

Calcul de Facteurs d'Intensité de Contrainte (FIC)

Introduction

Le concept de Facteur d'Intensité de Contrainte (FIC) est très important dans les applications, car il intervient dans les critères indiquant le risque de propagation d'une fissure déjà existante. En pratique, on calcule les FIC par un post-traitement, à partir du déplacement de la structure fissurée (lui-même obtenu préalablement via une méthode numérique). Ces méthodes peuvent être classées en deux catégories :

- les méthodes directes, qui comparent l'expression analytique de la singularité avec le déplacement élément fini,
- les méthodes globales, dont le calcul se fait sur une zone plus ou moins grande entourant le fond de fissure.

Les méthodes globales sont plus utilisées dans l'industrie, et notamment celles basées sur l'intégrale-J (présentée au chapitre 1 en (1.87), page 54). Une première méthode consiste à estimer numériquement (1.87). Une deuxième méthode (introduite dans [7]) consiste à transformer l'expression en une intégrale de surface.

Dans ce chapitre nous proposons deux méthodes originales de calcul de FIC définies pour le modèle de Kirchhoff-Love. La première se propose d'exploiter l'une des caractéristiques de la variante dite "global non-smooth functions and integral matching", présentée dans le chapitre précédent. La présence des singularités exactes dans la base élément fini permet de déduire une estimation des FIC. Cette méthode, très simple, ne nécessite pas de post-traitement. Cette méthode est locale, et ne nécessite aucun calcul.

La deuxième méthode est basée sur l'intégrale-J. Le principe est d'intégrer la solution numérique obtenue via XFEM, sur une couronne d'éléments entourant le fond de fissure.

Signalons que le fait de développer des méthodes pour le modèle de Kirchhoff-Love est assez différent de ce qui est utilisé dans les codes industriels. Par exemple, dans le code SAMCEF, le modèle de Mindlin est utilisé, et le fond de fissure est modélisé localement par le modèle d'élasticité tridimensionnelle. Ainsi, les concepts de mécanique de la rupture utilisés sont ceux définis sur ce modèle, bien que l'intégrale-J soit définie pour le

modèle de Mindlin-Reissner [38].

Plan du chapitre

Ce chapitre est découpé en deux sous-parties. Dans la première, nos méthodes de calculs de FIC sont présentées. La seconde partie est consacrée aux expériences numériques. Deux cas-tests sont présentés. Les résultats de nos méthodes appliquées à ces cas-tests sont ensuite présentés et analysés.

Cette partie sur les FIC présente plusieurs intérêts. D'abord, c'est une application des méthodes formulées au chapitre précédent. Il est toujours intéressant de montrer les développements d'une méthode. Mais dans notre cas de figure, c'est aussi une manière de compléter l'exposé des méthodes XFEM que nous proposons. De même que le coût de calcul et la précision ont été étudiées, nous tâchons de montrer maintenant que nos formulations permettent d'évaluer les FIC de manière satisfaisante.

Un autre intérêt de ce chapitre sur les FIC, est d'apporter des éléments de réponse à la question de la taille qu'il faut donner au rayon \mathcal{R} de la zone d'enrichissement. C'est une question récurrente sur les formulations XFEM ayant une zone d'enrichissement de taille fixe, comme les méthodes proposées dans [14] et [15].

1 Méthodes de calcul

1.1 Première méthode : estimation directe

Description de la méthode

L'expression du déplacement singulier dans le modèle de Kirchhoff-Love (1.83) ou (3.5) montre qu'en présence de fissure il n'y a que 2 modes singuliers, dont la présence est quantifiée par la valeur des FIC K_1 et K_2 . Or, dans la deuxième formulation XFEM proposée au chapitre précédent, nommée "global nonsmooth functions and integral matching", il est possible de prendre comme enrichissement singulier les deux fonctions G_l (3.9), dont l'expression est identique aux deux modes singuliers. Ainsi, dans la partie du domaine Ω_1 contenant le fond de fissure, la solution numérique est exprimée par :

$$u_1^h = \sum_{i \in N_1} a_i \varphi_i + \sum_{j \in J_1} b_j H \varphi_j + \sum_{l=1}^2 c_l G_l . \quad (4.1)$$

On peut voir facilement que les coefficients c_l peuvent être des approximations variables des deux FIC, à un coefficient multiplicatif près. En effet, dans le modèle de Kirchhoff-Love, la définition mathématique des FIC est

$$\begin{aligned} K_1 &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2r} \sigma_{22}(r, \theta = 0, x_3 = \varepsilon) \\ K_2 &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{3 + \nu}{1 + \nu} \sqrt{2r} \sigma_{12}(r, \theta = 0, x_3 = \varepsilon) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Les contraintes singulières sont en $O(1/\sqrt{r})$ au voisinage du fond de fissure. Or, en calculant les contraintes σ_{12} et σ_{22} associées au déplacement u_1^h ci-dessus, puis en multipliant par \sqrt{r} et en passant à la limite, tous les termes réguliers s'annulent, et ne resteront que les coefficients c_l , à un facteur multiplicatif près. Ainsi ces coefficients coïncident bien avec la définition des FIC.

Il reste juste à évaluer le facteur multiplicatif. Faisons le calcul en détail pour K_1 (la même démarche est valable pour K_2). Dans la formule (4.2), on remplace σ_{22} par σ_{22}^h , que nous exprimons en fonction du déplacement approché u_1^h (4.1). En combinant la loi de comportement (1.8) du modèle de Kirchhoff-Love avec l'expression du tenseur de déformation (1.7), et en se restreignant au problème de flexion (u_3 comme seule inconnue), la relation entre σ_{22} et u_3 est :

$$\sigma_{22} = -x_3 \frac{E}{1-\nu^2} [\nu \partial_{11}^2 u_3 + \partial_{22}^2 u_3]. \quad (4.3)$$

On remplaçant u_3 par sa fonction d'approximation u_1^h dans σ_{22} , puis en reportant dans (4.2), on obtient :

$$K_1^h = -\frac{E \varepsilon \sqrt{2}}{1-\nu^2} \left(\underbrace{\nu \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{r} \partial_{11}^2 u_1^h}_{l_1} + \underbrace{\lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{r} \partial_{22}^2 u_1^h}_{l_2} \right) \quad (4.4)$$

Les deux limites l_1 and l_2 existent, car la partie la plus singulière de u_1^h étant en $O(r^{3/2})$, on a donc $\partial_{\alpha\beta}^2 u = O(r^{-1/2})$. A part sur la fissure, sur les bords des éléments et sur le sous-découpage des éléments (liés à l'utilisation du HCT/FVS), les fonctions de base de u_1^h sont \mathcal{C}^2 , donc $\partial_{\alpha\beta}^2 u_1^h$ existe, et on a :

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{r} \partial_{\alpha\beta}^2 u_1^h = \lim_{r \rightarrow 0} \sum_l c_l \sqrt{r} \partial_{\alpha\beta}^2 G_l \quad (4.5)$$

car $\lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{r} \partial_{\alpha\beta}^2 \varphi_i = 0$ et $\lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{r} \partial_{\alpha\beta}^2 \varphi_j H = 0$. Le calcul des dérivées secondes des fonctions G_l est un peu long mais n'est pas difficile. On obtient :

$$\begin{array}{l} \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{r} \partial_{11}^2 G_1(r, 0) = \frac{\nu+1}{\nu-1} \quad \left| \quad \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{r} \partial_{22}^2 G_1(r, 0) = \frac{\nu-3}{\nu-1} \right. \\ \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{r} \partial_{11}^2 G_2(r, 0) = 0 \quad \left| \quad \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{r} \partial_{22}^2 G_2(r, 0) = 0 \right. \end{array}$$

Ce calcul confirme que G_2 n'interviendra pas dans le calcul de K_1^h . On en déduit surtout que $l_1 = c_1 \frac{\nu+1}{\nu-1}$, $l_2 = c_1 \frac{\nu-3}{\nu-1}$, et finalement :

$$K_1^h = -\frac{E \varepsilon (\nu+3) \sqrt{2}}{1-\nu^2} c_1. \quad (4.6)$$

Le calcul de K_2 est mené de la même manière. La définition (4.2) fait intervenir σ_{12} , qui est homogène à $\partial_{12}^2 u_3$, donc il faut calculer les dérivées croisées des fonctions G_l . On

obtient :

$$\begin{aligned}\lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{r} \partial_{12}^2 G_1(r, 0) &= 0 \\ \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{r} \partial_{12}^2 G_2(r, 0) &= \frac{\nu+1}{\nu-1},\end{aligned}$$

ce qui donne

$$K_2^h = -\frac{E \varepsilon (\nu + 3) \sqrt{2}}{1 - \nu^2} c_2. \quad (4.7)$$

La valeur des coefficients c_l se trouve dans le vecteur solution du système linéaire résultant du calcul de la solution approchée u_1^h . Il n'y a donc aucun post-traitement nécessaire pour obtenir l'approximation (K_1^h, K_2^h) du couple de FIC (K_1, K_2) .

Taux de convergence attendu

Il n'existe pas résultat théorique de convergence pour cette méthode. Signalons tout de même trois référence significatives, dont les 2 dernières concernent le problème de l'élasticité bidimensionnelle.

La référence [42] montre la convergence théorique d'une méthode d'estimation de FIC très proche de la notre. Il s'agit de la méthode dite de "Singular Function Method", introduite dans le courant des années 1970. C'est une simple méthode d'élément fini classique, où la base élément fini est enrichie par la singularité du problème traité. La différence principale est que le support de la singularité s'étend sur tout le domaine. la solution numérique u^h s'écrit donc comme la somme

$$u^h = \sum_i u_i \varphi_i + \sum_j c_j S_j, \quad (4.8)$$

où S_j désigne les singularités, et φ_i désigne les fonctions de forme de la base élément fini classique.

Ainsi, après résolution du système linéaire, les coefficients c_j approchent les FIC. Or, dans [42], le cas d'un opérateur elliptique général appliqué à un domaine présentant un nombre arbitraire de coins est traité. Pour le cas de l'opérateur bilaplacien avec une fissure (cas d'un coin d'ouverture 2π), le résultat prouvé indique que l'erreur sur les FIC ainsi calculés est en $O(\sqrt{r})$. Cependant, à notre connaissance, il n'existe pas de résultat numérique illustrant cette estimation.

La référence [30] concerne le cas de l'élasticité bidimensionnelle. Une résultat théorique de convergence y est donné, pour une méthode d'estimation "directe" de FIC relativement proche de la notre. La formulation XFEM de [30] utilise un degré de liberté avec support global pour chaque singularité, multiplié par une fonction dite "cutoff", notée χ , très régulière. Cette fonction est définie par deux cercles de rayons r_0 et r_1 , telle que :

$$\begin{cases} \chi(r) = 1 \text{ si } r \leq r_0 \\ \chi(r) \in]0, 1[\text{ si } r \in]r_0, r_1[\\ \chi(r) = 0 \text{ si } r \geq r_1 \end{cases} . \quad (4.9)$$

Avec cette formulation, un résultat de convergence théorique est prouvé, énonçant que $|K_i^h - K_i| \leq C \sqrt{h}$. De plus, dans [30], des tests numériques montrent que cette convergence en \sqrt{h} peut être atteinte, bien que le taux effectivement atteint dépende du choix de r_0 et r_1 . Les résultats numériques montrent que plus la fonction cutoff est “raide”, c’est-à-dire avec r_0 et r_1 proches, et moins le taux de convergence est bon (il peut même passer en dessous de $h^{1/2}$). En revanche, pour un passage de très progressif de 1 à 0 (r_0 et r_1 éloignés), le taux de convergence dépasse 1/2. Signalons tout de même que le niveau d’erreur reste toujours relativement élevé (de 8 % dans le meilleur des cas).

