

Sommaire

2.1	Etat de l'art des méthodes de calcul multi-échelles	23
2.1.1	Méthodes multi-échelles micro/macro	23
2.1.2	Méthodes de couplage avec transfert d'information à l'interface	24
2.1.3	Méthodes non-intrusives	25
2.2	Principe des méthodes de couplage	27
2.2.1	Problème de référence	28
2.2.2	Résolution couplée classique	28
2.2.3	Résolution couplée non-intrusive	31

Dans ce chapitre, nous présentons quelques méthodes numériques de la littérature qui permettent de résoudre des problèmes multi-échelles complexes à un coût raisonnable. Parmi ces méthodes, le principe du couplage global-local non-intrusif est détaillé.

2.1 Etat de l'art des méthodes de calcul multi-échelles

Afin d'optimiser la résolution de problèmes à grande échelle, très coûteuse numériquement, des méthodes de type multi-échelles ou multi-modèles ont été développées. Elles se décomposent en deux grandes catégories : les méthodes d'analyse multi-échelles micro/macro et celles de couplage avec échange d'information à l'interface.

2.1.1 Méthodes multi-échelles micro/macro

Ces méthodes reposent sur l'enrichissement des modèles avec des espaces d'approximation augmentés (maillage plus fin ou fonctions d'enrichissement obtenues analytiquement ou numériquement) et la superposition des solutions micro et macro.

Parmi toutes ces méthodes, nous pouvons citer les suivantes :

- les méthodes d'enrichissement local basées sur la Partition d'Unité (PUM) [111] : la Méthode des Éléments Finis Généralisés (GFEM) [7, 50, 71, 152], ou encore la Méthode des Éléments Finis Étendus (XFEM) [115]. Le principe de ces méthodes est d'enrichir l'espace d'approximation dans lequel la solution est recherchée à l'aide de fonctions spécifiques qui proviennent de développements asymptotiques ou de solutions EF pré-calculées ;
- les méthodes éléments finis avec adaptation localisée (MsFEM) dans laquelle des fonctions de forme particulières décrivent des détails fins de la solution [33, 80] ;
- les méthodes avec des corrections locales, qui prennent en compte de façon itérative la contribution du modèle local sur le modèle global en assurant l'égalité des inconnues (déplacement, force, contrainte, déformation) à l'interface. On compte par exemple la méthode variationnelle Multi-échelle (VMS) [83], la méthode des modèles hiérarchiques (HDPM) [122] pour les modèles très hétérogènes, ou la méthode *bridging scale* [162] ;
- les méthodes multi-grilles [126, 138] qui consistent à utiliser successivement des grilles (ou maillages) de différentes tailles, de manière à obtenir une solution détaillée dans les hautes fréquences, tout en assurant une relaxation rapide des basses fréquences ;
- les méthodes de zoom numérique qui utilisent des patches d'éléments finis [65, 105, 129]. La solution d'un problème est calculée sur un maillage grossier. L'imprécision venant du maillage grossier est outrepassée en ajoutant des patches locaux simples et avec un maillage raffiné. Les maillages locaux et globaux n'ont pas besoin d'être compatibles à l'interface. Cette méthode permet d'éviter le raffinement local classique en plaçant un ou plusieurs patches sur le domaine global. La convergence de la méthode dépend du ratio entre la taille du maillage du patch et celle du maillage global. Un exemple de patch local recouvrant une partie du domaine global est montré sur la Figure 2.1.

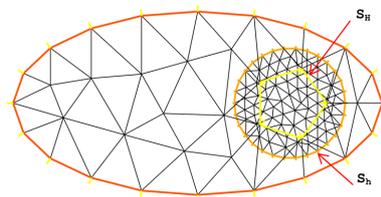


FIGURE 2.1 – Maillage local fin Ω_h recouvrant le maillage grossier Ω_H [105].

Néanmoins toutes ces méthodes peuvent difficilement être utilisées dans des simulations multi-échelles industrielles à cause de leur haut niveau d'intrusivité dans les codes utilisés. En effet ces méthodes reposent sur des corrections afin de définir l'intégralité des échelles dans un seul modèle ce qui n'est pas facile à mettre en place dans les codes industriels.

2.1.2 Méthodes de couplage avec transfert d'information à l'interface

La deuxième catégorie de méthodes qui a émergé pour la résolution de simulation multi-échelles est celle des méthodes de couplage de modèles avec transfert d'information à l'interface. Ces méthodes sont particulièrement intéressantes dans le contexte industriel actuel où les différents modèles (venant potentiellement de différents logiciels) peuvent être résolus indépendamment, voire en parallèle sur les clusters modernes.

La méthode la plus répandue actuellement dans l'industrie reste la méthode de zoom structural (approche descendante ou réanalyse locale) [86, 161] qui consiste en la résolution d'un problème global linéaire suivie de celle d'un "zoom" local non-linéaire centré sur la zone d'intérêt et pilotée par le déplacement global. Ces méthodes sont limitées par le fait que le transfert se fait dans un seul sens et ne prend pas en compte l'impact du modèle local sur le modèle global. Elles peuvent être combinées avec de la condensation statique [62, 78, 109] pour éliminer les erreurs dues à l'approximation des conditions aux limites locales.

