

Caractéristiques de graphes

I - Connexité dans un graphe

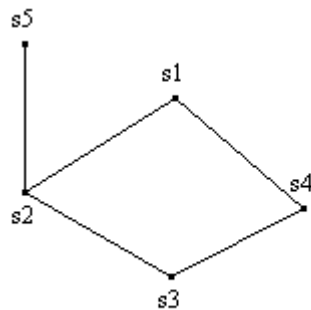
La notion de connexité est liée à l'existence de chaîne dans un graphe.

Depuis un sommet, existe-t-il une chaîne pour atteindre tout autre sommet les graphes connexes correspondant à la représentation naturelle que l'on se fait d'un graphe. Les graphes non connexes apparaissent comme la juxtaposition d'un ensemble de graphes : ses composantes connexes.

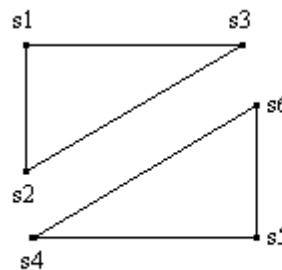
Définition 1 Un graphe $G = (S, A)$ est dit connexe pour tout couple de sommet s_i et $s_j \in S$, il existe une chaîne reliant s_i et s_j

Définition 2 Un graphe $G = (S, A)$ est dit non convexe s'il existe au moins un couple de sommets (s_{o1}, s_{o2}) tel que n'existe aucune chaîne joignant s_{o1} à s_{o2} .

Exemple 1



G_1



G_2

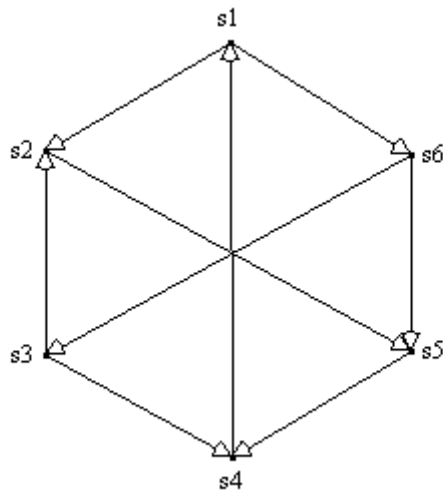
G_1 est un graphe convexe tandis que G_2 n'est pas convexe car il n'existe une chaîne joignant s_2 à s_6 .

I-1 Graphe fortement connexe

Définition 3 Un graphe $G = (S, A)$ est dit fortement connexe si pour tout couple de sommets $s_i \in S$ et $s_j \in S$, il existe un chemin joignant s_i et s_j

Remarque 1 Tout graphe fortement connexe est connexe car un chemin est une chaîne. Dans le cas non orienté les définitions de connexité et fortement convexe coïncident car celles de chemin et de chaîne le deviennent.

