ARBRES D'ORDRE SUPÉRIEUR

Au Chapitre 6, on a démontré que l'éliminateur de coupures était un modèle de machine abstraite pouvant calculer les fonctions qu'on peut dénoter par des preuves circulaires. Mais quelles sont ces fonctions, exactement ? C'est une question qui fut soulevée et partiellement répondue, dans le cas des fonctions numériques $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, dans (Paré et Román, 1989; Cockett et Santocanale, 2003), où il fut démontré que les fonctions primitives récursives en faisaient partie.

On a expliqué, au Chapitre 5, que l'éliminateur de coupures était une sorte d'automate fini avec mémoire qui produit une preuve arborescente. La question peut donc être tournée autrement comme suit : quelle est la complexité des arbres pouvant être produits par l'éliminateur de coupures ? C'est une question qui englobe la précédente, car n'importe quelle fonction numérique peut être encodée en un arbre étiqueté comme à la Figure 7.1, où les branches successives partant de la tige principale encodent les différentes valeurs de $f(n)$.

Cette approche ramène le problème à celui de comparer le fonctionnement de l'éliminateur de coupures au fonctionnement d'autres modèles d'automates finis avec mémoire qui produisent des arbres. Un choix particulièrement intéressant de telles machines est celui des automates à pile d'ordre supérieur (Knapik *et al.*, 2002). La hiérarchie de Caucal (Caucal, 2003) est une classification bien établie

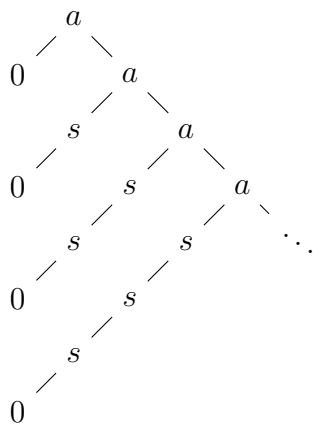


Figure 7.1 Un arbre étiqueté pour encoder la fonction identité

d'arbres infinis à branchements finis. Le niveau d'un arbre dans cette hiérarchie correspond au niveau de complexité de la structure de mémoire de l'automate d'ordre supérieur qui l'engendre. Ces structures de mémoire sont des piles de piles de ... de piles. L'idée est donc de situer les arbres produits par l'éliminateur de coupure dans la hiérarchie.

Il se trouve, comme on le démontre dans le présent chapitre, que tous les arbres se trouvant dans la hiérarchie de Caucal peuvent être calculés par l'éliminateur de coupures, qui opère sur une pré-preuve finie. On démontre ce fait par une construction explicite de la pré-preuve en question. Cela ne signifie toutefois pas que les arbres d'ordre supérieur peuvent tous être *dénotés* par des preuves circulaires, car notre construction ne satisfait pas nécessairement la condition de garde (ce qui n'empêche pas l'élimination des coupures d'être productive). On doit donc faire une distinction entre les arbres qui sont *circulairement calculables* et ceux qui sont *circulairement définissables*. On démontre aussi que la réciproque est fausse, en exhibant un arbre circulairement définissable qui ne se trouve pas dans la hiérarchie de Caucal.

Les résultats de ce chapitre sont présentés dans (Fortier, 2015).

7.1 Σ-arbres

Fixons une signature Σ, c'est-à-dire un ensemble muni d'une fonction d'arité $\mathrm{ar} : \Sigma \to \mathbb{N}$. Les Σ-arbres sont des arbres étiquetés par Σ en respectant l'arité, plutôt que simplement par un alphabet.

Définition. Un ***Σ-arbre*** est un tuple $t = (f, t_1 \dots t_r)$ tel que $f \in \Sigma$, $r = \mathrm{ar}(f)$ et $t_1 \dots t_r$ sont des Σ-arbres.

La précédente définition est, bien sûr, circulaire, mais nous ne sommes plus étrangers aux objets définis circulairement, n'est-ce pas ? Afin de permettre les Σ-infinis, on précise la définition en spécifiant qu'on considère le plus grand point fixe de celle-ci.

Cela mérite d'être formalisé par un système dirigé d'équations. Soit $\mathcal{T}$ le système constitué des équations suivantes :

$$T =_2 \coprod_{f \in \Sigma} f \qquad , \qquad f =_2 \prod_{j=1}^{\mathrm{ar}(f)} T \quad (\forall f \in \Sigma). \tag{7.1}$$

Alors pour exhiber un élément de $t \in [\![T]\!]$, on doit choisir un symbole $f \in \Sigma$, puis exhiber un élément de $[\![f]\!]$. Or, cela revient à choisir $\mathrm{ar}(f)$ éléments de $[\![T]\!]$ puis les exhiber. Ainsi, t est déterminé par un choix d'éléments $(f, t_1 \dots t_{\mathrm{ar}(f)})$, comme dans la définition d'un Σ-arbre. Le fait de prendre une priorité paire signifie qu'on permet à ce processus de se produire une infinité de fois, permettant ainsi les branches infinies.

Définition. Un Σ-arbre t est *circulairement définissable* s'il existe une preuve circulaire close Π sur un système $\mathcal{S} \supseteq \mathcal{T}$ et un sommet $u \in \Pi$ tel que $\textsc{Seq}(u) = 1 \vdash T$ et $[\![u]\!]_\Pi : \mathbf{1} \to T$ prend la valeur t. On dénote par **CD** l'ensemble des Σ-arbres circulairement définissables.

Un simple argument de cardinalité démontre que la plupart des Σ-arbres ne sont pas circulairement définissables. On peut toutefois les représenter par des preuves arborescentes, par le Théorème 6.4. On rappelle, dans la Figure 7.2, comment Ψ_t est défini, pour un Σ-arbre t.

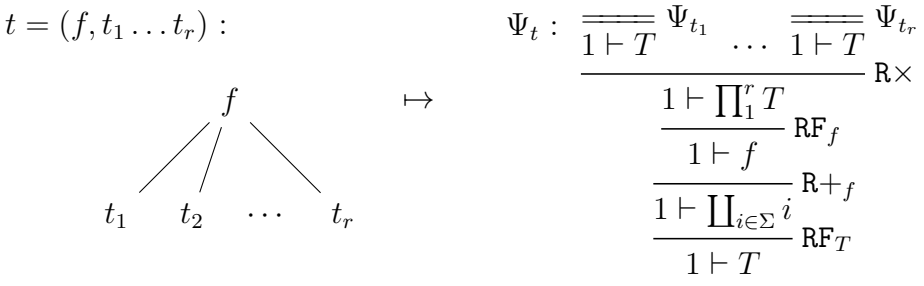


Figure 7.2 Représentation des Σ-arbres en preuves

Notons qu'afin de simplifier l'écriture, on s'est permis de généraliser la forme des règles de produits et de coproduits pour permettre de l'appliquer sur les produits ou coproduits finis quelconques, plutôt que seulement binaires (voir le Tableau 7.1). Le passage d'une forme à l'autre se fait par une récurrence évidente. Notons qu'avec cette nouvelle notation, les règles `LAx` et `RAx` sont des instances de L+ et R× respectivement, avec un coproduit (resp. produit) vide.

	$\mathfrak{L}$	$\mathfrak{R}$
Produit ($j \in I$)	$\dfrac{A_j \vdash B}{\prod_{i\in I} A_i \vdash B}\,\mathtt{L}\times_j$	$\dfrac{\{A \vdash B_i\}_{i\in I}}{A \vdash \prod_{i\in I} B_i}\,\mathtt{R}\times$
Coproduit ($j \in I$)	$\dfrac{\{A_i \vdash B\}_{i\in I}}{\coprod_{i\in I} A_i \vdash B}\,\mathtt{L}+$	$\dfrac{A \vdash B_j}{A \vdash \coprod_{i\in I} B_i}\,\mathtt{R}+_j$

Tableau 7.1 Forme générale des règles de produit et de coproduit

Définition. Un Σ-arbre t est *circulairement calculable* s'il existe une pré-preuve close et finie Π ainsi qu'une multicoupure $M \in \mathcal{M}_\Pi$ telle que $\mathrm{CE}_\Pi(M) = \Psi_t$. Soit **CC** l'ensemble des Σ-arbres circulairement calculables.

Il faut noter qu'on n'exige pas, dans la définition précédente, que Π satisfasse la condition de garde. Il n'y a donc pas de garantie, *a priori*, que $\mathrm{CE}_\Pi(M)$ soit bien défini, mais on se restreint aux situations où c'est le cas.