En ce qui concerne la connexion des domaines local et global, de nombreuses méthodes ont été développées. En fonction de la discrétisation de chacun des domaines sur l'interface Γ , on distingue plusieurs configurations de couplage qu'on nomme (en se basant sur [25, 70]) dans la suite ainsi :

- le couplage compatible pour lequel l'interface Γ est alignée avec les bords des éléments et les noeuds des deux domaines coïncident sur cette interface (voir Figure 2.2 en haut à gauche) ;
- le couplage incompatible pour lequel l'interface Γ est alignée avec les bords des éléments mais les noeuds des deux domaines sont décalés (voir Figure 2.2 en haut à droite) ; dans ce cas, il y a deux situations : maillages imbriqués ou non imbriqués ;
- le couplage non-conforme géométriquement pour lequel l'interface Γ n'est pas alignée avec les bords des éléments grossiers (voir Figure 2.2 en bas à gauche) ;
- le couplage non-conforme géométriquement et topologiquement pour lequel l'interface Γ n'est pas alignée avec les bords des éléments grossiers et les modèles local et global n'ont pas la même topologie sur Γ (voir Figure 2.2 en bas à droite).

Parmi ces méthodes, la méthode surfacique Mortar [11, 17] permet de coupler des discrétisations de différents types sur différents sous-domaines sans recouvrement. La méthode repose sur la construction d'un espace discret ; des espaces de discrétisations sont définis sur chacun des sous domaines et les opérateurs de Mortar sont définis à l'intersection.

Ces opérateurs sont construits afin de garantir l'égalité faible à l'interface de couplage via des multiplicateurs de Lagrange. Par exemple, sur le couplage incompatible entre deux domaines de la Figure 2.3, l'opérateur de couplage est défini ainsi :

$$\mathbb{C}_{ij} = \int_0^{0.5} N_j(x)N_i(2x+1)\partial x + \int_{0.5}^1 N_j(x)N_i(2x-1)\partial x. \quad (2.1)$$

On peut aussi citer la méthode surfacique de Nitsche [23, 73], et des méthodes volumiques telles que la méthode Arlequin qui est une méthode avec recouvrement et couplage en énergie [13, 15] ou la méthode Chimère [26]. Ces solutions qui utilisent un maillage de transition pour résoudre les changements topologiques entre les modèles [68–70] permettent de gérer les non-conformités topologiques.

De plus, les méthodes de décomposition de domaine : FETI [59], BDD [108], FETI-DP [58] ou la LATIN mixte [46, 96] basée sur un algorithme de Schwarz [104] sont aussi des méthodes de couplage qui sont largement utilisées dans le domaine industriel. Des algorithmes de relocalisation non-linéaires peuvent être appliqués à ces méthodes pour résoudre des problèmes non linéaires [8, 45, 128].

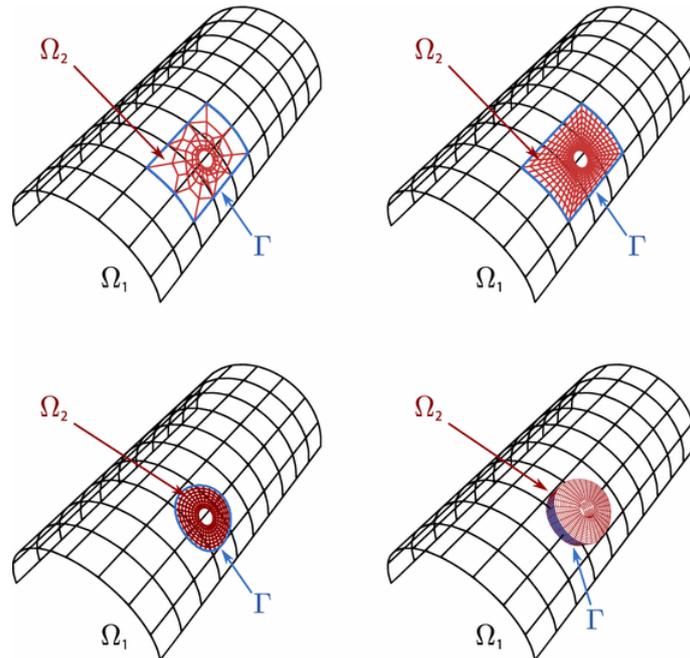


FIGURE 2.2 – Différentes configurations de couplage : maillages compatibles (haut à gauche) ; maillages non-compatibles (haut à droite) ; maillages non-conformes géométriquement (bas à gauche) et maillages non-conformes géométriquement et topologiquement [70].

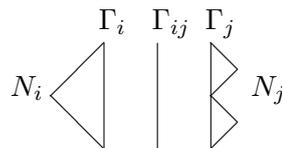


FIGURE 2.3 – Construction de l'opérateur Mortar de couplage entre deux domaines Ω_i et Ω_j , d'interface Γ_{ij} . Les maillages sont compatibles géométriquement à l'interface, seul le raffinement est différent.

Une fois encore ces méthodes, s'avèrent être assez intrusives car elles nécessitent des modifications importantes dans les solveurs EF et un temps important dans la phase de maillage ce qui n'est pas toujours possible dans l'industrie.

2.1.3 Méthodes non-intrusives

Malgré le développement de nombreuses méthodes de calcul d'un point de vue académique, leur implémentation dans un code commercial adapté aux besoins des industriels est assez limitée. Dans la suite de cette thèse, nous utiliserons le terme non-intrusif pour définir des méthodes qui implémentent des techniques dans des codes industriels en les utilisant comme des boîtes noires c'est-à-dire sans en toucher la structure même mais uniquement en communiquant avec ce dernier et qui utilisent les entrées et sorties standards des logiciels industriels modernes.

Dans le cas des méthodes de couplage, la méthode de couplage non-intrusif local-global est apparue [63] suivant les idées développées dans [163]. Elle consiste en une approche de substitution via un solveur itératif de type Schwarz, qui permet de réaliser des modifications locales dans le modèle éléments finis existant (en terme de raffinement de maillage, introduction de phénomène local lié à la géométrie ou au comportement matériau...) sans modifier les opérateurs initiaux.