Exemple 2



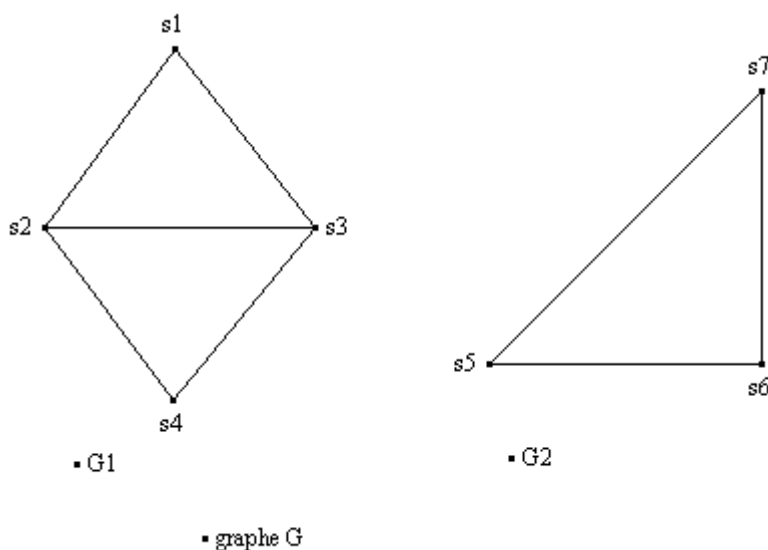
I-2 Composante connexe

Définition 3 Soit $G = (S, A)$ un graphe on appelle composante connexe de G , le sous graphe G_H avec $H \subset S$ tel que pour tout $s \in S - H$ le sous graphe $G_{H \cup \{s\}}$ n'est pas connexe.

Conséquence. Dans le cas où un graphe $G = (S, A)$ est non connexe, alors il peut être divisé en p composantes connexes tels que :

$$G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_p \text{ avec } G_i \cap G_j = \emptyset$$

Définition 4 On appelle degré de connexité du graphe $G = (S, A)$ le nombre p de composantes connexes de G . Il est noté $C(G)$.



Exemple 3

Exemple 3

G_1 est une composante connexe de G , G_2 aussi est une composante de G donc le graphe G possède $C(G)=2$

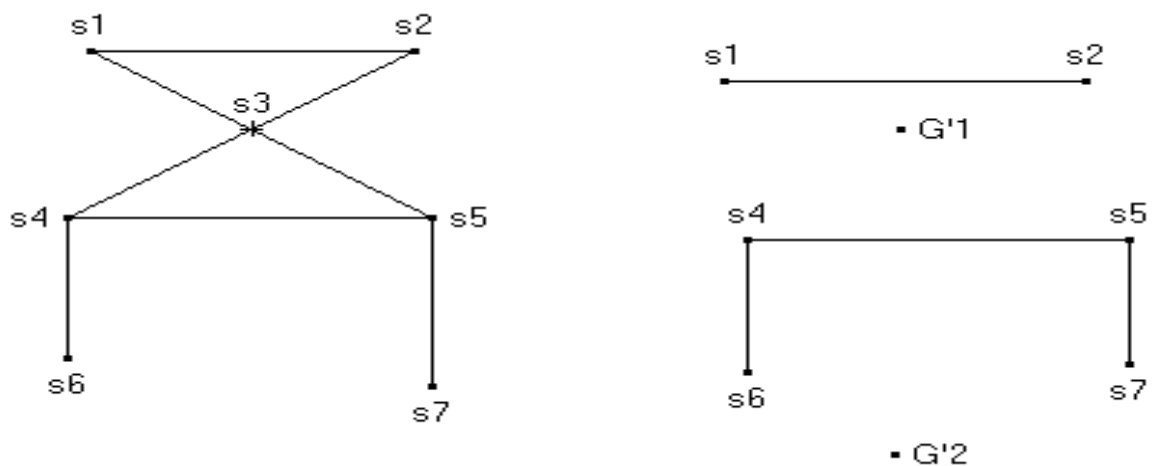
Remarque 2 Si le graphe $G(S, A)$ est connexe alors $C(G)=1$.

I-4 Pont d'un graphe

1- 4-1 Point d'articulation

Définition 5 Un point d'articulation d'un graphe $G=(S, A)$ est un sommet dont la suppression augmente la connexité du graphe.

Exemple 4

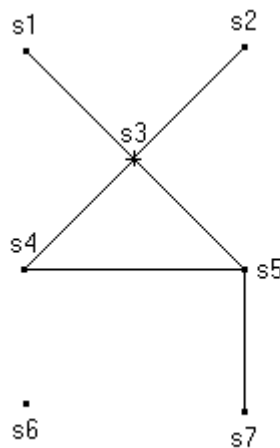


G est un graphe connexe et $C(G) = 1$, mais si on supprime le point s_3 on aura le graphe G' suivant qui possède deux composantes connexes G'_1 et G'_2 donc le point s_3 est point d'articulation.

