

# Approche temporelle

## Sommaire

---

<b>5.1 Temps de corrélation du signal rétrodiffusé</b> . . . . .	<b>93</b>
5.1.1 Expression de l'autocorrélation spatio-temporelle du signal rétrodiffusé . .	93
5.1.2 Temps de corrélation du signal rétrodiffusé . . . . .	95
<b>5.2 Étude de la phase du signal rétrodiffusé</b> . . . . .	<b>98</b>
5.2.1 Détermination du décalage Doppler des vagues . . . . .	98
5.2.1.1 Expression de la dérivée temporelle de la phase du signal rétrodiffusé	99
5.2.1.2 Détermination de la distribution de la dérivée temporelle de la phase du signal rétrodiffusé . . . . .	99
5.2.2 Application au spectre de mer d'Elfouhaily et implémentation numérique .	104
5.2.2.1 Implémentation numérique . . . . .	104
5.2.2.2 Exemples de distributions du décalage Doppler des vagues . . . . .	105
<b>5.3 Application à la synthèse SAR non focalisée</b> . . . . .	<b>107</b>
5.3.1 Critères d'application de la synthèse SAR non focalisée . . . . .	107
5.3.2 Application à la synthèse SAR non focalisée de SWOT . . . . .	110
<b>5.A Annexe - Implémentation numérique des fonctions de corrélation</b> . . . . .	<b>112</b>

---

### Résumé du chapitre :

Le temps de corrélation du signal rétrodiffusé est évalué à partir des fonctions d'autocorrélations normalisées calculées avec les modèles PO et GO. Il est identique pour les deux modèles choisis ce qui permet d'en déduire une expression analytique simple avec le modèle de l'Optique Géométrique. Pour des incidences proches du Nadir, le temps de corrélation dépend des paramètres électromagnétiques du radar, de l'angle d'incidence ainsi que de l'écart-type des vitesses verticales de la surface. Ce dernier paramètre est alors modélisé empiriquement à partir de la hauteur significative des vagues afin de rendre son utilisation plus générale.

Une étude de la phase du signal rétrodiffusé est présentée et la distribution de la dérivée temporelle de la phase de diffusion est exprimée permettant ainsi d'estimer la distribution du décalage Doppler des vagues. L'évolution de cette distribution est étudiée en fonction des angles de visées ainsi que de l'état de mer étudié. Pour des angles d'incidences proche Nadir, la dépendance à l'azimut de tir peut être négligée alors que l'on observe une forte évolution à l'incidence de tir et à l'état de mer. Une approximation de l'évolution temporelle de la phase de diffusion est proposée.

Une méthode d'estimation du nombre d'impulsions successives à moyenner pour le processus de synthèse SAR non focalisée est développée et appliquée au mode LR de SWOT. Les résultats confirment les paramètres de la synthèse SAR non focalisée utilisés pour SWOT.

## 5.1 Temps de corrélation du signal rétrodiffusé

Comme nous l'avons présenté dans le chapitre 1 la mesure du signal électromagnétique rétrodiffusé sur des cibles en mouvement comme les surfaces d'eau nécessite de connaître le temps de corrélation de celui-ci afin d'évaluer les erreurs potentielles s'y raccordant. Nous étudions ici la fonction d'autocorrélation spatio-temporelle du signal rétrodiffusé et son application à une surface de mer avec le spectre d'Elfouhaily et al. [1997]. Ce spectre à l'avantage d'être assez simple d'utilisation tout en donnant une représentation de la surface d'eau réaliste. Nous nous plaçons par la suite dans la configuration de la figure 2.6.

### 5.1.1 Expression de l'autocorrélation spatio-temporelle du signal rétrodiffusé

La fonction d'autocorrélation spatio-temporelle du signal rétrodiffusé est donnée par la définition générale :

$$C_{PO}(t) = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{4\pi}{A} (\langle \mathbb{S}(t)\mathbb{S}^*(0) \rangle - |\langle \mathbb{S}(0) \rangle|^2) \quad (5.1)$$

où  $\mathbb{S}$  est le signal rétrodiffusé complexe dans l'approximation de Kirchhoff (2.33) :

$$\mathbb{S}(t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{\mathbb{K}}{Q_z} \int_A e^{i\mathbf{Q}_H \cdot \mathbf{r}} e^{iQ_z \eta(\mathbf{r}, t)} d\mathbf{r} \quad (5.2)$$

Les dépendances angulaires en incidence ( $\theta$ ) et azimuth ( $\phi$ ) sont implicites dans cette expression. Pour  $t = 0$  nous retrouvons l'expression de la SERN :

$$C_{PO}(0) = \sigma_{PO}^0 \quad (5.3)$$

L'indice  $PO$  est ici utilisé pour préciser que la SERN est calculée avec l'approximation de Kirchhoff (Optique Physique), où la SERN est donnée par la formule (2.41). L'expression de la fonction d'autocorrélation spatio-temporelle du signal rétrodiffusé est donnée par :

$$C_{PO}(\theta, \phi, t) = \frac{1}{\pi} \frac{|\mathbb{K}|^2}{Q_z^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\mathbf{Q}_H \cdot \mathbf{r}} \left( e^{-Q_z^2[\rho(\mathbf{0}, 0) - \rho(\mathbf{r}, t)]} - e^{-Q_z^2 \rho(\mathbf{0}, 0)} \right) d\mathbf{r} \quad (5.4)$$

où  $\rho(\mathbf{r}, t)$  est la fonction d'autocorrélation spatio-temporelle de la surface.

Le spectre des hauteurs d'eau et la fonction d'autocorrélation sont reliés par une transformée de Fourier. Nous faisons l'hypothèse que les vagues se propagent dans un demi-espace par rapport au radar (les vagues se rapprochent ou s'éloignent du radar). Connaissant un spectre de mer  $\Psi(\mathbf{k})$  et la relation de dispersion  $\omega_k$  des vagues de capillarité-gravité, la fonction d'autocorrélation spatio-temporelle s'exprime (en reprenant la formulation donnée dans Nouguier et al. [2011a], formule (III.6)) :

$$\rho_{\phi_\nu}(\mathbf{r}, t) = \int_{\mathbb{R}^2} \Psi_{\phi_\nu}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + S_k \omega_k t)} d\mathbf{k} \quad (5.5)$$

où  $S_k = \text{sgn}(\widehat{\mathbf{k}} \cdot \widehat{\mathbf{K}}_0)$  est le signe du produit scalaire entre la direction de propagation des vagues et du vecteur nombre d'onde électromagnétique.

En appliquant l'expression (5.5) au spectre d'Elfouhaily et al. [1997] (2.19), nous obtenons l'expression de la corrélation spatio-temporelle de la surface d'eau dans le repère polaire associé :

$$\rho_{\phi_\nu}(r, \phi_r, t) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\Psi_0(k)}{2\pi k} [1 + \Delta(k) \cos(2(\phi_k - \phi_\nu))] e^{ikr \cos(\phi_k - \phi_r) + S_k \omega_k t} dk k d\phi_k \quad (5.6)$$

Cette expression se simplifie en utilisant les fonctions de Bessel de première espèce  $J_n$  :

$$\rho_{\phi_\nu}(r, \phi_r, t) = \rho_0(r, t) + \rho_2(r, t) \cos(2(\phi_r - \phi_\nu)) \quad (5.7)$$

$$\text{avec : } \begin{cases} \rho_0(r, t) = \int_0^{\infty} \Psi_0(k) J_0(kr) e^{iS_k \omega_k t} dk \\ \rho_2(r, t) = - \int_0^{\infty} \Psi_0(k) \Delta(k) J_2(kr) e^{iS_k \omega_k t} dk \end{cases}$$