Proposition 7.1. $\mathbf{CD} \subseteq \mathbf{CC}$. *(La réciproque n'est pas claire...)*

Démonstration. Soit $t \in \mathbf{CD}$. Alors il existe une preuve circulaire close Π et un sommet $u \in \Pi$ tels que $[\![u]\!]_\Pi : \mathbf{1} \to [\![T]\!]$ prend la valeur t. Par le Théorème 6.10, on a donc $\mathrm{CE}_\Pi(u) = \Psi_t$, d'où $t \in \mathbf{CC}$. □

7.2 Algèbre des n-piles

Les automates d'ordre supérieur opèrent sur des piles d'ordre supérieur, qu'on appelle des n-piles. Avant de passer à la définition des automates eux mêmes, il importe d'étudier les piles ainsi que leur structure algébrique.

Définition. Fixons un alphabet fini Γ avec un symbole $\perp \in \Gamma$. Une ***0-pile*** est un élément de Γ. Pour $n \geq 1$, une ***n-pile*** est une liste finie de $(n-1)$-piles. Une n-pile est dite *bien formée* si $n = 0$ ou si elle est une liste *non vide* de $(n-1)$-piles bien formées. Le ***symbole de dessus*** d'une n-pile bien formée est défini récursivement comme suit :

$$\mathtt{top}(a) = a \quad (a \in \Gamma) \qquad ; \qquad \mathtt{top}[s_\ell, s_{\ell-1} \dots s_1] = \mathtt{top}(s_\ell).$$

Il s'agit essentiellement de la même définition que dans (Knapik *et al.*, 2002), sauf que dans cette dernière, on exige des n-piles qu'elles soient toujours bien

formées. Cela ne fera aucune différence pour nos besoins, puisque les opérations qu'on définira sur les n-piles seront des fonctions partielles. Le cas des n-piles qui ne sont pas bien formées sera traité comme une erreur.

On doit d'abord décrire les n-piles par un système d'équations dirigé, afin de les manipuler par les preuves circulaires. Puisque les n-piles sont des listes finies de $(n-1)$-piles, la première solution à laquelle on pourrait penser serait d'itérer l'étoile de Kleene, $P^* = \mu X.(1 + P \times X)$, qui définit le monoïde libre. On aurait donc la définition récursive suivante de l'ensemble P_n des n-piles :

$$P_0 := \Gamma \ ,$$
$$P_{n+1} := P_n^* =_\mu 1 + (P_n \times P_n^*) \ .$$

Or, ce système ne conviendra pas à nos besoins, puisque les produits cartésiens se traitent mal du côté gauche des preuves circulaires. En effet, la structure des règles $\mathtt{L}\times_j$ nous oblige à sacrifier la queue d'une telle liste pour pouvoir lire sa tête, et vice-versa.

On contourne ce problème en définissant plutôt le monoïde libre dans la catégorie $\mathcal{V} = \mathcal{End}(\mathcal{Ens})$ des endofoncteurs de la catégorie des ensembles, plutôt que de le faire dans la catégorie des ensembles elle-même. On se souviendra, de (Mac Lane, 1998, Chap. VII), que $\mathcal{V}$ est une catégorie monoïdale stricte dont le produit tensoriel est donné par la composition $\circ$ des foncteurs. Un monoïde dans $\mathcal{V}$ s'appelle une *monade*.

Un foncteur $F \in \mathcal{V}$ est dit ***définissable*** s'il existe un μ-terme r, avec une seule variable libre X, tel que $F = \|r\|_{\{X\}}$. Étant donné un tel foncteur, on peut montrer (voir Cockett et Santocanale, 2003) que le foncteur $\widehat{F}(X) := \mu Y.(X + F(Y))$ a la structure d'une monade libre. On définit alors la famille suivante de foncteurs :

$$S_0(X) = \coprod_{a \in \Gamma} X \qquad , \qquad S_n(X) = \widehat{S}_{n-1}(X)$$

Ainsi, pour tout $n \geq 1$, $S_n(X)$ est une algèbre initiale paramétrique dont la structure est la suivante :

$$\alpha_X^n = \{\mathtt{Nil}_X^n, \mathtt{Cons}_X^n\} \ : \ X + S_{n-1}S_n(X) \longrightarrow S_n(X).$$

Par une simple récurrence sur k, les foncteurs

$$[\![Z_k]\!] = S_k \circ S_{k+1} \circ \ldots \circ S_n \qquad (0 \leq k \leq n)$$

forment une solution au système dirigé suivant :

$$\mathcal{Z}_n(X) = \left\{ \begin{array}{ll} Z_{n+1} = & X \\ Z_k =_1 & Z_{k+1} + Z_{k-1} \qquad (0 \leq k \leq n) \\ Z_0 =_1 & \coprod_{a \in \Gamma} Z_1 \end{array} \right\}.$$

Ce système a une variable libre, X, qu'on instanciera par l'ensemble de notre choix. Par abus de notation, dans les preuves utilisant le système $\mathcal{Z}_n(X)$, on se permettra d'écrire $S_k \cdots S_n X$ au lieu de Z_k, ou simplement $S_k \cdots S_n$ si $X = 1$.

Lemme 7.2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout ensemble X, $S_n(X) \cong P_n \times X$. En particulier, $S_n(\mathbf{1})$ représente l'ensemble des n-piles.*

Démonstration. Par le Théorème 2.10, $S_n(X) = [\![Z_n]\!](X)$ est isomorphe à l'ensemble des stratégies gagnantes déterministes pour le joueur σ, à partir de la position Z_n, dans le jeu de parité $J_n := J(\mathcal{Z}_n(X))$ correspondant (revoir la Section 2.5).

Le jeu J_0 est illustré à la Figure 7.3, où la double flèche signifie qu'il y a une transition pour chaque symbole $a \in \Gamma$.

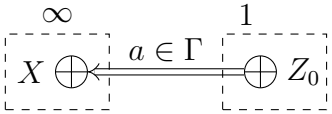


Figure 7.3 Jeu de parité associé à $\mathcal{Z}_0(X)$

Pour $n \geq 1$, le jeu J_n est représenté à la Figure 7.4. La hauteur des sommets de ce jeu est 0 sur la première rangée et ∞ sur la seconde.

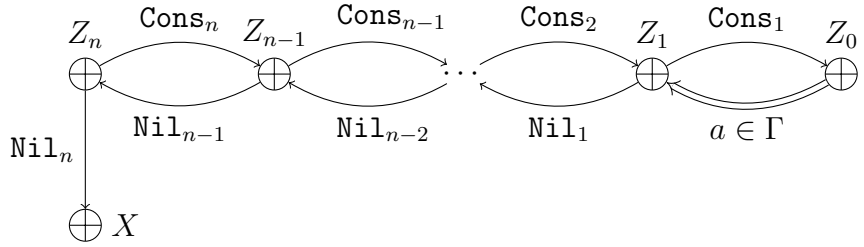


Figure 7.4 Jeu de parité associé à $\mathcal{Z}_n(X)$

Puisque c'est toujours à σ de jouer dans le jeu J_n, une stratégie gagnante est simplement une paire (s, x) où $x \in X$ et s est un chemin fini de Z_n vers $X = Z_{n+1}$. On montre par induction sur n que ces chemins sont en correspondance avec les n-piles.

Soit L_n l'ensemble des mots décrivant un chemin allant de Z_n vers Z_{n+1} (par les transitions du graphe) dans le jeu J_n. Puisque le jeu J_0 ne contient que les transitions de Z_0 vers Z_1 étiquetées par les $a \in \Gamma$, alors $L_0 = \Gamma = P_0$. Pour $n \geq 1$, clairement, les seuls mots $s \in L_n$ sont $\mathtt{Nil}_n$ et les mots de la forme $\mathtt{Cons}_n \cdot u \cdot v$ où $u \in L_{n-1}$ et $v \in L_n$. On a donc

$$L_n = (\mathtt{Cons}_n \cdot L_{n-1})^* \cdot \mathtt{Nil}_n \cong (L_{n-1})^*.$$

Par induction, on a $L_{n-1} \cong P_{n-1}$ et donc, $L_n \cong P_{n-1}^* = P_n$. □

La notation utilisée dans la preuve du Lemme 7.2 permet aussi d'obtenir le prochain lemme utile.

Définition. Une preuve circulaire Λ est ***linéaire*** si elle est arborescente et si chaque sommet de Λ est de degré 1.