1- 4-2 Pont d'un graphe

Définition 6 On appelle pont d'un graphe G un arc dont la suppression augmente la connexité du graphe

Exemple 5 L'arc (s_4, s_6) est un pont. En effet quand on l'élimine on augmente la connexité



du graphe on obtient :

I-5 Ensemble d'articulation $H \subset S$ d'un graphe connexe G

Définition 7 Soit $G = (S, A)$ un graphe connexe et $H \subset S$. On appelle ensemble d'articulation l'ensemble H tel que le sous graphe G_{S-H} ne soit plus connexe.

Remarque 3 Les composantes connexes $C_1, C_2, \dots, C_p$ de G_{S-H} définissent des graphes connexes $G_{C_1 \cup H}, G_{C_2 \cup H}, \dots$, appelés les pièces (relativement à l'articulation H).

Proposition 1 Soit $G = (S, A)$ un graphe connexe possédant n sommets et m arcs alors

$$m \geq n-1$$

Preuve. Raisonnons par induction.

La proposition est vraie pour $n = 1$ car $m = 0$ vraie aussi pour $n=2$ car $m = 1$. Supposons pour $n \geq 3$ la proposition vraie, pour tout graphe à $n-1$ sommets. Soit s le sommet de G de degré

minimal de $d_m = d(s)$ alors $d_m \geq 1$ car G est connexe. Le graphe $G_s = G - s$ possédant $n-1$ sommets, d'après l'hypothèse

d'induction le nombre d'arcs m_s du graphe G_s est tel que $m_s \geq n-1 - 1$, donc m_s donc $m_s \geq n-2$.

En conséquence $m = m_s + d(s) \geq n-2 + d(s) \geq n-2 + 1 = n-1$ d'où le résultat.

Proposition 2 Soit $G = (S, A)$ un graphe non connexe possédant n sommets et m arcs si le degré de connexité $C(G) = k$, alors $k \geq n - m$

Preuve. Notons d'abord que si $n \leq m$ alors $n - m \leq 0$. En conséquence le degré de connexité k positif par définition vérifie $k \geq 0 \geq n - m$.

Supposons donc $n > m$

Si $k = 1$ alors G est connexe et la proposition ci-dessus donne le résultat.

Si $k > 1$, soit $G_i, i = 1; 2; 3; \dots; k$ les composantes connexes de G et n_i leur nombre de sommets, alors $G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$ avec $n = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k$.

Soit m_i le nombre d'arcs de G_i , alors $m = m_1 + m_2 + \dots + m_k$. Comme chaque G_i est connexe; alors d'après la proposition précédente

$$m_i \geq n_i - 1 \quad i = 1, 2, \dots, k. \text{ En conséquence}$$

$$m \geq (n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \dots + (n_k - 1)$$

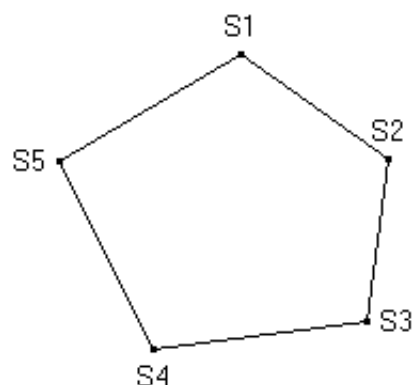
$$m \geq (n_1 + n_2 + \dots + n_k - k) = n - k.$$

II Graphes particuliers

II-1 Graphes réguliers. Un graphe $G = (S, A)$ est régulier si tous ses sommets possèdent un même degré d . Il est dit alors régulier de degré d .

Exemple 6 Le graphe nul N_n est régulier. Chaque sommet a un degré nul.