La fonction de corrélation spatio-temporelle du signal rétrodiffusé peut se calculer numériquement, mais nécessite de calculer deux intégrales successives. Il est donc intéressant de faire un développement asymptotique de l'expression (5.4) similaire au développement du modèle de l'Optique Géométrique (2.47). L'expression de la fonction d'autocorrélation spatio-temporelle du signal rétrodiffusé devient alors dans l'approximation de l'Optique Géométrique :

$$C_{GO}(\theta, \phi, t) = \frac{|\mathcal{R}|^2 e^{-2K_0^2 \sigma_{\eta'}^2 t^2 \cos^2(\theta)}}{2 \sqrt{mss_x mss_y} \cos^4(\theta)} e^{-\frac{\tan^2(\theta)}{2} \left( \frac{\cos^2(\phi)}{mss_x} + \frac{\sin^2(\phi)}{mss_y} \right)} \quad (5.8)$$

où l'on retrouve les paramètres classiques de l'expression de la SERN dans l'approximation de l'Optique Géométrique (2.47) et  $\sigma_{\eta'}^2$  est la variance de la dérivée temporelle de la hauteur d'eau (autrement dit la variance de la vitesse verticale des vagues) :

$$\sigma_{\eta'}^2 = -\partial_{tt} \rho(\mathbf{0}, 0) = \int_0^{\infty} \omega_k^2 \Psi_0(k) dk \quad (5.9)$$

Un résumé de ces variances calculées avec le spectre d'Elfouhaily et al. [1997] est reporté dans le tableau 5.1 pour différentes valeurs de vent à 10 m.

$u_{10}$ [m.s <sup>-1</sup> ]	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\sigma_{\eta'}^2$ [m <sup>2</sup> .s <sup>-2</sup> ]	0,143	0,207	0,284	0,375	0,479	0,594	0,721	0,859	1,01	1,17	1,34

TABLEAU 5.1 – Valeurs des variances  $\sigma_{\eta'}^2$  calculées avec un spectre d'Elfouhaily et al. [1997] pour différentes valeurs de vent à 10 m.

L'expression (5.8) s'exprime simplement à partir de la SERN dans l'approximation de l'Optique géométrique  $\sigma_{GO}^0$  (2.47) :

$$C_{GO}(\theta, \phi, t) = \sigma_{GO}^0(\theta, \phi) e^{-2K_0^2 \sigma_{\eta'}^2 t^2 \cos^2(\theta)} \quad (5.10)$$

Nous avons tracé un exemple de ces fonctions d'autocorrélations spatio-temporelle de la surface sur la figure 5.1 en fonction de l'incidence de tir  $\theta$  et du temps  $t$ . Elles sont calculées avec le modèle PO (5.4) (à droite) et le modèle GO (5.11) (à gauche) avec un spectre d'Elfouhaily et al. [1997] pour un vent à 10 m de 5 m.s<sup>-1</sup> et un azimut  $\phi = 0^\circ$ . Il apparaît une différence sur la valeur absolue des fonctions d'autocorrélations calculées avec les deux modèles de rétrodiffusion, le modèle GO sous-estime la valeur absolue de cette fonction d'autocorrélation et l'on retrouve le résultat classique de la SERN au point  $(\theta, t) = (0, 0)$ . Néanmoins, la forme de la fonction d'autocorrélation est similaire entre les deux modèles.

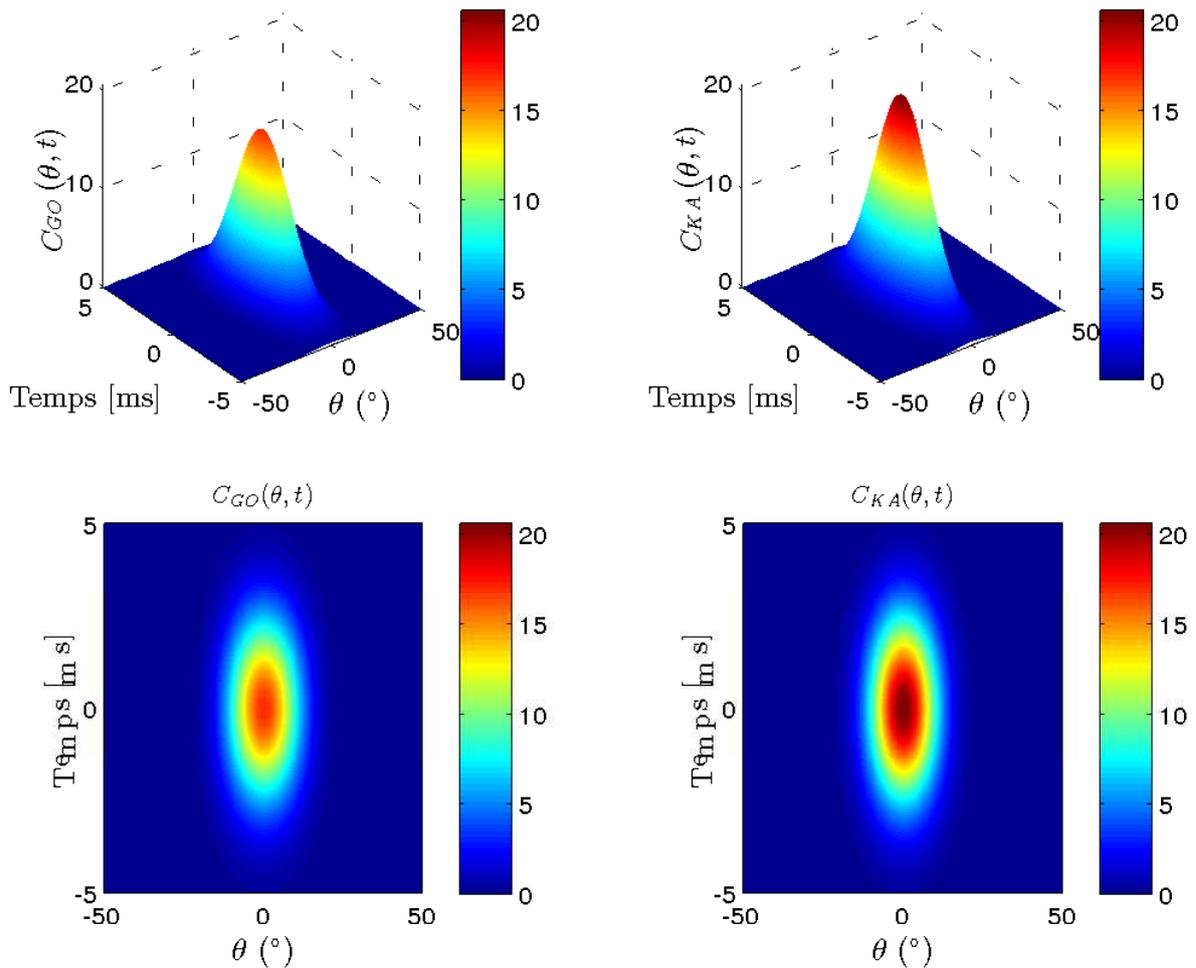


FIGURE 5.1 – Comparaison des fonctions d'autocorrélations spatio-temporelles calculées avec le modèle PO (5.4) (à droite) et le modèle GO (5.10) (à gauche) pour un spectre d'Elfouhaily et al. [1997], un vent à 10 m de  $5 \text{ m.s}^{-1}$ , un azimut de tir  $\phi = 0^\circ$  en fonction de l'incidence de tir  $\theta$  et du temps  $t$ .

### 5.1.2 Temps de corrélation du signal rétrodiffusé

Le temps de corrélation  $\tau_c$  du signal rétrodiffusé est défini par :

$$C(\tau_c) = \frac{1}{e} \times C(0) \quad (5.11)$$

où la valeur  $1/e$  est le seuil de décorrélation du signal. Ce seuil peut également être pris à 0,5 (voir figure 5.2).