Lemme 7.3. *Pour toute n-pile $s \in S_n(\mathbf{1})$, il existe une unique preuve linéaire finie Λ_s sur $\mathcal{Z}_n(1)$, telle que* $\textsc{Seq}(r_n) = 1 \vdash S_n(1)$ *et* $[\![\Lambda_s]\!] : \mathbf{1} \vdash S_n(\mathbf{1})$ *prend la valeur s. La racine de Λ_s sera dénotée $\sqrt{s}$.*

Démonstration. Soit $s \in S_n(\mathbf{1})$. Par le Théorème 6.4, il existe une preuve arborescente Λ_s telle que $[\![\Lambda_s]\!] = s$. Or, par le Lemme 5.4, les seules règles qu'on peut utiliser dans Λ_s sont des règles droite. Or, par inspection du système $\mathcal{Z}_n(1)$, les seules règles admissibles sont les $\mathtt{RF}_{Z_k}$ et les $\mathtt{R}{+}_j$ (toutes de degré 1). Enfin, par le Lemme 6.1, Λ_s est une preuve finie. Enfin, l'unicité découle de la Proposition 6.5.

Il est quand même utile d'exhiber la construction de Λ_s qui est proposée dans le Théorème 6.4. Rappelons que, selon la représentation du Lemme 7.2, s est identifié à un mot de L_n. Chaque lettre de s correspond à un mouvement dans le jeu correspondant. On peut encoder ces mouvements dans une preuve comme suit :

– si $s = \mathtt{Nil}_n$, alors

$$\Lambda_s = \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{1 \vdash 1}\,\mathtt{RAx}}{1 \vdash 1 + Z_{n-1}}\,\mathtt{R}{+}_0}{1 \vdash Z_n}\,\mathtt{RF}_{Z_n} \quad ;$$

– si $s = \mathtt{Cons}_k \cdot w$, alors

$$\Lambda_s = \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{1 \vdash Z_{k-1}}\,\Lambda_w}{1 \vdash Z_{k+1} + Z_{k-1}}\,\mathtt{R}{+}_1}{1 \vdash Z_k}\,\mathtt{RF}_{Z_k} \quad ;$$

– si $s = \mathtt{Nil}_k \cdot w$ avec $k < n$, alors

$$\Lambda_s = \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{1 \vdash Z_{k+1}}\,\Lambda_w}{1 \vdash Z_{k+1} + Z_{k-1}}\,\mathtt{R}{+}_0}{1 \vdash Z_k}\,\mathtt{RF}_{Z_k} \quad ;$$

– si $s = a \cdot w$ avec $a \in \Gamma$, alors

$$\Lambda_s = \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{1 \vdash Z_1}\,\Lambda_w}{1 \vdash \coprod_\Gamma Z_1}\,\mathtt{R}{+}_a}{1 \vdash Z_0}\,\mathtt{RF}_{Z_0}\ .$$

□

Notre prochain objectif est d'exprimer les opérations usuelles de n-piles dans ce modèle. L'objectif est de dégager le fait que ces opérations ne font intervenir rien d'autre que les opérations des catégories μ-bicomplètes et donc, qu'elles sont définissables par des preuves circulaires, en vertu du Théorème 4.7.

On commence par définir le *fond de n-pile* :

$$\bot_0 = \bot \in \Gamma \qquad ; \qquad \bot_{n+1} = [\bot_n].$$

Ce sont des n-piles particulières qu'on peut assimiler à des fonctions du type $\bot_n : \mathbf{1} \to S_n(\mathbf{1})$. Il suffit de prendre $\bot_n = b^n_1$, où $b^n_X : X \to S_n X$ est défini comme suit :

$$b^0_X = \mathtt{in}^X_\bot \qquad ; \qquad b^{n+1}_X = \mathtt{Nil}^n_X \cdot b^{n-1}_{S_n X} \cdot \mathtt{Cons}^n_X.$$

Une première opération consiste à *pousser* un symbole $a \in \Gamma$ au sommet d'une 1-pile. En pratique, on n'utilisera cette opération qu'avec un symbole $a \neq \bot$ afin que $\bot$ n'agisse strictement qu'en tant que symbole de fond de pile.

$$\mathtt{spush}^a_1[a_\ell, a_{\ell-1} \ldots a_1] = [a, a_\ell, a_{\ell-1} \ldots a_1].$$

Il s'agit simplement de $p^a_{1;1}$, où $p^a_{1;X}$ est défini par le composition suivante :

$$S_1 X \xrightarrow{\mathtt{in}^{S_1 X}_a} \coprod_{a \in \Gamma} S_1 X = S_0 S_1 X \xrightarrow{\mathtt{Cons}^1_X} S_1 X \hookrightarrow X + S_1 X.$$

Pour les autres opérations, on a besoin d'une propriété supplémentaire des foncteurs S_n qu'on peut dériver de (Cockett et Santocanale, 2003) : ce sont des *comonades cocommutatives*.

Définition. Un foncteur $F \in \mathcal{V}$ est ***central*** s'il existe une collection de transformations naturelles $\phi^F = (\phi^F_G)_{G \in \mathcal{V}}$ telle que pour chaque $\phi^F_G : F \circ G \to G \circ F$, on a $\phi^F_I = \mathtt{id}_F$ et $\phi^F_{GH} = (\phi^F_G H) \cdot (G \phi^F_H)$.

Dans (Cockett et Santocanale, 2003), il est démontré que les foncteurs S_n sont tous centraux (précisément, c'est une conséquence de l'Exemple 4.2 et de la Proposition 4.3). On ne fait que rappeler ici la définition des transformations naturelles $\phi^{S_n}_G = (\phi^{S_n}_{G;X})_{X \in \mathcal{Ens}}$ afin de vérifier qu'on peut les définir par des preuves circulaires.

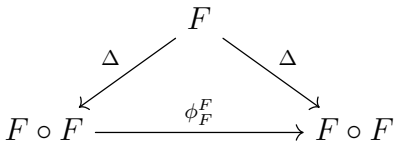
Si $n = 0$, on définit $\phi^{S_0}_{G;X} = \{G(\mathtt{in}^X_a)\}_{a \in \Gamma}$. Pour $n \geq 1$, $\phi^{S_n}_{G;X}$ est défini par récurrence sur n en tant que l'unique fonction faisant commuter le diagramme suivant (elle existe par initialité de α^n_{GX}).

$$\begin{array}{ccc}
G(X) + S_{n-1}S_nG(X) & \xrightarrow{\mathtt{id}_{GX} + S_{n-1}\phi^{S_n}_{G;X}} & G(X) + S_{n-1}GS_n(X) \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \mathtt{id}_{GX} + \phi^{S_{n-1}}_{G;S_nX}} \\
\downarrow{\scriptstyle \alpha^n_{GX}} & & G(X) + GS_{n-1}S_n(X) \\
 & & \downarrow{\scriptstyle G\alpha^n_X} \\
S_nG(X) & \xrightarrow{\phi^{S_n}_{G;X}} & GS_n(X)
\end{array}$$

Définition. Soit $I \in \mathcal{V}$ le foncteur identité. Une ***comonade*** est un endofoncteur $F \in \mathcal{V}$ muni de deux transformations naturelles $\Upsilon : F \to I$ et $\Delta : F \to F \circ F$, appelées respectivement ***destructeur*** et ***doubleur***, telles que les diagrammes suivants commutent.

$$\begin{array}{ccc}
 & F & \\
{\scriptstyle \Delta}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle \Delta} \\
F \circ F & & F \circ F \\
\downarrow{\scriptstyle \mathtt{id}_F \circ \Delta} & & {\scriptstyle \Delta \circ \mathtt{id}_F}\downarrow \\
F \circ (F \circ F) & = & (F \circ F) \circ F
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccccc}
I \circ F & \xleftarrow{\Upsilon \circ \mathtt{id}_F} & F \circ F & \xrightarrow{\mathtt{id}_F \circ \Upsilon} & F \circ I \\
 & \searrow & \uparrow{\scriptstyle \Delta} & \swarrow & \\
 & & F & &
\end{array}
\tag{7.2}$$

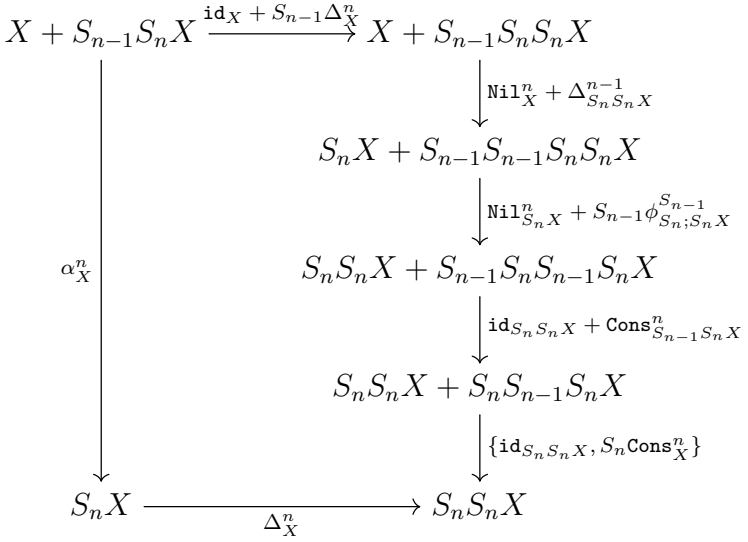
Une comonade F est *cocommutative* si F est central et le diagramme suivant commute.