Exemple 7



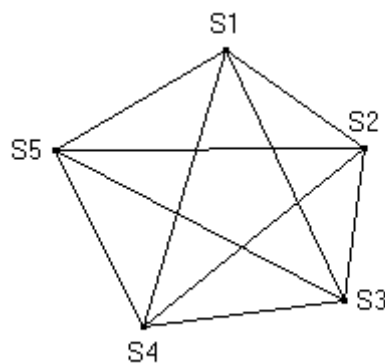
Le graphe G est de degré 2 car chaque sommet a pour degré 2

Remarque 4 Ce graphe non orienté $G = (S, A)$ régulier de degré 2 est appelé cycle et noté C_n .

II-2 Graphes complets

Définition 8 Un graphe $G = (S, A)$ est complet si toute paire de sommets est reliée par un arc.

Exemple 8 le graphe K_5 représenté ci- dessous est un graphe complet



Remarque 5 le graphe K_n est le graphe complet constitué de n sommets .Il est le complémentaire du graphe nul N_n .

Proposition 3 K_n est régulier de degré n

Preuve : Comme chaque sommet du graphe est liée au $n-1$ autres sommets car K_n est complet , alors il est incident à $n-1$ arcs donc son degré est $n-1$.

Proposition 4 Le nombre m d'arcs du graphe complet K_n est tel que

$$2 m = n (n-1)$$

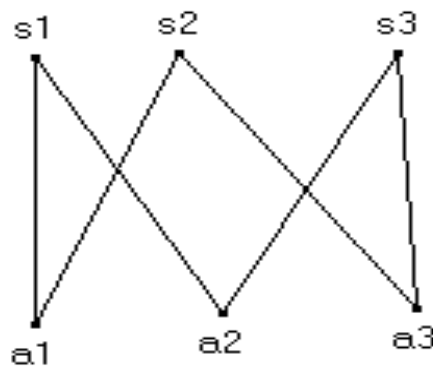
Preuve : Comme chaque sommet est de degré $n-1$ et la somme totale des degrés est égale au double du nombre d' arcs (théorème du handshaking), alors nous avons le résultat $2 m = n (n-1)$.

II-3 Graphes bipartis

Définition 9 Un graphe $G = (S, A)$ est biparti si l'ensemble de ses sommets peut être partitionné en deux classes S_1 et S_2 de sorte que deux sommets de la même classe ne soient jamais adjacents. Il se note $G = (S_1, S_2, A)$

Autrement dit quelque soit $a \in A$ avec $a = (s_1, s_2)$ on a $s_1 \in S_1$ et $s_2 \in S_2$

Exemple 9



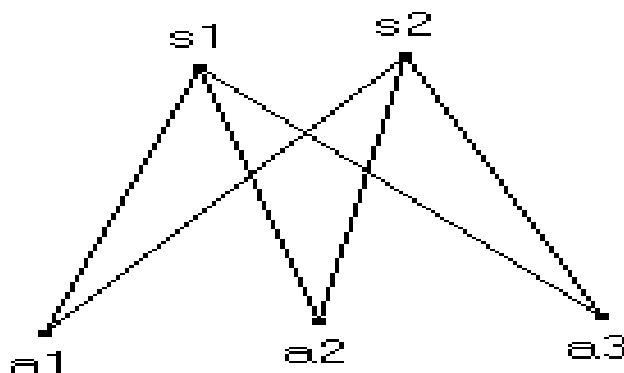
le graphe G est un graphe bipartite ; on peut considérer $S = S_1 \cup S_2$

c'est à dire $S = \{s_1, s_2, s_3\} \cup \{a_1, a_2, a_3\}$

II-4 Graphes bipartis complets

Définition 10 Un graphe $G = (S, A)$ non orienté est biparti complet si G est un graphe biparti $G = (S_1, S_2, A)$ avec $|S_1| = p$ et $|S_2| = q$, dans lequel toute paire $\{s_1, s_2\}$ avec $s_1 \in S_1$ et $s_2 \in S_2$ est relié par un arc. On le note $K_{p,q}$

Exemple 10 le graphe $K_{2,3}$ est biparti complet



Remarque 6 les p sommets de l'ensemble S_1 du graphe biparti complet $K_{p,q}$ sont de degré q tandis que ceux de S_2 sont de degré p . En effet comme chaque sommet de S_1 est lié aux q autres sommets de S_2 , alors il est de degré q et vice versa.