Dans [11], une méthode numérique assez proche de celle que nous proposons est testée, sur un problème d’élasticité bidimensionnelle. Cette méthode utilise la variante XFEM nommée “adding enrichment on each node” dans le chapitre précédent, (ou “geometrical enrichment” dans [14] et “XFEM with fixed enrichment area” dans [15, 30]). Sauf qu’au lieu de définir un zone d’enrichissement de rayon fixe, les auteurs sélectionnent de une à trois couches de noeud entourant le fond de fissure.

Trois maillages sont utilisés, de pas de maillage divisé par deux à chaque fois. Pour une seule couche de noeud enrichis, l’erreur sur les FIC oscille autour de 15 %. Le raffinement de maillage n’améliore pas significativement la précision, car l’erreur ne baisse pas en $O(\sqrt{h})$. En raffinant une deuxième couche d’élément, l’erreur tombe globalement à 1 %, et avec la troisième couche, au-dessous de 1 %. Toutefois, on peut nettement voir que le raffinement de maillage n’assure pas une baisse stricte de l’erreur. Ainsi, la convergence de la méthode numérique n’est pas avérée.

Les similitudes entre notre méthode et celles décrites dans [42] et [30] nous font penser qu’on pourrait espérer une convergence en $O(\sqrt{h})$ pour notre méthode d’estimation directe, bien que l’extension de ces résultats à notre méthode reste à prouver.

1.2 Deuxième méthode : calcul par intégrale-J

Description et formulation de la méthode

Pour le modèle de Kirchhoff-Love, l’expression de l’intégrale-J a déjà été établie en (1.91), page 56. Toutefois, cette expression n’est pas celle qui est utilisée dans les calculs numériques, car elle ne permet pas de séparer les contributions de chaque FIC au taux de restitution d’énergie. De plus, elle demande de pratiquer des intégrations sur des contours, ce qui n’est pas très pratique pour une solution issue d’un calcul éléments finis.

La démarche standard permettant de réaliser des calculs de FIC précis via l’intégrale-J est décrite dans [17]. Cette démarche est basée sur des travaux de P. Destuynder, décrits par exemple dans [7, 43].

Présentons maintenant la formulation adaptée au cas du modèle de plaque de Kirchhoff-Love. Notre démarche suivra d’assez près celle décrite dans [17] (qui concernait le cas de l’élasticité bidimensionnelle).

L'intégrale-J (1.91) peut être re-écrite ainsi :

$$J = \int_{\Gamma} m_{\alpha\beta} \left(\partial_{1\alpha} u_3 b_{\beta} - \frac{1}{2} \partial_{\alpha\beta} u_3 b_1 \right) dl - \int_{\Gamma} \partial_{\alpha} m_{\alpha\beta} b_{\beta} \partial_1 u_3 dl \quad (4.10)$$

Signalons aussi qu'on dispose d'une formule, établie dans [22], reliant cette intégrale-J aux facteurs d'intensité de contraintes :

$$J = a (K_1^2 + K_2^2), \quad (4.11)$$

où $a = \frac{2\varepsilon\pi(1+\nu)}{3E(3+\nu)}$. Le calcul de (4.11) est décrit par les auteurs de [22] comme très délicat, et mené avec le logiciel de calcul formel mathematica.

A partir de maintenant, toujours en suivant la démarche décrite dans [17], nous considérons 2 états. L'état (1) $(m_{\alpha\beta}^{(1)}, u_3^{(1)})$ correspond à l'état de déformation présent, c'est-à-dire la solution numérique dont on souhaite calculer les FIC. L'état (2) $(m_{\alpha\beta}^{(2)}, u_3^{(2)})$ est un état auxiliaire correspondant au déplacement asymptotique du mode I ou II, selon le FIC que l'on souhaite calculer. L'intégrale J pour la somme de ces 2 états est :

$$\begin{aligned} J^{(1+2)} &= \int_{\Gamma} (m_{\alpha\beta}^{(1)} + m_{\alpha\beta}^{(2)}) \left[(\partial_{1\alpha} u_3^{(1)} + \partial_{1\alpha} u_3^{(2)}) b_{\beta} - \frac{1}{2} (\partial_{\alpha\beta} u_3^{(1)} + \partial_{\alpha\beta} u_3^{(2)}) b_1 \right] dl \\ &- \int_{\Gamma} (\partial_{\alpha} m_{\alpha\beta}^{(1)} + \partial_{\alpha} m_{\alpha\beta}^{(2)}) (\partial_1 u_3^{(1)} + \partial_1 u_3^{(2)}) b_{\beta} dl \end{aligned} \quad (4.12)$$

En développant, on trouve :

$$J^{(1+2)} = J^{(1)} + J^{(2)} + I^{(1,2)} \quad (4.13)$$

où $I^{(1,2)}$ représente l'intégrale d'interaction suivante :

$$\begin{aligned} I^{(1,2)} &= \int_{\Gamma} (m_{\alpha\beta}^{(1)} \partial_{1\alpha} u_3^{(2)} + m_{\alpha\beta}^{(2)} \partial_{1\alpha} u_3^{(1)}) b_{\beta} - \frac{1}{2} (m_{\alpha\beta}^{(1)} \partial_{\alpha\beta} u_3^{(2)} + m_{\alpha\beta}^{(2)} \partial_{\alpha\beta} u_3^{(1)}) b_1 dl \\ &- \int_{\Gamma} (\partial_{\alpha} m_{\alpha\beta}^{(1)} \partial_1 u_3^{(2)} + \partial_{\alpha} m_{\alpha\beta}^{(2)} \partial_1 u_3^{(1)}) b_{\beta} dl \end{aligned} \quad (4.14)$$

Si on re-écrit (4.11) pour la somme des 2 états, on trouve :

$$J^{(1+2)} = J^{(1)} + J^{(2)} + 2a \left(K_1^{(1)} K_1^{(2)} + K_2^{(1)} K_2^{(2)} \right) \quad (4.15)$$

Les seconds membres de (4.13) et (4.15) étant égaux, on en déduit la relation :

$$I^{(1,2)} = 2a \left(K_1^{(1)} K_1^{(2)} + K_2^{(1)} K_2^{(2)} \right) \quad (4.16)$$

Dans cette équation, il suffit que l'état 2 soit le mode I (avec $K_1^{(2)} = 1$ et $K_2^{(2)}$ nul), pour déduire la valeur du FIC K_1 en fonction de l'intégrale d'interaction, car l'équation précédente devient :

$$I^{(1,2)} = 2a K_1^{(1)} \quad (4.17)$$

On peut calculer K_2 de la même manière.

Transformation en une intégrale de domaine

Ainsi, calculer l'intégrale d'interaction (4.14) avec les champs asymptotiques permet de déduire les valeurs des FIC. Cependant, dans l'optique du calcul numérique, l'intégrale d'interaction est transformée en une intégrale de domaine. Nous suivons toujours la démarche de [17].

Re-écrivons l'expression (4.14) de l'intégrale d'interaction $I^{(1,2)}$ de manière plus compact :

$$I^{(1,2)} = \int_{\Gamma} \mathcal{A}_{\beta} b_{\beta} + \mathcal{B} b_1 dl \quad (4.18)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\beta} &= (m_{\alpha\beta}^{(1)} \partial_{1\alpha} u_3^{(2)} + m_{\alpha\beta}^{(2)} \partial_{1\alpha} u_3^{(1)}) - (\partial_{\alpha} m_{\alpha\beta}^{(1)} \partial_1 u_3^{(2)} + \partial_{\alpha} m_{\alpha\beta}^{(2)} \partial_1 u_3^{(1)}) \\ \mathcal{B} &= -\frac{1}{2} (m_{\alpha\beta}^{(1)} \partial_{\alpha\beta} u_3^{(2)} + m_{\alpha\beta}^{(2)} \partial_{\alpha\beta} u_3^{(1)}) \end{aligned}$$

La valeur de $I^{(1,2)}$ ne change pas si on multiplie l'intégrande par une fonction régulière q , qui vaut 1 sur un voisinage du fond de fissure recouvrant la zone que Γ délimite, et 0 sur un contour C_0 qui entoure Γ . Ainsi, si on suppose qu'il n'y a pas de force surfacique appliquée sur le disque A délimité par le contour C_0 , alors $I^{(1,2)}$ peut s'écrire :

$$I^{(1,2)} = \int_C (\mathcal{A}_{\beta} B_{\beta} + \mathcal{B} B_1) q dl \quad (4.19)$$

où le contour C est la réunion des contours $C = \Gamma \cup C_+ \cup C_- \cup C_0$, et B désigne la normale extérieur à C (voir Fig. 4.1). Ensuite, on utilise le théorème de la divergence, et on fait tendre le contour Γ vers l'origine $(0, 0)$. Ainsi, l'intégrale de contour est transformée en une intégrale de surface, et le domaine A devient le disque complet entourant le fond de fissure, délimité par C_0 . Et donc, on a :

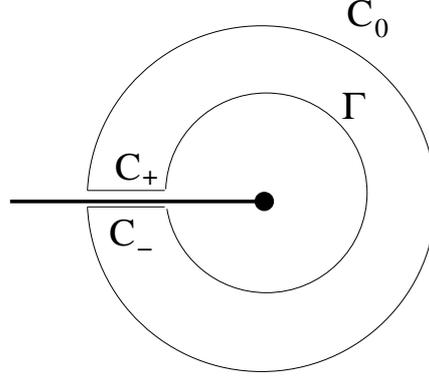
$$\begin{aligned} I^{(1,2)} &= \int_A \partial_{\beta} (\mathcal{A}_{\beta} q) + \partial_1 (\mathcal{B} q) dA \\ &= \int_A (\partial_{\beta} \mathcal{A}_{\beta} + \partial_1 \mathcal{B}) q + \mathcal{A}_{\beta} \partial_{\beta} q + \mathcal{B} \partial_1 q dA \end{aligned}$$

Par un calcul direct, il est possible de montrer que $\partial_{\beta} \mathcal{A}_{\beta} + \partial_1 \mathcal{B}$ vaut 0 (le calcul est fait en annexe, page 135). Ainsi on obtient :

$$\begin{aligned} I^{(1,2)} &= \int_A \left[(m_{\alpha\beta}^{(1)} \partial_{1\alpha} u_3^{(2)} + m_{\alpha\beta}^{(2)} \partial_{1\alpha} u_3^{(1)}) - (\partial_{\alpha} m_{\alpha\beta}^{(1)} \partial_1 u_3^{(2)} + \partial_{\alpha} m_{\alpha\beta}^{(2)} \partial_1 u_3^{(1)}) \right] \partial_{\beta} q \\ &\quad - \left[\frac{1}{2} (m_{\alpha\beta}^{(1)} \partial_{\alpha\beta} u_3^{(2)} + m_{\alpha\beta}^{(2)} \partial_{\alpha\beta} u_3^{(1)}) \right] \partial_1 q dA \end{aligned} \quad (4.20)$$

Un dernière simplification. Montrons que $m_{\alpha\beta}^{(1)} \partial_{\alpha\beta} u_3^{(2)} = m_{\alpha\beta}^{(2)} \partial_{\alpha\beta} u_3^{(1)}$. En effet :

$$\begin{aligned} m_{\alpha\beta}^{(1)} \partial_{\alpha\beta} u_3^{(2)} &= -D[(1 - \nu) \partial_{\alpha\beta}^2 u^{(1)} + \nu \Delta u^{(1)} \delta_{\alpha\beta}] \partial_{\alpha\beta}^2 u^{(2)} \\ &= -D[(1 - \nu) \partial_{\alpha\beta}^2 u^{(1)} \partial_{\alpha\beta}^2 u^{(2)} + \nu \Delta u^{(1)} \Delta u^{(2)}] \end{aligned}$$


 FIG. 4.1 – Contours d'intégration pour le calcul de $I^{(1,2)}$.