Dans le cadre de la fonction d'autocorrélation spatio-temporelle calculée avec le modèle PO (5.4), le temps de corrélation  $\tau_c$  doit-être évalué numériquement en cherchant, par dichotomie par exemple, le temps  $\tau_c$  satisfaisant l'équation 5.11. Le calcul du temps de corrélation s'effectue à partir de la fonction d'autocorrélation spatio-temporelle normalisée par sa valeur initiale. Il apparaît alors que la fonction d'autocorrélation spatio-temporelle normalisée est identique qu'elle soit calculée avec le modèle PO (5.4) ou le modèle GO (5.10). Le temps de corrélation peut donc être estimé directement à partir du modèle analytique GO tout en donnant des résultats similaire au calcul avec le modèle PO (voir figure ??). La résolution de l'équation (5.11) avec l'expression (5.10) donne l'expression du temps de corrélation :

$$\tau_{GO}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2K_0} |\cos(\theta)| \sigma_{\eta'}} \quad (5.12)$$

Le temps de corrélation du signal rétrodiffusé  $\tau_{GO}$  est une expression analytique simple dépendant de la configuration électromagnétique ( $K_0$ ), de l'incidence de tir ( $\theta$ ) et de l'écart-type de la

vitesse verticale des vagues de la surface considérée ( $\sigma_{\eta'}$ ). L'information de l'azimut de tir ( $\phi$ , ou de manière équivalente la direction du vent  $\phi_v$ ) n'apparaît plus dans l'expression du temps de corrélation. Cet effet se confirme en calculant le temps de corrélation avec le modèle PO et se justifie du fait que nous sommes ici à des incidences proche Nadir. La décorrélation du signal rétrodiffusé induite par le mouvement des vagues est principalement due aux mouvements verticaux de la surface.

Le paramètre de surface  $\sigma_{\eta'}$  étant dépendant du spectre de mer utilisé, il est intéressant d'exprimer le temps de corrélation en fonction d'un paramètre de surface facilement exploitable comme la hauteur significative  $H_s$ . Soit le moment d'ordre  $n$  du spectre :

$$M_n = \int_0^{\infty} k^n \Psi_0(k) dk \quad (5.13)$$

Le  $H_s$  est défini comme :

$$H_s = 4\sqrt{M_0} = 4\sigma_{\eta} \quad (5.14)$$

où  $\sigma_{\eta}$  est l'écart-type des hauteurs d'eau de la surface. Le développement de l'expression de la variance des vitesses verticales de la surface d'eau (5.9) avec la relation de dispersion des vagues de capillarité-gravité donne :

$$\sigma_{\eta'}^2 = \int_0^{\infty} \omega_k^2 \Psi_0(k) dk = gM_1 + \gamma_0 M_3 \simeq gM_1 \quad (5.15)$$

En effet, la variance des vitesses verticales des hauteurs d'eau est dominée par les mouvements des vagues de gravités d'où l'approximation faite dans l'expression (5.15). Une relation empirique simple reliant la variance des vitesses verticales ( $\sigma_{\eta'}^2$ ) à la variance des hauteurs d'eau de la surface ( $\sigma_{\eta}^2$ ) peut-être dérivée facilement sous la forme :

$$\sigma_{\eta'}^2 = \alpha \left( \sigma_{\eta}^2 \right)^{\beta} \quad (5.16)$$

Une régression linéaire en échelle logarithmique donne comme valeurs de paramètres :

$$\begin{cases} \alpha \simeq 0,9141 \simeq 1 \\ \beta \simeq 0,50804 \simeq 1/2 \end{cases} \quad (5.17)$$

Une expression simple relie alors la variance des vitesses verticales des hauteurs d'eau à la variance des hauteurs d'eau :

$$\sigma_{\eta'}^2 \simeq \sqrt{\sigma_{\eta}^2} = \sigma_{\eta} = \frac{H_s}{4} \quad (5.18)$$

La variance des vitesses verticales des hauteurs d'eau est ainsi proportionnelle à l'écart-type des hauteurs d'eau de la surface. En terme d'unité, le paramètre  $\alpha$  est proportionnel à une accélération  $\alpha$  [ $\text{m.s}^{-2}$ ] et ce facteur est implicite dans l'expression (5.18) précédente. L'expression (5.12) du temps de corrélation du signal rétrodiffusé peut s'exprimer en première approximation :

$$\tau_{\text{GO}}(\theta) \simeq \frac{\sqrt{2}}{K_0 |\cos(\theta)| \sqrt{H_s}} \quad (5.19)$$

Cette formule est intéressante car analytique et se base sur des paramètres simples. De plus, les temps de corrélation calculés avec les modèles PO et GO sont identiques sur le domaine de validité du PO, c'est-à-dire pour les 20 premiers degrés d'incidences. Nous avons tracé sur la figure 5.2 le temps de corrélation du signal rétrodiffusé au Nadir calculé avec le modèle PO et le modèle GO exact (équation 5.12), ainsi que pour les seuils de décorrélation 1/e et 0,5. L'accord entre les deux modèles est excellent. Lorsque la vitesse du vent augmente, le temps de corrélation diminue et inversement lorsque la vitesse du vent diminue, le temps de corrélation augmente. Le temps de

corrélation augmente avec l'angle d'incidence. Le seuil de décorrélation de 0,5 donne des temps de corrélation plus faible que le seuil à  $1/e$ . Celui-ci est d'environ 0,75 ms inférieur pour des faibles rugosités de surface et d'environ 0,1 ms inférieur pour des fortes rugosités de surface par rapport au seuil de décorrélation à  $1/e$ . Par la suite, les applications sont effectuées pour un seuil de décorrélation pris à  $1/e$ .

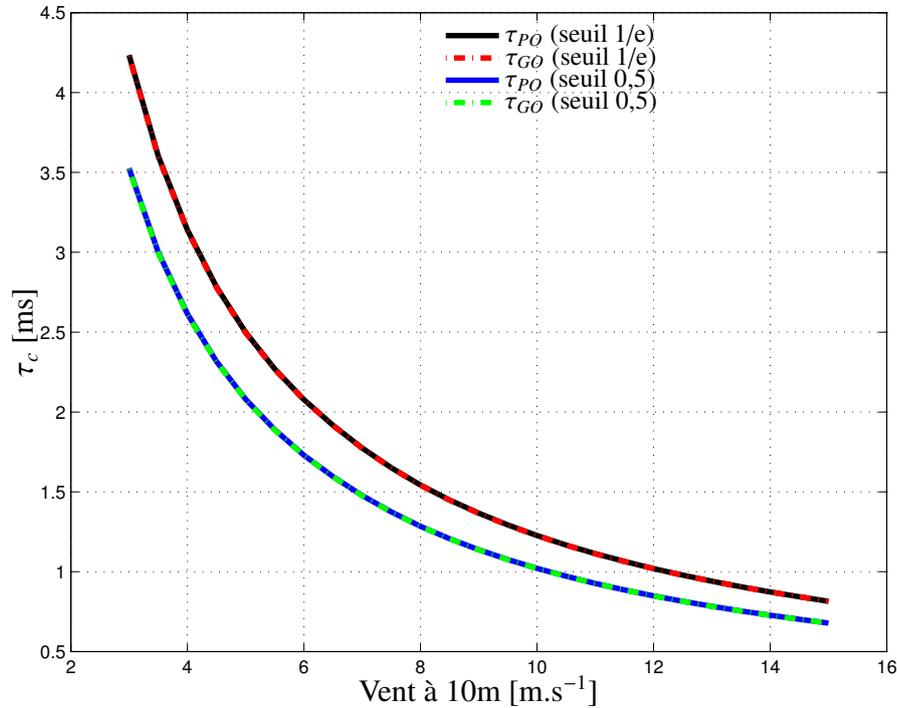


FIGURE 5.2 – Comparaison du temps de corrélation du signal rétrodiffusé  $\tau_c$  calculé avec le modèle PO (traits continus) et avec le modèle GO exact (5.12) (traits pointillés) au Nadir pour les seuils de décorrélation de  $1/e$  et 0,5.

