Calcul Stochastique

3.1 Le mouvement Brownien

Le mouvement Brownien est une discription du mouvement aléatoire de particules qui ne sont soumises à aucune autre interaction que les chocs. En 1827, le biologiste Robert Brown décrit pour la première fois ce phénomène en observant le mouvement de pollens flottant sur l'eau
Sa description est la suivante :
$\star$ La trajectoire d'une particule entre deux choses est une ligne droite avec une vitesse constante.
$\star$ Lorsqu'une particule rencontre une autre ou un paroi, elle est accelérée. Ceci a entraîné des progrès considérables dans la théorie cinétique des gaz. La difficulté réside dans le fait que le mouvement est nul, il n'y a pas de mouvement d'ensemble (contrairement à un vent aucun courant).
$\star$ à un instant donné, la somme vectorielle des vitesses de toutes les particules s'annule. i.e. il n'y a pas de mouvement d'ensemble.
$\star$ au cours du temps, si l'on suit une particule donnée, le barycentre de sa trajectoire est son point de départ.
On voit donc la difficulté de caractériser un tel mouvement.
En 1905 Albert Einstein donna la solution. Il démontra que ce qui caractérise le mouvement, ce n'est pas la moyenne arithmétique des positions $< X >$ mais la moyenne quadratique $\sqrt{< X^2 >}$. Si $x(t)$ est la position de la particule à l'instant t, alors

$$< X^2 >= \frac{1}{\tau} \int_0^\tau x^2(t)dt$$

On peut utiliser le même modèle lorsque le mouvement se fait par sauts discrets entre position définie. Ce qui se justifie par le fait qu'entre deux positions on a des mouvements en ligne droite, comme par exemple la diffusion dans les solides. Si les x_i sont les positions successives d'une particule, alors

$$< X^2 >= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

On peut aussi définir la vitesse quadratique par $v = \frac{\sqrt{<X^2>}}{\tau}$ où τ est la durée sur laquelle on a évalué $< X^2 >$, qui est une caractéristique du mouvement et dépend de l'agitation des particules au coefficient de diffusion, frottement, attraction entre particules.

Définition 3.1.1. *Un mouvement Brownien issu de zéro ou processus de Weener est un processus stochastique $X_t, t \geq 0$ vérifiant :*
- $X_{t_o} = 0$
- *Pour tous $t_o = 0 < t_1 < t_2 < ... < t_n (n \in \mathbb{N}^*)$ les variables aléatoires $X_{t_k} - X_{t_{k-1}} (1 \leq k \leq n)$ sont indépendantes.*
- *Si $0 \leq s \leq t$ $X_t - X_s$ est normalement distribuée avec*

$$\mathbb{E}(X_t - X_s) = 0$$

et

$$\mathbb{E}\{(X_t - X_s)^2\} = (t - s)$$

Quelques propriétés du mouvement Brownien.

Propriétés 2-1-1

Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien (m, b) à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, issu de zéro i.e $X_o = 0$ p.s alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $X_t^x = x + X_t, t \geq 0$ est un m.b issu de x.

Plus généralement, si H est une v.a. de loi μ sur $\mathbb{R}^d$, indépendante du processus $X = (X_t)_{t\geq 0}$ alors $X_t^H = H + X_t, t \geq 0$ est un m.b de loi initiale μ.

Propriétés 2-1-2

Soit $X = (X_t^1, X_t^2, ..., X_t^d)t \geq 0$ issu de zéros, alors X est un m.b si et seulement si : pour tout $i \in \{1, 2, ..., d\}$ X_t^i est un m.b réel issu de zéro et les processus $X = (X_t^i)_{t\geq 0}$ sont indépendants. Une deuxième définition du m.b très utilisée en calcul stochastique est la suivante.

Définition 3.1.2. *: On dit qu'un processus continu $X = (X_t)_{t\geq 0}$ à valeurs $\mathbb{R}^d$ est un mouvement Brownien s'il est $(\mathcal{F}_t)$ adapté et si pour tout*

$$0 \leq s \leq t < \infty$$

et tout $u \in \mathbb{R}^d$:

$$\mathbb{E}[exp\{i < u, X_t - X_s >\} \ /\mathcal{F} - t] = exp\{-(t-s)\frac{|u|^2}{2}\}$$

Donnons maintenant deux propositions importantes.

Proposition 3.1.3. *Soit $X = (X_t^1, X_t^2, ..., X_t^d)_{t\geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$ mouvement Brownien à valeurs . Alors pour tout $0 \leq s \leq t$ on a*
- $\mathbb{E}\{X_t^i - X_s^i/\mathcal{F}_f\} = 0 \ p.s \ (i \in \{1, 2, ..., d\})$
- $\mathbb{E}\{(X_t^i - X_s^i)(X_t^j - X_s^j)/\mathcal{F}_f\} = (t-s)\delta_(i,j)p.s(i \in \{1, 2, ..., d\})$