Cette dernière expression étant totalement symétrique, on en déduit le résultat. Ainsi, l'expression finale de l'intégrale d'interaction est :

$$I^{(1,2)} = \int_A \left[(m_{\alpha\beta}^{(1)} \partial_{1\alpha} u_3^{(2)} + m_{\alpha\beta}^{(2)} \partial_{1\alpha} u_3^{(1)}) - (\partial_\alpha m_{\alpha\beta}^{(1)} \partial_1 u_3^{(2)} + \partial_\alpha m_{\alpha\beta}^{(2)} \partial_1 u_3^{(1)}) \right] \partial_\beta q - m_{\alpha\beta}^{(1)} \partial_{\alpha\beta} u_3^{(2)} \partial_1 q \, dA \quad (4.21)$$

Calcul numérique de l'intégrale d'interaction $I^{(1,2)}$

A partir de maintenant, on ne suit plus la démarche de [17], car notre démarche devient spécifique au cas du modèle de Kirchhoff-Love, traité avec l'élément HCT/FVS réduit (notre démarche est originale).

On s'intéresse au calcul numérique de l'intégrale d'interaction $I^{(1,2)}$, dans son expression (4.21). L'expression mathématique a déjà été établie précédemment, et elle contient trois termes. Les deux premiers peuvent être approchés numériquement sans grande difficulté, mais le troisième pose problème, en raison de la présence de dérivées troisièmes.

D'abord, les fonctions que nous intégrons ne sont pas forcément dans $H^3(\Omega)$. De plus, il n'est pas établi que la dérivée troisième d'une fonction soit correctement approximée par l'élément fini HCT/FVS réduit (on obtient une approximation seulement jusqu'à la dérivée seconde). Il faut donc transformer l'expression (4.21) pour éviter ces dérivées troisièmes.

Voici l'expression du terme à approcher :

$$X = - \int_A (\partial_\alpha m_{\alpha\beta}^{(1)} \partial_1 u_3^{(2)} + \partial_\alpha m_{\alpha\beta}^{(2)} \partial_1 u_3^{(1)}) \partial_\beta q \quad (4.22)$$

On sépare l'intégrale en deux termes :

$$X = - \int_A \underbrace{\partial_\alpha m_{\alpha\beta}^{(1)} \partial_1 u_3^{(2)} \partial_\beta q}_{X_1} + \underbrace{\partial_\alpha m_{\alpha\beta}^{(2)} \partial_1 u_3^{(1)} \partial_\beta q}_{X_2} \quad (4.23)$$

Le terme X_2 peut être calculé sans difficulté particulière, en calculant les dérivées troisièmes des singularités (le calcul est direct). Dans le terme X_1 , on peut faire une intégration par partie :

$$X_1 = - \int_A \partial_\alpha m_{\alpha\beta}^{(1)} \partial_1 u_3^{(2)} \partial_\beta q = \underbrace{\int_A m_{\alpha\beta}^{(1)} \partial_\alpha (\partial_1 u_3^{(2)} \partial_\beta q)}_{X_{11}} - \underbrace{\int_{\partial A} m_{\alpha\beta}^{(1)} \partial_1 u_3^{(2)} \partial_\beta q b_\alpha}_{X_{12}} \quad (4.24)$$

Le terme X_{11} se calcule sans problème. Pour le terme X_{12} , dans le cas où $u_3^{(2)}$ est le mode I exacte, on peut vérifier que $\partial_1 u_3^{(2)}$ s'annule le long du bord de la fissure (ce terme s'annule en $\theta = \pi$). Donc dans ce cas, X_{12} s'annule.

Mais dans le cas du mode II, le calcul de X_{12} pose toujours problème. Signalons toutefois que ce terme n'est non-nul que sur les bords de la fissure où $\partial_\beta q$ est non-nul (c'est-à-dire le long de l'intersection des bords de la fissure avec la couronne d'intégration).

Dans les tests numériques, pour le mode II, on négligera ce terme X_{12} . Malgré cette simplification, les calculs de K_2 n'ont pas été moins précis que ceux de K_1 .

Taux de convergence attendu

Pour l'élasticité bidimensionnelle, la référence [43] contient des résultats théoriques de convergence montrant que l'erreur sur les FIC est en $O(h)$, pour des éléments P_1 , avec une méthode d'éléments finis classique.

Dans [15], pour un problème d'élasticité bidimensionnelle, des calculs de FIC via l'intégrale-J ont été menés, sur des solutions calculées par la méthode XFEM. Pour un élément P^1 , bien que l'erreur soit assez oscillante, la courbe d'erreur semble converger en $O(h^2)$. Le niveau d'erreur atteint est très satisfaisant (de 3 % à 0.05 %).

Ainsi, pour notre formulation utilisant les éléments HCT/FVS réduits dont l'erreur en norme L^2 est en $O(h^2)$, on pourrait aussi espérer atteindre un taux de convergence en $O(h^2)$ (si les résultats de [43] s'étendent au cas de l'opérateur bilaplacien avec l'élément que nous avons choisi).

Implémentation

Nous ne présentons que deux aspects particuliers de l'implémentation. L'évaluation numérique de l'intégrale d'interaction $I^{(1,2)}$ nécessite de définir explicitement la fonction q , qui vaut 1 à l'intérieur d'une zone entourant le fond de fissure, 0 à l'extérieur d'une zone entourant la première, et se raccorde continûment d'une zone à l'autre. Comme on ne calcule que le gradient de q , cette fonction n'est non-nulle que sur l'intervalle entre ces deux zones. Numériquement, on définit donc une couronne d'élément entourant le fond de fissure, et l'intégrale-J n'est évaluée que sur cette couronne.

Dans nos tests numériques, nous nous sommes contentés de sélectionner la collection d'éléments situés à un certain rayon \mathcal{R}_j du fond de fissure. La fonction q est représentée

sur l'élément HCT/FVS réduit : les degrés de liberté associés à des dérivées sont mis à 0. Les valeurs nodales sont fixées à 1 sur le bord intérieur de la couronne, et à 0 sur le bord extérieur. Voir Fig. 4.2, le cas d'un maillage régulier qui aboutit à une couronne en forme de "cadre".

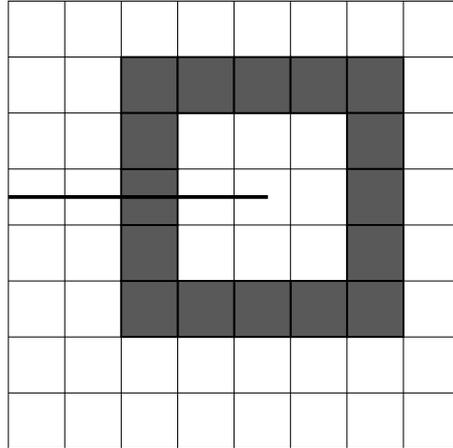


FIG. 4.2 – Couronne d'éléments entourant le fond de fissure.

2 Résultats Numériques

2.1 Description de l'étude numérique

Cas-tests étudiés

Deux cas-tests avec une fissure droite sont considérés. Le premier consiste à prendre la somme des deux modes singuliers comme solution exacte :

$$u^{ex} = G_1 + G_2 \quad (4.25)$$

Les bords de la fissure suivent une condition de bord libre, et le reste du bord suit une condition de Dirichlet non-homogène, où la valeur imposée est celle de u^{ex} . Ainsi, les valeurs exactes de K_1 et K_2 sont $1/\mathcal{A}_{KL}$ (où \mathcal{A}_{KL} , défini équation (1.83), vaut $\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1-\nu^2}{E\varepsilon(3+\nu)}$). Dans les tests nous avons pris une plaque carrée $[-0.5, 0.5] \times [-0.5, 0.5]$, avec le fond de fissure à l'origine.

Le deuxième cas-test est issu de [39]. Il s'agit d'une plaque carrée avec une fissure centrale, droite, de longueur $2a$, et un moment M_0 constant est appliqué sur les bords parallèles à la fissure. Les dimensions de la plaque sont dites "infinies", ce qui signifie que les valeurs de référence de FIC ne sont valables que si la fissure est de petite taille par rapport aux dimensions du domaine. Ces valeurs de référence sont :

$$K_1 = \frac{3 M_0 \sqrt{a}}{2 \varepsilon^2} ; K_2 = 0 \quad (4.26)$$

Pour les tests numériques, nous avons pris un plaque de côté 1, avec une fissure de taille $2a = 0.2$. Ce qui reste significatifs vis-à-vis de la référence [40], où des calculs sont menés avec $2a = 0.18$. Le problème étant symétrique, nous ne calculons qu'une moitié du domaine.

Objectifs de l'étude

L'objectif des expériences numériques est d'étudier l'erreur commise par nos méthodes de calcul de FIC, en fonction des paramètres suivants :

- le pas de maillage h
- le rayon d'enrichissement \mathcal{R}
- le rayon de la couronne d'intégration \mathcal{R}_J (pour l'intégrale-J seulement)
- la distorsion du maillage.

De plus, les résultats seront comparés avec ceux de la méthode des éléments finis classique avec l'intégrale-J.

L'objectif des tests numériques est double. D'abord, l'étude de l'erreur et la validation des méthodes, qui permettent d'illustrer l'intérêt des méthodes présentées au chapitre précédent. Mais aussi, comme on l'a déjà souligné dans l'introduction, d'apporter des éléments de réponse à la question de l'influence des paramètres \mathcal{R} et \mathcal{R}_J , et de proposer éventuellement des règles pratiques de choix de ces paramètres, en fonction de h .

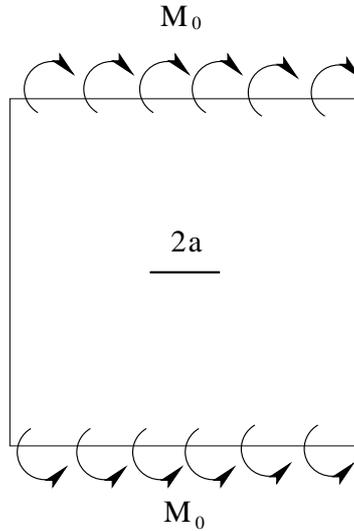


FIG. 4.3 – Schéma du second cas-test de plaque, avec une fissure centrale, soumise à des moments au bord.

Dans les références [14] et [15], la zone d'enrichissement est circulaire, de rayon 0.05 et 0.1, respectivement. Dans nos tests numériques du chapitre précédent, \mathcal{R} vaut 0.15.

D'une manière générale, il est probable que le choix de \mathcal{R} dépende du résultat que l'on cherche à obtenir. Pour faire des courbes de convergences sur l'erreur en norme L^2 ou H^2 , et qu'on cherche à mettre en évidence le taux de convergence optimal, prendre \mathcal{R} indépendant du pas de maillage h est suffisant.

Toutefois, sur les maillages les plus raffinés, le choix de \mathcal{R} fixe conduit à enrichir de nombreuses couches d'éléments, ce qui est peut-être superflu si l'on n'utilise qu'un seul maillage. Ainsi, dans notre étude numérique, nous envisageons deux stratégies pour le choix de \mathcal{R} . D'abord, nous testons plusieurs valeurs de \mathcal{R} fixe. Dans un deuxième temps, nous envisageons que \mathcal{R} dépende de h et recouvre un certain nombre de couronnes d'éléments. Ainsi, \mathcal{R} vaut kh , où k est un nombre entier entre 1 et 5.