Nous avons tracé, dans un second temps, le temps de corrélation calculé avec le modèle GO exact (équation 5.12) et avec l'approximation en fonction du  $H_s$  (équation 5.19) au Nadir en fonction du  $H_s$  sur la figure 5.3 (à gauche) et pour 4 valeurs de vent à 10 m en fonction de l'incidence  $\theta$  (à droite).

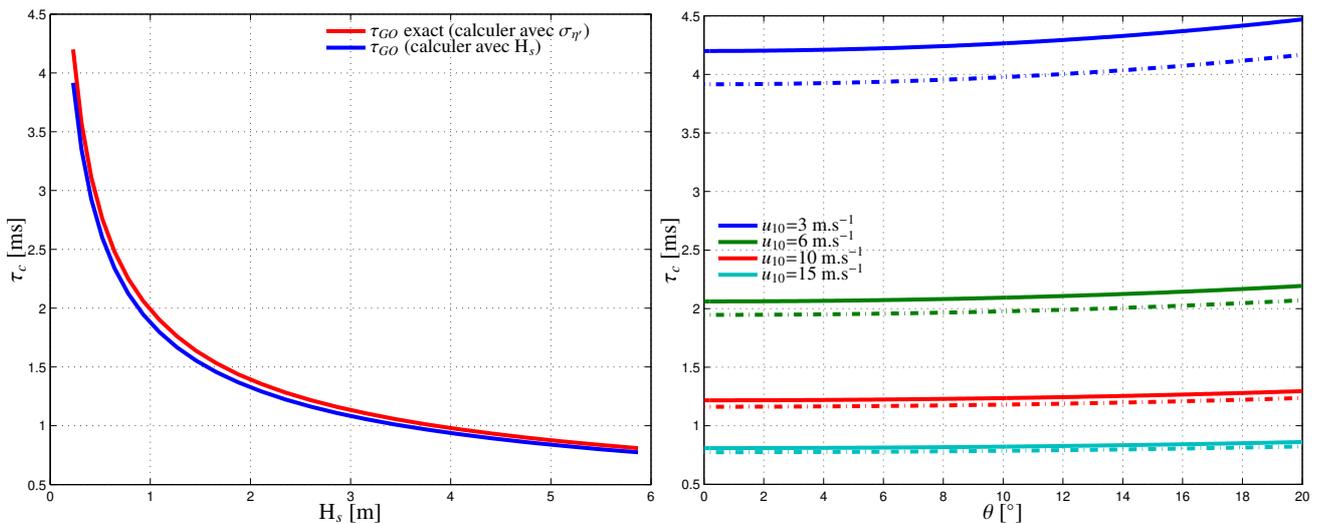


FIGURE 5.3 – Comparaison du temps de corrélation du signal rétrodiffusé  $\tau_c$  calculé avec le modèle GO exact (5.12) et le modèle GO avec  $H_s$  (5.19). À gauche,  $\tau_c$  est calculé au Nadir en fonction du  $H_s$  avec le modèle GO exact (trait rouge continu) et le modèle GO avec  $H_s$  (trait bleu continu). À droite,  $\tau_c$  est calculé en fonction de l'incidence  $\theta$  pour des vents à 10 m de 3, 6, 10 et  $15 m.s^{-1}$  avec le modèle GO exact (trait continu) et le modèle GO avec  $H_s$  (trait pointillé).

Lorsque la vitesse du vent diminue (lorsque le  $H_s$  diminue) l'expression empirique du temps de corrélation (5.19) sous-estime légèrement le calcul avec l'expression exact (5.12). Néanmoins, l'expression du temps de corrélation en fonction du  $H_s$  présente l'avantage de ne pas dépendre d'un spectre en particulier, mais uniquement d'une condition de rugosité de la surface. La formule (5.19) présente également l'avantage de pouvoir extrapoler le temps de corrélation à des surfaces peu rugueuses, pour des applications sur les surfaces d'eau continentales par exemple. Dans le cas où le  $H_s$  tend vers zéro (cas d'une surface plate, sans mouvement) le temps de corrélation est infini. Inversement, lorsque le  $H_s$  augmente, le temps de corrélation devient très petit, ce qui se justifie dans le cas d'un état de mer très agité où les grandes vagues se déplacent vite. Sur la figure 5.3 à droite, nous constatons que le temps de corrélation est minimum au Nadir. Néanmoins, l'évolution de celui-ci en fonction de l'incidence est faible, voire quasi-constante pour les 5 premiers degrés d'incidence.

Quantitativement parlant, dans un cas moyen, c'est-à-dire pour des vents à 10 m de l'ordre de  $6 \text{ m.s}^{-1}$  ou encore un  $H_s$  de l'ordre du mètre, le temps de corrélation en bande Ka est de l'ordre de 2 ms. Ce résultat est cohérent avec le temps de corrélation estimé dans l'étude de [Chapman et al. \[1994\]](#) où les auteurs ont estimé un temps de corrélation sur océan de 3 ms grâce à un diffusiomètre en bande Ka. Une autre étude menée par [Moller and Esteban-Fernandez \[2014\]](#) a montré des temps de corrélation de l'ordre de la milliseconde également. Néanmoins, [Moller and Esteban-Fernandez \[2014\]](#) ont estimé un temps de corrélation sur des eaux continentales, c'est-à-dire, des rivières et des fleuves principalement. Ils ont trouvé des temps de corrélation allant d'environ 3 ms jusqu'à 44 ms sur la rivière Ohio. Il faut préciser que ce dernier résultat a été obtenu dans des conditions où il n'y avait pas de vent, le  $H_s$  de la surface était alors quasiment nul. Ces résultats expérimentaux confirment l'expression du temps de corrélation développé ici.

## 5.2 Étude de la phase du signal rétrodiffusé

Une surface d'observation mouvante peut avoir un impact sur les différents processus liés à l'imagerie SAR comme nous l'avons vu dans le chapitre 1. La phase de diffusion est généralement représentée par l'effet de scintillement (speckle) auquel on associe une distribution de phase spatiale suivant une loi uniforme entre  $[-\pi; \pi]$ . Dans ce paragraphe, nous nous intéressons dans un premier temps à l'étude de la dérivée temporelle de la phase de diffusion afin d'en déterminer la distribution du décalage Doppler des vagues. Dans un second temps, nous présentons des applications à la configuration LR de SWOT. Nous nous plaçons par la suite dans la configuration de la figure 2.6.

### 5.2.1 Détermination du décalage Doppler des vagues

Le principe de la synthèse SAR en azimuth est basé sur la détermination du centroïde Doppler. Cette mesure dépend principalement de la vitesse du porteur dans la direction along-track. Dans le cas d'une surface fixe au cours du temps, le "zero Doppler"<sup>1</sup> se situe au centre de la fauchée, là où la direction de tir de l'onde est perpendiculaire à la direction de déplacement du satellite. Cependant, dans le cas de mesures sur des surfaces mobiles dans le temps, comme les surfaces d'eau, la vitesse de déplacement des différentes cibles au sein de la fauchée modifie la fréquence Doppler (voir paragraphe 1.2). Nous nous intéressons ici à la détermination de la distribution du décalage Doppler induit par le mouvement des vagues et présentons une approche alternative à celle menée par [Nouguier et al. \[2011a\]](#).

---

1. zero Doppler : ceci est la fréquence nulle qui caractérise le milieu du Doppler centroïd (dans le cas idéal ou il n'y a ni mouvement du porteur à part sa vitesse de déplacement ni mouvements de la cible), permettant alors de replacer en azimuth les différents pixels les uns par rapport aux autres.