Preuve :
- On sait que $\mathbb{E}\{\mathbb{E}(X_t^i - X_s^i)/(\mathcal{F})_s = \mathbb{E}(X_t^i - X_s^i)$ car $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$.
Or $\mathbb{E}(X_t - Y_s) = 0$ car le m.b est d'espérance nulle.
Donc $\mathbb{E}(X_t^i - X_s^i)/\mathcal{F}_s = 0$. D'où le résultat
- Si i = j, calculons $\mathbb{E}\{(X_t^i - X_s^i)^2/\mathcal{F}_s\}$.
Du fait que $X_t - X_s$ est indépendant de $\mathcal{F}_s$

$$\mathbb{E}\{(X_t^i - X_s^i)^2/\mathcal{F}_s\} = \mathbb{E}\{(X_t^i - X_s^i)^2\}$$

- Si $i \neq j, X_t^i - X_s^i$ *et* $X_t^j - X_s^j$ sont indépendants donc

$$\mathbb{E}\{(X_t^i - X_s^i)(X_t^j - X_s^j)/\mathcal{F}_s\} = 0.$$

Ce qui veut dire finalement que

$$\mathbb{E}\{(X_t^i - X_s^i)(X_t^j - X_s^j)/\mathcal{F}_s\} = (t-s) \ \delta_{(i,j)} \ p.s.$$

Proposition 3.1.4. *Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus continu à valeurs $\mathbb{R}^d$ issu de zéro. Alors X est un $\mathcal{F}_t$ mouvement Brewnien ssi pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^d$ le processus :*

$$M_\lambda^t = exp\{< \lambda, X_t > -\frac{1}{2} \ \|\lambda\|^2 \ \ t\} \ (t \geq 0)$$

est une $(\mathcal{F}_t)$ martingale.

Preuve : Supposons que X est un m.b. Alors

$$\mathbb{E}\{exp < \lambda, X_t - X_s > /\mathcal{F}_s\} = exp\{-(t-s)\ \frac{||\lambda||^2}{2}\}$$

Donc

$$\mathbb{E}\{exp < \lambda, X_t > /\mathcal{F}_s\} = exp\{< -\lambda, X_s <\} = exp(\frac{t\lambda^2}{2})\exp(-\frac{s||\lambda||^2}{2})$$

ce qui donne

$$\mathbb{E}\{exp < \lambda, X_t > /\mathcal{F}_s\}\ exp(\frac{t\lambda^2}{2}) = \exp\{< \lambda, X_s > -\frac{s||\lambda||^2}{2}\}$$

ou encore

$$\mathbb{E}\{(exp < \lambda, X_t > -t\frac{||\lambda||^2}{2})/\mathcal{F}_f\} = exp\{< \lambda, X_s > -\frac{s||\lambda||^2}{2}\}$$

C'est-à-dire

$$\mathbb{E}\{M_t^\lambda/\mathcal{F}_s\} = M_s^\lambda$$

Donc le processus M_t^λ est une $\mathcal{F}_t$-martingale. En faisant le calcul inverse, on vérifie aisement que X est un $\mathcal{F}_t$ mouvement Brownien.

3.2 Intégrales stochastiques

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ un espace de probabilité vérifiant les conditions habituelles et $B = (B_t^1, B_t^2, ..., B_t^d)$ un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ m,b à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ issue de zéro.

3.2.1 Intégrales stochastiques des fonctions étagées

Un processus $\varphi = (\varphi_t)_{t\geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est étagé s'il existe une suite $0 \leq t_1 < ... < t_n < ...$ tendant vers $+\infty$ et une suite de v.a bornées à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$, telle que U_i soit $(\mathcal{F}_t)_i$ mesurable por tout $i \in \mathbb{N}$, et que la propriété suivante soit vérifiée :

$$\varphi_t(\omega) = U_o(\omega)\ U_o(t) + \sum_{i\in\mathbb{N}} U(\omega) 1_{]t_i,t_i+1]}(t)\ \forall t \in \mathbb{R}^+$$

On notera ε l'ensemble des processus étagés si $\varphi \in \varepsilon$ on définit l'intégrale stochastique de $J(\varphi)$ par la formule :

$$J(\varphi)(t) = X_t = \int_0 t\varphi_s \, d\, B_s = U_o(B_{t_1} - B_{t_o}) + U_1(B_{t_2} - B_{t_1}) + ... + U_t(B_t - B_{t_k}), \;\; si\, t \in [t_k, t_{k+1}]$$

et $X_o = 0$

(Si $x, y \in \mathbb{R}^d$, on note $< x, y >= \sum_{i=1}^{d} x_i y_i$ le produit scalaire habituel.

La continuité des trajectoires du mouvement brownien entraîne qu le processus $(J(\varphi)(t))$ est continu, $\mathcal{F}_t$ adapté nul en zéro. L'application J de ε dans l'espace des processus est évidemment linéaire.

Voici quelques propriétés de l'application J :

Propriétés 2-2-1 Pour tout $\varphi \in \mathcal{E}$, le processus $X_t = (J(\varphi)(t))$ est une martingale réelle continue, centrée, de carré intégable.

Propriétés 2-2-2 Si φ et $\psi \in \mathcal{E}$, le processus $M_t = X_t Y_t - \int_0 t\varphi_s \psi_s ds \;\; t \geq 0$ ($o\ X_t = \int_0 t\varphi_s dB_s$ et $Y_t = \int_0 t\psi_s \; dB_s$) est une martingale.