Par exemple, le foncteur S_0 est une comonade cocommutative, où les transformations naturelles $\Upsilon^0 = \{\Upsilon^0_X\}_{X \in \mathcal{E}ns}$ et $\Delta^0 = \{\Delta^0_X\}_{X \in \mathcal{E}ns}$ sont données par les équations suivantes :

$$\Upsilon^0_X = \{\mathtt{id}_X\}_{a \in \Gamma} \qquad ; \qquad \Delta^0_X = \{\mathtt{in}_a^{S_0(X)} \mathtt{in}_a^X\}_{a \in \Gamma}.$$

Il découle, par (Cockett et Santocanale, 2003, Prop. 4.6), que chaque foncteur S_n est une comonade cocommutative. Encore une fois, on ne fait que rappeler la définition Υ^n et Δ^n dans cet article. Il s'agit, encore une fois, d'une définition récursive sur n. Pour tout ensemble X, Δ^n_X est l'unique fonction telle que le diagramme suivant commute.



Quant à Υ^n_X, il s'agit de l'unique fonction telle que le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} X + S_{n-1}S_nX & \xrightarrow{\mathtt{id}_X + S_{n-1}\Upsilon^n_X} & X + S_{n-1}X \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \alpha^n_X} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \{\mathtt{id}_X, \Upsilon^{n-1}_X\}} \\ S_nX & \xrightarrow[\Upsilon^n_X]{} & X \end{array}$$

Lemme 7.4. *Pour tout ensemble X, il existe des fonctions* définissables par des preuves circulaires $\Upsilon^n_X : S_nX \to X$ *et* $\Delta^n_X : S_nX \to S_nS_nX$ *telles que pour tout* $(s, x) \in S_nX$, $\Upsilon^n_X(s, x) = x$ *et* $\Delta^n_X(s, x) = (s, (s, x))$.

Démonstration. Il devrait être clair, au vu des définitions diagrammatiques ci-dessus, que Υ^n_X et Δ^n_X sont définissables par des preuves circulaires, puisque leur définition n'utilise rien d'autre que la structure μ-bicomplète de la catégorie des ensembles. Quant aux équations recherchées, on les obtient grâce aux diagrammes de comonade (7.2). En effet, soit $(s_0, (s_1, y)) = \Delta^n_X(s, x)$. Soit ensuite s'_0, s'_1, y' tels que

$$(\Delta^n_X \circ \mathtt{id}_{S_n}) = (s'_0, (s'_1, (s_1, y))),$$
$$(\mathtt{id}_{S_n} \circ \Delta^n_X) = (s_0, (s'_0, (s'_1, y'))).$$

Par (7.2), on a $s_0 = s'_0 = s'_1 = s_1$ et $y = y'$. Donc soit donc $s' = s_0$. On a alors $\Delta^n_X(s, x) = (s', (s', y))$. Par l'autre diagramme de (7.2), on a

$$(\mathtt{id}_{S_n} \circ \Upsilon^n_X)(s', (s', y)) = (s, x)$$

et donc $s' = s$ et $\Upsilon^n_X(s', y) = x$. Enfin, on a

$$(\Upsilon^n_X \circ \mathtt{id}_{S_n})(s, (s, y)) = (s, x)$$

et donc $y = x$. □

Revenons à la question de définir les opérations usuelles sur les n-piles. Pour une pile de n'importe quel niveau, on peut opérer les opérations `push` et `pop` définies comme suit :

$$\begin{aligned}\mathtt{push}_n^n[s_\ell, s_{\ell-1} \dots s_1] &= [s_\ell, s_\ell, s_{\ell-1} \dots s_1];\\ \mathtt{pop}_n^n[s_\ell, s_{\ell-1} \dots s_1] &= [s_{\ell-1} \dots s_1].\end{aligned}$$

Chacune de ces deux opérations est de la forme $p^n_{n;1}$, où la famille de fonctions $p^n_{n;X} : S_nX \to X + S_nX$ est de la forme $p^n_{n;X} = (\alpha^n_X)^{-1}\cdot(\mathtt{id}+f)$. La différence entre $\mathtt{push}^n_n$ et $\mathtt{pop}^n_n$ est donc le choix de la fonction $f : S_{n-1}S_nX \to S_nX$ dans cette dernière expression. Pour $\mathtt{pop}^n_n$, puisqu'on veut *détruire* une certaine information, on prend $f = \Upsilon^{n-1}_{S_nX}$. Pour $\mathtt{push}^n_n$, puisqu'on veut *doubler* la première $(n-1)$-pile, on choisit comme f la composition suivante :

$$S_{n-1}S_nX \xrightarrow{\Delta^{n-1}_{S_nX}} S_{n-1}S_{n-1}S_nX \xrightarrow{S_{n-1}(\mathtt{Cons}^n_X)} S_{n-1}S_nX \xrightarrow{\mathtt{Cons}^n_X} S_nX.$$

Enfin, on a besoin des opérations suivantes de niveau $k < n$:

$$\begin{aligned}\mathtt{spush}^a_n[s_\ell, s_{\ell-1} \dots s_1] &= [\mathtt{spush}^a_{n-1}(s_\ell), s_{\ell-1} \dots s_1];\\ \mathtt{push}^k_n[s_\ell, s_{\ell-1} \dots s_1] &= [\mathtt{push}^k_{n-1}(s_\ell), s_{\ell-1} \dots s_1];\\ \mathtt{pop}^k_n[s_\ell, s_{\ell-1} \dots s_1] &= [\mathtt{pop}^k_{n-1}(s_\ell), s_{\ell-1} \dots s_1].\end{aligned}$$

La forme de ces trois définitions est la même. Ce sont des fonctions de la forme $p^z_{n;1}$, où $p^z_{n;X} : S_nX \to X + S_nX$ est soit déjà défini plus haut, ou peut être atteint par induction sur n, en définissant $p^z_{n;X} = (\alpha^n_X)^{-1} \cdot (\mathtt{id} + f)$, où f est la composition suivante

$$S_{n-1}S_nX \xrightarrow{p^z_{n-1;S_nX}} S_nX + S_{n-1}S_nX \xrightarrow{v_n+\mathtt{id}} X + S_{n-1}S_nX \xrightarrow{\alpha^n_X} S_nX,$$

dans laquelle $v_n : S_nX \to X$ est la fonction $(s, x) \mapsto x$.

L'ensemble des ***opérations de niveau*** n est alors défini comme suit :

$$\mathcal{O}_n = \{\mathtt{spush}^a_n : a \in \Gamma \setminus \{\bot\}\} \cup \{\mathtt{push}^k_n, \mathtt{pop}^k_n : 1 \le k \le n\}.$$

7.3 Simulation d'automates d'ordre supérieur

Définition. Un ***automate à pile de niveau*** n (abbrévié n-AP) est un tuple $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \delta \rangle$, où Q est un ensemble fini d'états, avec un état initial $q_0 \in Q$, Γ est un alphabet fini pour la pile, Σ est une signature et $\delta : Q \times \Gamma \to \mathcal{I}_\mathcal{A}$ est la ***fonction de transition***.

Dans la dernière définition, $\mathcal{I}_\mathcal{A}$ est l'ensemble des *instructions admissibles*, constitué des expressions de l'une des deux formes suivantes :
– (q, θ), où $q \in Q$ et $\theta \in \mathcal{O}_n$;
– $(f, p_1 \dots p_r)$, où $f \in \Sigma$, $r = \mathrm{ar}(f)$ et $p_1 \dots p_r \in Q$.
Une *configuration* de $\mathcal{A}$ est une paire (q, s) où $q \in Q$ et s est une n-pile. Soit $\mathcal{C}_\mathcal{A}$ l'ensemble de toutes les configurations de $\mathcal{A}$. On écrit $(q, s) \to_\mathcal{A} (q', s')$ si $\delta(q, \mathtt{top}(s)) = (q', \theta)$ pour un certain $\theta \in \mathcal{O}_n$ tel que $s' = \theta(s)$. La relation $\twoheadrightarrow_\mathcal{A}$ est la fermeture réflexive transitive de $\to_\mathcal{A}$.