Notons aussi que prendre $\mathcal{R} = h$ est très proche de la première formulation XFEM de [17, 16], où seul l'élément contenant le fond de fissure était enrichi.

2.2 Estimation directe

Cette première méthode a été testée sur les deux cas-test, avec des maillages triangulaires et quadrangulaires, structurés et non-structurés, et pour différentes valeurs du pas de maillage.

Sur le premier cas-test, où la fissure mesure 0.5, nous avons testé $\mathcal{R} = 0.1, 0.15, 0.2, 0.25$. Ensuite, nous avons testé $\mathcal{R} = kh$, où k varie de 1 à 5.

Les résultats montrent que cette méthode donne une bonne estimation du FIC, toujours à moins de 5 % d'erreur, et souvent à moins de 1 % d'erreur. Le choix de \mathcal{R} fixe ne donne

pas des résultats significativement meilleurs qu'avec $\mathcal{R} = k h$. C'est donc ces résultats-ci que nous présentons, Fig. 4.4 et 4.5. Les graphes avec \mathcal{R} fixe sont disponibles en annexe, pages 137 et 138, Fig. 5.6 et 5.7.

Notons que les courbes montrent que la méthode converge très lentement. Ceci est peut-être lié au conditionnement élevé de la méthode, qui atteint 10^{11} en maillages structurés et 10^{12} en non-structurés.

Sur le second cas-test, la fissure est de taille $a = 0.11$ sur le demi-domaine (le rectangle $[0, 0.5] \times [-0.5, 0.5]$). Par rapport au cas-test précédent, la fissure est de plus petite taille par rapport à l'ensemble du domaine. Or, la zone d'enrichissement ne doit pas toucher le bord : vu que celui-ci porte une condition de symétrie que l'enrichissement singulier ne vérifie pas, les singularités se verraient imposer la condition de symétrie, ce qui affecterait aux singularités des coefficients éléments finis c_l proches de zéro. Et les valeurs des FIC seraient fausses.

Sur ce cas-test, nous utilisons des maillages de densité équivalente à ceux utilisés avec le premier cas-test. Ceci conduit à une contrainte plus importante sur le choix de \mathcal{R} . Pour \mathcal{R} fixe, nous avons testé 0.05, 0.075, 0.10. Pour la stratégie \mathcal{R} variable, nous avons testé les mêmes valeurs de k . Une grande valeur de k nécessite un niveau initial de raffinement important. Ainsi, pour $k = 5$, le maillage le moins raffiné (en quadrangles structurés) compte environ 30×60 éléments.

Quand ce niveau de raffinement minimum est atteint, l'erreur est inférieure à 5 %. Les résultats sont présentés Fig. 4.6 et 4.7, en rayons "variables" et "fixes".

Conclusions et règle de construction de maillage

Malgré sa convergence lente, cette méthode "estimation directe" présente indéniablement de l'intérêt, de par sa simplicité et sa capacité à fournir des résultats proches de la valeur exacte.

Au vu des tests, augmenter \mathcal{R} améliore les résultats, et vu la convergence lente, ce peut être plus intéressant que raffiner le maillage. Dans le cas du rayon variable, on voit que prendre $\mathcal{R} = 5 h$ permet d'atteindre une précision satisfaisante. Ceci nous permet de proposer une règle de construction pour un calcul numérique. Etant donné une fissure de taille a , le domaine doit être maillé avec un h minimum de $a/5$.

Cette règle indique que plus la fissure est petite, plus sa prise en compte nécessite un maillage raffiné. Ce qui est conforme à l'intuition : plus une fissure est petite par rapport à la taille des mailles, moins elle a d'influence sur le déplacement global. Un maillage raffiné est donc nécessaire pour en "capter" l'influence.

2.3 Intégrale-J

De même que pour la méthode "Estimation directe", nous testerons plusieurs valeurs pour le rayon de la zone d'enrichissement \mathcal{R} : des valeurs "fixes" et des valeurs "variables". Le rayon de la couronne d'intégration \mathcal{R}_J sera aussi testé.

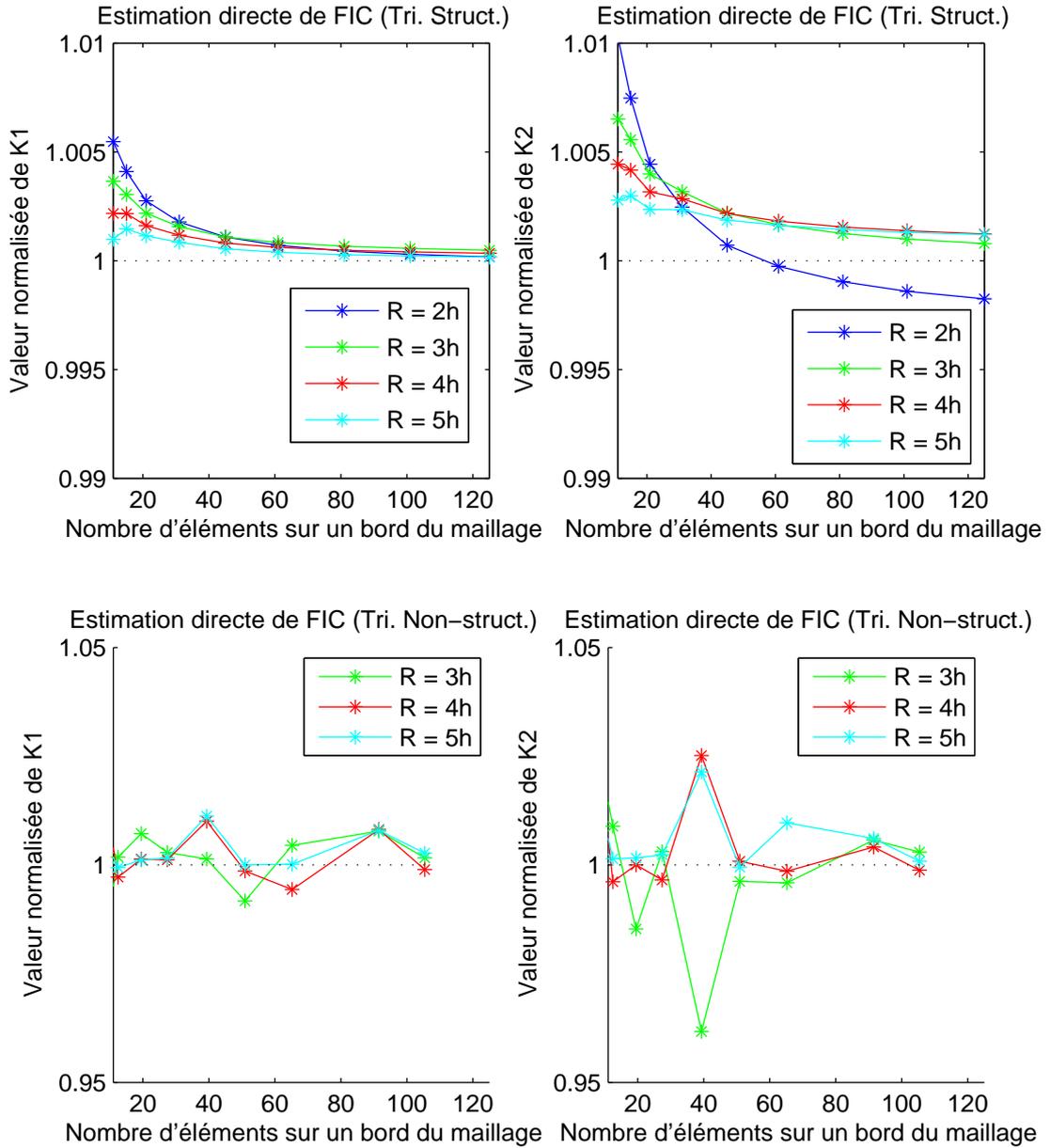


FIG. 4.4 – Calcul de FIC, estimation directe, premier cas-test, en triangles (\mathcal{R} variable).

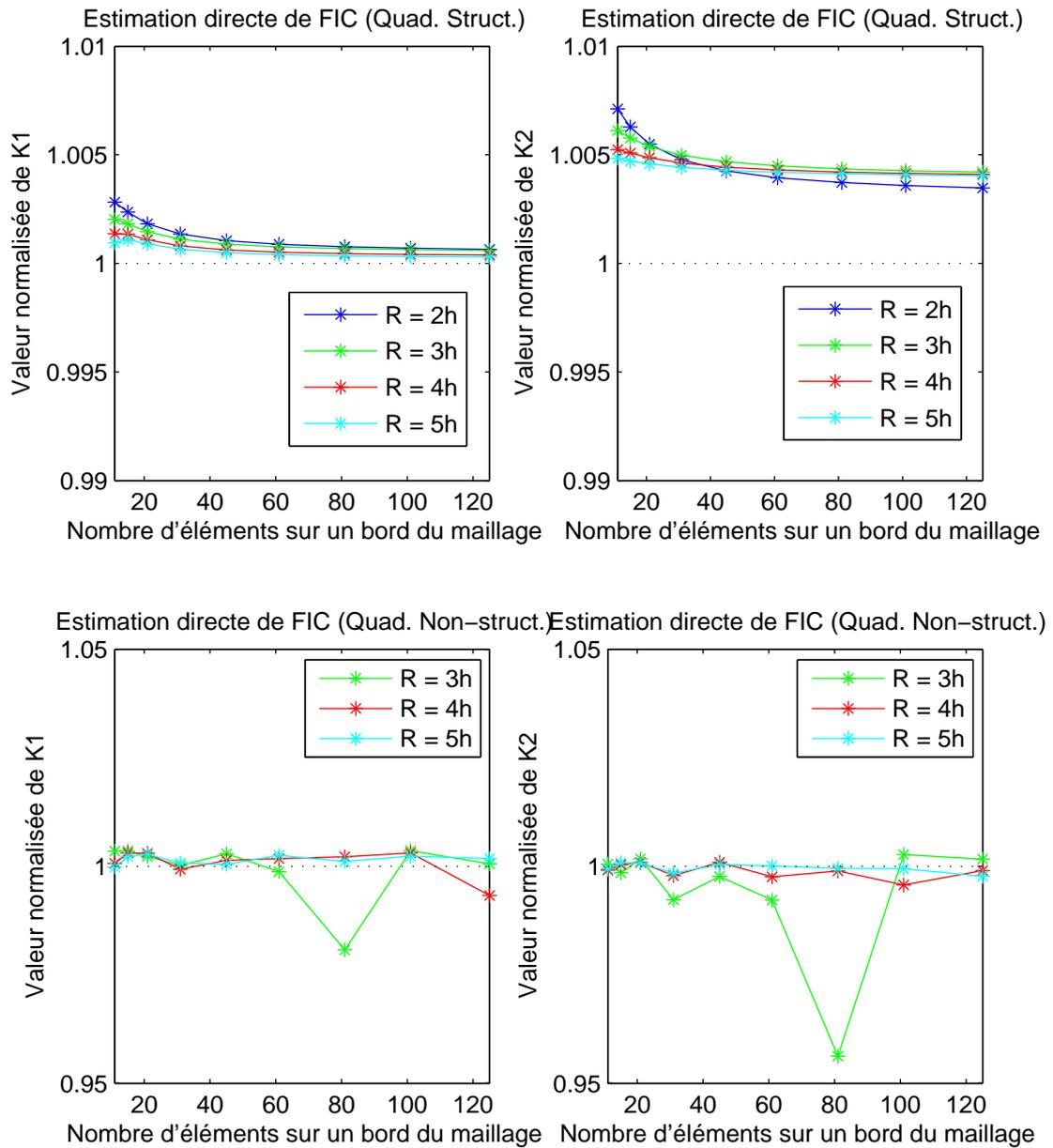


FIG. 4.5 – Calcul de FIC, estimation directe, premier cas-test, en quadrangles (\mathcal{R} variable).