III Graphes planaires

Définition 11. Graphe topologique planaire

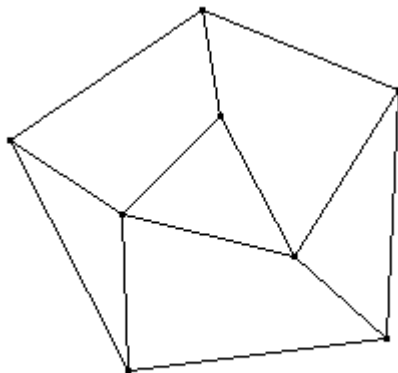
Un graphe $G = (S, A)$ est topologiquement planaire si les arcs ou arêtes de sa représentation graphique sur un plan n'intersectent qu'au niveau des sommets

Définition 12 Graphe planaire

Un graphe $G = (S, A)$ est planaire s'il admet une représentation topologiquement planaire

Exemple 11

▪

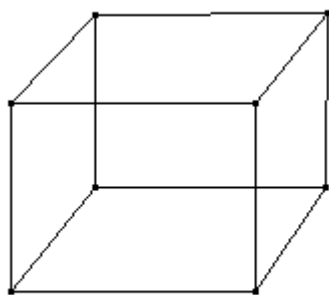


▪ G

.

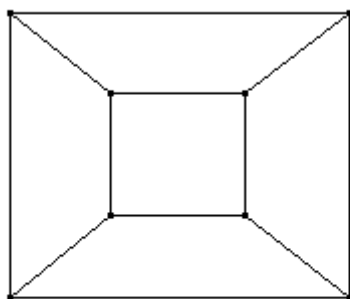
le graphe G est planaire

Exemple 12



▪ G3

Le graphe cubique Q_3 est planaire .En effet sa représentation sur un plan donne le graphe ci-dessous dont ces arcs n'intersectent qu'au niveau des sommets



Proposition 5 Soit $G = (S, A)$ un graphe connexe planaire , le retrait d'un sommet v de degré d_v qui n'est pas un point d'articulation implique un nouveau graphe à $f - d_v + 1$ faces.

Preuve . Raisonnons par induction par rapport a d_v .

Pour $d_v = 1$ alors v est un sommet pendant et son retrait laisse le nombre de faces inchangées égale à $f - d_v + 1$. Supposons la proposition vraie pour tout sommet qui n'est pas un point d'articulation de degré $d_v \leq k$ et montrons qu' elle demeure vraie pour tout sommet de degré $d_v = k+1$. Considérons un sommet v de degré

$d_v = k+1$. Il est donc lié à $k+1$ sommets soit $v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}$. En enlevant le sommet v_1 le nombre de faces diminue de f_1 et le degré de v devient k . Le graphe résultant possède $f - f_1$ faces et d'après l'hypothèse d'induction le retrait de v implique $f - f_1 - (d_v - 1) + 1$. L'ajout de v_1 implique l'addition de $f_1 - 1$ faces ce qui fournit le résultat annoncé.

Remarque 6 En s'intéressant aux graphes planaires ,le principale question qui se pose est sa reconnaissance . Comment peut-on détecter le fait qu'un graphe soit planaire ? la réponse est fournie partiellement par la formule d'Euler qui permet de disqualifier certains graphes.

Théorème 1 Formule d'Euler Un graphe connexe planaire $G = (S, A)$ avec n sommets, m arcs et f faces vérifie : $n - m + f = 2$

Preuve . Raisonnons par induction.