Soit $t = (f, t_1 \dots t_r)$ un Σ-arbre et $(q, s) \in \mathcal{C}_\mathcal{A}$. Une *exécution de t à partir de (q, s)* est une fonction partielle $\varrho : T \rightharpoonup \mathcal{C}_\mathcal{A}$ définie en t, avec la propriété suivante. Soit $\varrho(t) = (q_t, s_t)$. Alors $(q, s) \twoheadrightarrow_\mathcal{A} (q_t, s_t)$ et $\delta(q_t, \mathtt{top}(s_t)) = (f, p_1 \dots p_r)$ pour certains états $p_1 \dots p_r \in Q$ tels que pour $1 \leq i \leq r$, ϱ est une exécution de t_i à partir de (p_i, s_t). Un Σ-arbre t est *accepté* par $\mathcal{A}$ si et seulement s'il y a une exécution de t à partir de $(q_0, \bot_n)$. Puisque nos automates sont déterministes, on peut conclure qu'un n-AP accepte au plus un seul Σ-arbre.

On montre maintenant comment convertir un n-AP $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \delta \rangle$ en une pré-preuve finie $\Pi(\mathcal{A})$. L'idée générale est de reproduire la structure de graphe de $\mathcal{A}$ dans celle de $\Pi(\mathcal{A})$, tout en remplaçant chaque sommet par un *gadget* qui simule son comportement. Pour cela, on maintient la n-pile du côté gauche du symbole $\vdash$ tandis que l'arbre sera maintenu à droite.

Afin de traiter les cas d'erreurs possibles, on voit plutôt t comme un Σ'-arbre, où $\Sigma' = 1 + \Sigma$. Cela nous permet de définir une preuve $\mathtt{err}_X$ pour n'importe quelle formule X de la façon suivante :

$$\mathtt{err}_X = \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{X \vdash 1}\,\mathtt{RAx}}{X \vdash 1 + \coprod_{f\in\Sigma} f}\,\mathtt{R}{+_0}}{X \vdash T}\,\mathtt{RF}_T\,.$$

On encode premièrement la fonction de transition δ par une preuve $\widetilde{\delta}$. L'encodage dépend de la forme de $\delta(q,a)$ comme suit :

– si $\delta(q,a) = (\theta, p)$ pour $\theta \in \mathcal{O}_n$, alors

$$\widetilde{\delta}(q,a) = \dfrac{\dfrac{}{S_n 1 \vdash 1 + S_n 1}\,\theta \qquad \dfrac{\dfrac{}{1 \vdash T}\,\mathtt{err}_1 \qquad \dfrac{}{S_n 1 \vdash T}\,\mathtt{H}}{1 + S_n 1 \vdash T}\,\mathtt{L}+}{S_n 1 \vdash T}\,\mathtt{C}\,;$$

– si $\delta(q,a) = (f, p_1 \dots p_r)$ pour $f \in \Sigma$, alors

$$\widetilde{\delta}(q,a) = \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{S_n 1 \vdash T}\,\mathtt{H}_1 \quad \cdots \quad \dfrac{}{S_n 1 \vdash T}\,\mathtt{H}_r}{S_n 1 \vdash \prod_1^r T}\,\mathtt{R}\times}{S_n 1 \vdash f}\,\mathtt{RF}_f}{S_n 1 \vdash 1 + \coprod_{i\in\Sigma} i}\,\mathtt{R}{+_f}}{S_n 1 \vdash T}\,\mathtt{RF}_T\,.$$

Dans $\mathcal{A}$, le choix de la transition à emprunter dépend du symbole de dessus de n-pile. Ainsi, on veut une preuve $\mathtt{TOP}$ avec autant d'hypothèses que la cardinalité de Γ, qu'on peut utiliser pour brancher sur les différents cas.

Pour ce faire, on doit d'abord « creuser » dans la n-pile afin d'aller y dénicher le

symbole du dessus. On définit donc $\mathtt{DIG}_k$ comme suit :

$$\mathtt{DIG}_0 = \dfrac{\left\{ \dfrac{}{X \vdash T}\,\mathtt{H}_a \right\}_{a\in\Gamma}}{\dfrac{\coprod_\Gamma X \vdash T}{S_0X \vdash T}\,\mathtt{LF}_{S_0X}}\,\mathtt{L}+\,,$$

$$\mathtt{DIG}_k = \dfrac{\dfrac{}{X \vdash T}\,\mathtt{err}_X \qquad \dfrac{\left\{ \dfrac{}{(S_1\cdots S_k)X \vdash T}\,\mathtt{H}_a \right\}_{a\in\Gamma}}{S_{k-1}S_kX \vdash T}\,\mathtt{DIG}_{k-1}[X/S_kX]}{\dfrac{X + S_{k-1}S_kX \vdash T}{S_kX \vdash T}\,\mathtt{LF}_{S_kX}}\,\mathtt{L}+\,.$$

Lemme 7.5. *Soit $s \in S_n(\mathbf{1})$ une n-pile bien formée et soit $\mathtt{top}(s) = a$. Soit $\Pi = \mathtt{DIG}_n[X/1]$ dont la racine est dénotée u et les hypothèses sont $(v_i)_{i\in\Gamma}$. Alors, dans $\mathcal{M}_{\Lambda_s\cup\Pi}$, on a $[\sqrt{s}, u] \overset{*}{\nsim} [\sqrt{w}, v_a]$, où $w = \mathtt{pop}_1^n(s)$.*

Démonstration. Selon la correspondence entre les n-piles et les mots du Lemme 7.2, on a

$$s = \mathtt{Cons}_n\mathtt{Cons}_{n-1}\cdots\mathtt{Cons}_1 \cdot a \cdot w.$$

On a donc $s = s_n$, où s_k est défini récursivement comme suit :

$$s_0 = a \cdot w \qquad , \qquad s_k = \mathtt{Cons}_k \cdot s_{k-1} \qquad (k \geq 1)$$

Observons que, sur $\mathcal{Z}_n(1)$, on a $\mathtt{DIG}_n[X/1] = \Pi_n$, où Π_k est défini comme suit.

$$\Pi_0 = \dfrac{\left\{ \dfrac{}{v_i : Z_1 \vdash T}\,\mathtt{H}_i \right\}_{i\in\Gamma}}{\dfrac{\coprod_\Gamma Z_1 \vdash T}{u_0 : Z_0 \vdash T}\,\mathtt{LF}_{Z_0}}\,\mathtt{L}+\,,$$

$$\Pi_k = \dfrac{\dfrac{}{Z_{k+1} \vdash T}\,\mathtt{err}_{Z_{k+1}} \qquad \dfrac{\left\{ \dfrac{}{v_i : Z_1 \vdash T}\,\mathtt{H}_i \right\}_{i\in\Gamma}}{u_{k-1} : Z_{k-1} \vdash T}\,\Pi_{k-1}}{\dfrac{Z_{k+1} + Z_{k-1} \vdash T}{u_k : Z_k \vdash T}\,\mathtt{LF}_{Z_k}}\,\mathtt{L}+\,.$$

Une simple comparaison des formules à droite de Λ_{s_k} avec celles à gauche de Π_k mène alors aux relations suivantes (dans chaque cas, l'éliminateur de coupures effectue deux réductions essentielles) :

$$[\sqrt{s_0}, u_0] \overset{*}{\nleftarrow} [\sqrt{w}, v_a] \qquad , \qquad [\sqrt{s_k}, u_k] \overset{*}{\nleftarrow} [\sqrt{s_{k-1}}, u_{k-1}] \qquad (k \geq 1).$$

Puisque $[\sqrt{s}, u] = [\sqrt{s_n}, u_n]$, le résultat en découle par récurrence. □

Ensuite, puisque la lecture est destructive dans les preuves circulaires, on a besoin d'une preuve pour « remplir » le trou laissé dans l'entrée en y remettant le symbole lu, puis en construisant une nouvelle n-pile bien formée. On définit donc $\mathtt{FILL}^a_k$ comme suit :

$$\mathtt{FILL}^a_0 = \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{X \vdash X}\,\mathtt{I}}{X \vdash \coprod_\Gamma X}\,\mathtt{R}{+}_a}{X \vdash S_0 X}\,\mathtt{RF}_{S_0 X} \quad ,$$

$$\mathtt{FILL}^a_k = \dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathtt{FILL}^a_{k-1}[X/S_k X]}{(S_1 \cdots S_k)X \vdash S_{k-1}S_k X}}{(S_1 \cdots S_k)X \vdash X + S_{k-1}S_k X}\,\mathtt{R}{+}_1}{(S_1 \cdots S_k)X \vdash S_k X}\,\mathtt{RF}_{S_k X} \quad .$$