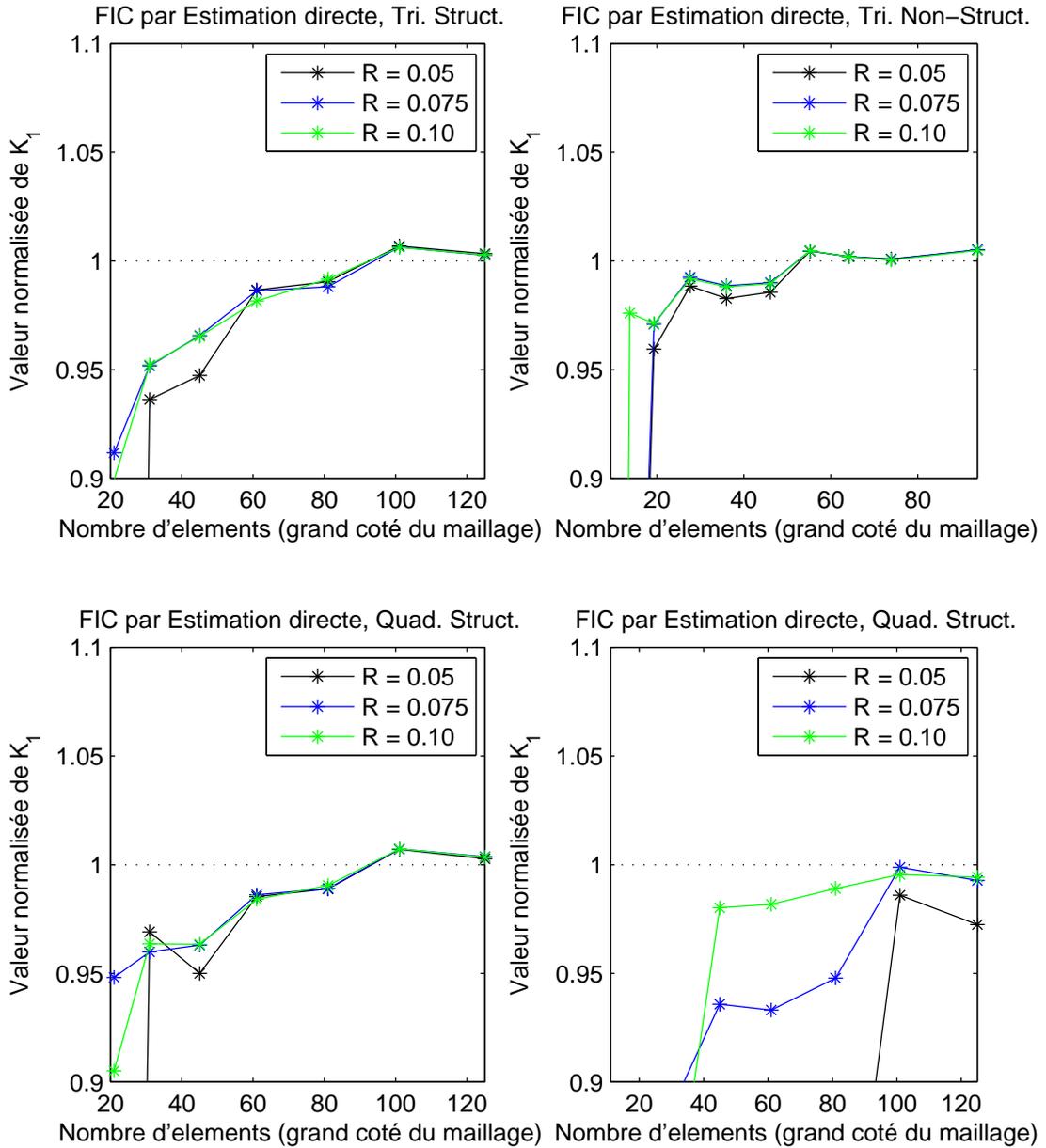


FIG. 4.6 – Calcul de FIC, estimation directe, deuxième cas-test (\mathcal{R} fixe).

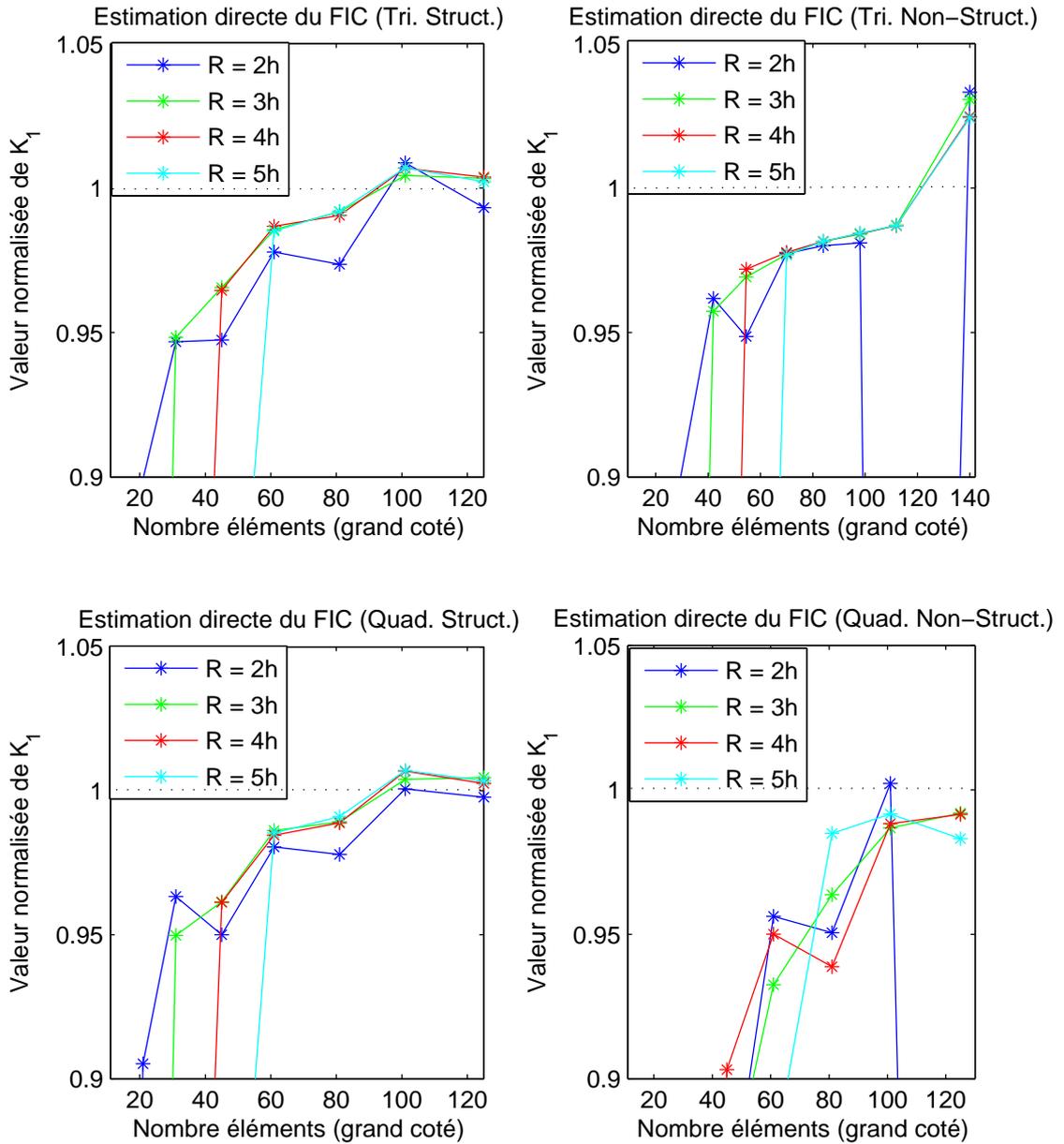


FIG. 4.7 – Calcul de FIC, estimation directe, deuxième cas-test (\mathcal{R} variable).

Les résultats obtenus sont précis, et les valeurs sont proches des valeurs exactes. Par contre, d'un maillage à l'autre, l'erreur n'est pas forcément décroissante, en raison du fait que la valeur approchée fournie par l'intégrale-J oscille autour de la valeur exacte. Ainsi, il peut arriver qu'un maillage donne une erreur légèrement supérieure à celle d'un maillage un peu plus grossier, mais l'erreur reste globalement bonne.

Pour cette raison, nous ne donnerons des courbes de convergence que sur le premier cas-test, et dans le cas de maillages structurés, qui donnent des valeurs moins oscillantes. Dans un deuxième temps, nous présenterons l'étude globale, en nous basant sur les graphiques de valeurs normalisées des FIC, en fonction de h , \mathcal{R} et \mathcal{R}_J .

Premier cas-test

Courbes de convergences Nous présentons des courbes de convergence dans le cas de maillages structurés (triangulaires et quadrangulaires), Fig 4.8 et 4.9. La méthode XFEM utilise une rayon d'enrichissement \mathcal{R} égal à 0.15. Sur ces cas particuliers, la comparaison avec la Méthode des Eléments Finis (MEF) indique qu'XFEM est capable d'améliorer l'erreur et le taux de convergence, puisque les pentes restent autour de 1 en MEF, et sont comprises entre 1.4 et 1.8 pour XFEM.

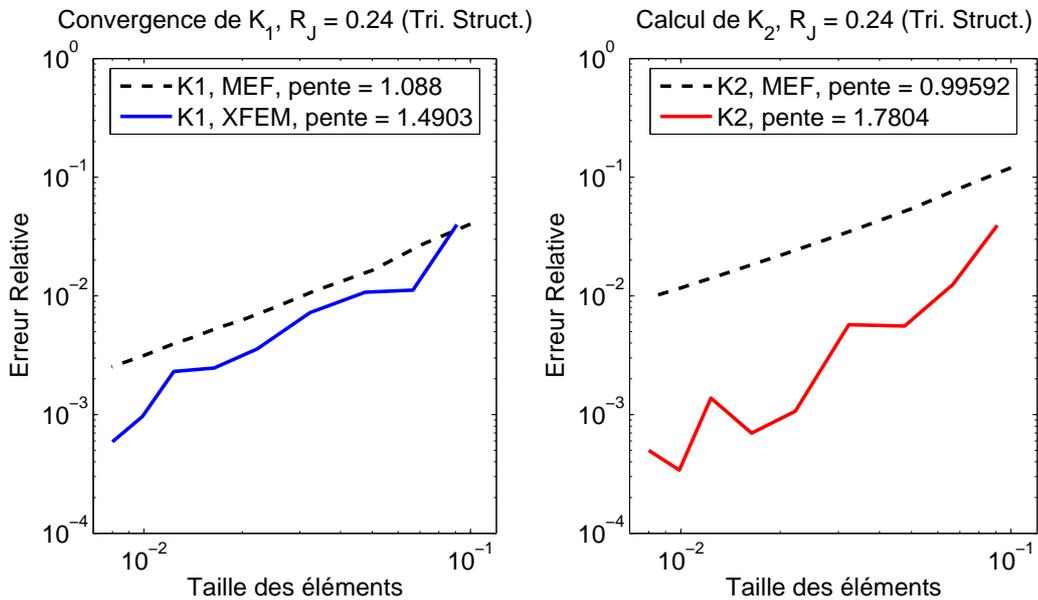


FIG. 4.8 – Convergence des FIC en intégrale-J, maillages triangulaires.