### 5.2.1.1 Expression de la dérivée temporelle de la phase du signal rétrodiffusé

L'expression de la fréquence Doppler du signal s'exprime, à partir de la phase temporelle du signal  $\varphi_d(t)$  comme suit :

$$f_D(t) = -\frac{1}{2\pi} \partial_t \varphi_d(t) \quad (5.20)$$

où  $\partial_t$  représente la dérivée par rapport à la variable temporelle. L'expression de la phase de diffusion  $\varphi_d$  dans l'approximation de Kirchhoff (5.2) est :

$$\varphi_d(t) = \arctan \left[ \frac{\text{Im}(\mathbb{S}(t))}{\text{Re}(\mathbb{S}(t))} \right] \quad (5.21)$$

La dérivée temporelle de la phase de diffusion s'exprime alors :

$$\partial_t \varphi_d(t) = \frac{\text{Im}[\partial_t \mathbb{S}(t)] \text{Re}[\mathbb{S}(t)] - \text{Im}[\mathbb{S}(t)] \text{Re}[\partial_t \mathbb{S}(t)]}{\text{Im}(\mathbb{S}(t))^2 + \text{Re}(\mathbb{S}(t))^2} \quad (5.22)$$

que l'on peut réécrire :

$$\partial_t \varphi_d(t) = \frac{\text{Im}[\mathbb{S}^*(t) \partial_t \mathbb{S}(t)]}{|\mathbb{S}(t)|^2} = \text{Im} \left[ \frac{\partial_t \mathbb{S}(t)}{\mathbb{S}(t)} \right] \quad (5.23)$$

Exprimons maintenant la dérivée temporelle du signal rétrodiffusé complexe  $\partial_t \mathbb{S}$ . À partir de l'expression du signal rétrodiffusé temporel complexe (5.2), la variation de la hauteur d'eau de la surface pour une petite variation temporelle  $dt$  s'écrit :

$$\eta(\mathbf{r}, t + dt) = \eta(\mathbf{r}, t) + \partial_t \eta(\mathbf{r}, t) dt \quad (5.24)$$

En remplaçant l'expression de  $\eta$  (5.24) dans l'expression du signal rétrodiffusé (5.2) et en effectuant un développement en série entière de l'exponentielle nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathbb{S}(t + dt) &= \mathbb{S}(t) + \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{\mathbb{K}}{Q_z} i Q_z dt \int_A \partial_t \eta(\mathbf{r}, t) e^{i\mathbf{Q}_H \cdot \mathbf{r}} e^{iQ_z \eta(\mathbf{r}, t)} d\mathbf{r} + \dots \\ &\dots \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{\mathbb{K}}{Q_z} \sum_{n=2}^{\infty} \left[ \frac{i^n Q_z^n dt^n}{n!} \int_A (\partial_t \eta(\mathbf{r}, t))^n e^{i\mathbf{Q}_H \cdot \mathbf{r}} e^{iQ_z \eta(\mathbf{r}, t)} d\mathbf{r} \right] \end{aligned} \quad (5.25)$$

Par définition de la dérivée et en passant à la limite :

$$\partial_t \mathbb{S}(t) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\mathbb{S}(t + dt) - \mathbb{S}(t)}{dt} = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{\mathbb{K}}{Q_z} i Q_z \int_A \partial_t \eta(\mathbf{r}, t) e^{i\mathbf{Q}_H \cdot \mathbf{r}} e^{iQ_z \eta(\mathbf{r}, t)} d\mathbf{r} \quad (5.26)$$

L'expression de la dérivée temporelle de la phase de diffusion dans l'approximation de Kirchhoff s'écrit finalement :

$$\partial_t \varphi_d(t) = \text{Im} \left[ \frac{i Q_z \int_A \partial_t \eta(\mathbf{r}, t) e^{i\mathbf{Q}_H \cdot \mathbf{r}} e^{iQ_z \eta(\mathbf{r}, t)} d\mathbf{r}}{\int_A e^{i\mathbf{Q}_H \cdot \mathbf{r}} e^{iQ_z \eta(\mathbf{r}, t)} d\mathbf{r}} \right] \quad (5.27)$$

### 5.2.1.2 Détermination de la distribution de la dérivée temporelle de la phase du signal rétrodiffusé

Différentes études sur la détermination du Doppler des vagues ont déjà été menées. Comme référence nous citerons l'étude menée par [Valenzuela and Laing \[1970\]](#) dans laquelle les auteurs reprennent l'expression de la fonction de densité de probabilité des vitesses du fluide au premier ordre établie par [Longuet-Higgins \[1957\]](#) (équations (7) et (8) de [Valenzuela and Laing \[1970\]](#)) qui peut faire l'approximation du spectre Doppler de la surface (en unité de vitesse). Néanmoins, cette étude a été menée sur des données en bande P, L, C et X pour des incidences de 20° par rapport au Nadir et l'intérêt principal est porté sur les effets de polarisations, dont nous ne parlons pas ici car ils sont négligeables aux incidences faibles. Une étude plus récente menée par [Mouche et al.](#)

[2008] se base sur un développement de Taylor de la fonction de corrélation temporelle de la surface d'eau. Le décalage Doppler est étudié pour des incidences allant du Nadir à 60° ainsi que les effets de polarisations. Une dernière étude menée par [Nouguier et al. \[2011a,b\]](#) caractérise cette distribution en la supposant Gaussienne et en évaluant ses deux premiers moments. Un résultat intéressant de cette étude est (figures 2 et 3 de [Nouguier et al. \[2011b\]](#)) que les effets non-Gaussiens de la surface peuvent être négligés pour les 20 premiers degrés d'incidences. Nous allons ici caractériser la statistique de la dérivée temporelle de la phase dans le cas de la rétrodiffusion proche Nadir en déterminant la fonction de densité de probabilité de la dérivée de la phase de diffusion.

Reprenons l'expression de la dérivée temporelle de la phase de diffusion (5.27) :

$$\partial_t \varphi_d(t) = \text{Im} \left( \frac{N_t}{D_t} \right) \text{ où : } \begin{cases} N_t = iQ_z \int_A \partial_t \eta(\mathbf{r}, t) e^{i\mathbf{Q}_H \cdot \mathbf{r}} e^{iQ_z \eta(\mathbf{r}, t)} d\mathbf{r} \\ D_t = \int_A e^{i\mathbf{Q}_H \cdot \mathbf{r}} e^{iQ_z \eta(\mathbf{r}, t)} d\mathbf{r} \end{cases} \quad (5.28)$$

Les valeurs  $N_t$  et  $D_t$  sont définies par des intégrales de surface et d'après le théorème central limite ces variables aleatoires suivent une distribution complexe-normale :

$$N_t \sim \mathcal{CN}(\mu_{N_t}, \sigma_{N_t}^2) \quad ; \quad D_t \sim \mathcal{CN}(\mu_{D_t}, \sigma_{D_t}^2) \quad (5.29)$$

Nous allons maintenant évaluer l'espérance, la variance et la corrélation complexe de ces deux variables aléatoires :

- Calcul de l'espérance de  $N_t$  :

Nous procédons ici de la même manière que pour le calcul de l'espérance de  $\mathbb{S}$  :

$$\begin{aligned} \mu_{N_t} &= \langle N_t \rangle = iQ_z \int_{\mathcal{A}} e^{i\mathbf{Q}_H \cdot \mathbf{r}} \langle \partial_t \eta(\mathbf{r}, t) e^{iQ_z \eta(\mathbf{r}, t)} \rangle d\mathbf{r} \\ &= -Q_z^2 \int_{\mathcal{A}} \underbrace{\partial_t \rho(\mathbf{0}, 0)}_{=0} e^{i\mathbf{Q}_H \cdot \mathbf{r}} e^{-\frac{Q_z^2}{2} \rho(\mathbf{0}, 0)} d\mathbf{r} = 0 \end{aligned} \quad (5.30)$$

- Calcul de la variance de  $N_t$  :