Lemme 7.6. *Soit w un mot qui représente un chemin de Z_1 vers X dans la Figure 7.4. Soit u la racine de $\Pi = \mathtt{FILL}^a_n[X/1]$, où $a \in \Gamma$. Alors* $\mathrm{CE}([\sqrt{w}, u]) = \Lambda_s$, *où s est la n-pile qui correspond au mot suivant :*

$$s = \mathtt{Cons}_n \mathtt{Cons}_{n-1} \cdots \mathtt{Cons}_1 \cdot a \cdot w \,.$$

Démonstration. Par construction, on a $\mathtt{FILL}^a_n = \Pi_n$, où Π_k est défini comme suit :

$$\Pi_0 = \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{Z_1 \vdash Z_1}\,\mathtt{I}}{Z_1 \vdash \coprod_\Gamma Z_1}\,\mathtt{R}{+}_a}{Z_1 \vdash Z_0}\,\mathtt{RF}_{Z_0} \qquad , \qquad \Pi_k = \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Pi_{k-1}}{Z_1 \vdash Z_{k-1}}}{Z_1 \vdash Z_{k+1} + Z_{k-1}}\,\mathtt{R}{+}_1}{Z_1 \vdash Z_k}\,\mathtt{RF}_{Z_k} \quad .$$

Supposons que l'éliminateur de coupures est initialisé avec $[\sqrt{w}, u]$ en mémoire. À l'exception de la règle $\mathtt{I}$ sur la feuille, toutes les règles de chaque Π_k sont des règles droites. De plus, ces règles sont les mêmes que celles qui sont utilisées dans la construction de Λ_s. Alors les $2(n+1)$ premières actions de l'éliminateur de coupures sont des productions droites, qui produisent une copie de Λ_r (excepté à la feuille), où $r = \mathtt{Cons}_n\mathtt{Cons}_{n-1}\cdots\mathtt{Cons}_1 \cdot a$.

Après ces étapes, la mémoire de l'éliminateur de coupures est de la forme $[\sqrt{w}, v]$ où $\text{RÈG}(v) = \mathtt{I}$. Donc $M \bowtie [u]$ et par le Théorème 6.10, on trouve

$$\text{CE}([\sqrt{w}, u]) = \text{CE}([\sqrt{w}]) = \Lambda_w. \qquad \square$$

On peut maintenant définir $\mathtt{TOP}$ comme suit :

$$\mathtt{TOP} = \dfrac{\left\{ \dfrac{\dfrac{}{(S_1\cdots S_n)1 \vdash S_n 1}\,\mathtt{FILL}^a_n[X/1] \quad \dfrac{}{S_n 1 \vdash T}\,\mathtt{H}_a}{(S_1\cdots S_n)1 \vdash T}\,\mathtt{C} \right\}_{a\in\Gamma}}{S_n 1 \vdash T}\,\mathtt{DIG}_n[X/1]\,.$$

Pour tout $q \in Q$, soit Π_q la preuve suivante :

$$\Pi_q = \dfrac{\left\{ \dfrac{\dfrac{}{S_n 1 \vdash T}\,\mathtt{H}_{a,1} \quad \ldots \quad \dfrac{}{S_n 1 \vdash T}\,\mathtt{H}_{a,r}}{S_n 1 \vdash T}\,\widetilde{\delta}(q,a) \right\}_{a\in\Gamma}}{S_n 1 \vdash T}\,\mathtt{TOP}\,.$$

On dénote par $\sqrt{q}$ la racine de Π_q et par $\mathscr{D}^{a,i}_q$ l'hypothèse étiquetée par $\mathtt{H}_{a,i}$. Soit aussi $\Pi_\perp$ la preuve suivante, dont la racine est dénotée $\sqrt{\perp}$ et l'hypothèse $\mathscr{D}_\perp$:

$$\Pi_\perp = \dfrac{\dfrac{}{1 \vdash S_n 1}\,\perp_n \qquad \dfrac{}{S_n 1 \vdash T}\,\mathtt{H}}{1 \vdash T}\,\mathtt{C}\,.$$

La pré-preuve $\Pi(\mathcal{A})$ est obtenue en prenant l'union de $\Pi_\perp$ avec tous les Π_q, puis en reliant $\mathscr{D}_\perp$ à $\sqrt{q_0}$ et, pour tout $q \in Q$ et $a \in \Gamma$:

– si $\delta(q,a) = (p,\theta)$, relier $\mathscr{P}_q^{a,1}$ à $\sqrt{p}$;
– sinon, relier $\mathscr{P}_q^{a,i}$ à $\sqrt{p_i}$.

On peut maintenant énoncer le résultat principal de ce chapitre : les arbres acceptés par des n-APs sont circulairement calculables.

Théorème 7.7. *Soit $\mathcal{A}$ un n-AP qui accepte un Σ-arbre t. Alors*

$$\mathrm{CE}_{\Pi(\mathcal{A})}(\sqrt{\bot}) = \Psi_t.$$

L'idée de la preuve du Théorème 7.7 est de relever le comportement local d'une exécution $\varrho : [\![T]\!] \rightharpoonup \mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ vers l'ensemble des configurations de l'éliminateur de coupures, c'est-à-dire, $\mathcal{M}_{\Pi(\mathcal{A})}$.

Définition. Une multicoupure $M = [u_1, u_2 \dots u_m]$ sur $\Pi(\mathcal{A})$ est ***bonne*** si elle est telle que $\textsc{Seq}_{\mathtt{L}}(u_1) = 1$ et $u_m = \sqrt{q}$ pour un certain $q \in Q$. Soit $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}^{\heartsuit}$ l'ensemble des bonnes multicoupures sur $\Pi(\mathcal{A})$.

Selon cette définition, on peut associer à chaque bonne multicoupure M un sommet $q_M \in Q$ tel que $\sqrt{q_M}$ est le dernier élément de M.

Lemme 7.8. *Soit $M = [u_1, u_2 \dots u_m] \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}^{\heartsuit}$. Alors pour tout $i < m$, le graphe atteignable $\overline{(\Pi(\mathcal{A}), u_i)}$ est une preuve circulaire (qui respecte la condition de garde).*

Démonstration. Observons d'abord que par inspection, T et ses sous-formules ne peuvent apparaître qu'à la droite d'un séquent de $\Pi(\mathcal{A})$. Donc, pour tout $i < m$, $\textsc{Seq}_{\mathtt{R}}(u_i)$ n'a pas de lien avec T, car s'il en avait un, alors $\textsc{Seq}_{\mathtt{L}}(u_{i+1}) = \textsc{Seq}_{\mathtt{R}}(u_i)$ en aurait un et ce serait une contradiction.

Par construction, il s'ensuit que u_i appartient soit à une copie de $\mathtt{FILL}_n^a[X/1]$ pour un certain $a \in \Gamma$, ou à une sous-preuve qui dénote $\bot_n$ ou un certain $\theta \in \mathcal{O}_n$. Or, toutes ces preuves sont valides et donc, $\overline{(\Pi(\mathcal{A}), u_i)}$ est valide. □

Il découle du dernier résultat que pour tout $M = [u_1, u_2 \dots u_m] \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}^{\heartsuit}$ et $i < m$, u_i dénote une unique fonction $[\![u_i]\!]$. Puisque $\textsc{Seq}_{\mathtt{L}}(u_0) = 1$ et $\textsc{Seq}_{\mathtt{R}}(u_{m-1}) = \textsc{Seq}_{\mathtt{L}}(u_m) = S_n 1$, on peut définir $s_M : \mathbf{1} \to S_n(\mathbf{1})$ par l'équation suivante :

$$s_M = [\![u_0]\!] \cdot [\![u_1]\!] \cdots [\![u_{m-1}]\!] .$$

Si on identifie ces fonctions $\mathbf{1} \to S_n(\mathbf{1})$ aux n-piles qu'elles atteignent, on obtient une fonction $\psi : \mathcal{M}_{\mathcal{A}}^{\heartsuit} \to \mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ définie par :

$$\psi(M) = (q_M, s_M).$$

Lemme 7.9. *Soit $M \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}^{\heartsuit}$ et $(q, s) = \psi(M)$. Alors pour tout $(q', s') \in \mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ tel que $(q, s) \to_{\mathcal{A}} (q', s')$, il existe $M' \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}^{\heartsuit}$ tel que $M \overset{*}{\nrightarrow} M'$ et $\psi(M') = (q', s')$.*

Démonstration. Par le Lemme 6.9, on peut supposer sans perte de généralité que $M = [r_s, \sqrt{q}]$, où r_s est la racine de Λ_s. Soit $a = \mathtt{top}(s)$ et $\theta \in \mathcal{O}_n$ tel que $\delta(q, a) = (q', \theta)$ et $\theta(s) = s' \cdot \mathtt{in}_1 : \mathbf{1} \to S_n(\mathbf{1})$.

