et $z \in \mathcal{Z}$ de la forme suivante :

$$\vartheta_{x,y,z} : \mathcal{C}(x, Gz) \times Q(x, y, z) \to \mathcal{C}(F(x, y), Gz)\,. \tag{2.1}$$

Soit (F^μ, α) l'algèbre initiale paramétrée de F (dont on suppose l'existence).

Alors pour tout objet $y \in \mathcal{Y}$ et $z \in \mathcal{Z}$ et tout élément $q \in Q(F^\mu(y), y, z)$, il existe une unique flèche $f = f_{y,z}(q) \in \mathcal{C}(F^\mu(y), Gz)$ satisfaisant l'équation suivante :

$$\alpha_y \cdot f = \vartheta_{F^\mu(y),y,z}(f, q)\,,$$

où $\alpha_y : F(F^\mu(y), y) \to F^\mu(y)$ est la structure de l'algèbre initiale. De plus, la collection $(f_{y,z})_{y\in\mathcal{Y},z\in\mathcal{Z}}$ est une transformation naturelle.

Démonstration. Il s'agit simplement, à un changement de variables près, de l'énoncé du Théorème 3.1 de (Santocanale, 2001). □

On aura, en fait, besoin d'une version vectorielle de cette dernière proposition.

Corollaire 2.5. *Soit $\mathcal{C}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ trois catégories, dont $\mathcal{C}$ admet les produits finis.*

Soit I un ensemble d'indices et F, Q deux foncteurs comme suit :

$$F : \mathcal{C}^I \times \mathcal{Y} \to \mathcal{C}^I\,,$$
$$Q : \overline{\mathcal{C}^I} \times \overline{\mathcal{Y}} \times \mathcal{Z} \to \mathcal{E}ns\,.$$

Soit aussi, pour tout $i \in I$, un foncteur $G_i : \mathcal{Z} \to \mathcal{C}$. Soit enfin ϑ une transformation naturelle en $x \in \mathcal{C}^I$, $y \in \mathcal{Y}$ et $z \in \mathcal{Z}$ de la forme suivante :

$$\vartheta_{x,y,z} : \prod_{i\in I} \mathcal{C}(\mathtt{pr}_i(x), G_i z) \times Q(x,y,z) \to \prod_{i\in I} \mathcal{C}(\mathtt{pr}_i \circ F(x,y), G_i z)\,.$$

Soit (F^μ, α) l'algèbre initiale paramétrée de F (dont on suppose l'existence).

Alors pour tout objet $y \in \mathcal{Y}$ et $z \in \mathcal{Z}$ et tout élément $q \in Q(F^\mu(y), y, z)$, il existe une unique flèche $f = f_{y,z}(q)$ de $\mathcal{C}^I$ satisfaisant l'équation suivante :

$$\alpha_y \cdot f = \vartheta_{F^\mu(y),y,z}(f, q)\,.$$

De plus, la collection $(f_{y,z})_{y\in\mathcal{Y}, z\in\mathcal{Z}}$ est une transformation naturelle.

Démonstration. Soit $G = \langle G_i \rangle_{i\in I} : \mathcal{Z} \to \mathcal{C}^I$. Pour tout $x \in \mathcal{C}^I$, on a trivialement $x = \big(\mathtt{pr}_i(x)\big)_{i\in I}$. Ainsi, par le Lemme 2.1, on a

$$\prod_{i\in I} \mathcal{C}(\mathtt{pr}_i(x), G_i z) = \mathcal{C}^I(x, Gz)\,,$$
$$\prod_{i\in I} \mathcal{C}(\mathtt{pr}_i \circ F(x,y), G_i z) = \mathcal{C}^I(F(x,y), Gz)\,.$$

Le résultat découle donc directement de la Proposition 2.4, avec $\mathcal{C}^I$ au lieu de $\mathcal{C}$.

□

2.3 Coalgèbres finales et coinduction

Une coalgèbre (finale) est simplement le dual d'une algèbre (initiale).

Définition. Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ un endofoncteur. Une F***-coalgèbre*** est une paire (Z, z) où Z est un objet de $\mathcal{C}$ et $z : Z \to F(Z)$ est une flèche de $\mathcal{C}$. On définit la catégorie $\mathcal{C}oalg(F)$ dont les objets sont les F-coalgèbres, et dont les flèches $f : (Z, z) \to (Y, y)$ sont les flèches f de $\mathcal{C}$ pour lesquelles le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "z"'] & Y \arrow[d, "y"] \\ F(Z) \arrow[r, "F(f)"'] & F(Y) \end{tikzcd} .$$

Une F***-coalgèbre finale*** est un objet final de la catégorie $\mathcal{C}oalg(F)$.

Exemple 1. Dans la catégorie des ensembles, soit $F(X) = A \times X$, où A est un ensemble fixé. La F-coalgèbre finale est donnée par l'ensemble A^ω des mots infinis sur A, avec la structure $A^\omega \xrightarrow{\langle \texttt{Head}, \texttt{Tail} \rangle} A \times A^\omega$ (revoir la section 1.1). Étant donné une autre F-coalgèbre $Z \xrightarrow{\langle f, g \rangle} A \times Z$, la propriété universelle de la coalgèbre finale permet de définir la fonction orb : $Z \to A^\omega$ qui associe, à chaque $z \in Z$, son *orbite observable* :

$$\begin{aligned} \texttt{Head}(\mathrm{orb}(z)) &= f(z)\,, \\ \texttt{Tail}(\mathrm{orb}(z)) &= \mathrm{orb}(g(z)). \end{aligned} \qquad \blacksquare$$

Exemple 2. Considérons, comme dans l'Exemple 4 de la Section 2.2, une catégorie $\mathcal{T}$ issue d'un treillis complet T. Une F-coalgèbre est, cette-fois, un point *postfixe*, c'est-à-dire un point $z \in T$ tel que $z \leq F(z)$. La F-coalgèbre finale est alors le point $z = \sup\{y \in T : y \leq F(y)\}$. $\blacksquare$

On peut, bien sûr, dualiser tout ce qu'on a dit sur les algèbres initiales à la Section 2.2 pour obtenir des résultats sur les coalgèbres finales. La coalgèbre finale paramétrée d'un foncteur $F : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ est dénotée $F^\nu : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$. Prenons au moins l'espace nécessaire pour dualiser le Corollaire 2.5.

Lemme 2.6. *Soit $\mathcal{C}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ trois catégories, dont $\mathcal{C}$ admet les coproduits finis. Soit I un ensemble d'indices et G, Q deux foncteurs comme suit :*

$$G : \mathcal{C}^I \times \mathcal{Z} \to \mathcal{C}^I\,,$$
$$Q : \mathcal{C}^I \times \overline{\mathcal{Y}} \times \mathcal{Z} \to \mathcal{E}ns\,.$$

Soit aussi, pour tout $i \in I$, soit un foncteur $F_i : \mathcal{Y} \to \mathcal{C}$. Soit enfin ϑ une transformation naturelle en $x \in \mathcal{C}^I$, $y \in \mathcal{Y}$ et $z \in \mathcal{Z}$ de la forme suivante :

$$\vartheta_{x,y,z} : \prod_{i\in I} \mathcal{C}(F_i y\,,\, \mathtt{pr}_i(x)) \times Q(x,y,z) \to \prod_{i\in I} \mathcal{C}(F_i y\,,\, \mathtt{pr}_i \circ G(x,z))\,.$$

Soit (G^ν, ζ) la coalgèbre finale paramétrée de G (dont on suppose l'existence).

Alors pour tout objet $y \in \mathcal{Y}$ et $z \in \mathcal{Z}$ et tout élément $q \in Q(G^\nu(z), y, z)$, il existe une unique flèche $g = g_{y,z}(q)$ de $\mathcal{C}^I$ satisfaisant l'équation suivante :

$$g \cdot \zeta_z = \vartheta_{G^\nu(z),y,z}(g,q)\,.$$

où $\zeta_z : G^\nu(z) \to G(G^\nu(z), z)$ est la structure de l'algèbre initiale. De plus, la collection $(g_{y,z})_{y\in\mathcal{Y}, z\in\mathcal{Z}}$ est une transformation naturelle.

L'objectif ici est plutôt de parler du *principe de coinduction*, qui est le principe de preuve associé aux coalgèbres finales dans la catégorie des ensembles (en opposition au *principe d'induction* des algèbres initiales).