Il a été prouvé [cf : [8]) la propriété suivante :

Propriétés 2-2-3 : Pour tout $\varphi \in \mathcal{E}$, et tout $t \in \mathbb{R}^+$, on a :

$$\mathbb{E}[(\int_{]}^{t} \varphi_s dB_s)^2] = \mathbb{E}[\int_0^t |\varphi_s|^2 ds].$$

Démonstration (cf : [8]).

3.2.2 Intégrales stochastiques relativement aux martingales

Soit $M = (M_t)_{t \geq 0}$ une $\mathcal{F}_t$ martingale de carré intégrale on va définir une intégrale stochastique $\int_0^t \varphi_s dM_s$ qui coïncide avec l'intégrale construite précédemment quant M_t est un m.b . On note M^2 l'ensemble des martingales réelles de carré intégrable, continues à droite, ayant des limites à gauche (Cadlag).

Proposition 2.2.2.1

Soit $M = (M_t)_{t \geq 0} \in \mathcal{M}^2$. Il existe un unique processus croissant $A = (A_t)_{t \geq 0}$ prévisible, intégrable, nul en zéro tel que $(M_t^2 - A_t)_{t \geq 0}$ soit une martingale. Soient $M = (M_t) et N = (N_t)$ deux éléments de $\mathcal{M}^2$. Il existe un unique

processus $B=(B_t)_{t\geq 0}$ qui soit différente de deux processus croissants, prévisibles, intégrables, nuls en zéro, Cadlag et tel que $(M_tN_t - B_t)_{t\geq 0}$ soit une $\mathcal{F}_t$ martingale.
Preuves
- Soit $M=(M_t)\in\mathcal{M}^2$. La sous-martingale $M_t = M_t^2,\ t\geq 0$ vérifiée la propriété suivante : pour tout $a>0$, la famille de v.a X_j ; $\sigma\in\delta_a$ est équiintégrable où δ_a est temps d'arrêt σ tel que $\sigma\leq a$.
En effet si $a>0$ et $\delta_a=\{$temps d'arrêt σ tel que $\delta\leq a\}$ on voit que $M_j=\mathbb{E}(M_a(F_\sigma)$ pour tout $\sigma\in\delta_a$. Donc $M_j^2\leq\mathbb{E}(M_a^2/\mathcal{F}_\sigma)\ etM_\sigma,\sigma\in\delta_a$ est équiintégrable.
D'après le théorème de Doob-Meyer il existe un unique processus croissant $A=(A_t)_{t\geq 0}$ prévisible, intégrable, nul en zéro tel que $(M_t^2-A_t)_{t\geq 0}$ soit une $\mathcal{F}_t$ martingale.
- Soient $M=(M_t)_{t\geq 0}\ etN=(N_t)_{t\geq 0}$ deux éléments de $\mathcal{M}^2$ alors $M_1=\frac{M+N}{2}$ et $M_2=\frac{M-n}{2}$ appartiennent à $\mathcal{M}^2$.
D'après $A_1\ etA_2$ les processus croissants prévisibles associés à la décomposition des sous-martingales $M_1(t))^2\ et(M_2(t))^2$. En posant $B=A_1-A_2$ on voit que $M_tN_t-B_t)_{t\geq 0}$ est une martingale.
L'unicité de B résulte du fait que si A_1etA_2 sont deux processus croissant, prévisibles, intégrables, Cadlag nuls en zéro tels que :$(A_1(t)-A_2(t))_{t\geq 0}$ soit une martingale alors $A_1=A_2$ (unicité de la décomposition de Doop Meyer).
Remarque 2.2.2.1
Les processus $A=(A_t)_{t\geq 0}$ et $B=(B_t)_{t\geq 0}$ de la proposition précédente seront respectivement notés $<M>=(<M_t>)_{t\geq 0}$ et $<M,N>=(<M,N>_t)_{t\geq 0}$.
Soit $\varphi\in\varepsilon$, donné par

$$\varphi_t(\omega)=U_o(\omega)1_o(t)+\sum U_i(\omega)\quad 1_{]t_i,t_{i+1}]}(t)\ \forall\in\mathbb{R}^+$$

où $0<t_1<t_2<...<t_n<+\infty$ et U_i est une variable $\mathcal{F}_{t_i}$ mesurable bornée.
On définit l'intégrale stochastique de $\varphi, J(\varphi)$ par la formule : $J(\varphi)(t)=\int_0^t\varphi_s dM_s$
$=U_o(M_{t_1}-M_{t_0})+U_1(M_{t_2}-(M_{t_1})+...+U_k(M_t-M_{t_k})\ \ si\ t\in[t_k,t_{k+1}]$
et $J(\varphi)(0)=0$
la martingale M étant Cadlag, il en est de même pour l'application $J(\varphi)(t)$.
Donnons maintenant quelques propriétés de l'application J :
1 - Pour tout $\varphi\in\mathcal{E}$, le processus $X_t=J(\varphi)(t)$ est une martingale réelle, centrée, Cadlag, de carré intégrable, nulle en zéro.
2 - Si φ et $\psi\in\mathcal{E}$. Le processus $K_t=X_tY_t-\int_0^t\varphi_s\psi_s\ d<M>_s\quad t\geq 0$ est

une martingale centrée : où

$$X_t = \int_0^t \varphi_s \; dM_s \; et \; Y_t = \int_0^t \psi_s \; dM_s$$

3 - Pour tout $\varphi \in \varepsilon$ et tout $t \in \mathbb{R}^+$, on a :

$$\mathbb{E}[(\int_0^t \varphi_s \; d \; M_s)^2] = \mathbb{E}[\int_0^t |\varphi_s|^2 \; d < M_s >_s]$$

Preuve :
La démonstration est analogue à celle correspondante dans le cas où M est un mouvement Brownien.