Puisque $\mathtt{top}(s)$ est supposé défini, alors s est bien formé et, en particulier, on peut représenter s dans L_n par un mot de la forme suivante :

$$s = \mathtt{Cons}_n \mathtt{Cons}_{n-1} \cdots \mathtt{Cons}_1 \cdot a \cdot w \, .$$

Identifions clairement certains sommets dans Π_q :

$$\dfrac{\left\{ \dfrac{\dfrac{}{f_b : (S_1 \cdots S_n) \vdash S_n}\,\mathtt{FILL}_n^b[X/1] \quad \dfrac{\dots \mathscr{D}_q^{b,i} : S_n \vdash T \dots}{v_b : S_n \vdash T}\,\widetilde{\delta}(q,b)}{d_b : (S_1 \cdots S_n) \vdash T}\,\mathtt{C} \right\}_{b \in \Gamma}}{\sqrt{q} : S_n \vdash T}\,\mathtt{DIG}_n[X/1] \, .$$

Souvenons-nous que $\mathscr{D}_q^{a,1} = \sqrt{q'}$ dans $\Pi(\mathcal{A})$. La preuve $\widetilde{\delta}(q, a)$ est la suivante :

$$\dfrac{\dfrac{}{y : S_n \vdash 1 + S_n}\,\theta \quad \dfrac{\dfrac{}{1 \vdash T}\,\mathtt{err}_1 \qquad \sqrt{p} : S_n \vdash T}{z : 1 + S_n \vdash T}\,\mathtt{L}+}{v_a : S_n \vdash T}\,\mathtt{C} \, .$$

En utilisant le Lemme 7.5 suivi de deux fois l'opération FUSION, on obtient :

$$[\sqrt{s}, \sqrt{q}] \overset{*}{\nleftarrow} [\sqrt{w}, d_a] \nleftarrow [\sqrt{w}, f_a, v_a] \nleftarrow [\sqrt{w}, f_a, y, z].$$

Maintenant, par le Lemme 7.6, on a $\text{CE}([\sqrt{w}, f_a]) = \Lambda_s$ et donc $[\![\sqrt{w}]\!] \cdot [\![f_a]\!] = s$. Puisque s est bien formé et puisque

$$[\![y]\!] = \theta : S_n(\mathbf{1}) \to \mathbf{1} + S_n(\mathbf{1}),$$

alors $[\![\sqrt{w}]\!] \cdot [\![f_a]\!] \cdot [\![y]\!] = \theta(s) = s' \cdot \mathtt{in}_1$. Or, voici une autre preuve qui dénote la même fonction $s' \cdot \mathtt{in}_1$:

$$\dfrac{\dfrac{\overline{\qquad\qquad} \Lambda_{s'}}{r_{s'} : 1 \vdash S_n(\mathbf{1})}}{u : 1 \vdash 1 + S_n(\mathbf{1})} \mathtt{R}{+_1} .$$

En utilisant l'opération RÉDUCT, on a $[u, z] \nleftarrow [\sqrt{s'}, \sqrt{q'}]$. Par le Lemme 6.9, on peut déduire

$$[\sqrt{w}, f_a, y, z] \overset{*}{\nleftarrow} N \cdot [\sqrt{q'}]$$

pour un certain $N \in \mathcal{M}_{\Pi(\mathcal{A})}$ tel que $[\![N]\!] = [\![\sqrt{s'}]\!] = s'$. On conclut donc que $\psi(N \cdot [\sqrt{q'}]) = (q', s')$. □

Lemme 7.10. *Soit $M \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}^{\heartsuit}$ et $(q, s) = \psi(M)$. Si $\delta(q, \mathtt{top}(s)) = (f, p_1 \dots p_r)$ pour $p_1 \dots p_r \in Q$, alors il existe $M'_1 \dots M'_r \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}^{\heartsuit}$ tels que pour $1 \leq i \leq r$, $\psi(M'_i) = (p_i, s)$ et $\text{CE}(M)$ est la preuve suivante :*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{\qquad} \text{CE}(M'_1) \quad \cdots \quad \overline{\qquad} \text{CE}(M'_r)}{1 \vdash T \qquad\qquad 1 \vdash T} \mathtt{R}\times}{1 \vdash \prod_1^r T} \mathtt{RF}_f}{1 \vdash f} \mathtt{R}{+_f}}{1 \vdash 1 + \coprod_{g \in \Sigma} g} \mathtt{RF}_T}{1 \vdash T} .$$

Démonstration. On commence la preuve de la même façon qu'au 7.9. Par la Proposition 6.5, on peut supposer, sans perte de généralité, que $M = [\sqrt{s}, \sqrt{q}]$. Soit

$a = \mathtt{top}(s)$ et on identifie les sommets de Π_q comme plus haut. Par le même argument qu'au Lemme 7.9, on obtient ceci :

$$[\sqrt{s}, \sqrt{q}] \overset{*}{\leftarrowtail} [\sqrt{w}, f_a, v_a]$$

dont on sait que $[\![\sqrt{w}]\!] \cdot [\![f_a]\!] = s$. Donc $\textsc{ce}(M) = \textsc{ce}([\sqrt{w}, f_a, v_a])$ par définition.

Seulement, cette fois, la preuve $\widetilde{\delta}(q, a)$ a la forme suivante :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\sqrt{p_1} : S_n \vdash T \quad \cdots \quad \sqrt{p_r} : S_n \vdash T}{u_3 : S_n \vdash \prod_1^r T}\,\mathtt{R}\times}{u_2 : S_n \vdash f}\,\mathtt{RF}_f}{u_1 : S_n \vdash 1 + \coprod_{g \in \Sigma} g}\,\mathtt{R}+_f}{v_a : S_n \vdash T}\,\mathtt{RF}_T \quad .$$

Puisque $\textsc{Règ}\{v_a, u_1, u_2, u_3\} \subset \mathfrak{R}$, alors l'éliminateur de coupure utilisera l'opération RNext quatre fois consécutives, ce qui produit le segment de preuve recherché. Ensuite, l'éliminateur de coupures poursuit son travail avec r multicoupures en parallèle. Ces multicoupures sont $M'_1 \dots M'_r$ où $M'_i = [r_w, f_a, \sqrt{p_i}]$. Puisque $[\![r_w]\!] \cdot [\![f_a]\!] = s$, alors $\psi(M'_i) = (p_i, s)$. □

À partir des deux lemmes précédents, on peut obtenir le résultat suivant.

Proposition 7.11. *Soit $t = (f, t_1 \dots t_r) \in T$ et $(q, s) \in \mathcal{C}_\mathcal{A}$. S'il existe une exécution $\varrho : T \rightharpoonup \mathcal{C}_\mathcal{A}$ de t à partir de (q, s) et une multicoupure $M \in \mathcal{M}_\mathcal{A}^\heartsuit$ telle que $\psi(M) = (q, s)$, alors $\textsc{ce}(M)$ est bien défini et $\textsc{ce}(M) = \Psi_t$.*

Démonstration. Il suffit de montrer (par induction) que pour tout $h \in \mathbb{N}$, $\textsc{ce}(M)$ et Ψ_t coïncident au moins jusqu'à une hauteur de $4h$. Le cas $h = 0$ étant trivial, soit $h > 0$.

Soit $\varrho(t) = (q_t, s_t)$. Puisque ϱ est une exécution de t à partir de (q, s), alors $(q, s) \twoheadrightarrow_\mathcal{A} (q_t, s_t)$. Par le Lemme 7.9, il existe une multicoupure $M' \in \mathcal{M}_\mathcal{A}^\heartsuit$ telle

que $M \overset{*}{\bowtie} M'$. On a donc $\text{CE}(M) = \text{CE}(M')$, à condition que l'une de ces deux pré-preuves soit bien définie.