Dans cette méthode, un modèle global grossier est défini sur l'intégralité du domaine physique où la géométrie, la connectivité, les opérateurs et le solveur sont fixés (la matrice initiale factorisée est donc conservée durant tout la procédure de couplage itératif), tandis que l'évolution du phénomène local est prédite par un modèle séparé défini sur une zone locale ou un patch. Les données d'interface sont quant à elles transférées de façon itérative entre les deux modèles (voir Figure 2.4).

Ainsi cette technique permet d'obtenir une grande flexibilité sans besoin de remaillage global et de séparer les solveurs globaux et locaux.

L'indépendance des solveurs est un avantage pour coupler un logiciel commercial avec n'importe quel autre code dédié à la modélisation de phénomènes locaux; du fait qu'aucune modification n'est à réaliser dans le logiciel commercial, seules des données d'entrée/sortie sont à transmettre.

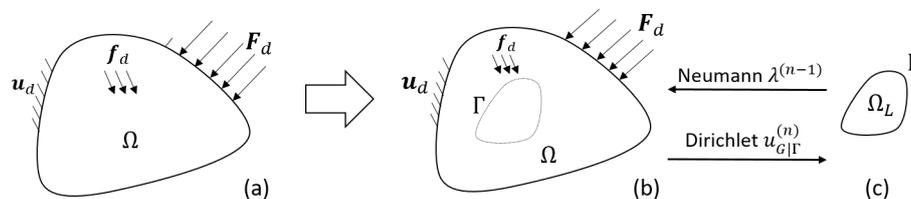


FIGURE 2.4 – Principe du couplage global-local non-intrusif : séparation du problème de référence (a) en un problème global (b) et un problème local (c). Le transfert des informations est réalisé sur l'interface Γ .

Cette méthode de couplage local-global a été largement appliquée ces dernières années dans de nombreuses situations industrielles comportant des phénomènes locaux complexes. Parmi ces applications, nous pouvons relever les suivantes :

- les problèmes de plasticité locale [53, 63] dans lesquels la non-linéarité due à la plasticité est uniquement présente dans le problème local tandis que le problème global est élastique; des techniques d'accélération basées sur des algorithmes Quasi-Newton et Newton tangent sont utilisées pour accélérer la convergence vers la solution élasto-plastique.
- les problèmes de propagation de fissures [53, 71, 127] pour lesquels la zone locale évolue au cours du temps avec la propagation de la fissure; sur la Figure 2.5c, la solution à l'évolution 31 de la propagation de la fissure est reconstruite en déplacement, entre celle du problème global résolu avec un calcul élastique et celle du modèle local résolu avec une alternative à la méthode X-FEM. Cela permet d'estimer directement le facteur d'intensité de contrainte. L'évolution de la zone locale, facilement gérée par le côté non-intrusif du couplage, est visible entre l'étape initiale (voir Figure 2.5a) et après la propagation 31 (voir Figure 2.5b) pour lesquelles les courbes précédentes sont données.
- l'analyse d'incertitudes locales à partir d'un opérateur global déterministe [38, 116].
- les couplages 2D/3D dans de fins panneaux composites avec des concentrations locales de contraintes et du délaminage [68–70]; dans les zones critiques (près des bords, des trous ou des défauts) où le modèle global plaque n'est pas adapté, un modèle local 3D est utilisé. La transition du modèle 3D au 2D est basé sur les distributions des contraintes et déplacements associées à des problèmes de Saint-Venant pré-calculés sur un domaine 3D.
- les problèmes incluant une définition NURBS de la forme du domaine avec des détails géométriques locaux, des fissures ou du raffinement de maillage [24]. La non-modification de la géométrie NURBS globale même en cas de modification de la zone locale grâce à la stratégie non-intrusive limite le coût important de la procédure de re-paramétrisation. Du

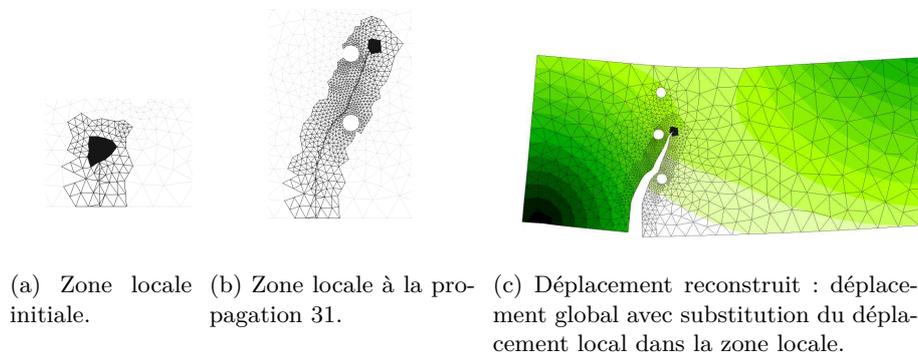


FIGURE 2.5 – Évolution de la zone locale d’un problème de propagation de fissure et état du déplacement reconstruit après 31 étapes de propagation de fissure [127].

fait de la définition particulière des fonctions NURBS, une règle de quadrature adaptée doit être mise en place pour évaluer et transmettre les réactions d’interface. Une définition du couplage non-intrusif basée sur une méthode de Nitsche a aussi été développée pour ces problèmes isogéométriques [23].