La variance de  $N_t$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \sigma_{N_t}^2 &= \langle |N_t|^2 \rangle - |\langle N_t \rangle|^2 = \left\langle \left| iQ_z \int_A \partial_t \eta(\mathbf{r}, t) e^{i\mathbf{Q}_H \cdot \mathbf{r}} e^{iQ_z \eta(\mathbf{r}, t)} d\mathbf{r} \right|^2 \right\rangle \\ &= \int_{A \times A} e^{i(\mathbf{Q}_H \cdot \mathbf{r} - \mathbf{Q}_H \cdot \mathbf{r}')} \left\langle iQ_z (-iQ_z') \partial_t \eta(\mathbf{r}, t) \partial_t \eta(\mathbf{r}', t) e^{i(Q_z \eta(\mathbf{r}, t) - Q_z' \eta(\mathbf{r}', t))} \right\rangle d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \end{aligned} \quad (5.31)$$

En utilisant les propriétés des variables aléatoires gaussiennes,

$$\begin{aligned} \langle X_2 e^{i\alpha X_1} \rangle &= -i \langle \partial_\beta e^{i(\alpha X_1 + \beta X_2)} \rangle |_{\beta=0} = -i \partial_\beta e^{-\frac{1}{2} \langle (\alpha X_1 + \beta X_2)^2 \rangle} |_{\beta=0} \\ \langle X_3 X_4 e^{i(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2)} \rangle &= -\partial_{\alpha_3} \partial_{\alpha_4} \langle e^{i(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 + \alpha_4 X_4)} \rangle |_{\alpha_3=\alpha_4=0} \end{aligned}$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned} \left\langle \partial_t \eta(\mathbf{r}, t) \partial_t \eta(\mathbf{r}', t) e^{i(Q_z \eta(\mathbf{r}, t) - Q_z' \eta(\mathbf{r}', t))} \right\rangle &= -\partial_\alpha \partial_\beta \left\langle e^{i(Q_z \eta(\mathbf{r}, t) - Q_z' \eta(\mathbf{r}', t) + \alpha \partial_t \eta(\mathbf{r}, t) + \beta \partial_t \eta(\mathbf{r}', t))} \right\rangle |_{\alpha=\beta=0} \\ &= -\partial_\alpha \partial_\beta e^{-\frac{1}{2} \langle (Q_z \eta(\mathbf{r}, t) - Q_z' \eta(\mathbf{r}', t) + \alpha \partial_t \eta(\mathbf{r}, t) + \beta \partial_t \eta(\mathbf{r}', t))^2 \rangle} |_{\alpha=\beta=0} \end{aligned}$$

À partir des propriétés de la corrélation de surface gaussienne et après quelques calculs, la variance de  $N_t$  s'exprime finalement par :

$$\sigma_{N_t}^2 = -(2\pi)^2 A Q_z^2 \int_A [Q_z^2 (\partial_t \rho(\mathbf{r}, 0))^2 + \partial_{tt} \rho(\mathbf{r}, 0)] e^{i\mathbf{Q}_H \cdot \mathbf{r}} e^{-Q_z^2 [\rho(\mathbf{0}, 0) - \rho(\mathbf{r}, 0)]} d\mathbf{r} \quad (5.32)$$

où  $\partial_{tt}$  représente la dérivée seconde temporelle.

- Calcul de l'espérance de  $D_t$  :

Le calcul de l'espérance de  $D_t$  est identique au calcul de l'espérance du signal rétrodiffusé  $S$  aux facteurs multiplicatifs près (voir équation (5.30)). L'espérance est proportionnelle au champ cohérent du signal, et dans le cas de surface rugueuse en bande Ka nous avons :

$$\mu_{D_t} = \langle D_t \rangle \simeq 0 \quad (5.33)$$

- Calcul de la variance de  $D_t$  :

Le calcul de la variance de  $D_t$  est similaire au calcul de la SERN dans l'approximation de Krichhoff :

$$\sigma_{D_t}^2 = \langle |D_t|^2 \rangle - |\langle D_t \rangle|^2 = \left\langle \left| \int_A e^{i\mathbf{Q}_H \cdot \mathbf{r}} e^{iQ_z \eta(\mathbf{r}, t)} d\mathbf{r} \right|^2 \right\rangle \quad (5.34)$$

Par un calcul de statistique à deux points similaire au calcul de la variance de  $N_t$  nous obtenons :

$$\sigma_{D_t}^2 = (2\pi)^2 A \int_A e^{i\mathbf{Q}_H \cdot \mathbf{r}} e^{-Q_z^2 [\rho(\mathbf{0}, 0) - \rho(\mathbf{r}, 0)]} d\mathbf{r} \quad (5.35)$$

- Calcul de la corrélation complexe entre  $N_t$  et  $D_t$  :

La corrélation complexe  $C$  entre les deux variables aléatoires  $N_t$  et  $D_t$  est définie par :

$$cov[N_t, D_t] = \langle N_t^* D_t \rangle - \langle N_t \rangle \langle D_t \rangle = C \sigma_{N_t} \sigma_{D_t} \quad (5.36)$$

où  $cov$  représente la covariance des deux variables aléatoires. De même, on écrira le conjugué de la corrélation complexe :  $C^* \sigma_{N_t} \sigma_{D_t} = \langle N_t D_t^* \rangle$ . Nous pouvons également écrire la corrélation complexe en fonction de sa partie réelle  $C_r$  et de sa partie imaginaire  $C_i$  :  $C = C_r + iC_i$ . Nous obtenons alors :

$$C \sigma_{N_t} \sigma_{D_t} = -C^* \sigma_{N_t} \sigma_{D_t} = (2\pi)^2 A Q_z^2 \int_A \partial_t \rho(\mathbf{r}, 0) e^{i\mathbf{Q}_H \cdot \mathbf{r}} e^{-Q_z^2 [\rho(\mathbf{0}, 0) - \rho(\mathbf{r}, 0)]} d\mathbf{r} \quad (5.37)$$

La propriété  $C = -C^*$  observée dans l'expression (5.37) implique donc que la corrélation complexe de  $N_t$  et  $D_t$  est un imaginaire pur. Nous pouvons écrire la corrélation complexe entre  $N_t$  et  $D_t$  :

$$C = C_r + iC_i \quad (5.38)$$

avec :

$$\begin{cases} C_r = 0 \\ C_i = \text{Im}[C] = \frac{(2\pi)^2 A Q_z^2}{\sigma_{N_t} \sigma_{D_t}} \text{Im} \left[ \int_A \partial_t \rho(\mathbf{r}, 0) e^{i\mathbf{Q}_H \cdot \mathbf{r}} e^{-Q_z^2 [\rho(\mathbf{0}, 0) - \rho(\mathbf{r}, 0)]} d\mathbf{r} \right] \end{cases} \quad (5.39)$$

En conclusion, les deux variables aléatoires  $N_t$  et  $D_t$  suivent une loi complexe-normale centrée et sont corrélées. À partir des résultats sur ce type de distribution établie dans Baxley et al. [2010], la pdf jointe du rapport  $Z_t = N_t/D_t$  s'exprime, avec  $z = z_r + iz_i$  la variable associée à la variable aléatoire complexe  $Z_t$  :

$$f_{Z_t}(z_r, z_i) = \frac{1 - |C|^2}{\pi \sigma_{N_t}^2 \sigma_{D_t}^2} \left( \frac{|z|^2}{\sigma_{N_t}^2} + \frac{1}{\sigma_{D_t}^2} - 2 \frac{C_r z_r - C_i z_i}{\sigma_{N_t} \sigma_{D_t}} \right)^{-2} \quad (5.40)$$