Or, puisque ϱ est une exécution, alors $\delta(q_t, \texttt{top}(s_t)) = (f, p_1 \dots p_r)$ pour certains $p_1 \dots p_r \in Q$. Par le Lemme 7.10, $\text{CE}(M')$ et Ψ_t coïncident *au moins* jusqu'à une hauteur de 4. Pour la hauteur restante, on doit vérifier que pour $1 \leq i \leq r$, les multicoupures M_i'' du Lemme 7.10 ont la propriété de coïncider avec Ψ_{t_i} au moins jusqu'à une hauteur de $4(h-1)$. Mais puisque ϱ est une exécution de t_i à partir de (p_i, s_t), cela est vrai par hypothèse d'induction. □

Corollaire (Théorème 7.7)**.** *Soit $\mathcal{A}$ un n-AP qui accepte un Σ-arbre t. Alors*

$$\text{CE}_{\Pi(\mathcal{A})}(\sqrt{\bot}) = \Psi_t.$$

Démonstration. En utilisant FUSION sur $[\sqrt{\bot}]$, on obtient $[\sqrt{\bot}] \bowtie [u, \sqrt{q_0}]$, où $[\![u]\!] = \bot_n$. Donc $\psi([u, \sqrt{q_0}]) = (q_0, \bot_n)$. De plus, t est accepté par $\mathcal{A}$, il y a donc une exécution de t à partir de $(q_0, \bot_n)$. Ainsi, par la Proposition 7.11, on trouve

$$\text{CE}([\sqrt{\bot}]) = \text{CE}([u, \sqrt{q_0}]) = \Psi_t.$$ □

7.4 Un arbre définissable qui n'est pas dans la hiérarchie

L'objectif de cette section est de démontrer que la réciproque du Théorème 7.7, qui dit que tous les arbres circulairement calculables peuvent être situés dans la hiérarchie de Caucal, est fausse. Pour ce faire, on donne un exemple d'un arbre circulairement définissable, donc circulairement calculable par la Proposition 7.1, qui ne se trouve pas dans la hiérarchie.

Rappelons que par des résultats de (Cockett et Santocanale, 2003; Paré et Román, 1989) et le Théorème 4.7, toute fonction primitive récursive $f : \mathbb{N}^K \to \mathbb{N}$ peut être dénotée par une preuve circulaire. C'est le cas, entre autres, des fonctions

primitives récursives à une variable, qu'on peut assimiler à des suites infinies de nombres naturels. Ces derniers sont exprimables par le système dirigé suivant :

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{l} S =_2 N \times S \\ N =_1 1 + N \end{array} \right\}.$$

Or, rappelons (revoir la Figure 7.1) que toute suite infinie $f \in [\![\mathcal{S}]\!]$ peut être représentée par son ***peigne***, $\textsc{Peigne}(f)$, qui est un Σ-arbre, où $\Sigma = \{a, s, 0\}$ avec $\mathrm{ar}(a) = 2$, $\mathrm{ar}(s) = 1$ et $\mathrm{ar}(0) = 0$, défini somme suit (avec le constructeur d'arbres étiquetés de l'Exemple 5 de la Section 2.3) :

$$\begin{aligned} \textsc{Peigne}(n{:}w) &= \mathtt{Cons}(a, [b(n), \textsc{Peigne}(w)]), \qquad \text{où} \\ b(0) &= \mathtt{Cons}(0, []), \\ b(\mathtt{Suc}\ x) &= \mathtt{Cons}(s, [b(x)]). \end{aligned}$$

La fonction $\textsc{Peigne} : [\![S]\!] \to [\![T]\!]$ peut être dénotée par la preuve circulaire de la Figure 7.5, sur le système $\mathcal{S} \cup \mathcal{T}$.

On en conclut que pour toute suite primitive récursive $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $\textsc{Peigne}(f) \in \mathbf{CD}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit $h_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la fonction suivante :

$$\begin{aligned} h_0(x) &= x \\ h_{k+1}(x) &= 2^{h_k(x)}, \end{aligned}$$

et posons $f(x) = h_x(1)$. Clairement, f est primitive récursive. On va montrer que $\textsc{Peigne}(f)$ n'est reconnu par aucun n-AP. Il s'agit d'une preuve qui nous fut indiquée par Arnaud Carayol et qui est présente (à peu de choses près) dans sa thèse (Carayol, 2006, Prop. 5.4.3).

Définition. Soit $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ deux fonctions. On dit que f est ***dominée*** par g s'il existe $x_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $x \geq x_0$, on a $f(x) \leq g(x)$. Dans ce cas, on écrit $f \leq g$.

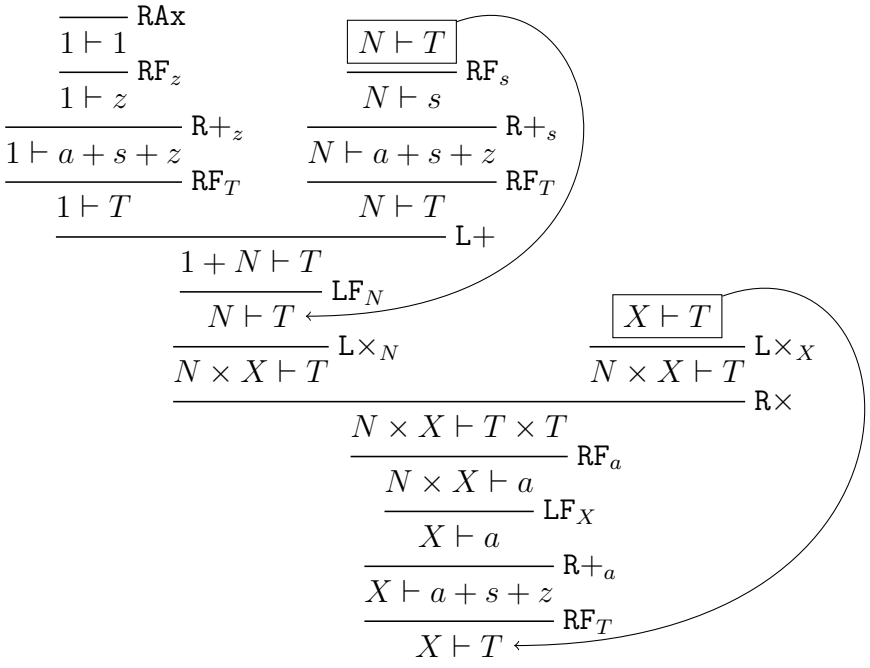


Figure 7.5 Une preuve qui transforme les suites infinies en peignes

Définition. La ***distance*** entre deux langages L_1, L_2 tels que $L_1 \cap L_2 \neq \varnothing$ est définie comme suit :

$$d(L_1, L_2) = \min\{|w| : w \in L_1 \cap L_2\}.$$

Pour $m \in \mathbb{N}$, soit Reg_m l'ensemble des langages réguliers reconnus par un automate à m états. Pour un langage L, son ***indice rationnel*** est la fonction $\rho_L : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par

$$\rho_L(m) = \max\{d(L, R) : R \in \mathrm{Reg}_m, L \cap R \neq \varnothing\}.$$

Lemme 7.12. *Soit $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Si* Peigne$(g)$ *est accepté par un n-AP, alors il existe un polynôme p tel que $g \leq h_{2n} \circ p$.*

Démonstration. Soit $t =$ Peigne(g) et supposons qu'il est accepté par un n-AP.

Alors, par (Knapik *et al.*, 2002, Th. 5.1), t est généré par une *grammaire sûre de niveau n*. Ainsi, par (Caucal, 2003, Th. 3.5), $t \in Term_n$ (tel que défini dans Caucal, 2003) et donc, par (Caucal, 2003, Th. 3.3), t est le *langage arbre* d'un *schéma de niveau n* sur Σ ($t \in n - \mathcal{L}_{\mathrm{OI}}(\Sigma)$), tel que défini dans (Damm, 1982). On peut donc appliquer des résultats de (Damm, 1982) !

Soit $L_t \subseteq \Sigma^*$ le langage des mots formés par les lettres de Σ lues sur les sommets des branches finies de t. Avec $t = \textsc{Peigne}(g)$, on a

$$L_t = \{a^{m+1}s^{g(m)}0 : m \in \mathbb{N}\}.$$

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, soit $R_m = a^m s^* z$. Alors $R_m \in \mathrm{Reg}_{m+2}$, et $d(L_t, R_m) = m + g(m-1) + 2$. Donc, pour $m \geq 3$, on a $\rho_{L_t}(m) \geq d(L_t, R_{m-2}) \geq g(m-3)$. Or, par (Damm, 1982, Th. 9.3), ρ_{L_t} est dominé par $h_{2n} \circ p$ pour un certain polynôme p. Il s'ensuit que pour m assez grand, on a $g(m) \leq \rho_{L_t}(m+3) \leq h_{2n}(p(m+3))$. □

En appliquant le Lemme 7.12 à la fonction f définie plus haut, on a $f \leq h^{2n} \circ p$, ce qui est évidemment faux puisque f est une tour d'exponentielles.