Définition. Soit (Z, z) une F-coalgèbre dans la catégorie $\mathcal{E}ns$. Une ***bisimulation*** sur Z est une relation $R \subseteq Z \times Z$ munie d'une structure de F-coalgèbre $\gamma : R \to F(R)$ telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[d, "z"'] & R \arrow[l, "\mathtt{pr}_0\restriction_R"'] \arrow[r, "\mathtt{pr}_1\restriction_R"] \arrow[d, "\gamma"] & Z \arrow[d, "z"] \\ F(Z) & F(R) \arrow[l, "F(\mathtt{pr}_0\restriction_R)"] \arrow[r, "F(\mathtt{pr}_1\restriction_R)"'] & F(Z) \end{tikzcd} \quad . \tag{2.2}$$

Le diagramme ci-dessus indique que $\mathtt{pr}_0 \restriction_R$ et $\mathtt{pr}_1 \restriction_R$ sont deux morphismes de F-coalgèbres. Si (Z, z) est une F-coalgèbre finale, la propriété universelle de celle-ci permet de conclure, par unicité, qu'on a $\mathtt{pr}_0 \restriction_R \; = \mathtt{pr}_1 \restriction_R$. On obtient donc le principe suivant.

Théorème 2.7 (Principe de coinduction)**.** *Soit (Z, z) une F-coalgèbre finale dans $\mathfrak{Ens}$ et soit $x, y \in Z$. S'il existe une bisimulation $R \subseteq Z \times Z$ telle que $(x, y) \in R$, alors $x = y$.*

Démonstration. En utilisant l'équation $\mathtt{pr}_0 \restriction_R \; = \mathtt{pr}_1 \restriction_R$ et puisque $(x, y) \in R$, on trouve : $x = \mathtt{pr}_0(x, y) = \mathtt{pr}_1(x, y) = y$. □

Exemple 3. La relation d'égalité sur Z est (trivialement) toujours une bisimulation. Le principe de coinduction indique simplement que toutes les autres bisimulations sont contenues dans celle-ci. ■

Exemple 4. Considérons de nouveau la F-coalgèbre finale $A^\omega \xrightarrow{\langle \mathtt{Head}, \mathtt{Tail} \rangle} A \times A^\omega$ de l'Exemple 1. Le but de cet exemple est de caractériser les bisimulations sur A^ω.

Soit $\approx$ une bisimulation sur A^ω et soit γ sa structure, dont on dénote les images comme suit :

$$\gamma(\alpha, \beta) = (h_{\alpha\beta}, \alpha', \beta').$$

Pour tout $\alpha, \beta \in A^\omega$ tels que $\alpha \approx \beta$, le diagramme (2.2) signifie qu'on a les égalités suivantes :

$$(\mathtt{Head}(\alpha), \mathtt{Tail}(\alpha)) = (h_{\alpha\beta}, \alpha') \qquad , \qquad (\mathtt{Head}(\beta), \mathtt{Tail}(\beta)) = (h_{\alpha\beta}, \beta').$$

Or, cela implique $\mathtt{Head}(\alpha) = \mathtt{Head}(\beta)$, $\mathtt{Tail}(\alpha) = \alpha'$ et $\mathtt{Tail}(\beta) = \beta'$. Mais puisque le codomaine de γ est $F(\approx)$, on peut conclure $\mathtt{Tail}(\alpha) \approx \mathtt{Tail}(\beta)$.

Réciproquement soit $\approx$ une relation sur A^ω telle que pour tout $\alpha, \beta \in A^\omega$,

$$\alpha \approx \beta \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \texttt{Head}(\alpha) = \texttt{Head}(\beta) \\ \texttt{Tail}(\alpha) \approx \texttt{Tail}(\beta) \end{cases} . \tag{2.3}$$

Alors en définissant la structure $\gamma(\alpha, \beta) = (\texttt{Head}(\alpha), \texttt{Tail}(\alpha), \texttt{Tail}(\beta))$ sur $\approx$, on obtient une bisimulation sur A^ω.

Ainsi, pour démontrer *par coinduction* que deux mots $\alpha, \beta \in A^\omega$ sont égaux, il suffit de trouver une relation $\approx$ satisfaisant (2.3) et de démontrer $\alpha \approx \beta$. Philosophiquement, la stratégie d'une preuve par coinduction est donc de repousser le problème de démontrer l'égalité à plus tard (vers la queue du mot), contrairement à la stratégie de l'induction, qui consiste plutôt à ramener le problème vers les situations de base. ■

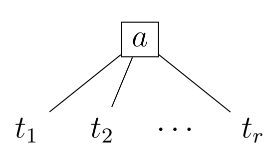
Exemple 5. On veut représenter les arbres possiblement infinis mais à branchements finis, dont les sommets sont étiquetés par un alphabet A. Soit $\mathcal{T}_A$ l'ensemble de ces arbres. Alors un arbre $t \in \mathcal{T}_A$ est complètement déterminé par l'étiquette $\texttt{Lab}(t)$ de sa racine ainsi que la liste (finie) $\texttt{Fils}(t)$ des sous-arbres de celle-ci. On a donc une structure de coalgèbre du foncteur $F(X) = A \times X^*$:

$$\langle \texttt{Lab}, \texttt{Fils} \rangle : \mathcal{T}_A \to A \times \mathcal{T}_A^* .$$

Puisque les branches infinies sont admises, alors de façon analogue à l'exemple de A^ω, $\mathcal{T}_A$ est le support de la F-coalgèbre finale. Sa structure est donc inversible, son inverse étant la fonction suivante :

$$\texttt{Cons} : A \times \mathcal{T}_A^* \to \mathcal{T}_A$$

$$\langle a, [t_1, t_2 \ldots t_r] \rangle \mapsto$$



.

De quoi peut avoir l'air une bisimulation sur $\mathcal{T}_A$? Par un calcul semblable à celui de l'Exemple 4, il s'agit d'une relation $\approx$ telle que $\forall x, y \in \mathcal{T}_A$:

$$x \approx y \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mathtt{Lab}(x) = \mathtt{Lab}(y) \\ \mathtt{Fils}(x) \approx^* \mathtt{Fils}(y) \end{cases} ,$$

où $\approx^*$ est la relation sur $\mathcal{T}_A^* =_\mu 1 + \mathcal{T}_A \times \mathcal{T}_A^*$ définie récursivement comme suit :

$$\varepsilon \approx^* \varepsilon \,,$$

$$s{:}u \approx^* t{:}v \iff s \approx t \text{ et } u \approx^* v \;.$$

En d'autres mots, si $x = \mathtt{Cons}\langle a, [s_1 \ldots s_m]\rangle$ et $y = \mathtt{Cons}\langle b, [t_1 \ldots t_n]\rangle$, alors $x \approx y$ doit impliquer les relations suivantes :

$$a = b \qquad , \qquad m = n \qquad , \qquad \forall i, s_i \approx t_i \;.$$

■

2.4 Systèmes dirigés d'équations

L'exemple 5 de la section précédente n'en était pas un de structure *purement* coinductive, puisque le foncteur F dépendait d'une définition de X^*, laquelle est plutôt inductive. On peut toutefois représenter $\mathcal{T}_A$ comme une solution, en la variable T, du système à deux équations et deux inconnues suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} T & =_\nu & A \times L \\ L & =_\mu & \mathbf{1} + (T \times L) \end{array} \right\} . \tag{2.4}$$

Dans cette section, on étudie comment on peut représenter des objets par de tels systèmes, auxquels on ajoute une notion de *priorité* pour imposer l'unicité de leur solution.

Étant donné un ensemble fixé $\mathbb{V}$ de variables propositionnelles, l'ensemble $\mathfrak{F}$ des formules admissibles du côté droit d'un tel système est le plus petit ensemble contenant $\mathbb{V} \cup \{0,1\}$ et tel que pour tout $\varphi_0, \varphi_1 \in \mathfrak{F}$, on a $(\varphi_0 + \varphi_1) \in \mathfrak{F}$ et $(\varphi_0 \times \varphi_1) \in \mathfrak{F}$. L'ensemble des sous-formules apparaissant dans une formule φ sera dénoté $\mathsf{SF}(\varphi)$, et celui des variables y apparaissant sera dénoté $\mathsf{VAR}(\varphi)$.