- les problèmes de dynamique transitoire [18, 19, 34] pour lesquels seule la zone locale est raffinée en temps et en espace. Le caractère non-intrusif et explicite de la méthode permet de calculer une seule fois le problème global par pas de temps et de limiter le processus itératif au problème local.
- l’utilisation d’estimateurs d’erreur pour de l’adaptation de raffinement de maillage dans le cas d’un couplage non-intrusif [52].

La méthode de couplage non-intrusive étant une méthode itérative, le nombre d’itérations de son solveur impacte le temps de calcul. Classiquement, une norme du résidu à l’interface est utilisée comme indicateur de convergence et critère d’arrêt. Néanmoins, les techniques d’accélération de convergence peuvent être utilisées avec cette méthode, comme la relaxation [38], la relaxation dynamique de Aiken [85], le gradient conjugué non-linéaire [66] ou la mise à jour de l’opérateur global (sans le refactoriser) par un opérateur symétrique de rang un (SR1) [43] en utilisant la formule de Sherman-Morison et Woodbury [63]. Ces techniques ne seront pas implémentées dans la suite, une étude comparative est proposée dans [53].

Généralement, le couplage local-global non-intrusif est seulement vu comme une substitution de comportement sur Ω_L (un zoom numérique) venant d’un comportement initial régulier défini sur tout le domaine Ω . Nous choisissons dans la suite un autre point de vue, où le problème couplé dérive d’un modèle de référence initial dans lequel un comportement complexe est introduit partout sur Ω . Cela permet d’avoir une définition consistante de la solution de référence pour laquelle les mesures d’erreur sont définies dans la suite.

2.2 Principe des méthodes de couplage

Nous présentons dans cette section la version classique du couplage global-local sans recouvrement avec multiplicateur de Lagrange ; sa version non-intrusive est aussi détaillée.

2.2.1 Problème de référence

Nous nous intéressons à un problème mécanique défini sur un domaine $\Omega \in \mathbb{R}^d$ (avec $d=1, 2$ ou 3 selon la dimension du problème), délimité par $\partial\Omega$. Nous séparons les limites du domaine en deux parties. Sur la première, $\partial_u\Omega \subset \partial\Omega$, un déplacement \mathbf{u}_d est appliqué. Sur le complémentaire $\partial_F\Omega \subset \partial\Omega$, défini tel que $\partial_u\Omega \cap \partial_F\Omega = \emptyset$ et $\overline{\partial_u\Omega} \cup \overline{\partial_F\Omega} = \partial\Omega$, un effort de traction \mathbf{F}_D est appliqué. Le domaine Ω peut aussi être soumis à un effort réparti \mathbf{f}_d . Dans la suite, nous utilisons un déplacement donné $\mathbf{u}_d = 0$, ce qui constitue des conditions aux limites de Dirichlet homogènes, sans que cela ne représente une limite théorique. De plus, nous considérons une évolution isotherme quasi-statique avec un régime de petites perturbations.

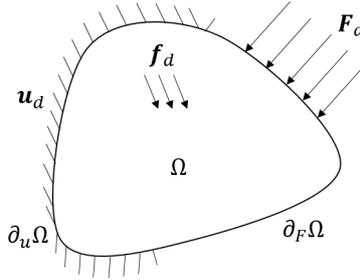


FIGURE 2.6 – Problème de référence et ses conditions aux limites.

Le problème mécanique, tel que décrit sur la Figure 2.6, se résume à trouver le couple déplacement-contrainte $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ qui vérifie le système suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{sur } \partial_u\Omega \quad (\text{liaisons cinématiques}), \\ \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_d = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega, \\ \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{F}_d \quad \text{sur } \partial_F\Omega \end{array} \right. \end{cases}, \quad (2.2)$$

ce qui équivaut à :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f}_d \cdot \mathbf{v} + \int_{\partial_F\Omega} \mathbf{F}_d \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad (\text{équations d'équilibre}), \\ \boldsymbol{\sigma}_t = \mathcal{C}(\dot{\mathbf{u}}|_{\tau}, \tau \leq t) \quad \text{dans } \Omega \quad (\text{relation de comportement}), \end{cases}$$

où \mathbf{n} est le vecteur normal sortant unitaire, \mathcal{C} est un opérateur général qui définit le comportement (complexe) du matériau, $\boldsymbol{\epsilon}$ est le tenseur des déformations linéarisé, et \mathcal{V} est un espace fonctionnel approprié dans lequel les déplacements sont cherchés (typiquement $[H_0^1(\Omega)]^d$).

Dans l'intégralité de la suite, nous utilisons deux comportements possibles :

- l'élasticité linéaire hétérogène (avec des variations rapides des propriétés matériaux) :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{K}\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}); \quad (2.3)$$

- l'élasto-plasticité avec ou sans adoucissement :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{G}(\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}), \mathbf{X}). \quad (2.4)$$

Pour simplifier les notations, le principe de couplage est explicité dans le cas d'un couplage entre un tenseur de Hooke hétérogène local et un autre homogénéisé global.

2.2.2 Résolution couplée classique

Il est possible de considérer que les phénomènes intéressants décrits dans le problème précédent (voir Figure 2.6) peuvent être localisés dans l'espace. Ainsi, une approche naturelle pour réduire les efforts d'implémentation consiste à sous-structurer intelligemment le domaine afin

de restreindre l'utilisation de modèles complexes dans une sous-partie de Ω et de prendre en compte un modèle plus simple, aussi bien au niveau des propriétés matériaux qu'en taille de maillage, dans la partie complémentaire.