3.3 Formule d'Ito

Définition 3.3.1. *Soit* $X = (X_t)_{t \geq 0}$ *un processus à valeurs réelles* $(\mathcal{F}_t)$ *adapté.*
On dit que X est une semi-martingale continue s'il admet une décomposition de la forme $X_t = X_o + M_t + V_t (t \geq 0)$ *où* $M = M_t$ *est une* $(\mathcal{F}_t)$ *martingale locale continue, nulle en zéro,* $V = V_t$ *est une processus à variation finie sur tout compact de* $\mathbb{R}^+$*, continue, adaptée,* $\mathcal{M}_{c,loc}$ *l'ensemble des martingales locales continues.*
On considère ci-dessous un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ *vérifiant les conditions habituelles.*
On va donner un théorème qui va nous aider dans la démonstration de la formule d'Ito.

Théorème 3.3.2. *Soient* $M = (M_t)_{t \geq 0}$ *et* $N = (N_t)_{t \geq 0}$ *deux martingales locales continues. Fixons* S , $s \in \mathbb{R}_+$*. Etant donnée une subdivision* δ *:*

$$t_o = 0 < t_1 < t_2 < ... < t_s = S$$

de $[0, S]$*, posons*

$$S(\delta) = \sum_{i=0}^{n-1} (M_{t_i+1} - M_{t_i})(N_{t_{i+1}} - N_{t-i})$$

et $|\delta| = max(t_{i+1} - t_i)$*. Alors* $S(\delta)$ *converge vers* $< M, N >$ *en probabilité quand* $|\delta| \longrightarrow 0$*.*

Théorème 3.3.3. *: (Formule d'Ito) Soit* $S = (X_t)_{t\geq 0} = (X_t^1, ..., X_t^d)_{t\geq 0}$ *un processus continu à valeurs* $\mathbb{R}^d$ *dont les composantes* (X_t^ℓ), $(\ell = 1, ..., d)$ *sont des semi-martingales admettant la décomposition* $X_t^\ell = X_o^\ell + M_t^\ell + V_t^\ell$ $(t \geq 0)$ *où* $(M_t^\ell) \in \mathcal{M}_{c,loc}, M_o^\ell = 0, (V_t^t) \in \mathcal{A}_c$ $V_o^\ell = 0$ *et soit f une application de classe* $\mathcal{C}^2$ *de* $\mathbb{R}^d$ *dans* $\mathbb{R}$ *alors*

$$f(X_t) = f(X_o) + \sum_{\ell=1}^{d} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_\ell}(X_s)\ dM_s^\ell + \sum \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_\ell}(X_s)\ dV_s^\ell$$

$$+ \tfrac{1}{2} \sum_{\ell,k=1}^{d} \tfrac{\partial^2 f}{\partial x_\ell \partial x_k}(X_s)\ d < M^\ell, M^k >_s,\ t \geq 0,\ p.s$$

Exemples d'utilisation de la formule d'Itô (2.3.1) Nous allons nous intéresser aux solutions $(S_t)_{t\geq 0}$ de :

$$S_t = x_o + \int_0^t S_s(\mu ds + \sigma dW_s) \qquad (1)$$

On écrit souvent ce type d'équation sous la forme :

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t), \quad S_o = x_o \qquad (2)$$

Cela signifie que l'on cherche un processus adapté $(S_t)_{t\geq 0}$ tel que les intégrales $\int_0^t S_s ds$ et $\int_0^t S_s\ dW_s$ aient un sens, et qui vérifie, pour chaque t :

$$P\ p.s.\ S_t = x_0 + \int_0^t \mu S_s ds + \int_0^T \sigma S_s dW_s.$$

Faisons tout d'abord un calcul formel, osons $Y_t = log(S_t)$ où S_t est une solution de l'équation précédente. S_t est un processus d'Itô avec $K_s = \mu S_s$ et $H_s = \sigma S_s$. Appliquons la formule d'Itô à $f(x) = log(x)$ (au moins formellement car $f(x)$ n'est pas de classe C^2 !). On obtient en supposant que S_t est positif :

$$log(S_t) = log(S_0) + \int_0^t \frac{dS_s}{S_s} + \frac{1}{2}\int_0^t -\frac{1}{S_s^2}\ \sigma^2 S_s^2 ds,$$

soit, en utilisant (2) :

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t (\mu - \sigma^2/2)\ dt + \int_0^t\ \sigma\ dW_t.$$

On en déduit que :

$$Y_t = log(S_t) = log(S_0) + (\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t).$$

Il semble donc que :

$$S_t = x_0 \ exp((\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t)$$

soit une solution de l'équation (7). Vérifions rigoureusment cela. $S_t = f(t, W_t)$ où :

$$f(t, x) = x_0 \ exp((\mu - \sigma^2/2)t + \sigma x).$$

La formule d'Itô donne :

$$\begin{aligned} S_t &= f(t, \ W_t) \\ &= \ f(0, W_0) + \int_0^t f'_s(s, dW_s) \ ds \\ &+ \int_0^t f'_x(s, W_s) \ dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t f"_{xx}(s, W_s) d < W, W >_s . \end{aligned}$$