Étant donné une catégorie bicartésienne $\mathcal{C}$ quelconque, on peut interpréter les formules comme des foncteurs. En effet, soit V un sous-ensemble fini de $\mathbb{V}$. On dénote par $\mathfrak{F}_V$ l'ensemble des formules $\varphi \in \mathfrak{F}$ telles que $\mathsf{VAR}(\varphi) \subseteq V$. Soit $\varphi \in \mathfrak{F}_V$ et $\mathcal{C}^V = \prod_{X \in V} \mathcal{C}$. On définit l'***interprétation*** $[\varphi]_V$ de φ dans la catégorie bicartésienne $\mathcal{C}_V := \mathcal{F}un(\mathcal{C}^V, \mathcal{C})$ comme suit :

– si $\varphi = X \in V$, alors $[\varphi]_V = \mathtt{pr}_X^V$;
– si $\varphi = 0$ (resp. $\varphi = 1$), alors $[\varphi]_V = \mathbf{0}$ (resp. $[\varphi]_V = \mathbf{1}$) ;
– if $\varphi = (\varphi_0 + \varphi_1)$ (resp. $\varphi = (\varphi_0 \times \varphi_1)$), alors $[\varphi]_V = [\varphi_0]_V + [\varphi_1]_V$ (resp. $[\varphi_0]_V \times [\varphi_1]_V$).

Il faut noter que cette définition ne dépend de V que dans la mesure où celui-ci doit être assez gros pour contenir $\mathsf{VAR}(\varphi)$. Une simple induction montre, en effet, que si $V \subseteq W$, alors $[\varphi]_W = [\varphi]_V \circ \mathtt{pr}_V^W$, où $\mathtt{pr}_V^W : \mathcal{C}^W \to \mathcal{C}^V$ est le foncteur de projection. De plus, puisque le produit et le coproduit sont associatifs (à isomorphisme près) dans n'importe quelle catégorie bicartésienne, on se permettra d'éviter les parenthèses superflues et d'utiliser les notations compactes $\prod_{i \in I} \varphi_i$ et $\coprod_{i \in I} \varphi_i$ (pour un ensemble I fini) pour dénoter respectivement le produit et le coproduit indicé par I, sachant que l'interprétation des formules en sera inchangée.

Un ***système dirigé d'équations*** est un triplet $\mathcal{S} = \langle B, F, p \rangle$, où B est un sous-ensemble fini de $\mathbb{V}$ et $F : B \to \mathfrak{F}$, $p : B \to \mathbb{N}$ sont deux fonctions appelées respectivement « ***formule associée*** » et « ***priorité*** ». L'***équation associée*** à une variable $X \in B$ s'écrit « $X =_{p_X} F_X$ ». Les éléments de B sont appelés ***variables liées*** du système, et on dénotera plutôt B par $\mathsf{BV}(\mathcal{S})$ par la suite. On définit aussi les ensembles suivants :

– ***Sous-formules de $\mathcal{S}$:*** $\mathsf{SF}(\mathcal{S}) = \bigcup_{X \in \mathsf{BV}(\mathcal{S})} \mathsf{SF}(F_X)$;
– ***Variables de $\mathcal{S}$:*** $\mathsf{VAR}(\mathcal{S}) = \bigcup_{X \in \mathsf{BV}(\mathcal{S})} \mathsf{VAR}(F_X)$;
– ***Variables libres de $\mathcal{S}$:*** $\mathsf{FV}(\mathcal{S}) = \mathsf{VAR}(\mathcal{S}) \setminus \mathsf{BV}(\mathcal{S})$.

On dira que $\mathcal{S}$ est ***clos*** si $\mathsf{FV}(\mathcal{S}) = \varnothing$. On veut résoudre les équations associées à un système $\mathcal{S}$, c'est-à-dire, pour chaque $X \in \mathsf{BV}(\mathcal{S})$, interpréter X comme l'algèbre initiale (en la variable X) du foncteur $[F_X]_{\mathsf{VAR}(\mathcal{S})}$ si p_X est impair, ou comme la coalgèbre finale du même foncteur si p_X est pair.

Puisqu'on doit respecter la priorité des variables dans la résolution d'un système $\mathcal{S}$, on définit la solution par récurrence. Soit donc :

$$\mathsf{MAX}(\mathcal{S}) := \{X \in \mathsf{BV}(\mathcal{S}) \mid p_X \geq p_Y, \text{pour tout } Y \in \mathsf{BV}(\mathcal{S})\}.$$

Le ***système prédécesseur de $\mathcal{S}$*** est obtenu en retirant à $\mathcal{S}$ ses variables liées de priorité maximale, c'est-à-dire :

$$\mathsf{P}(\mathcal{S}) := \langle \mathsf{BV}(\mathcal{S}) \setminus \mathsf{MAX}(\mathcal{S}), F{\restriction}_{\mathsf{BV}(\mathcal{S})\setminus\mathsf{MAX}(\mathcal{S})}, p{\restriction}_{\mathsf{BV}(\mathcal{S})\setminus\mathsf{MAX}(\mathcal{S})} \rangle.$$

Définition. Soit $V \subseteq \mathbb{V}$ un ensemble fini tel que $\mathsf{FV}(\mathcal{S}) \subseteq V$ et $\mathsf{BV}(\mathcal{S}) \cap V = \varnothing$. La ***solution de $\mathcal{S}$*** est un foncteur $[\![\mathcal{S}]\!]_V : \mathcal{C}^V \to \mathcal{C}^{\mathsf{BV}(\mathcal{S})}$ défini comme suit :

– Si $\mathsf{BV}(\mathcal{S}) = \varnothing$, alors $\mathcal{C}^{\mathsf{BV}(\mathcal{S})} = \mathbb{1}$, où $\mathbb{1}$ est la catégorie terminale (avec un seul objet et sa flèche identité). On pose donc $[\![\mathcal{S}]\!]_V$ comme étant l'unique foncteur de $\mathcal{C}^V$ vers $\mathbb{1}$.
– Sinon, soit $V' = \mathsf{MAX}(\mathcal{S}) \cup V$. Alors on a $V' \cap \mathsf{BV}(\mathsf{P}(\mathcal{S})) = \varnothing$ et

$$\mathsf{FV}(\mathsf{P}(\mathcal{S})) \subseteq \mathsf{MAX}(\mathcal{S}) \cup \mathsf{FV}(\mathcal{S}) \subseteq \mathsf{MAX}(\mathcal{S}) \cup V = V'.$$

  Donc, par récurrence, $[\![\mathsf{P}(\mathcal{S})]\!]_{V'} : \mathcal{C}^{V'} \to \mathcal{C}^{\mathsf{BV}(\mathsf{P}(\mathcal{S}))}$ est défini. Soit G et H les foncteurs suivants :

$$\begin{aligned}
&G := \langle [F_X]_{\mathsf{BV}(\mathcal{S})\cup V} \mid X \in \mathsf{MAX}(\mathcal{S}) \rangle : \mathcal{C}^{\mathsf{BV}(\mathcal{S})\cup V} \to \mathcal{C}^{\mathsf{MAX}(\mathcal{S})}, \\
&H := \langle\, G \,,\, [\![\mathsf{P}(\mathcal{S})]\!]_{V'} \circ \mathtt{pr}_{V'}^{\mathsf{BV}(\mathcal{S})\cup V} \,\rangle : \\
&\quad \mathcal{C}^{\mathsf{BV}(\mathcal{S})\cup V} = \mathcal{C}^{\mathsf{BV}(\mathcal{S})} \times \mathcal{C}^V \longrightarrow \mathcal{C}^{\mathsf{MAX}(\mathcal{S})} \times \mathcal{C}^{\mathsf{BV}(\mathsf{P}(\mathcal{S}))} = \mathcal{C}^{\mathsf{BV}(\mathcal{S})}.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Si $p(\mathsf{MAX}(S))$ est impair, soit $[\![\mathcal{S}]\!]_V$ l'algèbre initiale paramétrée du foncteur H ; sinon, $p(\mathsf{MAX}(\mathcal{S}))$ est pair et on pose $[\![\mathcal{S}]\!]_V$ comme la coalgèbre finale paramétrée du foncteur H.

Le lecteur pourrait objecter à la précédente définition qu'il existe des catégories pour lesquelles les algèbres initiales et coalgèbres finales considérées dans celle-ci n'existent pas. On concentrera notre attention sur les catégories dans lesquelles elles existent. De telles catégories sont dites μ-bicomplètes et on les définit plus précisément à la Section 2.6.

La solution d'un système $\mathcal{S}$ permet d'interpréter n'importe quelle formule $\varphi \in \mathfrak{F}_V$ par rapport à celle-ci. La ***signification*** de φ est le foncteur $[\![\varphi]\!]_V^{\mathcal{S}} : \mathcal{C}^V \to \mathcal{C}$ suivant :

$$[\![\varphi]\!]_V^{\mathcal{S}} = [\varphi]_{\mathsf{BV}(\mathcal{S})\cup V} \circ \langle [\![\mathcal{S}]\!]_V, \mathtt{id}\rangle.$$

Lemme 2.8. *Pour toute formule φ définie sur un ensemble V de variables tel que $\mathsf{FV}(\mathcal{S}) \subseteq V$ et $V \cap \mathsf{BV}(\mathcal{S}) = \varnothing$, il existe un isomorphisme naturel*

$$\eta \ : \ [\![\varphi]\!]_V^{\mathcal{S}} \to [\![\varphi]\!]_{\mathsf{MAX}(\mathcal{S})\cup V}^{\mathsf{P}(\mathcal{S})}(\vec{f}, \mathtt{id})\,,$$

où $\vec{f}$ est le foncteur $\langle [\![X]\!]_V^{\mathcal{S}} \rangle_{X\in\mathsf{MAX}(\mathcal{S})}$. De plus, si $\varphi = X \in \mathsf{MAX}(\mathcal{S})$, cet isomorphisme est l'identité.