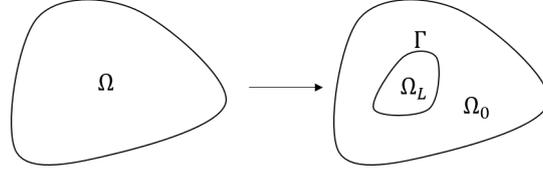


FIGURE 2.7 – Décomposition de la géométrie en une zone locale et une zone globale.

Le domaine initial Ω est donc naturellement séparé en deux parties sans recouvrement (voir Figure 2.7) :

- une zone locale $\Omega_L \in \Omega$, qui englobe le support du phénomène d'intérêt à analyser. Dans cette zone Ω_L , un modèle basé sur la loi de comportement initiale complexe est conservé. Bien qu'une définition plus large du couplage puisse impliquer une redéfinition du domaine Ω [53], ici, le domaine local est strictement inclus dans Ω ;
- la zone complémentaire $\Omega_0 = \Omega/\Omega_L$ dans laquelle un modèle plus grossier est pris en compte. Il est défini en remplaçant le comportement initial par un comportement linéaire élastique homogène, avec une loi de Hooke $\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{K}_0 \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})$.

Remarque 4 Nous considérons, dans ce chapitre, que la position de la zone locale Ω_L est connue à priori à partir des phénomènes d'intérêt. Si toutefois ces phénomènes ne sont pas au préalable connus, il est possible d'utiliser un modèle grossier sur tout le domaine Ω et d'analyser les zones critiques (par l'utilisation d'estimateurs d'erreur) afin de déterminer la position initiale du patch Ω_L [52, 129].

L'interface entre les deux domaines Ω_0 et Ω_L est notée Γ . Le problème de couplage revient donc à déterminer un champ de déplacement global \mathbf{u}_G sur Ω_0 , un champ de déplacement local \mathbf{u}_L sur Ω_L et un champ de multiplicateurs de Lagrange $\boldsymbol{\lambda} \in M$ (représentant les efforts de réaction sur Γ), vérifiant :

- un problème global sur Ω_0 :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_G &\in \mathcal{V}_0, \text{ restriction de } \mathcal{V} \text{ sur } \Omega_0, \\ \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\sigma}_G : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}_G) &= \int_{\Omega_0} \mathbf{f}_d \cdot \mathbf{v}_G + \int_{\partial_F \Omega} \mathbf{F}_d \cdot \mathbf{v}_G - \int_{\Gamma} \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{v}_G \quad \forall \mathbf{v}_G \in \mathcal{V}_0, \\ \boldsymbol{\sigma}_G &= \mathcal{K}_0 \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_G); \end{aligned} \quad (2.5)$$

- un problème local sur Ω_L :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_L &\in \mathcal{V}_L, \text{ restriction de } \mathcal{V} \text{ sur } \Omega_L, \\ \int_{\Omega_L} \boldsymbol{\sigma}_L : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}_L) &= \int_{\Omega_L} \mathbf{f}_d \cdot \mathbf{v}_L + \int_{\Gamma} \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{v}_L \quad \forall \mathbf{v}_L \in \mathcal{V}_L, \\ \boldsymbol{\sigma}_L &= \mathcal{K} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_L); \end{aligned} \quad (2.6)$$

- une condition de continuité sur Γ :

$$\mathbf{u}_L|_{\Gamma} = \mathbf{u}_G|_{\Gamma} \quad (\text{ou } \int_{\Gamma} (\mathbf{u}_L - \mathbf{u}_G) \cdot \boldsymbol{\mu} = 0 \quad \forall \boldsymbol{\mu} \in \mathcal{M}). \quad (2.7)$$

Cette formulation assure ainsi la concordance entre les déplacements et les efforts globaux et locaux au niveau de l'interface Γ .

En considérant une méthode de discrétisation, par exemple EF ou IG, la formulation algébrique du problème devient donc :

$$\begin{bmatrix} \mathbb{K}_0 & 0 & \mathbb{C}_G^T \\ 0 & \mathbb{K}_L & -\mathbb{C}_L^T \\ \mathbb{C}_G & -\mathbb{C}_L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_G \\ \mathbf{U}_L \\ \boldsymbol{\Lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_0 \\ \mathbf{F}_L \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

où \mathbf{U}_G , \mathbf{U}_L , et $\boldsymbol{\Lambda}$ sont, respectivement, des vecteurs de valeurs nodales des champs discrétisés \mathbf{u}_G^H (défini sur le maillage τ^H), \mathbf{u}_L^h (défini sur le maillage τ^h), et $\boldsymbol{\lambda}^h$. \mathbb{K}_0 et \mathbb{K}_L sont, respectivement, les matrices de rigidité dans Ω_0 et Ω_L . \mathbb{C}_G et \mathbb{C}_L sont les opérateurs Mortar de couplage.

Remarque 5 *Il faut noter qu'une attention particulière doit être portée sur le choix de l'espace des multiplicateurs de Lagrange \mathcal{M} . En effet, si le choix de cet espace n'est pas adapté, les opérateurs de Mortar peuvent conduire à des oscillations indésirables du champ de déplacement. Un choix pertinent (voir [53]), que nous suivrons dans cette thèse, est d'utiliser l'espace de définition des fonctions de forme du domaine local sur l'interface pour les multiplicateurs de Lagrange. Ce choix permet de rendre la matrice \mathbb{C}_L carrée inversible et donc de ne pas avoir besoin d'utiliser une méthode des moindres carrés pour faire la projection des champs à l'interface. D'autres choix d'espaces d'évaluation des efforts d'interface sont proposés dans la littérature [47].*