Soit  $\varphi'_d$  la variable aléatoire associée à la dérivée temporelle de la phase de diffusion  $\partial_t \varphi_d$ , la fonction de répartition marginale de la partie imaginaire du quotient  $Z_t$  :

$$\varphi'_d = \text{Im}[Z_t] \quad (5.41)$$

s'exprime :

$$F_{\varphi'_d}(z_i, C_r, C_i) = \frac{1}{2} [\lambda(z_i, C_r, C_i) + 1] \quad (5.42)$$

avec :

$$\lambda(z_i, C_r, C_i) = \frac{C_i \sigma_{N_t} + \sigma_{D_t} z_i}{\sqrt{(1 - C_r^2) \sigma_{N_t}^2 + 2C_i \sigma_{N_t} \sigma_{D_t} z_i + \sigma_{D_t}^2 z_i^2}} \quad (5.43)$$

Dans notre cas nous avons  $C_r = 0$ , et donc :

$$F_{\varphi'_d}(z_i, 0, C_i) = \frac{1}{2} \left( \frac{C_i \widehat{\sigma}_{N_t} + \widehat{\sigma}_{D_t} z_i}{\sqrt{\widehat{\sigma}_{N_t}^2 + 2C_i \widehat{\sigma}_{N_t} \widehat{\sigma}_{D_t} z_i + \widehat{\sigma}_{D_t}^2 z_i^2}} + 1 \right) \quad (5.44)$$

où nous définissons les paramètres  $\widehat{\sigma}_{N_t}^2$  et  $\widehat{\sigma}_{D_t}^2$  en factorisant au numérateur et au dénominateur le facteur  $2\pi\sqrt{A}$  apparaissant dans les formules (5.32) et (5.35), respectivement :

$$\begin{cases} \widehat{\sigma}_{N_t}^2 &= -Q_z^2 \int_A [Q_z^2 (\partial_t \rho(\mathbf{r}, 0))^2 + \partial_{tt} \rho(\mathbf{r}, 0)] e^{i\mathbf{Q}_H \cdot \mathbf{r}} e^{-Q_z^2 [\rho(\mathbf{0}, 0) - \rho(\mathbf{r}, 0)]} d\mathbf{r} \\ \widehat{\sigma}_{D_t}^2 &= \int_A e^{i\mathbf{Q}_H \cdot \mathbf{r}} e^{-Q_z^2 [\rho(\mathbf{0}, 0) - \rho(\mathbf{r}, 0)]} d\mathbf{r} \\ C_i \widehat{\sigma}_{N_t} \widehat{\sigma}_{D_t} &= Q_z^2 \text{Im} \left[ \int_A \partial_t \rho(\mathbf{r}, 0) e^{i\mathbf{Q}_H \cdot \mathbf{r}} e^{-Q_z^2 [\rho(\mathbf{0}, 0) - \rho(\mathbf{r}, 0)]} d\mathbf{r} \right] \end{cases} \quad (5.45)$$

La pdf de la dérivée temporelle de la phase de diffusion en fonction de la pulsation  $\omega$  s'exprime à partir de la fonction de répartition marginale de  $\varphi'_d$  :

$$f_{\varphi'_d}(\omega) = \frac{dF_{\varphi'_d}(\omega, 0, C_i)}{dz_i} = \frac{(1 - C_i^2) \widehat{\sigma}_{N_t}^2 \widehat{\sigma}_{D_t}}{2[\widehat{\sigma}_{N_t}^2 + 2C_i \widehat{\sigma}_{N_t} \widehat{\sigma}_{D_t} \omega + \widehat{\sigma}_{D_t}^2 \omega^2]^{3/2}}, \quad (5.46)$$

que nous pouvons également écrire :

$$f_{\varphi'_d}(\omega) = \frac{\alpha}{[1 + [2\alpha(\omega + \beta)]^2]^{3/2}} \quad (5.47)$$

avec :

$$\alpha = \frac{\widehat{\sigma}_{D_t}}{2\sqrt{1 - C_i^2 \widehat{\sigma}_{N_t}}} \quad \text{et} \quad \beta = C_i \frac{\widehat{\sigma}_{N_t}}{\widehat{\sigma}_{D_t}} \quad (5.48)$$

Les différents moments de la distribution de  $\varphi'_d$  peuvent être calculés grâce à la formule :

$$m_n = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^n f_{\varphi'_d}(\omega) d\omega \quad (5.49)$$

Nous avons donc :

- $m_0 = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\varphi'_d}(\omega) d\omega = 1 \Rightarrow f_{\varphi'_d}$  est bien une fonction de densité de probabilité.
- $m_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \omega f_{\varphi'_d}(\omega) d\omega = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A \frac{\alpha \omega}{[1 + [2\alpha(\omega + \beta)]^2]^{3/2}} d\omega = \lim_{A \rightarrow \infty} \left[ \frac{-4\alpha^2 \beta (\omega + \beta) - 1}{4\alpha [1 + [2\alpha(\omega + \beta)]^2]^{1/2}} \right]_{-A}^A$   
 $\Rightarrow m_1 = \langle \varphi'_d \rangle = -\beta = -C_i \frac{\widehat{\sigma}_{N_t}}{\widehat{\sigma}_{D_t}}$

Nous pouvons ici faire le lien avec l'étude de [Nouguier et al. \[2011a\]](#) car nous retrouvons l'expression de la fréquence centrale (moyenne) Doppler des vagues (équation (IV.12) de l'article [Nouguier et al. \[2011a\]](#)) :

$$m_1 = \langle \varphi'_d \rangle = -C_i \frac{\widehat{\sigma_{N_t}}}{\widehat{\sigma_{D_t}}} = 2\pi f_c$$

- $m_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 f_{\varphi'_d}(\omega) d\omega$  **n'existe pas**. En effet  $\left| \omega^2 f_{\varphi'_d}(\omega) \right| \sim \frac{(1-C_i^2)\widehat{\sigma_{N_t}}^2}{2\widehat{\sigma_{D_t}}^2} \left| \frac{1}{\omega} \right|$  n'est pas intégrable au sens de Lebesgue.

$m_n, \forall n \geq 2$  **n'existent pas**.

Nous avons ici déterminé l'expression de la pdf de la distribution de la dérivée temporelle de la phase de diffusion  $\partial_t \varphi_d$ . Cette distribution ne possède pas de deuxième moment, donc pas de variance. L'expression de cette distribution est assez similaire à une distribution de Cauchy. Ce type de distribution implique que des événements importants (par exemple une grande fréquence Doppler) en queue de distribution sont relativement fréquents. Le paramètre  $\beta$ , que nous appelons pulsation centrale (ou moyenne), peut-être relié directement à la fréquence moyenne Doppler de la surface :

$$f_c = -\frac{1}{2\pi} \beta = -\frac{1}{2\pi} C_i \frac{\widehat{\sigma_{N_t}}}{\widehat{\sigma_{D_t}}} \quad (5.50)$$

En terme d'unités, la pulsation  $\omega$  s'exprime en [rad.s<sup>-1</sup>] et la pdf de la dérivée temporelle de la phase de diffusion s'exprime en [s.rad<sup>-1</sup>]. La pdf de la distribution de la phase de diffusion peut également s'exprimer dans le domaine fréquentiel, représentation qui permet d'avoir accès directement à la distribution du décalage Doppler des vagues en fréquence :

$$f_{\varphi'_d}(\omega) \rightarrow 2\pi f_{\varphi'_d}(f) \quad (5.51)$$

avec  $f = \frac{\omega}{2\pi}$  en [Hz] et  $2\pi f_{\varphi'_d}(f)$  en [s]

Bien que la distribution de la dérivée temporelle de la phase de diffusion soit de variance infinie, nous pouvons représenter la dispersion autour de la valeur moyenne par sa largeur à mi-hauteur. La largeur à mi-hauteur de la distribution  $\Delta\omega$  ( $\Delta f$  dans le domaine fréquentiel) s'exprime, à partir de l'expression (5.47) de la pdf de la dérivée temporelle de la phase de diffusion :

$$\Delta\omega = \frac{\sqrt{2^{2/3}-1}}{\alpha} \Leftrightarrow \Delta f = \frac{\sqrt{2^{2/3}-1}}{2\pi\alpha} \quad (5.52)$$

Dans ce cas :  $\frac{\sqrt{2^{2/3}-1}}{2^{2/3}} \simeq 48\%$ , soit environ 50% de la distribution est représentée.