Graphes des valeurs de FIC normalisées Nos résultats montrent que l'erreur obtenue est globalement inférieure à 5 %. Les maillages structurés permettent très facilement d'atteindre une erreur inférieure à 1 %. C'est le cas en triangles, pour n'importe quel maillage avec $\mathcal{R} = 0.2$ ou 0.25 , ou pour n'importe quel rayon à partir d'un maillage à partir de

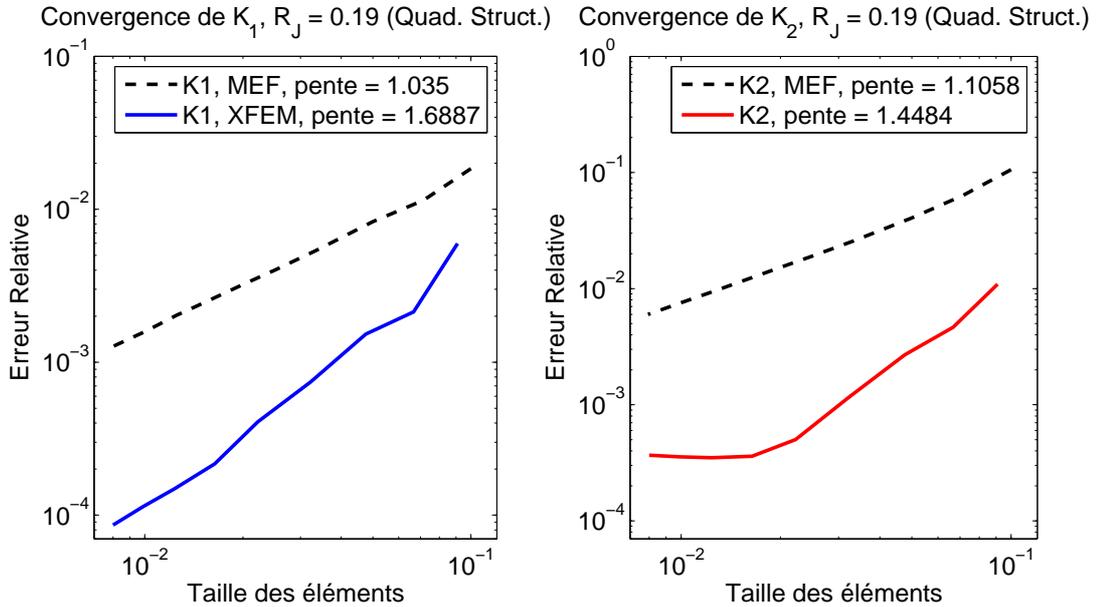


FIG. 4.9 – Convergence des FIC en intégrale-J, maillages quadrangulaires.

60×60 . En quadrangles structurés, sauf pour $\mathcal{R} = h$, l'erreur est inférieure à 1 %, et est remarquablement stable vis-à-vis de \mathcal{R}_J .

En maillages non-structurés, prendre $\mathcal{R} = 3h$ ou 0.2 suffit pour obtenir un erreur inférieure ou égale à 5 %, sur tous les maillages. On peut noter qu'entre $\mathcal{R} = h$ ou $2h$ et $\mathcal{R} = 3h$ il y a parfois une différence très significative. On peut en déduire que $3h$ est une valeur minimale.

Indiquons aussi une limite de la méthode : sur les maillages les plus grossiers, avec $\mathcal{R} = h$ ou 0.1, l'erreur est souvent supérieur à 10 %.

Globalement, nos tests montrent des résultats relativement stables par rapport au rayon de la couronne \mathcal{R}_J .

A part en triangles structurés, la stratégie de zone fixe ne permet pas d'atteindre une précision significativement meilleur que la stratégie $\mathcal{R} = kh$. Nos résultats suggèrent donc que pour les maillages les plus raffinés, dans l'optique d'un calcul de FIC, il n'est pas utile de prendre \mathcal{R} plus grand que 5 couches d'éléments.

Nous présentons les résultats pour $\mathcal{R} = kh$ en maillages triangulaires ou quadrangulaires, structurés ou non-structurés, Fig. 4.10 à 4.13. Seuls les résultats sur K_1 sont présentés (les courbes de K_2 , similaires, sont présentées en annexe, pages 140 à 143). Les courbes de \mathcal{R} fixe sont également disponibles en annexe, pages 145 à 153.

Deuxième cas-test

Pour ce deuxième cas-test, rappelons que la fissure est plus petite taille, ce qui limite les choix de \mathcal{R} et \mathcal{R}_J . Comme pour la méthode "estimation directe", en rayon fixe nous

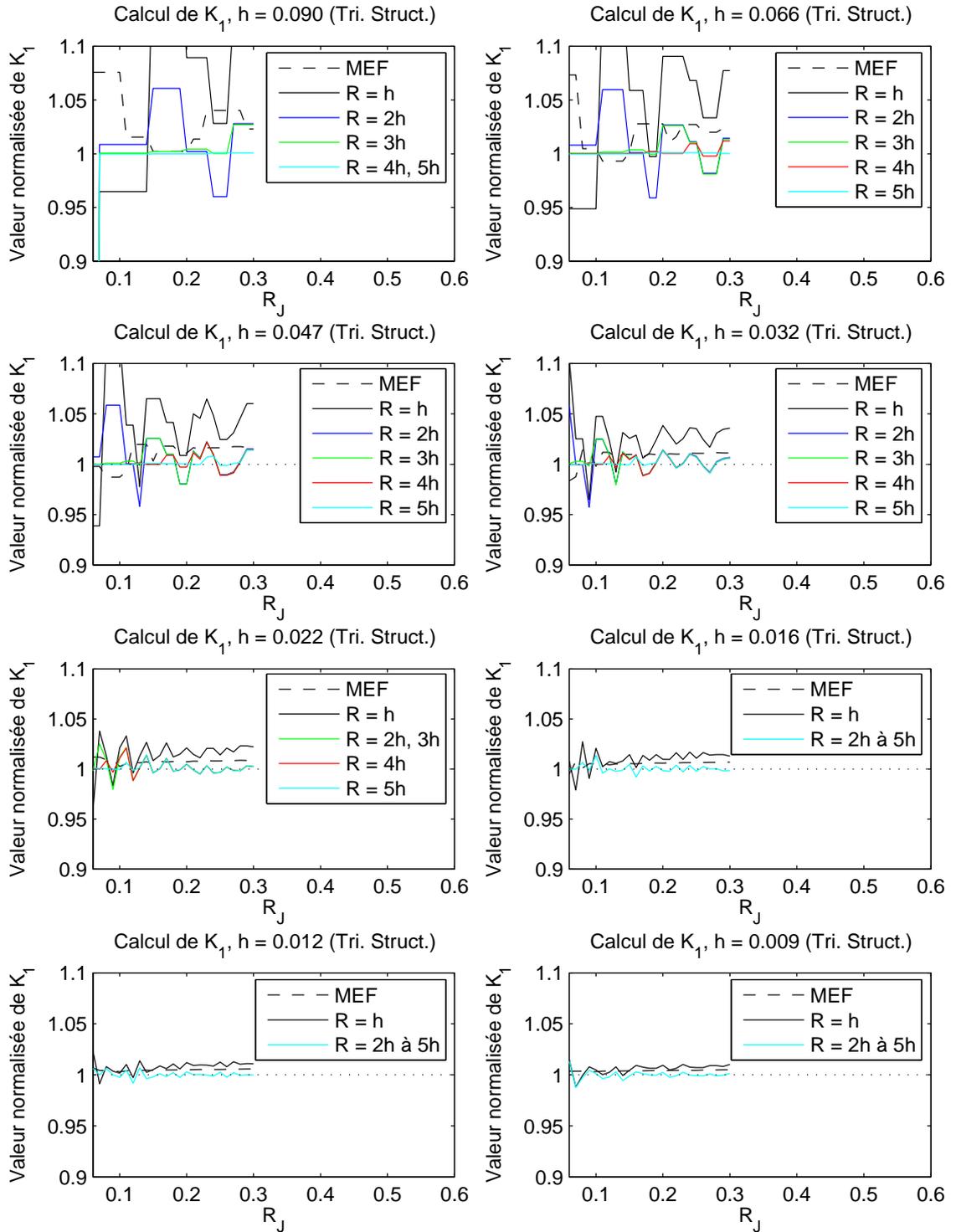


FIG. 4.10 – Calcul du FIC K_1 , pour $\mathcal{R} = kh$, en intégrale-J. Premier cas-test, maillages triangles structurés.

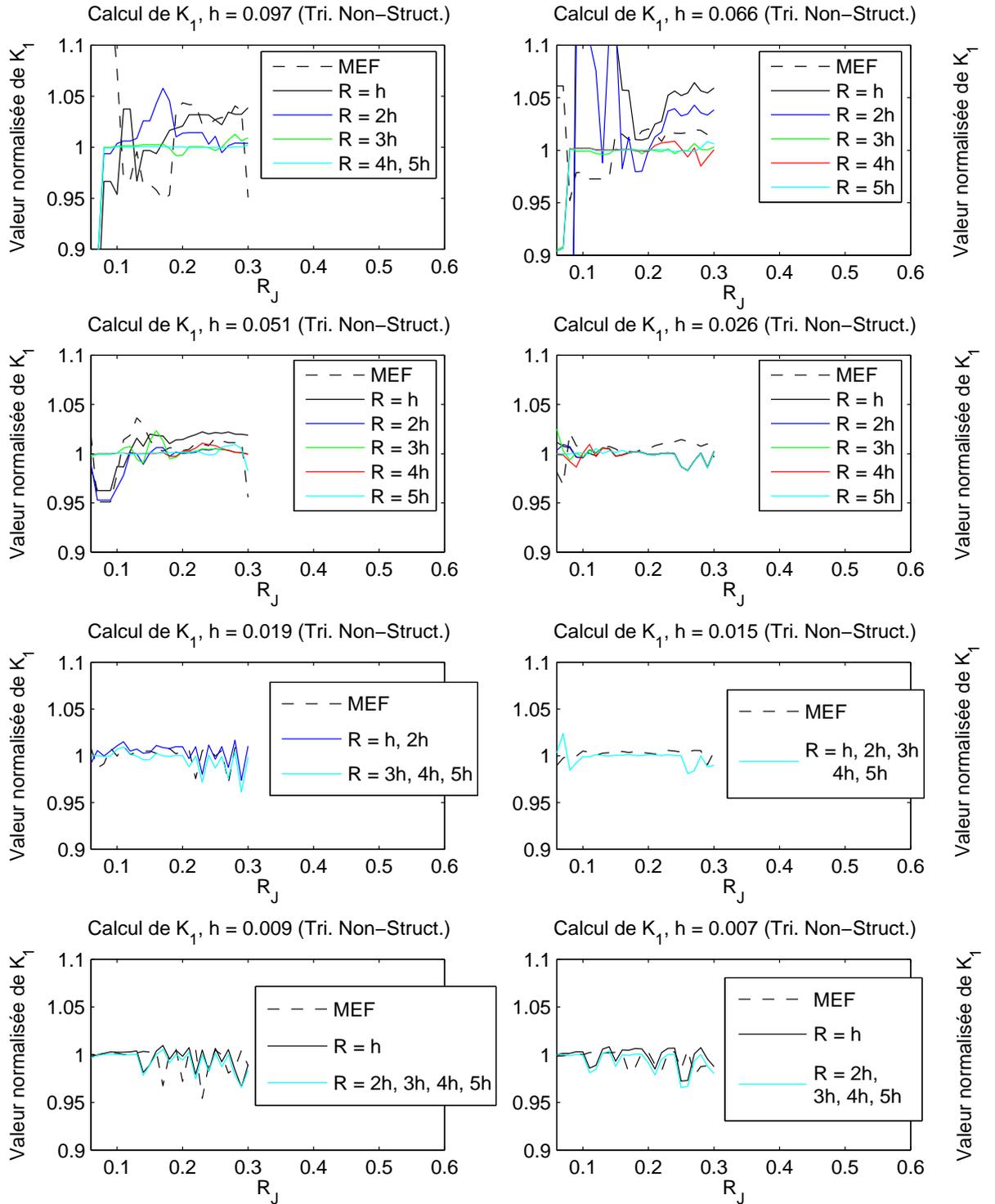


FIG. 4.11 – Calcul du FIC K_1 , pour $\mathcal{R} = k h$, en intégrale-J. Premier cas-test, maillages triangles non-structurés.