Démonstration. Par définition, on a, d'un côté,

$$[\![\varphi]\!]_V^{\mathcal{S}} = [\varphi]_{\mathsf{BV}(\mathcal{S})\cup V} \circ \langle [\![\mathcal{S}]\!]_V, \mathtt{id}\rangle$$

et de l'autre côté,

$$\begin{aligned}[\![\varphi]\!]_{V\cup\mathsf{MAX}(\mathcal{S})}^{\mathsf{P}(\mathcal{S})}(\vec{f}, \mathtt{id}) &= [\varphi]_{\mathsf{BV}(\mathsf{P}(\mathcal{S}))\cup\mathsf{MAX}(\mathcal{S})\cup V} \circ \langle [\![\mathsf{P}(\mathcal{S})]\!]_{\mathsf{MAX}(\mathcal{S})\cup V}(\vec{f}, \mathtt{id}), \vec{f}, \mathtt{id}\rangle \\ &= [\varphi]_{\mathsf{BV}(\mathcal{S})\cup V} \circ \langle [\![\mathsf{P}(\mathcal{S})]\!]_{\mathsf{MAX}(\mathcal{S})\cup V}(\vec{f}, \mathtt{id}), \vec{f}, \mathtt{id}\rangle\ .\end{aligned}$$

Il suffit donc de vérifier qu'on a un isomorphisme naturel

$$\widetilde{\eta} \;:\; [\![\mathcal{S}]\!]_V \to \langle [\![\mathsf{P}(\mathcal{S})]\!]_{\mathsf{MAX}(\mathcal{S})\cup V}(\vec{f},\mathtt{id}),\vec{f}\rangle$$

Soit $V' = \mathsf{MAX}(\mathcal{S}) \cup V$. Puisque le codomaine de chacun de ces deux foncteurs est $\mathcal{C}^{\mathsf{BV}(X)}$, il suffit de vérifier que pour tout $X \in \mathsf{BV}(\mathcal{S})$, on a un isomorphisme naturel

$$\theta_X \;:\; \mathtt{pr}_X^{\mathsf{BV}(\mathcal{S})} \circ [\![\mathcal{S}]\!]_V \to \mathtt{pr}_X^{\mathsf{BV}(\mathcal{S})} \circ \langle [\![\mathsf{P}(\mathcal{S})]\!]_{V'}(\vec{f},\mathtt{id}),\vec{f}\rangle\;.$$

– Si $X \in \mathsf{MAX}(\mathcal{S})$, alors on a

$$\begin{aligned}
\mathtt{pr}_X^{\mathsf{BV}(\mathcal{S})} \circ \langle [\![\mathsf{P}(\mathcal{S})]\!]_{V'}(\vec{f},\mathtt{id}),\vec{f}\rangle &= \mathtt{pr}_X^{\mathsf{MAX}(\mathcal{S})} \circ \vec{f} \\
&= [\![X]\!]_V^{\mathcal{S}} \\
&= [X]_{\mathsf{BV}(\mathcal{S})\cup V} \circ \langle [\![\mathcal{S}]\!]_V,\mathtt{id}\rangle \\
&= \mathtt{pr}_X^{\mathsf{BV}(\mathcal{S})\cup V} \circ \langle [\![\mathcal{S}]\!]_V,\mathtt{id}\rangle \\
&= \mathtt{pr}_X^{\mathsf{BV}(\mathcal{S})} \circ [\![\mathcal{S}]\!]_V\;.
\end{aligned}$$

  Il suffit donc de prendre $\theta_X = \mathtt{id}$. Cela conclut du même coup la deuxième partie de l'énoncé.

– Si $X \in \mathsf{BV}(\mathsf{P}(\mathcal{S}))$, soit $\tau : [\![\mathcal{S}]\!]_V \to H\big([\![\mathcal{S}]\!]_V,\mathtt{id}\big)$ un isomorphisme naturel (on sait qu'il en existe un par construction de $[\![\mathcal{S}]\!]_V$). Remarquons qu'on a

$$\begin{aligned}
\mathtt{pr}_X^{\mathsf{BV}(\mathcal{S})} \circ \langle [\![\mathsf{P}(\mathcal{S})]\!]_{V'}(\vec{f},\mathtt{id}),\vec{f}\rangle &= \mathtt{pr}_X^{\mathsf{BV}(\mathsf{P}(\mathcal{S}))} \circ [\![\mathsf{P}(\mathcal{S})]\!]_{V'}(\vec{f},\mathtt{id}) \\
&= \mathtt{pr}_X^{\mathsf{BV}(\mathsf{P}(\mathcal{S}))} \circ [\![\mathsf{P}(\mathcal{S})]\!]_{V'} \circ \mathtt{pr}_{V'}^{\mathsf{BV}(\mathcal{S})}\big([\![\mathcal{S}]\!]_V,\mathtt{id}\big) \\
&= \mathtt{pr}_X^{\mathsf{BV}(\mathcal{S})} \circ H\big([\![S]\!]_V,\mathtt{id}\big)\;.
\end{aligned}$$

  Il suffit donc de prendre $\theta_X = \mathtt{pr}_X^{\mathsf{BV}(\mathcal{S})} \circ \tau$. □

Comme dans le cas de l'interprétation $[\varphi]_V$ des formules, la signification $[\![\varphi]\!]_V^{\mathcal{S}}$ ne dépend de V que dans le mesure où celui-ci est assez grand pour que la définition ait un sens. En effet, si $V \subseteq W$, une simple induction démontre $[\![\varphi]\!]_W^{\mathcal{S}} = [\![\varphi]\!]_V^{\mathcal{S}} \circ \mathtt{pr}_V^W$.

Pour cette raison, on omettra généralement d'indiquer l'ensemble V de variables sur lequel on définit la signification d'une formule, indiquant simplement $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{S}}$. Par ailleurs, si le système d'équations $\mathcal{S}$ par rapport auquel on interprète la signification de φ est sous-entendu dans le contexte, on omettra également de l'indiquer, préférant la simple notation $[\![\varphi]\!]$.

Proposition 2.9. *Soit $\mathcal{S}$ un système dirigé d'équations et $X \in \mathsf{BV}(\mathcal{S})$. Si p_X est un nombre impair, alors il existe un isomorphisme naturel $\alpha_X : [\![F_X]\!] \to [\![X]\!]$. Si, au contraire, p_X est un nombre pair, alors il existe un isomorphisme naturel $\zeta_X : [\![X]\!] \to [\![F_X]\!]$.*

Démonstration. Fixons un ensemble V de variables tel qu'on ait $\mathsf{FV}(\mathcal{S}) \subseteq V$ et $V \cap \mathsf{BV}(\mathcal{S}) = \varnothing$. On procède par induction sur la priorité de $\mathsf{MAX}(\mathcal{S})$.