Mais, comme $< W, W >_t = t$:

$$S_t = x_0 + \int_0^t S_s(\mu - \sigma^2/2) ds + \int_0^t S_s \sigma dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t S_s \sigma^2 ds,$$

et finalement :

$$S_t = x_0 + \int_0^t S_s \ \mu ds + \int_0^t S_s \ \sigma \ dW_s$$

Remarque 2.3.1.1 :
On aurait pu obtenir le résulat précédent en appliquant la formule d'Itô à $S_t = \phi(Z_t)$, avec $Z_t = (\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t$ (qui est un processus d'Itô) et $\phi(x) = x_0 exp(x)$.
On vient donc de démontrer l'existence d'une solution de (1). Nous allons maintenant prouver que cette solution est unique. Pour cela, nous allons utiliser une propriété généralisant la "formule d'intégration par parties" dans le cas des processus d'Itô.

Proposition 2.3.1 (Formule d'intégration par parties)
Soient X_t etY_t deux processus d'Itô,

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s \text{ et } Y_t = Y_0 + \int_0^t K'_s ds + \int_0^t H'_s dW_s$$

Alors :

$$X_tY_t = X_0Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + < X, Y >_t$$

avec la convention que :

$$< X, Y >_t = \int_0^t H_s \; H'_s \; ds.$$

Démonstration : On a, d'après la formule d'Itô :

$$(X_t + Y_t)^2 = (X_o + Y_o)^2$$

$$+2 \int_0^t (X_s + Y_s) d(X_s + Y_s)$$

$$+ \int_0^t (H_s + H'_s) ds$$

$$X_t^2 = X_o^2 + 2 \int_0^t X_s dX_s + \int_0^t H_s^2 ds$$

$$Y_t^2 = Y_0^2 + 2 \int_0^t Y_s dY_s + \int_0^t H_s^{'2} ds$$

D'où, en faisant la différence entre la première ligne et les deux suivantes :

$$X_tY_t = X_0Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \int_0^t H_s H'_s ds.$$

Montrons, maintenant, l'unicité d'une solution de l'équation (1). Notons que :

$$S_t = x_0 \; exp((\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t)$$

est une solution de (1) et supposons que $(X_t)_{t \geq 0}$ en soit une autre. On va chercher à exprimer la "différentielle stochastique" de $X_t \; S_t^{-1}$. Posons :

$$Z_t = \frac{S_o}{S_t} = exp((-\mu + \sigma^2/2)t - \sigma W_t),$$

$\mu' = -\mu + \sigma^2$ et $\sigma' = -\sigma$. Alors $Z_t = exp((\mu' - \sigma'^2/2)t + \sigma' W_t)$ et le calcul fait précédemment prouve que :

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_s(\mu' ds + \sigma' dW_s) = 1 + \int_0^t Z_s((-\mu + \sigma^2) ds - \sigma dW_s)$$

On peut alors exprimer la "différentielle" de X_tZ_t grâce à la formule d'intégration par parties pour les processus d'Itô :

$$d(X_tZ_t) = X_t dZ_t + Z_t dX_t + d < X, Z >_t .$$

Ici, on a :

$$< X, Z >_t = < \int_0^t X_s \; \sigma \; dW_s - \int_0^t Z_s \; \sigma dW_s >_t \; = - \int_0^t X_s \; \sigma^2 \; X_x Z_s ds$$

On en déduit que :

$$d(X_tZ_t) \;\; = \;\; X_tZ_t((-\mu + \sigma^2)dt - \sigma \; dW_t) + X_tZ_t(\mu \; dt + \sigma dW_t) - X_tZ_t\sigma^2 \; dt = 0$$

X_tZ_t est donc égal à X_0Z_0, ce qui entraîne que :

$$\forall t \geq 0, \;\; P \; p.s. \; X_t = x_0 \; Z_t^{-1} = S_t.$$

Les processus X_t et Z_t étant continus, ceci prouve que :

$$P \; p.s. \forall t \geq 0, \;\; X_t = x_0 \; Z_t^{-1} = S_t.$$

On vient ainsi de démontrer la proposition suivante :
Théorème 2.3.1.1
σ, μ étant deux nombres réels, $(W_t)_{t \geq 0}$ étant un mouvement brownien et T un réel strictement positif, il existe un processus de Itô unique $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$ qui vérifie, pour tout $t \leq T$:

$$S_t = x_0 + \int_0^t S_s(\mu ds + \sigma dW_s).$$

Ce processus est donné par :

$$S_t = x_0 \; exp((\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t).$$

Remarque 2.3.1.1.
Le processus S_t que l'on vient d'expliciter servira de modèle standard pour le prix d'un actif financier. On l'appelle modèle de Black et Scholes.