En pratique et conformément aux méthodes utilisées en décomposition de domaine et calculs parallèles, le problème couplé ((2.5)-(2.6)-(2.7)) n'est pas résolu de façon monolithique mais plutôt en utilisant un solveur itératif Dirichlet-Neumann. Pour ce faire, un algorithme local-global itératif non-symétrique est introduit avec un transfert alterné de données à l'interface. Après avoir initialisé $\boldsymbol{\lambda}^{(0)} = \mathbf{0}$ (réaction d'interface nulle), le problème continu à l'itération n revient à trouver l'ensemble $(\mathbf{u}_G^{(n)}, \mathbf{u}_L^{(n)}, \boldsymbol{\lambda}^{(n)}) \in \mathcal{V}_0 \times \mathcal{V}_L \times \mathcal{M}$ qui vérifie :

- un problème global sur Ω_0 , avec des conditions aux limites de Neumann données sur Γ , qui donne $\mathbf{u}_G^{(n)}$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\sigma}_G^{(n)} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}_G) &= \int_{\Omega_0} \mathbf{f}_d \cdot \mathbf{v}_G + \int_{\partial_F \Omega} \mathbf{F}_d \cdot \mathbf{v}_G - \int_{\Gamma} \boldsymbol{\lambda}^{(n-1)} \cdot \mathbf{v}_G \quad \forall \mathbf{v}_G \in \mathcal{V}_0, \\ \boldsymbol{\sigma}_G^{(n)} &= \mathcal{K}_0 \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_G^{(n)}); \end{aligned} \quad (2.9)$$

- un problème local sur Ω_L , avec des conditions aux limites de Dirichlet données sur Γ , pour déterminer $(\mathbf{u}_L^{(n)}, \boldsymbol{\lambda}^{(n)})$:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_L^{(n)}|_{\Gamma} &= \mathbf{u}_G^{(n)}|_{\Gamma}, \\ \int_{\Omega_L} \boldsymbol{\sigma}_L^{(n)} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}_L) - \int_{\Gamma} \boldsymbol{\lambda}^{(n)} \cdot \mathbf{v}_L &= \int_{\Omega_L} \mathbf{f}_d \cdot \mathbf{v}_L \quad \forall \mathbf{v}_L \in \mathcal{V}_L, \\ \boldsymbol{\sigma}_L^{(n)} &= \mathcal{K} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_L^{(n)}). \end{aligned} \quad (2.10)$$

La formulation algébrique équivalente s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_0 \mathbf{U}_G^{(n)} &= \mathbf{F}_0 - \mathbb{C}_G^T \boldsymbol{\Lambda}^{(n-1)}, \\ \begin{bmatrix} \mathbb{K}_L & -\mathbb{C}_L^T \\ -\mathbb{C}_L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_L^{(n)} \\ \boldsymbol{\Lambda}^{(n)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{F}_L \\ -\mathbb{C}_G^T \mathbf{U}_G^{(n)} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Dans la suite, nous considérons que les maillages τ^H et τ^h sont géométriquement conformes, compatibles ou non, à l'interface Γ .

2.2.3 Résolution couplée non-intrusive

L'inconvénient de la méthode décrite dans la partie 2.2.2 précédente est que la matrice de rigidité \mathbb{K}_0 , dépendant de la définition géométrique de Ω_0 , doit être recalculée pour chaque configuration de la zone locale Ω_L . Cela nécessite la construction d'un maillage global cohérent avec la géométrie potentiellement complexe de Ω_0 . Par ailleurs, le remaillage et la nouvelle factorisation de \mathbb{K}_0 sont nécessaires chaque fois que la localisation ou la forme de la zone locale Ω_L est modifiée. Cela peut s'avérer très coûteux en temps de calcul surtout pour des grands domaines avec de nombreux degrés de libertés. Pour outrepasser cette difficulté, et conserver l'efficacité numérique, l'idée principale du couplage non-intrusif est de modifier le problème global en définissant le support de sa solution \mathbf{u}_G sur l'intégralité du domaine Ω . Le problème local (2.10) reste quant à lui inchangé.

Dans le but de déterminer le nouveau problème global, le comportement homogène est virtuellement étendu sur Ω_L . En utilisant l'additivité des problèmes sur $\Omega_0 \cup \Omega_L$, le problème global initial se ré-écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_G &\in \mathcal{V}, \\ \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_G : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}_G) &= \int_{\Omega_0} \mathbf{f}_d \cdot \mathbf{v}_G + \int_{\partial_F \Omega} \mathbf{F}_d \cdot \mathbf{v}_G - \int_{\Gamma} \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{v}_G + \int_{\Omega_L} \boldsymbol{\sigma}_G : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}_G) \quad \forall \mathbf{v}_G \in \mathcal{V} \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{f}_d \cdot \mathbf{v}_G + \int_{\partial_F \Omega} \mathbf{F}_d \cdot \mathbf{v}_G + \int_{\Gamma} [\boldsymbol{\sigma}_{G|\Omega_L} \mathbf{n}_{\Omega_L} - \boldsymbol{\lambda}] \cdot \mathbf{v}_G \quad \forall \mathbf{v}_G \in \mathcal{V} \end{aligned} \quad (2.12)$$

en utilisant l'équilibre sur Ω_L ,

$$\boldsymbol{\sigma}_G = \mathcal{K}_0 \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_G).$$

Le déplacement global \mathbf{u}_G , bien que décrit sur tout le domaine Ω , est généralement incorrect sur Ω_L et non pertinent pour étudier les phénomènes d'intérêt de la bonne manière. En utilisant le nouvel espace de discrétisation \mathcal{V}^H , obtenu à partir d'un maillage grossier τ^H défini sur tout le domaine Ω , la méthode de couplage non-intrusive entraîne les changements suivants sur la formulation du problème global :