Soit $X \in \mathsf{MAX}(\mathcal{S})$. Alors par définition, on a :

$$\begin{aligned} [\![X]\!]_V &= [X]_{\mathsf{BV}(\mathcal{S})\cup V} \circ \langle [\![\mathcal{S}]\!]_V, \mathtt{id}\rangle \\ &= \mathtt{pr}_X^{\mathsf{BV}(\mathcal{S})\cup V} \circ \langle [\![\mathcal{S}]\!]_V, \mathtt{id}\rangle \\ &= \mathtt{pr}_X^{\mathsf{BV}(\mathcal{S})} \circ [\![\mathcal{S}]\!]_V. \end{aligned}$$

D'un autre côté, en se référant à l'équation (2.5), on trouve :

$$\begin{aligned} \mathtt{pr}_X^{\mathsf{BV}(\mathcal{S})} \circ H\langle [\![\mathcal{S}]\!]_V, \mathtt{id}\rangle &= \mathtt{pr}_X^{\mathsf{MAX}(\mathcal{S})} \circ G\langle [\![\mathcal{S}]\!]_V, \mathtt{id}\rangle \\ &= [F_X]_{\mathsf{BV}(\mathcal{S})\cup V} \langle [\![\mathcal{S}]\!]_V, \mathtt{id}\rangle \\ &= [\![F_X]\!]_V \ . \end{aligned}$$

Ainsi, si p_X est impair, alors $[\![\mathcal{S}]\!]_V$ est l'algèbre initiale paramétrée du foncteur H. Soit $\sigma : H\langle [\![\mathcal{S}]\!]_V, \mathtt{id}\rangle \to [\![\mathcal{S}]\!]_V$ sa structure, qui est donc un isomorphisme naturel, et on pose :

$$\alpha_X := \mathtt{pr}_X^{\mathsf{BV}(\mathcal{S})}(\sigma) \ : \ [\![F_X]\!]_V \to [\![X]\!]_V \ .$$

De la même façon, si p_X est pair, alors $[\![\mathcal{S}]\!]_V$ est la coalgèbre finale paramétrée de H. Soit $\tau : [\![\mathcal{S}]\!]_V \to H\langle [\![\mathcal{S}]\!]_V, \mathtt{id}\rangle$ sa structure et on pose :

$$\zeta_X := \mathtt{pr}_X^{\mathsf{BV}(\mathcal{S})}(\tau) \ : \ [\![X]\!]_V \to [\![F_X]\!]_V \ .$$

On vient, du même coup, de démontrer le cas de base de l'induction, puisque dans celui-ci, on a $\mathsf{BV}(\mathcal{S}) = \mathsf{MAX}(\mathcal{S})$.

Soit maintenant $X \in \mathsf{BV}(\mathcal{S}) \setminus \mathsf{MAX}(\mathcal{S})$. Par le Lemme 2.8, il existe deux isomorphismes naturels :

$$\begin{aligned} \eta \ &: \ [\![X]\!]_V^{\mathcal{S}} \to [\![X]\!]_{\mathsf{MAX}(\mathcal{S})\cup V}^{\mathsf{P}(\mathcal{S})}(\vec{f}, \mathtt{id}) \ ; \\ \xi \ &: \ [\![F_X]\!]_V^{\mathcal{S}} \to [\![F_X]\!]_{\mathsf{MAX}(\mathcal{S})\cup V}^{\mathsf{P}(\mathcal{S})}(\vec{f}, \mathtt{id}) \ , \end{aligned}$$

où $\vec{f}$ est le foncteur $\langle [\![Y]\!]_V^{\mathcal{S}} \rangle_{Y \in \mathsf{MAX}(\mathcal{S})}$.

Ainsi, si p_X est impair, alors par hypothèse d'induction, on peut trouver un isomorphisme naturel

$$\beta \ : \ [\![F_X]\!]_{\mathsf{MAX}(\mathcal{S})\cup V}^{\mathsf{P}(\mathcal{S})} \to [\![X]\!]_{\mathsf{MAX}(\mathcal{S})\cup V}^{\mathsf{P}(\mathcal{S})} \ .$$

Il suffit alors de prendre $\alpha_X = (\theta_c)_{c \in \mathcal{C}^V}$ où θ_c est la composition suivante :

$$[\![F_X]\!]_V^{\mathcal{S}}(c) \xrightarrow{\xi_c} [\![F_X]\!]_{\mathsf{MAX}(\mathcal{S})\cup V}^{\mathsf{P}(\mathcal{S})}(\vec{f}(c), c) \xrightarrow{\beta_{\vec{f}(c),c}} [\![X]\!]_{\mathsf{MAX}(\mathcal{S})\cup V}^{\mathsf{P}(\mathcal{S})}(\vec{f}(c), c) \xrightarrow{\eta_c^{-1}} [\![X]\!]_V^{\mathcal{S}}(c) \ .$$

Similairement, si p_X est pair, alors par hypothèse d'induction, on peut trouver un isomorphisme naturel

$$\gamma \ : \ [\![X]\!]_{\mathsf{MAX}(\mathcal{S})\cup V}^{\mathsf{P}(\mathcal{S})} \to [\![F_X]\!]_{\mathsf{MAX}(\mathcal{S})\cup V}^{\mathsf{P}(\mathcal{S})} \ .$$

Il suffit alors de prendre $\zeta_X = (\theta_c)_{c \in \mathcal{C}^V}$ où θ_c est la composition suivante :

$$[\![X]\!]_V^{\mathcal{S}}(c) \xrightarrow{\eta_c} [\![X]\!]_{\mathsf{MAX}(\mathcal{S})\cup V}^{\mathsf{P}(\mathcal{S})}(\vec{f}(c), c) \xrightarrow{\gamma_{\vec{f}(c),c}} [\![F_X]\!]_{\mathsf{MAX}(\mathcal{S})\cup V}^{\mathsf{P}(\mathcal{S})}(\vec{f}(c), c) \xrightarrow{\xi_c^{-1}} [\![F_X]\!]_V^{\mathcal{S}}(c) \ .$$

$\square$

2.5 Jeux de parité

Dans (Santocanale, 2002b), on trouve la description d'une solution canonique aux systèmes dirigés d'équations dans la catégorie des ensembles, que nous rappelons dans cette section. Cette solution fait appel à la théorie des jeux de parité, généralisée à partir des travaux de Joyal (1997) en y ajoutant des jeux *circulaires*. Rappelons d'abord de quoi il s'agit.

Un ***jeu de parité*** est un type particulier de jeux à deux joueurs, qu'on appellera σ et π. Formellement, il s'agit d'un triplet $J = \langle G, h, j\rangle$ où G est un graphe étiqueté déterministe (dont on se soucie peu de l'alphabet) et h, j sont deux fonctions appelées respectivement ***hauteur*** et ***joueur associé*** dont les types sont les suivants :

$$
\begin{aligned}
&h : G \to \mathbb{N} \cup \{\infty\} \\
&j : h^{-1}(\mathbb{N}) \to \{\sigma, \pi\}.
\end{aligned}
$$

Étant donné une collection d'ensembles $E = \{E_v\}_{h(v)=\infty}$, les règles du jeu sont les suivantes. Au début de la partie, un jeton est placé sur un sommet $u_0 \in G$ tel que $h(u_0) < \infty$. Celui-ci détermine à qui le tour (σ ou π) selon la valeur de $j(u_0)$. Un tour, pour ce joueur, consiste simplement à choisir un successeur v de u_0 et déplacer le jeton sur celui-ci. S'il choisit un v tel que $h(v) = \infty$, le joueur choisit un élément de l'ensemble E_v et remporte aussitôt la partie. Si aucun mouvement n'est possible, il perd automatiquement. Autrement, un nouveau tour a lieu selon la nouvelle position du jeton (le joueur est déterminé par $j(v)$). Dans le cas où une partie est infinie, soit I l'ensemble des sommets sur lesquels le jeton s'est retrouvé une infinité de fois au cours de celle-ci et soit $m = \max(h(I))$. Si m est un nombre pair, on décrète que σ remporte la partie. Sinon, m est un nombre impair et on décrète que c'est π qui l'emporte.

Une partie est donc déterminée par une paire (γ, x) où γ est un chemin dans le graphe G et x est un choix d'élément de l'ensemble $E_{\varsigma_\gamma u_0}$ si γ est fini et $h(\varsigma_\gamma u_0) = \infty$ (sinon, on pose $x = \perp$). Une ***stratégie gagnante déterministe*** pour le joueur σ est un ensemble S de parties gagnantes pour σ tel que, pour tout $(\gamma, x) \in S$ et tout chemin fini $\beta \sqsubset \gamma$, la propriété suivante est satisfaite. Soit $u = \varsigma_\beta u_0$:

– si $j(u) = \pi$, alors *pour tout* symbole a pour lequel il existe $v \in G$ tel que $u \xrightarrow{a} v$, on peut trouver $(\gamma', x') \in S$ tel que $\beta \cdot a \sqsubseteq \gamma'$.

– si $j(u) = \sigma$, alors il existe *au plus un* symbole a pour lequel il existe $v \in G$ et $(\gamma', x') \in S$ tels que $u \xrightarrow{a} v$ et $\beta \cdot a \sqsubseteq \gamma'$.

En d'autres mots, une stratégie gagnante déterministe pour σ est un ensemble de parties gagnantes qui prévoit une et une seule riposte à chaque coup possible de π. On dénote par $W_G(E)$ l'ensemble des stratégies gagnantes pour σ dans le jeu G avec la collection d'ensembles E.