3.4 Equations Différentielle Stochastiques E.D.S.

On se limite au théorème d'existence et d'unicité. Soit $(\Omega, F, F_t, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré vérifiant les "conditions habituelles " et $B = (B_t^1, B_t^2, ..., B_t^1)$ un $(F_t)_{t\geq 0}$ m.b à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, issu de zéro on note $\mathcal{M}$ l'espace des matrices à q lignes et d colonnes si $m = (m_{ij}) \in \mathcal{M}$, on pose $|m| = (\sum_{i,j} |m_{ij}|^2)^{1/2}$. On considère deux applications δ et b de $\mathbb{R}^+ \otimes \Omega \otimes \mathbb{R}^q$ dans $\mathcal{M}$ et $\mathbb{R}^q$ respectivement, vérifiant les conditions suivantes :
- Il existe une constante c positive telle que pour tout $(u, w) \in \mathbb{R}^+ \otimes \Omega$ et tout $(x, y) \in \mathbb{R}^q \otimes \mathbb{R}^q$

$$|\delta(u, \omega, x) - b(u, \omega, y)| \leq c|x - y|$$

$$|b(u, \omega, x) - b(u, \omega, y)|c|x - y|$$

Si $x = (x_1, ..., x_q)$ On pose $|x| = (\sum x_i^2)^{1/2}$
Pour tout $t \geq 0$ et tout $x \in \mathbb{R}^q$ les applications

$$(u, \omega) \in [0, t] \otimes \Omega \longrightarrow \sigma(u, \omega, x) \in [0, t] \otimes \Omega \longrightarrow b(u, \omega, x)$$

sont $B_{[0,t]} \otimes F_t$ sont mesurables.
Pour tout $t \geq 0$ et tout $x \in \mathbb{R}^q$, on a :

$$\mathbb{E}\{\int_0^t |\sigma|^2(u, ..., x)du\} < \infty$$

et

$$\mathbb{E}\{\int_0^t |b|^2(u, ..., x)du\} < \infty$$

on a le théorème suivant :

Théorème 3.4.1. *Soient $S \geq 0, n = (n_1, n_2, ..., n_q)$ une v.a à valeurs $\mathbb{R}^q$, F_s - mesurable, de carré intégrable et soient σ et b deux applications de $\mathbb{R}^+ \otimes \Omega \otimes \mathbb{R}^q$ à valeurs dans $\mathcal{M}$ et $\mathbb{R}^q$ respectivement, vérifiant les conditions précédentes, alors il existe un processus $(X_t, t \geq 0)$ à valeurs $\mathbb{R}^q$, adapté continu, unique vérifiant les conditions suivantes.*
- Pour tout $t \geq s, E\{\int_0^t |X_u|^2 du\} < \infty$
- $X_t = n + \int_s^t \sigma(u, X_u)dB_u + \int_s^t b(u, X_u)du, (t \geq s)$.

Preuve : [cf : [8]]

3.5 Le théorème de Girsamov

Soient $B = (B_t)_{t\geq 0}$ un F_t - mouvement Browninen d - dimensionnel issu de zéro et $\phi = (\phi_t)_{t\geq 0}$ un processus mesurable, borné, adapté à valeurs $\mathbb{R}^{\phi}$. On pose

$$M_t = exp(\int_0^t \phi_s dB - \frac{1}{2}\int_0^t |(\phi_s)|^2 ds)\ (t \geq 0)$$

alors $M = M_t$ est une martingale.
Soit $T > 0$ fixé. On définit une nouvelle probabilité Q sur (Ω, F_t) par la formule

$$\frac{dQ}{dP} = M_T$$

Alors le processus $\tilde{B}_t = B_t - \int_0^t \phi_s ds, t \in [0,T]$ est, pour la probabilité Q un $(F_t)_{t\in[0,T]}$ mouvement Brownien.
Preuve : [cf : [8]]

3.6 Formule de Feynman - Kac

Pour établir la formule de Feynman - Kac on va commencer par énoncer le théorème de Dyskin.

Théorème 3.6.1. *Soient $X_t \in \mathbb{R}^n, b(t,x) \in \mathbb{R}^n, \sigma(t,x) \in \mathbb{R}^{n\times m}, B_t$ un mouvement brownien m - dimensionnel, $f \in C_o^2(\mathbb{R}^n)$ et τ un temps d'arrêt tel que $\mathbb{E}(\tau) < \infty$. Alors*

$$\mathbb{E}[f(X_\tau)] = f(x) + \mathbb{E}^x[\int_0^\tau Lf(X_s)ds]$$

où L est le générateur infitisimal du processus

$$X_t = X_o + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s$$

Preuve : [cf [8]].
proposition 2.6.2. [1] Soit $f \in C_o^2(R^n)$ et $q \in C((R^n)$.
Supposons que q soit bornée.
a) Posons

$$v(t,x) = \mathbb{E}^x[exp(-\int_0^t q(X_s)dx)f(X_t)] \qquad 2.6.1$$

Alors

$$\frac{\partial v}{\partial t} = Lv - qv; v(0,x) = f(x), t > 0, x \in \mathbb{R}^n \quad 2.6.2$$

b) De plus, si $w(t,x) \in C^{1,2}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ est bornée dans $K \times \mathbb{R}^n$ pour chaque $K \subset \mathbb{R}$ et w satisfait (2.6.2) alors $w(t,x) = v(t,x)$ est donnée par (2.6.1).