Pour $n=1$, alors $m = 0$ et $f=1$, la relation est triviale. Pour $n=2$ alors $m=1$ et

$f=1$ la relation est triviale. Supposons la relation vraie pour tout graphe à $n-1$ sommets, nous avons les deux situations ci-dessous.

Cas 1 Supposons que le graphe G possède un sommet v_1 de degré d_1 qui ne soit pas un point d'articulation. Ainsi en enlevant ce sommet le nombre de sommets devient $n-1$. En appliquant l'hypothèse à ce graphe nous obtenons

$$(n-1) - (m - d_1) + (f - d_1 + 1) = 2 \text{ donc } n - m + f = 2$$

Cas 2 Tous les sommets du graphe G sont des points d'articulation.

Dans ce cas, deux sommets quelconques sont liés par un seul chemin. En conséquence le nombre de face est $f=1$ tandis que le nombre d'arcs est $m = n-1$ la formule est donc satisfaite.

Corollaire . 1 Si un graphe $G = (S, A)$ est connexe et planaire, avec $n \geq 3$ sommets, alors $m \leq 3n-6$.

Corollaire. 2 Si un graphe simple $G = (S, A)$ planaire possède n sommets et $m \geq 3$ arcs. si en plus il est sans circuit de longueur 3 alors $m \leq 2n-4$

Corollaire. 3 Tout graphe $G = (S, A)$ planaire possède un sommet v tel que $d(v) \leq 5$

Preuve . Raisonnons par l'absurde et supposons que pour tout sommet $v \in S$; $d(v) > 5$ ou $d(v) \geq 6$.

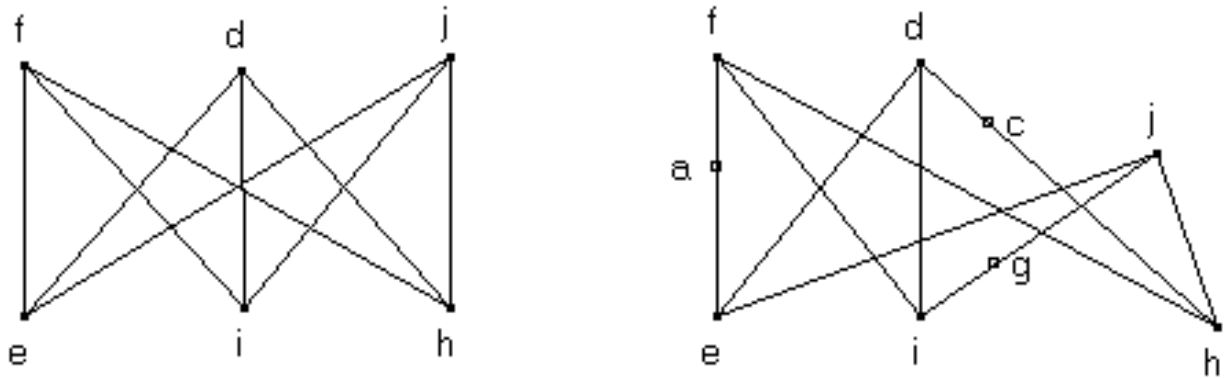
Comme dans un graphe la somme des degrés de sommets égale deux fois le nombre des arcs, alors : $2m = d(v_1) + d(v_2) + \dots + d(v_n) \geq 6n$. Ce qui est en contradiction avec le corollaire 1.

sIV Homéomorphisme de graphe et théorème de KURATOWSKI

IV-1 Homéomorphisme de graphes

Deux graphes G_1 et G_2 sont homéomorphes si G_2 peut être obtenu à partir de G_1 par un introduction de sommets de degré 2 au niveau d'arc de G_1 .

Exemple



IV-2 Théorème de kuratowski Un graphe est planaire si et seulement si il ne contient aucun graphe homéomorphe à l'un des graphes K_5 et $K_{3,3}$