Revenons maintenant aux systèmes dirigés d'équations. Soit $\mathcal{S}$ un tel système dont on suppose, sans perte de généralité, que pour tout $X \in \mathsf{BV}(\mathcal{S})$, F_X est de la forme $\prod_{i \in I} X_i$ ou $\coprod_{i \in I} X_i$ pour I fini et $X_i \in \mathsf{VAR}(\mathcal{S}) \cup \{0, 1\}$. On définit le jeu de parité $J(\mathcal{S}) := \langle G, h, j \rangle$ comme suit :

– le support du graphe G est $\mathsf{VAR}(\mathcal{S}) \cup \{0, 1\}$ et il y a une transition $X \to Y$ si et seulement si $X \in \mathsf{BV}(\mathcal{S})$ et Y est une sous-formule de F_X ;

– on pose $h(0) = h(1) = 0$, $h(X) = p_X$ si $X \in \mathsf{BV}(\mathcal{S})$ et $h(X) = \infty$ autrement ;

– on pose $j(0) = \sigma$, $j(1) = \pi$ et, pour $X \in \mathsf{BV}(\mathcal{S})$, $j(X) = \sigma$ si $F_X = \coprod_{i \in I} X_i$, et $j(X) = \pi$ si $F_X = \prod_{i \in I} X_i$.

Prenons comme exemple le système d'équations (2.4), légèrement remanié en un système dirigé $\mathcal{S}$ (avec les priorités) tel que chaque membre de droite ait un seul connecteur ($+$ ou $\times$). La Figure 2.2 montre la conversion de $\mathcal{S}$ en le jeu $J(\mathcal{S})$. La hauteur des sommets est indiquée par les boîtes en pointillé et les joueurs associés sont identifiés par les types de noeuds ($\oplus$ pour σ et $\otimes$ pour π).

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{ccc} T & =_2 & A \times L \\ L & =_1 & 1 + X \\ X & =_1 & T \times L \end{array} \right\} \quad \xmapsto{J}$$

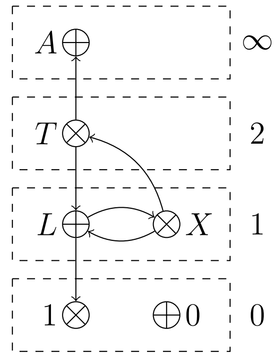


Figure 2.2 Un système dirigé $\mathcal{S}$ et le jeu $J(\mathcal{S})$ associé

Comment décrire une stratégie gagnante dans cet exemple, à partir de la position de départ T ? Il faut préparer un symbole $a \in A$ pour le cas où π jouerait vers la position A, et une stratégie gagnante à partir de L pour l'autre situation. Une telle stratégie peut consister soit en un mouvement vers la position 1 (auquel cas la partie est remportée), ou bien vers la position X, auquel cas il faut prévoir deux ripostes (une stratégie à partir de T et une à partir de L) selon le choix de π. Puisque $h(X)$ est pair, on peut se permettre un nombre infini de passages par T dans la stratégie, mais pas un nombre infini de passages par L sans d'abord revenir par T (puisque $h(L)$ est impair).

On peut encoder une stratégie gagnante pour σ par un arbre t possiblement infini mais à branchements finis, muni d'un étiquetage $\lambda : t \to A$ des sommets. En effet, à la racine de t, $\lambda(a)$ encode le symbole qu'on choisit si π déplace le jeton vers A, et l'autre riposte est constituée d'un nombre fini d'aller-retours entre L et X où, chaque fois, on doit prévoir un nouvelle stratégie à partir de T (un nouvel arbre). Chaque aller-retour encode un des sous-arbres à partir de la racine. On peut donc dire que $W_{J(\mathcal{S})}(A) \cdot \mathtt{pr}_T$ est isomorphe à $\mathcal{T}_A$. Cela relève d'un résultat plus général, qui est le théorème principal de (Santocanale, 2002b).

Théorème 2.10 (Santocanale, 2002b, Th. 5.4)**.** $[\![\mathcal{S}]\!](E) \cong W_{J(\mathcal{S})}(E)$.

Le dernier exemple indique, au passage, l'importance de la priorité dans un système dirigé d'équations (et pas seulement celle de la parité de celle-ci). En effet, supposons qu'on change les priorités sans changer leur parité, pour obtenir le nouveau système suivant :

$$\mathcal{S}' = \left\{ \begin{array}{ccc} T & =_2 & A \times L \\ L & =_3 & 1 + X \\ X & =_1 & T \times L \end{array} \right\}.$$

Alors dans le jeu $J(\mathcal{S}')$, il n'est plus autorisé de passer un nombre infini de fois par le sommet T, puisque pour le faire, il faut aussi passer une infinité de fois par le sommet L. Mais puisque p_L est impair et $p_L > p_T$, alors une telle partie donnerait la victoire au joueur π. $[\![T]\!]^{\mathcal{S}'}(A)$ est donc maintenant l'ensemble des arbres *finis* étiquetés par A.

Toutefois, dans les cas où la parité de la priorité sera la seule valeur importante dans un système dirigé donné, on se permettra de dénoter les équations « $X =_\mu F_X$ » ou « $X =_\nu F_X$ », selon le cas.

2.6 Catégories μ-bicomplètes

En terminant ce chapitre, il importe de préciser l'hypothèse qu'on a faite, à la Section 2.4, sur une catégorie $\mathcal{C}$ pour affirmer qu'on pouvait y interpréter les systèmes dirigés d'équations, à savoir, que $\mathcal{C}$ soit une catégorie μ-bicomplète. Il s'agit d'une condition plus faible que la bicomplétude (Joyal, 1995), qui consiste en l'existence de toutes les limites et colimites, car elles est restreinte aux limites et colimites issues des algèbres initiales et coalgèbres finales. On reprend la définition des catégories μ-bicomplètes que l'on peut trouver dans Santocanale (2002b).

Définition. L'ensemble $\mu\mathcal{T}$ des ***μ-termes*** est le plus petit ensemble contenant $\mathbb{V} \cup \{0, 1\}$ et tel que :

– si $t_0, t_1 \in \mu\mathcal{T}$, alors $(t_0 + t_1) \in \mu\mathcal{T}$ et $(t_0 \times t_1) \in \mu\mathcal{T}$;

– si $t \in \mu\mathcal{T}$ et $X \in \mathbb{V}$, alors $\mu X.t \in \mu\mathcal{T}$ et $\nu X.t \in \mu\mathcal{T}$.

Étant donné un μ-terme t, l'ensemble de ses variables, dénoté $\mathsf{FV}(t) \subset \mathbb{V}$, est défini comme suit :

– si $t = 0$ ou $t = 1$, alors $\mathsf{FV}(t) = \varnothing$;

– si $t = X \in \mathbb{V}$, alors $\mathsf{FV}(t) = \{X\}$;

– si $t = (t_0 + t_1)$ ou $t = (t_0 \times t_1)$, alors $\mathsf{FV}(t) = \mathsf{FV}(t_0) \cup \mathsf{FV}(t_1)$;

– si $t = \mu X.t'$ ou $t = \nu X.t'$, alors $\mathsf{FV}(t) = \mathsf{FV}(t') \setminus \{X\}$.

Un μ-terme t est ***clos*** si $\mathsf{FV}(t) = \varnothing$. Étant donné $s, t \in \mu\mathcal{T}$ et $X \in \mathbb{V}$ on peut construire le terme $s[X/t]$ de façon usuelle, en remplaçant chaque occurrence de X dans s qui n'est pas capturée par un quantificateur (μ ou ν) par le terme t.

Définition. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie bicartésienne. Pour tout $t \in \mu\mathcal{T}$, soit V un ensemble fini tel que $\mathsf{FV}(t) \subseteq V \subset \mathbb{V}$. L'***interprétation*** de t dans $\mathcal{C}$ par rapport au contexte V est le foncteur $\|t\|_V : \mathcal{C}^V \to \mathcal{C}$ défini comme suit :

– si $t = 0$, alors $\|t\|_V \equiv \mathbf{0}$;

– si $t = 1$, alors $\|t\|_V \equiv \mathbf{1}$;

– si $t = X \in V$, alors $\|t\|_V = \mathtt{pr}^V_X$;

– si $t = (t_0 + t_1)$, alors $\|t\|_V = \|t_0\|_V + \|t_1\|_V$;

– si $t = (t_0 \times t_1)$, alors $\|t\|_V = \|t_0\|_V \times \|t_1\|_V$;

– si $t = \mu X.t'$ et $X \notin V$, alors $\|t\|_V$ est l'algèbre initiale paramétrée du foncteur $\|t'\|_{\{X\}\cup V} : \mathcal{C} \times \mathcal{C}^V \to \mathcal{C}$;

– si $t = \nu X.t'$ et $X \notin V$, alors $\|t\|_V$ est la coalgèbre finale paramétrée du foncteur $\|t'\|_{\{X\}\cup V} : \mathcal{C} \times \mathcal{C}^V \to \mathcal{C}$.