3.7 Relation les E.D.S et les équations différentielles partielles (EDP)

Soit $C^k(E)$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{R}$ dont les dérivées sont continues pour tout ordre supérieur à $k, k \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}$ est un sous - ensemble d'un espace euclidien $\mathbb{R}^d$.
Si $f(t,x) : [0,T] \times \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, nous écrivons $f \in ([0,T] \times E)$, et si les dérivées partiales $(\frac{\partial f}{\partial t})$, $(\frac{\partial f}{\partial x_i})$, $(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\ \partial x_j})$ existent et sont continues sur $[0,T] \times \mathbb{E}$, nous écrivons $f \in C^{1,2}$ $([0,T] \times \mathbb{E})$.
Notons encore par $C_b^*(E)$ le sous - ensemble de $C^k(E)$ des fonctions bornées à support compact._ Nous énonçons le théorème suivant :
Théorème 2.7.1
Soient $b(t,x) \in \mathbb{R}^n, \sigma(t,x) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ qui vérifient la Lipschits globale et la condition de croissante linéaire.
a)

$$||b(t,x) - b(t,y)|| + ||\sigma(t,x) - \sigma(t,y)|| \leq K||x-y||$$
$$||b(t,x)||^2 + ||\sigma(t,x)||^2 \leq K^2(1 + ||x||^2),,$$

pour tout $0 \leq t < \infty, x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^d$, où K st une constante positive. Tout au long de cette section, nous considérons une solution de l'équation stochastique suivante,

$$(1)\quad X_s^{t,x} = x + \int_t^s b(\theta, X_\theta^{(t,x)}\ d\theta + \int_t^s\ \sigma(\theta, X_\theta^(t,x))\ dw_\theta, t \leq s < \infty$$

1. Les coefficients $b_i(t,x), \sigma_{ij}(t,x) : [0,\infty[\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont continus et satisfont la condition de croissance linéaire (b)
2. l'équation a une solution faible $(X^{(t,x)}, W), (\Omega, F, P), \{F_s\}$
pour tout pair (t,x);
3. Cette solution est unique dans le sens de la loi de probabilité.

Remarque 2.7 Nous écrivons fréquemment X à la place de $X^{(t,x)}$ au lieu de $E^{t,x}$ et $\mathcal{A}$ au lieu de $\mathcal{A}_t$. Si b et σ sont indépendants de t. Soit $\mathcal{A}$ un opérateur qui pour f de sous - classe de l'espace $C^2(\mathbb{R}^d$ est donné par

$$(a)(\mathcal{A}f)(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\ \sum_{k=1}^{d}\ a_{i,k}(x)\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^{d} b_i(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$$

avec $b_i, a_{ik} : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}, 1 \leq i, k \leq d,\ b_i, a_{ik}$ sont des fonctions Borel - mesurables.

3.7.1 Le Problème de Drichlet

Soit D un sous - ensemble ouvert de $\mathbb{R}^d$ vérifiant que b et σ sont indépendants de t.

Définition 3.7.1. *L'opérateur $\mathcal{A}$ de (a) est dit elliptique au point $x \in \mathbb{R}^d$ si*

$$\sum_{i=1}^{d}\ \sum_{k=1}^{d} a_{ik}(x)\ \varepsilon_i\ \varepsilon_k > 0; \forall \xi \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}.$$

Si $\mathcal{A}$ est elliptique dans D, s'il existe un nombre $\delta > 0$ tel que :

$$\sum_{i=1}^{d}\ \sum_{k=1}^{d} a_{ik}(x)\ \varepsilon_i\ \varepsilon_k \geq \delta ||\varepsilon||^2;\ \forall x \in D,\ \varepsilon \in \mathbb{R}^d$$

On dit que $\mathcal{A}$ est uniformément elliptique sur D.

Soit $\mathcal{A}$ un elliptique dans un domaine D ouvert et borné, on considère la fonction continue

$$K : \bar{D} \longrightarrow [0, \infty[,\ g : \bar{D} \longrightarrow \mathbb{R},\ \text{et}\ f : \partial D \longrightarrow \mathbb{R}$$

Le problème de Dirichlet consiste à trouver une fonction continue $u : \bar{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que u est de classe $C^2(D)$ et satisfait l'équation elliptique :

$$(5) \quad \mathcal{A}u - Ku = -g\ ; \quad \text{dans} D$$

aussi bien que la condition des frontières :

$$(6) \quad u = f \ \text{ sur } \ \partial D.$$

Il a été prouvé la proposition suivante :

Proposition 3.7.2. [1] *Soit u une solution du problème de Drichlet* $(5), (6)$ *dans un domaine D ouvert et borné, et soit* $\tau_D = inf\{t \geq 0;\ X_t \notin 0\}$.

$$si\ E^x \tau_D < \infty\ ;\ \forall x \in D.$$

Alors sous ses hypothèses $(2), (4)$ *on a :*

$$(8)\ u(x) = E^x[f(x_\tau)\ exp\{-\int_0^{\tau_D} K(X_s)\ ds\}$$
$$+\int_0^{\tau_D} g(X_t)\ exp\{-\int_0^t K(X_s)\ ds\}dt]$$

pour tout $x \in \bar{D}$

Lemme 3.7.3. *On suppose que pour le domaine D, ouvert, borné, on a pour* $1 \leq \ell \leq d$,

$$\min_{x \in \bar{D}} a_{\ell\ell}(x) > 0.$$

Preuve : cf [1].