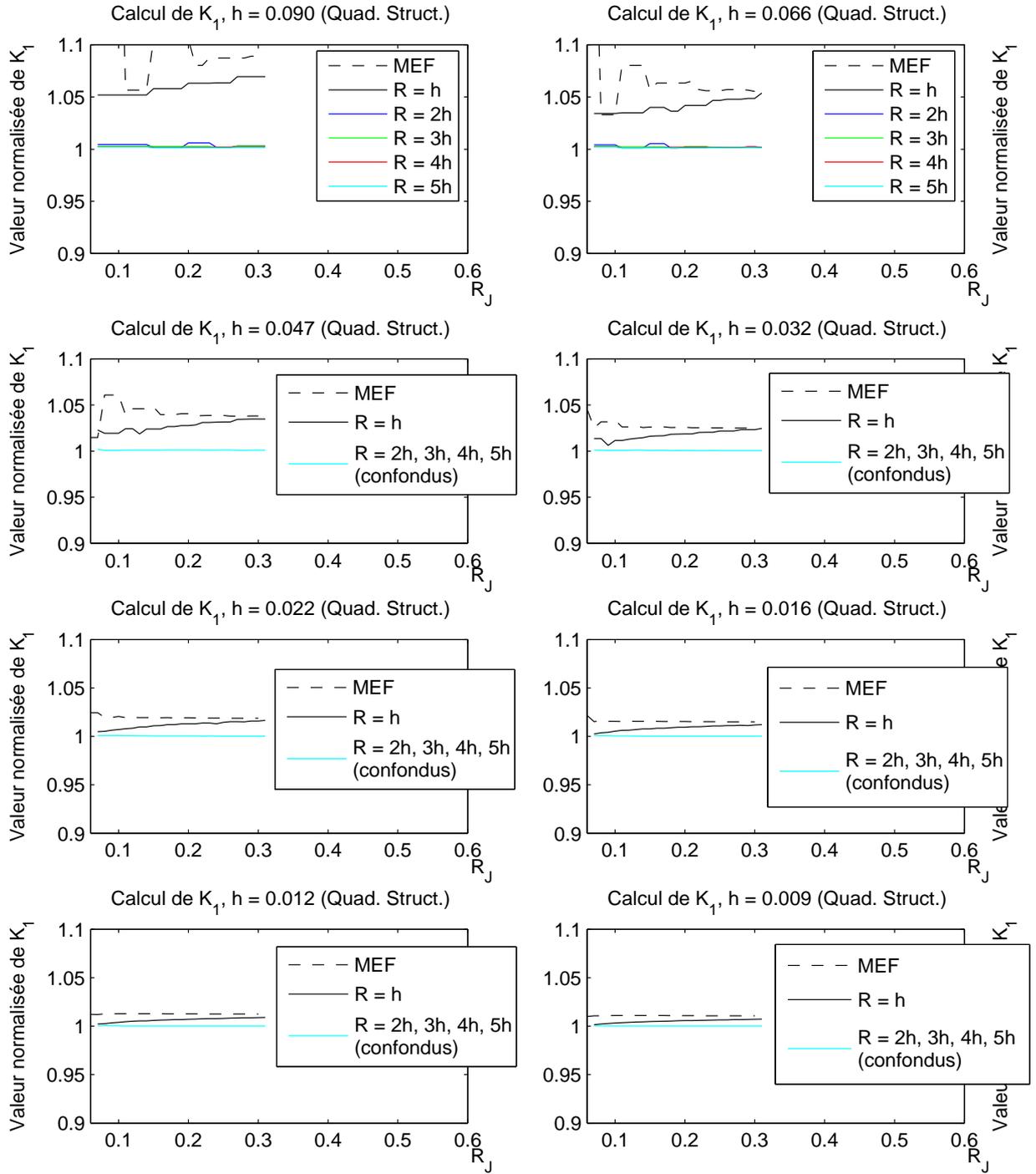


FIG. 4.12 – Calcul du FIC K_1 , pour $\mathcal{R} = kh$, en intégrale-J. Premier cas-test, maillages quadrangles structurés.

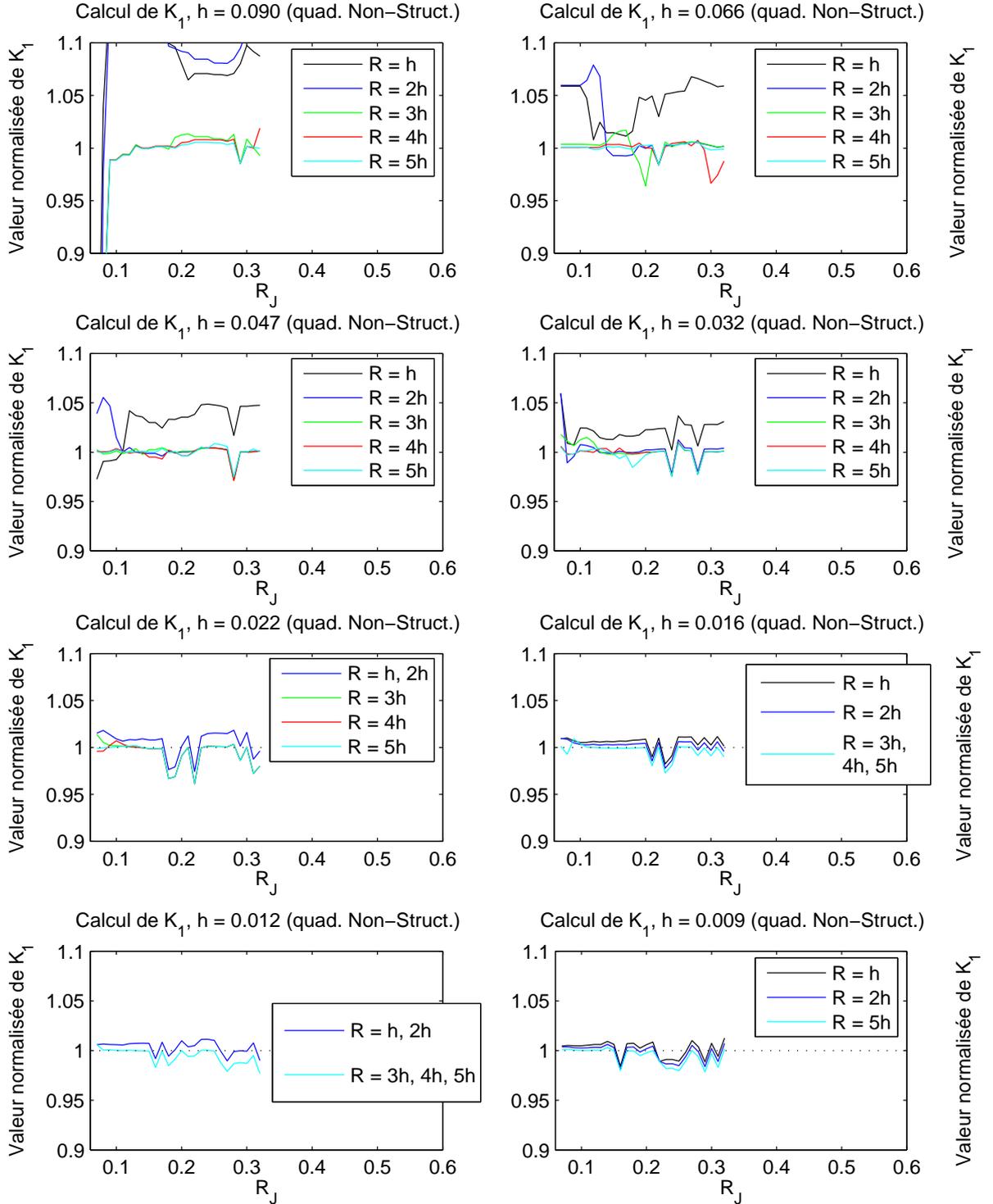


FIG. 4.13 – Calcul du FIC K_1 , pour $\mathcal{R} = kh$, en intégrale-J. Premier cas-test, maillages quadrangles non-structurés.

testons $\mathcal{R} = 0.05, 0.075$ et 0.1 . En rayon variable, nous testons toujours $\mathcal{R} = k h$, pour k sz 1 à 5. Dans tous les cas la couronne d'intégration \mathcal{R}_J varie de 0.05 à 0.11 (la couronne peut toucher le bord).

Sur nos résultats, on voit clairement que la précision obtenue dépend principalement du rayon de la couronne \mathcal{R}_J . A mesure que \mathcal{R}_J grandi, le FIC approché se rapproche du FIC exact, la meilleur valeur est obtenue pour \mathcal{R}_J maximal. A part pour les maillages les plus grossiers, la meilleur valeur est toujours inférieur à 5 % (les maillages pour lesquels la fissure s'étant sur moins de 2 mailles posent problème).

Le choix d'un rayon fixe donne à peut près la même précision que si $\mathcal{R} = k h$ (la seule différence notable concerne le fait qu'en rayon "variable" le raffinement minimal est plus important pour que le rayon \mathcal{R} ne touche pas le bord du domaine). De plus, les cas de maillages structurés triangulaires et quadrangulaires sont également similaires.

Ainsi nous ne présentons que les résultats en rayon "variable", en maillages triangulaires structurés et non-structurés, et quadrangulaires non-structurés, Fig 4.14 à 4.16. Les 5 autres graphiques sont présentés en annexe, page 155 à 160.

En conclusion, sur ce deuxième cas-test, on voit que pour les maillages raffinés il n'est pas indispensable d'enrichir tout le domaine. Par contre, probablement en raison de la diminution de la taille de la fissure par rapport aux mailles du domaine, il faut prendre une couronne d'intégration maximale pour que le FIC soit évalué le plus précisément possible.

Ainsi, la règle de construction que nous proposons est toujours de prendre $h = a/5$, pour une fissure de taille a , avec une intégrale-J de rayon \mathcal{R}_J maximale.