La catégorie $\mathcal{C}$ est ***μ-bicomplète*** si elle est localement petite et si, pour chaque μ-terme t et $V \subset \mathbb{V}$ satisfaisant les conditions ci-dessus, le foncteur $\|t\|_V$ est bien défini.

Des exemples de catégories μ-bicomplètes incluent, bien sûr, la catégorie des ensembles ainsi que les treillis complets, mais aussi des structures plus générales telles que les μ-treillis (Santocanale, 2000) et les catégories localement présentables, notamment les catégories de préfaisceaux et de faisceaux (Santocanale, 2002b).

Proposition 2.11. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie μ-bicomplète. Alors, pour tout système dirigé $\mathcal{S}$ et tout ensemble fini $V \subseteq \mathbb{V}$ tel que $\mathsf{FV}(\mathcal{S}) \subseteq V$ et $\mathsf{BV}(\mathcal{S}) \cap V = \varnothing$, le foncteur $[\![\mathcal{S}]\!]_V : \mathcal{C}^V \to \mathcal{C}^{\mathsf{BV}(\mathcal{S})}$ est bien défini.*

Démonstration. Si $\mathsf{BV}(\mathcal{S}) = 0$, le foncteur $[\![\mathcal{S}]\!]_V : \mathcal{C}^V \to \mathbb{1}$ est bien défini, peu importe la catégorie $\mathcal{C}$. Du reste, la définition de $[\![\mathcal{S}]\!]_V$ est faite par récurrence en n'utilisant aucun autre constructeur que $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$, $+$, $\times$, les algèbres initiales paramétrées et les coalgèbres finales paramétrées. Tous ces outils sont disponibles dans $\mathcal{C}$ sur des foncteurs ainsi récursivement définis. $\square$

La réciproque de la proposition précédente est également vraie (voir la Proposition 2.12 ci-dessous). On aurait donc plus prendre, comme définition alternative des catégories μ-bicomplètes, que ce sont les catégories qui permettent d'interpréter les systèmes dirigés d'équations.

Proposition 2.12. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie μ-bicomplète. Alors, pour tout terme $t \in \mu\mathcal{T}$, il existe une formule φ_t et un système dirigé d'équations $\mathcal{S}_t$ tel que $\|t\|_V = [\![\varphi_t]\!]_V^{\mathcal{S}_t}$. De plus, si s est un sous-terme de t, alors on peut choisir $\mathcal{S}_s$ et $\mathcal{S}_t$ de façon à avoir $\mathcal{S}_s \subseteq \mathcal{S}_t$.*

Démonstration. On procède par induction sur t. Supposons d'abord, sans perte de généralité, que pour toute variable $X \in \mathbb{V}$, si X a une occurrence dans t, alors ou bien toutes ces occurrences sont libres, ou bien elles sont toutes liées par un même quantificateur.

Alors, si $t \in \{0,1\} \cup \mathbb{V}$, il suffit de prendre $\varphi_t = t$ et $\mathcal{S}_t$ est le système vide (qui n'a aucune variable liée). Si $t = (t_0 + t_1)$ (resp. $t = (t_0 \times t_1)$), il suffit de prendre $\varphi_t = (\varphi_{t_0} + \varphi_{t_1})$ (resp. $\varphi_t = (\varphi_{t_0} \times \varphi_{t_1})$) et $\mathcal{S}_t = \mathcal{S}_{t_0} \cup \mathcal{S}_{t_1}$.

Enfin, si $t = \mu X.t'$ (resp. $t = \nu X.t'$) et $\mathcal{S}_{t'} = \langle B, F, p \rangle$, on pose $\varphi_t = X$ et $\mathcal{S}_t = \langle B \cup \{X\}, F', p' \rangle$ où $F_Y = F'_Y$ et $p_Y = p'_Y$ pour tout $Y \in B$ et où $F'_X = \varphi_{t'}$ et p'_X est le plus petit nombre naturel n impair (resp. pair) tel que $n \geq p_{\mathsf{MAX}(\mathcal{S}_{t'})}$.

Remarquons que cette construction ne peut que faire grandir le système d'équations associé à un terme, en fonction de la profondeur de celui-ci. Autrement dit, si s est un sous-terme de t, alors on a $\mathcal{S}_s \subseteq \mathcal{S}_t$. □

Exemple 1. Soit $t = \nu T.(\nu X.(1 + X) \times \mu L.(1 + (T \times L)))$. Alors la conversion de t en système dirigé d'équations va comme suit :

$$\mathcal{S}_t = \left\{ \begin{array}{l} T =_2 X \times L \\ X =_2 1 + X \\ L =_1 1 + (T \times L) \end{array} \right\} .$$

Réciproquement, étant donné le système $\mathcal{S}_t$, on peut retrouver le terme original t en *imbriquant* les équations les unes dans les autres. La priorité indique la nature et l'ordre des quantificateurs μX et νX. Les systèmes dirigés d'équations ne sont donc qu'une syntaxe alternative à celle des μ-termes. ■

Définition. Soit $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ deux catégories μ-bicomplètes. Pour chaque $t \in \mu\mathcal{T}$, on dénote par $\|t\|^{\mathcal{C}}_V$ et $\|t\|^{\mathcal{D}}_V$ l'interprétation fonctorielle de t dans $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ respectivement. Un ***morphisme*** de catégories μ-bicomplètes (entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$) est un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ tel que, pour tout $t \in \mu\mathcal{T}$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^V \arrow[r, "F^V"] \arrow[d, "\|t\|^{\mathcal{C}}_V"'] & \mathcal{D}^V \arrow[d, "\|t\|^{\mathcal{D}}_V"] \\ \mathcal{C} \arrow[r, "F"] & \mathcal{D} \end{tikzcd} .$$

Il convient d'insister sur une famille particulière de catégories μ-bicomplètes, qui sera en vedette à la Section 4.3. Il s'agit des *catégories μ-bicomplètes libres*. Essentiellement, il s'agit de catégories μ-bicomplètes $\mathcal{M}(B)$, où B est un ensemble de générateurs, qui ne dispose d'aucune structure supplémentaire à ce qui est imposé par les axiomes. La construction qu'on en donne est assez standard en algèbre universelle et s'apparente à celle d'un groupe libre ou encore d'un espace vectoriel engendré par une base.

On définit d'abord un graphe étiqueté, $\mu\mathcal{G}_0$, dont les sommets sont les μ-termes et dont les arêtes sont les suivantes, pour chaque $t \in \mu\mathcal{T}$:
- $t \xrightarrow{\mathtt{id}_t} t$, $0 \xrightarrow{?_t} t$ et $t \xrightarrow{!_t} 1$;
- si $t = (t_0 + t_1)$, alors $t_0 \xrightarrow{\mathtt{in}_0} t$ et $t_1 \xrightarrow{\mathtt{in}_1} t$;
- si $t = (t_0 \times t_1)$, alors $t \xrightarrow{\mathtt{pr}_0} t_0$ et $t \xrightarrow{\mathtt{pr}_1} t_1$;
- si $t = \mu X.t'$, alors $t'[X/t] \xrightarrow{\alpha_t} t$;
- si $t = \nu X.t'$, alors $t \xrightarrow{\zeta_t} t'[X/t]$.

Soit ensuite $\mu\mathcal{G}$ le plus petit graphe contenant $\mu\mathcal{G}_0$ et tel que les propriétés suivantes sont vérifiées (chacune est quantifiée universellement sur les arêtes de $\mu\mathcal{G}$) :
- si $r \xrightarrow{f} s$ et $s \xrightarrow{g} t$, alors $r \xrightarrow{f \cdot g} t$;
- si $s \xrightarrow{f} t_0$ et $s \xrightarrow{g} t_1$, alors $s \xrightarrow{\langle f,g\rangle} (t_0 \times t_1)$;
- si $s_0 \xrightarrow{f} t$ et $s_1 \xrightarrow{g} t$, alors $(s_0 + s_1) \xrightarrow{\{f,g\}} t$;
- si $t = \mu X.t'$ et $t'[X/s] \xrightarrow{f} s$, alors $t \xrightarrow{a_f^t} s$;
- si $t = \nu X.t'$ et $s \xrightarrow{f} t'[X/s]$, alors $s \xrightarrow{z_f^t} t$.

On a ainsi assez de flèches pour pouvoir tracer les diagrammes de produits, coproduits, algèbres initiales et coalgèbres finales dans $\mu\mathcal{G}$, mais pas encore assez de structure pour vérifier leur propriété universelle.