Remarque 3.7.4. *La condition est plus forte que l'ellipticité mais elle est plus faible que l'ellipticité uniforme dans D. Maintenant on suppose que dans le domaine D, ouvert et borné on a que :*
(i) $\mathcal{A}$ *est uniformément elliptique.*
(ii) Les coefficients a_{ij}, b_i, k, g *sont Hölder continues, et*
(iii) tout point $a \in \partial D$ *a la propriété de la sphère extérieure c'est à dire : il existe une boule* $B(a)$ *telle que*

$$\bar{B}(a) \cap D = \phi,\ \bar{B}(a) \cap \partial D = \{a\}.$$

On maintient aussi l'hypothèse que f est continue sur ∂D. Alors il existe une fonction u de classe $C(\bar{D}) \cap C^2(D)$, qui résoud le problème de Dirichlet. Une telle fonction est unique et est donnée par (8).

3.7.2 Le Problème de Cauchy et la représentation de Feyman - Kac

Avec un arbitraire mais fixé $T > 0$ et une constante appropriée $L > 0$, $\lambda \geq 1$, on considère une fonction $f(x) : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}, g(t,x) : [0,T] \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ et $K(t,x) : [0,T] \times \mathbb{R}^d \longrightarrow [0, \infty[$ qui sont continues et satisfont :

$$(9)\quad (i)\ |f(x)| \leq L(1 + ||x||^{2\lambda})$$

$$\text{où} \quad (ii) \ f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^d$$

aussi bien :

$$(10) \quad (i) \ |g(t,x)| \leq L(1 + +||x||^{2\lambda})$$
$$(ii) \ g(t,x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Théorème 3.7.5. *Sous l'hypothèse précédente et* $(2) - (4)$, *on suppose que* $r(t,x) : [0,T] \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ *est continue, est de classe* $C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^d$ *et satisfait le problème de Cauchy.*

$$(11) \quad -\frac{\partial v}{\partial t} + Kv = \mathcal{A}v + g \ \text{ sur } [0,T] \times \mathbb{R}^d.$$
$$(12) \quad v(T,x) = f(x) : \ x \in \mathbb{R}^d$$

elle satisfait encore la condition de la croissance polynomiale .

$$(13) \quad \max_{0 \leq t \leq T} \ |v(t,x) \leq M(t + ||x||^2 u), x \in \mathbb{R}^d$$

pour $M > 0, u \geq 1$. Alors $v(t,x)$ admet la représentation stochastique :

$$(14) \quad v(t,x) = E^{t,x}[f(X_T)exp\{-\int_t^T K(\theta, X_\theta)d\theta\}$$
$$+ \int_t^T g, X_s)exp\{-\int_t^s K(\theta, X_\theta)d\theta\}ds]$$

sur $[0,T] \times \mathbb{R}^d$, en particulier,une telle solution est unique.
Preuve : cf [1]
Remarque Dans le cas des coefficients bornés i.e :

$$(15) \ |b_i(t,x)| + \sum_{ij}^{r}(t,x) \leq \rho; 0 \leq t < t < \infty, x \in \mathbb{R}^d, 1 \leq i \leq d.$$

la condition de la croissance polynomiale (14) dans le théorème (2.7.2) peut être remplacée par

$$(16) \quad max|v(t,x)| \leq Me^{u||x||^2}; \quad x \in \mathbb{R}^d$$

(la condition de la croissance exponentielle). Pour $M > 0$ et $0 < u < (1\backslash 18\rho Td)$.

Remarque 3.7.6. *Une série de conditions suffisante pour l'existence d'une solution v satisfaisant la condition de la croissance polynompiale est :*
(i) Ellipticité uniforme : Il existe une positive constante δ telle que

$$\sum_{i=1}^{d} \sum_{k=1}^{d} a_{ik}(t,x)\ \varepsilon_i \varepsilon_k \geq \delta ||\varepsilon||^2$$

pris pour $\varepsilon \in \mathbb{R}^d$, et $(t,x) \in [0,\infty[\times\mathbb{R}^d,$.
(ii) Les fonctions $a_{ik}(t,x), b_i(t,x), K(x)$ sont finies sur $[0,T]\times\mathbb{R}^d$,

(iii) Les fonctions $a_{ik}(t,x), b_i(t,x), K(x)$ et $g(t,x)$ sont uniformément Hölder - continues sur $[0,T]\times\mathbb{R}^d$.

(ii) Les fonctions $f(x)$ et $g(t,x)$ satisfont $(11)-(12),(i)$ respectivement.

Définition 3.7.7. *Une solution fondamentale de l'équation différentielle partielle du second ordre*

$$(17) \qquad -\frac{\partial u}{\partial t} + Ku = \mathcal{A}_t u.$$

est une fonction non négative $G(t,x,\tau,\varepsilon)$ définie par $0 \leq t < \tau \leq T,\ x \in \mathbb{R}^d$, avec la propriété qui est que pour toute $f \in C_0(\mathbb{R}^d,\ \tau \in]0,T]$. La fonction

$$(18)\ \ u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d,} G(t,x,\tau,\varepsilon) f(\varepsilon_i) d\varepsilon, 0 \leq t < \tau, x \in \mathbb{R}^d,$$

est finie, de classe $C^{1,2}$ satisfait (17) et

$$(19)\ \ \lim_{t\uparrow\tau} u(t,x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^d$$