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_0 \mathbf{U}_G &= \mathbf{F}_0 - \mathbf{C}_G^T \boldsymbol{\Lambda} \\ \implies \mathbb{K}_{0\Omega} \mathbf{U}_G &= \mathbf{F}_0 - \mathbf{C}_G^T \boldsymbol{\Lambda} + \mathbb{K}_{0L} \mathbf{U}_G = \mathbf{F}_{0\Omega} - \mathbf{C}_G^T \boldsymbol{\Lambda} + \mathbf{R}_{LG}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

avec $\mathbb{K}_{0\Omega}$ (resp. \mathbb{K}_{0L}) la matrice de rigidité dans le domaine global Ω (resp. dans le sous-domaine Ω_L) utilisant un opérateur linéaire homogène \mathcal{K}_0 , tandis que $\mathbf{R}_{LG} = \mathbb{K}_{0L} \mathbf{U}_G - \mathbf{F}_{0L}$ est le résidu discrétisé des efforts de réaction sur Γ venant du modèle global, calculé en pratique à l'aide d'une intégrale volumique.

En utilisant, une fois encore, un schéma de résolution de type Dirichlet-Neumann (méthode de point fixe), la méthode de couplage local-global consiste à déterminer, à chaque itération n de l'algorithme et après avoir initialisé $\mathbf{u}_G^{(0)} = \mathbf{0}$ et $\boldsymbol{\lambda}^{(0)} = \mathbf{0}$, l'ensemble $(\mathbf{u}_G^{(n)}, \mathbf{u}_L^{(n)}, \boldsymbol{\lambda}^{(n)}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}_L \times \mathcal{M}$ vérifiant :

— un problème global sur Ω en connaissant les efforts de réactions internes sur Γ , qui donne $\mathbf{u}_G^{(n)}$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_G^{(n)} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}_G) &= \int_{\Omega_0} \mathbf{f}_d \cdot \mathbf{v}_G + \int_{\partial_F \Omega} \mathbf{F}_d \cdot \mathbf{v}_G - \int_{\Gamma} \boldsymbol{\lambda}^{(n-1)} \cdot \mathbf{v}_G + \int_{\Omega_L} \boldsymbol{\sigma}_G^{(n-1)} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}_G) \quad \forall \mathbf{v}_G \in \mathcal{V} \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{f}_d \cdot \mathbf{v}_G + \int_{\partial_F \Omega} \mathbf{F}_d \cdot \mathbf{v}_G + \int_{\Gamma} [\boldsymbol{\sigma}_{G|\Omega_L}^{(n-1)} \mathbf{n}_{\Omega_L} - \boldsymbol{\lambda}^{(n-1)}] \cdot \mathbf{v}_G \quad \forall \mathbf{v}_G \in \mathcal{V}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_G^{(n)} = \mathcal{K}_0 \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_G^{(n)});$$

— le problème local (2.10).

La formulation algébrique correspondante est la suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_{0\Omega} \mathbf{U}_G^{(n)} &= \mathbf{F}_0 - \mathbb{C}_G^T \boldsymbol{\Lambda}^{(n-1)} + \mathbb{K}_{0L} \mathbf{U}_G^{(n-1)} = \mathbf{F}_{0\Omega} - \mathbb{C}_G^T \boldsymbol{\Lambda}^{(n-1)} + \mathbf{R}_{LG}^{(n-1)}, \\ \begin{bmatrix} \mathbb{K}_L & -\mathbb{C}_L^T \\ -\mathbb{C}_L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_L^{(n)} \\ \boldsymbol{\Lambda}^{(n)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{F}_L \\ -\mathbb{C}_G^T \mathbf{U}_G^{(n)} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Remarque 6 *En pratique, pour réduire le degré d'intrusivité, la résolution du problème local du couplage non-intrusif est plutôt écrite sous la forme : résoudre $\mathbb{K}_L \mathbf{U}_L^{(n)} = \mathbf{F}_L$ sous la condition $\mathbf{U}_L^{(n)} = \mathbb{C}_L^{-1} \mathbb{C}_G \mathbf{U}_G^{(n)}$ ce qui fait apparaître l'opérateur de projection $\mathcal{P} = \mathbb{C}_L^{-1} \mathbb{C}_G$ introduit dans [53].*

Notons que la matrice de rigidité globale $\mathbb{K}_{0\Omega}$ ainsi que le vecteur force global $\mathbf{F}_{0\Omega}$ sont fixés indépendamment des paramètres de la zone locale (position et forme de Ω_L , taille de maille sur τ^h). Ces opérateurs sont calculés au préalable en considérant un comportement homogène sur l'intégralité de la structure, c'est-à-dire sans analyse de phénomènes locaux complexes et en utilisant un maillage grossier. La matrice de rigidité globale est ainsi assemblée et factorisée une seule fois et le problème global reste bien conditionné quel que soit le couplage envisagé. Cela permet notamment d'envisager cet algorithme pour l'optimisation [23].

La technique de couplage non-intrusive consiste essentiellement en une alternance entre une résolution sur Ω_L qui permet de déterminer la réaction $\boldsymbol{\Lambda}$ à l'interface de couplage et une correction globale sur Ω qui inclut des efforts internes de correction (c'est-à-dire en terme de résidu d'équilibre, l'image du décalage des efforts de réaction) afin de réduire le déséquilibre entre modèles concurrents. Ainsi deux codes différents peuvent être utilisés pour résoudre les calculs global et local.

Le schéma de la Figure 2.8a résume le principe du couplage avec transfert d'information aux interfaces. L'algorithme de Newton associé à ce couplage est schématisé sur la Figure 2.8b.