Définition. Soit $r \in \mu\mathcal{T}$, $X \in \mathbb{V}$ et $s \xrightarrow{f} t$ une arête de $\mu\mathcal{G}$. On définit l'arête $r[X/s] \xrightarrow{r[X/f]} r[X/t]$ par récurrence comme suit :
- si $r = X$, alors $r[X/f] = f$;

– si $r \in \{0,1\} \cup \mathbb{V}$ et $r \neq X$, alors $r[X/f] = \mathtt{id}_r$;

– si $r = (r_0 + r_1)$, alors $r[X/f] = \{r_0[X/f] \cdot \mathtt{in}_0\,,\, r_1[X/f] \cdot \mathtt{in}_1\}$;

– si $r = (r_0 \times r_1)$, alors $r[X/f] = \langle \mathtt{pr}_0 \cdot r_0[X/f]\,,\, \mathtt{pr}_1 \cdot r_1[X/f]\rangle$;

– si $r = \mu Y.r'$ où $Y \neq X$, alors $r[X/f] = a_g^{r(s)}$ où $g = r'[Y/r(t)][X/f] \cdot \alpha_{r(t)}$ et

$$r(u) = r[X/u] = \mu Y.r'[X/u] \qquad (u \in \{s,t\}) ;$$

– si $r = \nu Y.r'$ où $Y \neq X$, alors $r[X/f] = z_g^{r(s)}$ où $g = \zeta_{r(t)} \cdot r'[Y/r(t)][X/f]$.

Une ***congruence*** est une relation d'équivalence $\sim$ sur les arêtes de $\mu\mathcal{G}$ qui satisfait les propriétés supplémentaires suivantes.

Axiomes des catégories :

– $\forall(s \xrightarrow{f} t)$, on a $\mathtt{id}_s \cdot f \sim f$ et $f \sim f \cdot \mathtt{id}_t$;

– $\forall(r \xrightarrow{f} s), (s \xrightarrow{g} t), (t \xrightarrow{h} u)$, on a $(f \cdot g) \cdot h \sim f \cdot (g \cdot h)$.

Axiomes des produits :

– $\forall(s \xrightarrow{f} t_0), (s \xrightarrow{g} t_1)$, on a $\langle f,g\rangle \cdot \mathtt{pr}_0 \sim f$ et $\langle f,g\rangle \cdot \mathtt{pr}_1 \sim g$;

– $\forall(s \xrightarrow{f} t_0), (s \xrightarrow{g} t_1), (s \xrightarrow{p} t_0 \times t_1)$, si $p \cdot \mathtt{pr}_0 \sim f$ et $p \cdot \mathtt{pr}_1 \sim g$, alors $p \sim \langle f,g\rangle$.

Axiomes des coproduits :

– $\forall(s_0 \xrightarrow{f} t), (s_1 \xrightarrow{g} t)$, on a $\mathtt{in}_0 \cdot \{f,g\} \sim f$ et $\mathtt{in}_1 \cdot \{f,g\} \sim g$;

– $\forall(s_0 \xrightarrow{f} t), (s_1 \xrightarrow{g} t), (s_0 + s_1 \xrightarrow{q} t)$, si $\mathtt{in}_0 \cdot q \sim f$ et $\mathtt{in}_1 \cdot q \sim g$, alors $q \sim \{f,g\}$.

Axiomes des algèbres initiales : (où $t = \mu X.t'$)

– $\forall(t'[X/s] \xrightarrow{f} s)$, on a $\alpha_t \cdot a_f^t \sim t'[X/a_f^t] \cdot f$;

– $\forall(t'[X/s] \xrightarrow{f} s), (t \xrightarrow{g} s)$, si $\alpha_t \cdot g \sim t'[X/g] \cdot f$, alors $g \sim a_f^t$.

Axiomes des coalgèbres finales : (où $t = \nu X.t'$)

– $\forall(s \xrightarrow{f} t'[X/s])$, on a $z_f^t \cdot \zeta_t \sim f \cdot t'[X/z_f^t]$;

– $\forall(s \xrightarrow{f} t'[X/s])$, $(s \xrightarrow{g} t)$, si $g \cdot \zeta_t \sim f \cdot t'[X/g]$, alors $g \sim z_f^t$.

Par inspection des axiomes énumérés ci-dessus, un exemple trivial de congruence est la relation suivante :

$$(s \xrightarrow{f} t) \sim_\top (s' \xrightarrow{f'} t') \quad \iff \quad s = s' \text{ et } t = t'\,.$$

De plus, étant donné une collection non vide $E = \{\sim_i : i \in I\}$ de congruences, la relation

$$f \sim^E g \quad\iff\quad \forall i \in I,\ f \sim_i g$$

est encore une congruence (c'est l'infimum de E). Il s'ensuit qu'il existe une congruence minimale, qu'on dénote $\sim_\perp$ (c'est l'infimum de la collection, non vide, de toutes les congruences). Soit enfin $\widetilde{\mu\mathcal{G}} = \mu\mathcal{G}/\sim_\perp$. On ne fera pas de différence typographique entre la classe d'équivalence d'un μ-terme t et le terme t lui-même.

Définition. Soit B un ensemble, dit de ***générateurs*** et $\lambda : B \to \mathbb{V}$ une fonction injective. On définit $\mathcal{M}(B)$ comme étant la catégorie dont les objets sont les $t \in \mu\mathcal{T}$ tels que $\mathsf{FV}(t) \subseteq \lambda(B)$ et dont les flèches sont les arêtes $s \xrightarrow{f} t$ de $\widetilde{\mu\mathcal{G}}$ telles que s et t sont des objets de $\mathcal{M}(B)$.

Proposition 2.13. *$\mathcal{M}(B)$ est une catégorie μ-bicomplète libre sur B.*

Démonstration. Le fait que $\mathcal{M}(B)$ est une catégorie est simplement dû au fait qu'on a inséré les axiomes des catégories dans la définition d'une congruence.

Pour montrer que $\mathcal{M}(B)$ est μ-bicomplète, il suffit de donner l'interprétation de chaque $t \in \mu\mathcal{T}$ en tant que foncteur $\|t\|_V : \mathcal{M}(B)^V \to \mathcal{M}(B)$. Soit $V = \{X_1 \ldots X_n\}$ et on pose

$$\|t\|_V(x_1 \ldots x_n) = t[X_1/x_1] \cdots [X_n/x_n]\,.$$

Le fait que $\|t\|_V$ est le foncteur recherché n'est que la conséquence de sa définition et du fait qu'on a inséré les axiomes de produits, coproduits, algèbres initiales et coalgèbres finales dans la définition d'une congruence.

Enfin, on doit montrer que $\mathcal{M}(B)$ est libre. Remarquons qu'on peut identifier l'ensemble B à la catégorie discrète dont les objets sont les éléments de B (avec aucune flèche sauf les identités). Soit $|\cdot|$ le foncteur oubliant (qui transforme une catégorie μ-bicomplète en une simple catégorie). On veut donc construire un foncteur $I : B \to |\mathcal{M}(B)|$ (c'est-à-dire, simplement une fonction) tel que pour toute autre catégorie μ-bicomplète $\mathcal{C}$ et toute fonction $F : B \to |\mathcal{C}|$, il existe un unique morphisme de catégories μ-bicomplètes $\widetilde{F} : \mathcal{M}(B) \to \mathcal{C}$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "I"] \arrow[dr, "F"'] & {|\mathcal{M}(B)|} \arrow[d, dashed, "|\widetilde{F}|"] \\ & {|\mathcal{C}|} \end{tikzcd} \quad . \tag{2.6}$$

Soit $B = \{b_1 \dots b_n\}$ et $V = \lambda(B) = \{X_1 \dots X_n\}$. Il suffit de prendre

$$I := B \xrightarrow{\lambda} V \hookrightarrow |\mathcal{M}(B)| \,.$$

Alors, étant donné une fonction $F : B \to |\mathcal{C}|$, on définit $\widetilde{F} : \mathcal{M}(B) \to \mathcal{C}$ sur les objets de $\mathcal{M}(B)$ par l'équation

$$\widetilde{F}(t) = \|t\|_V^{\mathcal{C}}(F(b_1) \dots F(b_n)).$$

La définition de $\widetilde{F}$ sur les flèches de $\mathcal{M}(B)$ se fait par récurrence sur les flèches de $\mu\mathcal{G}$, puisque $\sim_\perp$ est le plus petit point fixe de la définition de congruence avec, comme cas de base, les arêtes de $\mu\mathcal{G}_0$. On obtient ainsi un morphisme de catégories μ-bicomplètes faisant commuter le diagramme (2.6). $\square$