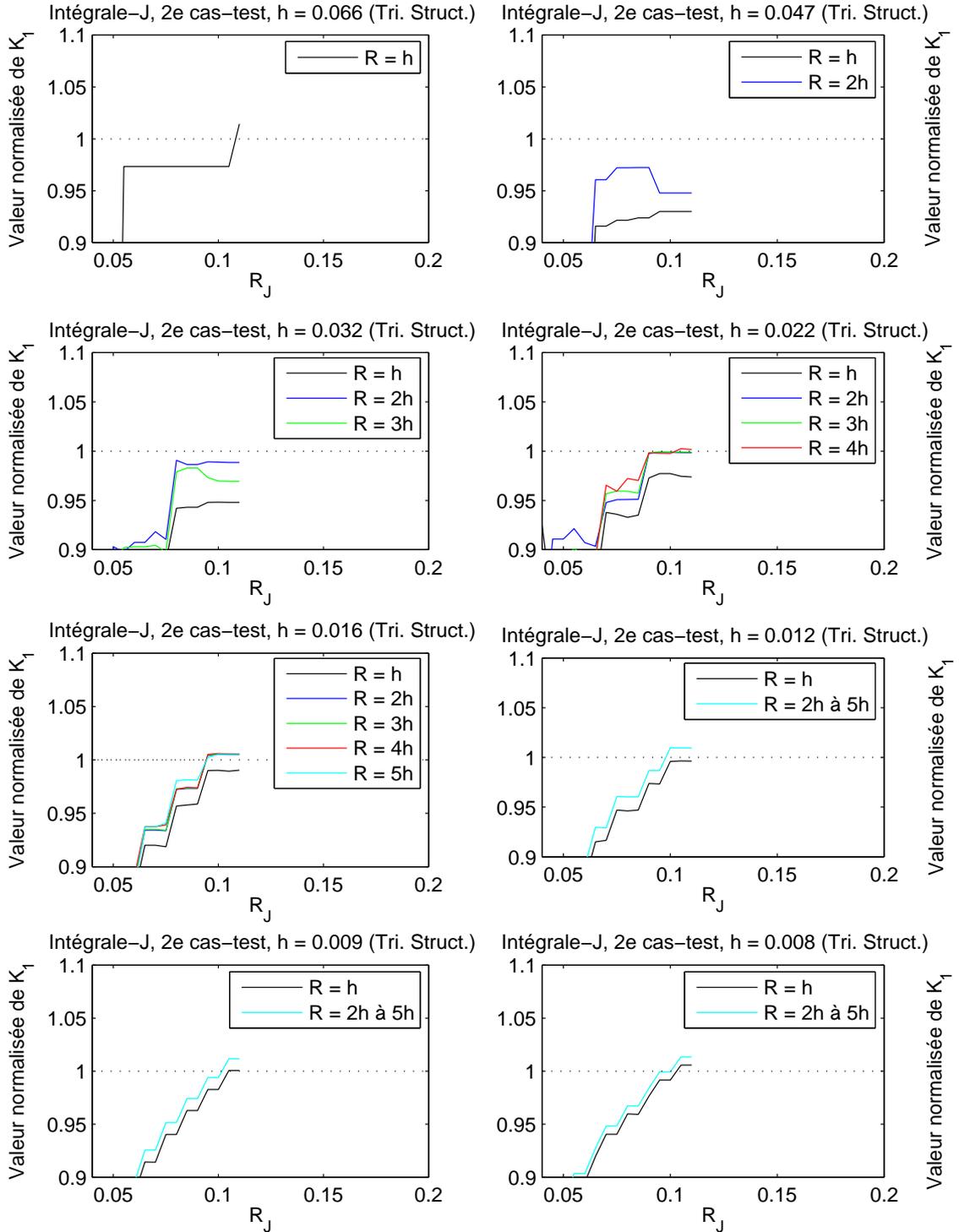


FIG. 4.14 – Calcul de FIC, pour $\mathcal{R} = kh$, en intégrale-J. Deuxième cas-test, maillages triangulaires structurés.

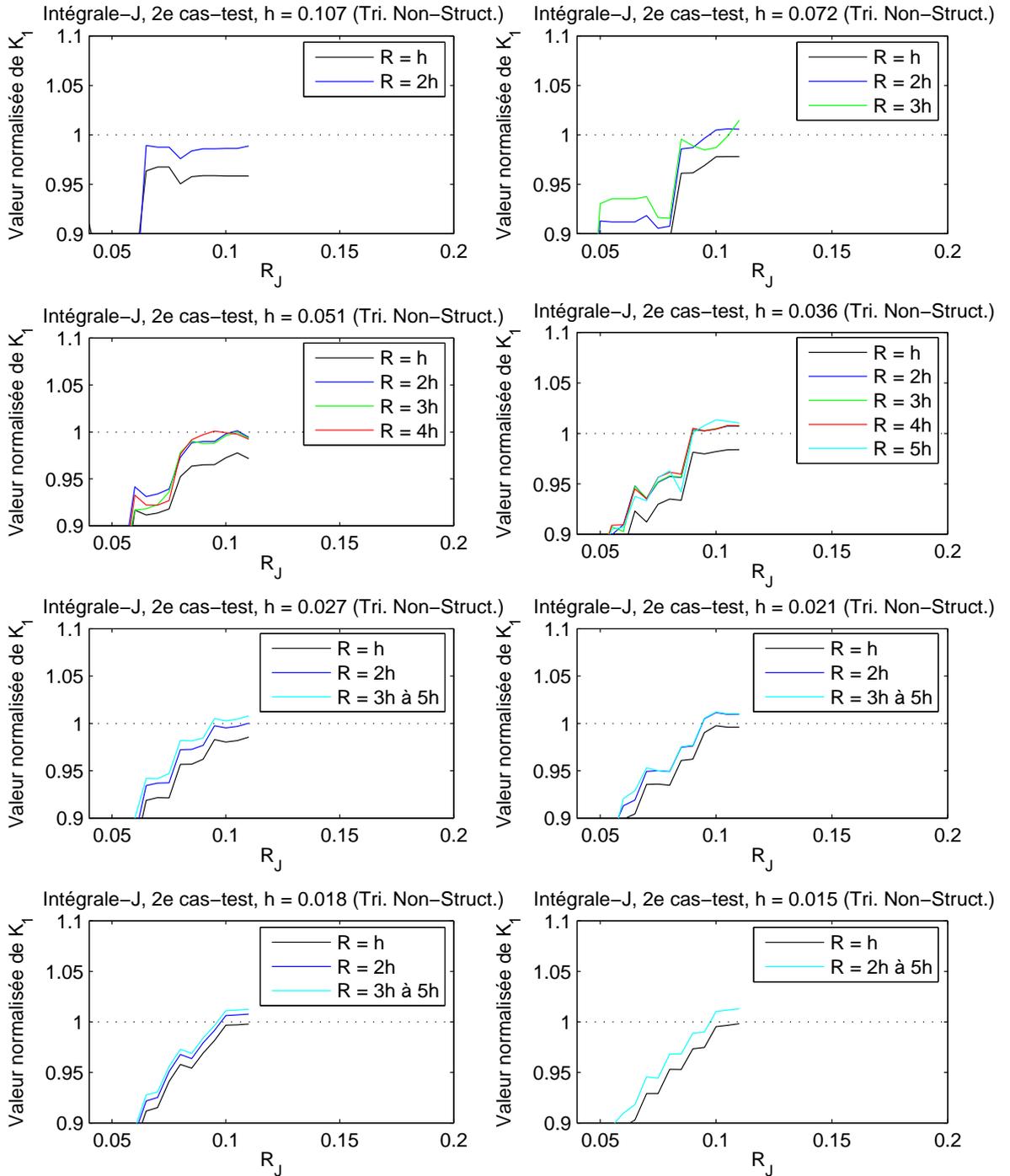


FIG. 4.15 – Calcul de FIC, pour $\mathcal{R} = kh$, en intégrale-J. Deuxième cas-test, maillages triangulaires non-structurés.

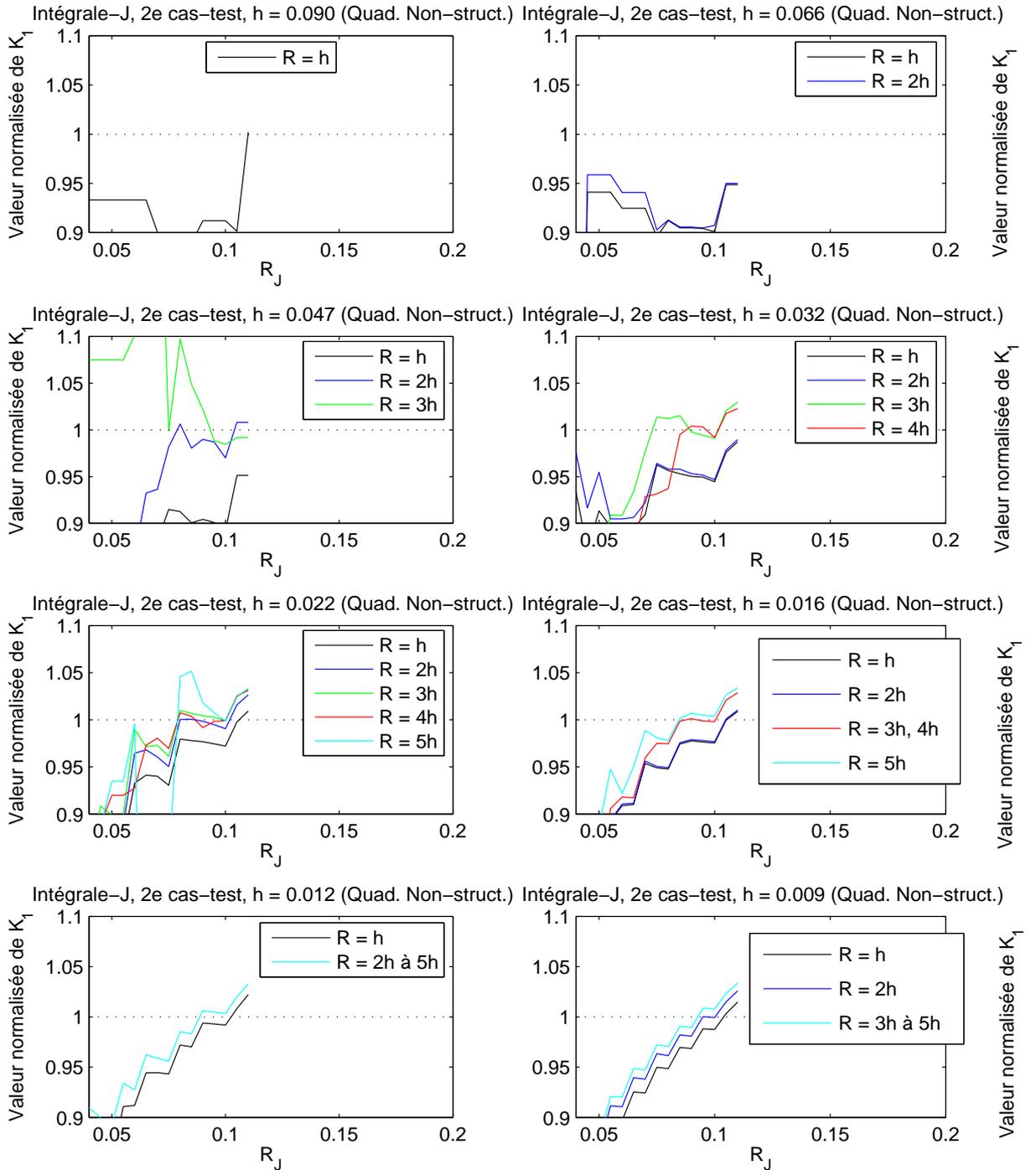


FIG. 4.16 – Calcul de FIC, pour $\mathcal{R} = kh$, en intégrale-J. Deuxième cas-test, maillages quadrangulaires non-structurés.