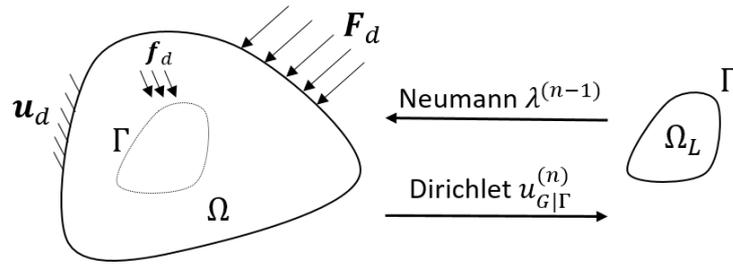
Il est possible de montrer que sous certaines conditions (i.e. un problème multi-échelles elliptique ou un modèle local moins rigide que le modèle global, ce qui est généralement le cas dans les applications pratiques), la solution du système ((2.12)-(2.10)) converge vers la solution du problème de couplage initial ((2.5)-(2.6)-(2.7)). Une revue de ces différents aspects se trouve dans [38, 53, 63] et est basée sur une reformulation globale de la stratégie de couplage local-global non-intrusive vue comme un algorithme de type quasi-Newton sur l'équilibre des efforts de réaction.

Remarque 7 *Un cas limite de l'utilisation d'un couplage local-global est l'analyse des détails géométriques tels que les perçages ou trous dans les structures. Dans ce cas particulier, en définissant Ω_L à partir de la géométrie du trou, le modèle local correspond à du vide avec des limites libres sur Γ , et seulement le problème global doit être résolu. Après avoir prolongé virtuellement et en continu le comportement du matériau et le champ de solution sur Ω_L , et en débutant avec n'importe quelle estimation initiale de $\mathbf{u}_G^{(0)} \in \mathcal{V}$, le schéma itératif de la solution du couplage non-intrusif créé à partir d'un problème de type Neumann s'écrit :*

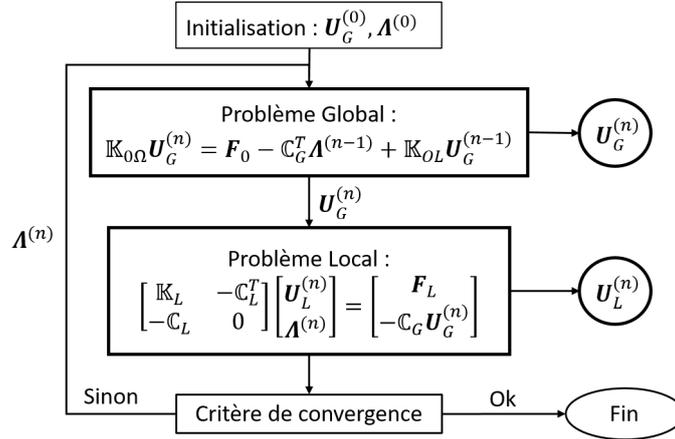
$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_G^{(n)} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}_G) &= \int_{\Omega_0} \mathbf{f}_d \cdot \mathbf{v}_G + \int_{\partial_{F\Omega}} \mathbf{F}_d \cdot \mathbf{v}_G + \int_{\Omega_L} \boldsymbol{\sigma}_G^{(n-1)} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}_G) \quad \forall \mathbf{v}_G \in \mathcal{V}, \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{f}_d \cdot \mathbf{v}_G + \int_{\partial_{F\Omega}} \mathbf{F}_d \cdot \mathbf{v}_G + \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma}_{G|\Omega_L}^{(n-1)} \mathbf{n}_{\Omega_L} \cdot \mathbf{v}_G \quad \forall \mathbf{v}_G \in \mathcal{V}, \\ \boldsymbol{\sigma}_G^{(n)} &= \mathcal{K}_0 \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_G^{(n)}), \end{aligned} \quad (2.16)$$

ou sous forme algébrique :

$$\mathbb{K}_{0\Omega} \mathbf{U}_G^{(n)} = \mathbf{F}_0 + \mathbb{K}_{0L} \mathbf{U}_G^{(n-1)}. \quad (2.17)$$



(a) Principe du couplage non-intrusif.



(b) Algorithme de couplage non-intrusif.

FIGURE 2.8 – Résumé du principe et de l’algorithme de couplage non-intrusif.

La matrice de rigidité $\mathbb{K}_{0\Omega}$ est construite à partir de la structure dans laquelle le trou a été supprimé [24].

Bilan : Parmi toutes les méthodes multi-échelles existantes et présentées dans ce chapitre, une attention particulière est portée sur la méthode de couplage global-local non-intrusive. En effet, cette méthode permet de séparer un modèle complexe en un modèle global grossier simple et un modèle local fin représentant la complexité. Son caractère non-intrusif repose sur le fait que cette séparation est totale, c’est-à-dire que les deux modèles sont indépendants, seuls des informations transitent à l’interface. Nous avons fait le choix de ce type de couplage pour cette raison, nous pouvons ainsi résoudre un problème dont les informations proviennent de deux codes, ou deux méthodes de résolution différentes, comme développé dans le cas d’un couplage AIG-MEF dans le chapitre 6. Le concept non-intrusif est aussi considéré au sens large dans cette thèse, c’est-à-dire pour toute technique qui permet d’implémenter d’une méthode numérique particulière en prenant comme contrainte d’utiliser un code industriel sans en modifier les routines de base. En ce sens, les chapitres 4 et 5 proposent également une implémentation non-intrusive de l’AIG dans un code industriel.