Étudions maintenant la variation de la phase de diffusion par rapport à une phase initiale  $\varphi_d(0)$ . Pour un nombre  $N$  de vues séparées entre elles d'une durée  $\Delta t$ , si le temps d'observation  $N\Delta t$  reste inférieur au temps de corrélation  $\tau_c$  défini précédemment, un développement de Taylor peut être effectué :

$$\varphi_d(t_n) \simeq \varphi_d(0) + n\Delta t \partial_t \varphi_d(0) \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} N\Delta t \leq \tau_c \\ n \in \{1; N\} \end{cases} \quad (5.53)$$

L'évolution de la phase de diffusion par rapport à une phase initiale  $\varphi_d(0)$  est donnée par :

$$\Delta\varphi_d(t_n) = \varphi_d(t_n) - \varphi_d(0) \simeq n\Delta t \partial_t \varphi_d(0) \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} N\Delta t \leq \tau_c \\ n \in \{1; N\} \end{cases} \quad (5.54)$$

Dans le cas limite où  $N\Delta t = \tau_c$ , nous obtenons l'expression de la variation de la phase de diffusion :

$$\Delta\varphi_d(\tau_c) \simeq \tau_c \partial_t \varphi_d(0) \quad (5.55)$$

## 5.2.2 Application au spectre de mer d'Elfouhaily et implémentation numérique

Nous présentons dans ce paragraphe, dans un premier temps, la méthode d'implémentation numérique permettant de calculer les différents paramètres de la distribution du Doppler des vagues. Dans un second temps, nous présentons les résultats du calcul de la distribution du décalage Doppler des vagues.

### 5.2.2.1 Implémentation numérique

La principale difficulté réside dans le calcul des fonctions d'autocorrélation nécessaires au calcul de l'intégrale de Kirchhoff. L'intégrale de Kirchhoff est ensuite calculée de manière exacte, en utilisant néanmoins la méthode de Simpson pour l'intégration sur la dimension azimutale du spectre.

Nous avons vu dans le paragraphe précédent que le calcul de la distribution du Doppler des vagues dans l'approximation de Kirchhoff faisait intervenir le calcul de la fonction d'autocorrélation de la surface, ses dérivées temporelle première et seconde, cela au temps  $t = 0$ . L'expression de la fonction d'autocorrélation spatio-temporelle de la surface de mer (5.5) et de ses dérivées en  $t = 0$  est donnée par :

$$\rho_{\phi_v}(\mathbf{r}, t) = \int_{\mathbb{R}^2} \Psi_{\phi_v}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + S_k \omega_k t} d\mathbf{k} \quad (5.56)$$

$$\partial_t \rho_{\phi_v}(\mathbf{r}, 0) = i \int_{\mathbb{R}^2} S_k \omega_k \Psi_{\phi_v}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{k} \quad (5.57)$$

$$\partial_{tt} \rho_{\phi_v}(\mathbf{r}, 0) = - \int_{\mathbb{R}^2} \omega_k^2 \Psi_{\phi_v}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{k} \quad (5.58)$$

L'annexe 5.A présente les développements de ces fonctions pour leur implémentation numérique avec un spectre d'Elfouhaily et al. [1997].

### 5.2.2.2 Exemples de distributions du décalage Doppler des vagues

Dans ce paragraphe, nous présentons les résultats de la distribution du décalage Doppler induit par le mouvement des vagues appliquée au spectre d'Elfouhaily et al. [1997]. Nous présentons l'évolution de cette distribution en fonction des différents paramètres de tir (incidence  $\theta$  et azimut  $\phi$ ) et de rugosité de la surface (vitesse du vent à 10 m).

- Évolution du décalage Doppler des vagues en fonction de l'incidence de tir :

Nous avons représenté sur la figure 5.4, à gauche, un exemple de la distribution du Doppler des vagues calculé avec le spectre de mer d'Elfouhaily et al. [1997] pour un vent moyen à 10 m,  $u_{10} = 6 \text{ m.s}^{-1}$ , un azimut de tir,  $\phi = 0^\circ$  et une direction du vent  $\phi_v = 0^\circ$  en fonction de l'incidence de tir  $\theta$  allant de  $0^\circ$  à  $20^\circ$ . Sur cette même figure, à droite, nous avons représenté l'évolution de la valeur moyenne de la fréquence Doppler ( $f_c$  (5.50)) ainsi que la largeur à mi-hauteur de la distribution du Doppler ( $\Delta f$  (5.52)).

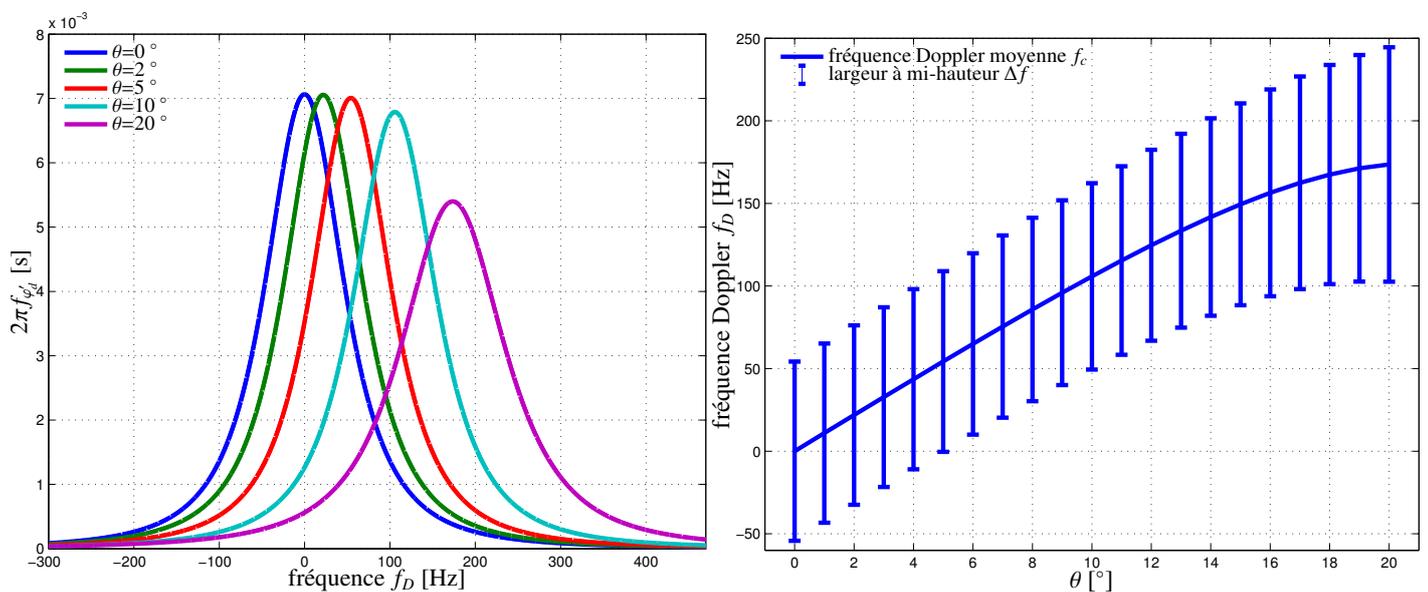


FIGURE 5.4 – Représentation de la distribution du Doppler des vagues (à gauche) pour différentes incidences de tir  $\theta$  et évolution de la valeur moyenne Doppler et de la largeur à mi-hauteur de la distribution en fonction de l'incidence de tir  $\theta$  (à droite). Les tracés ont été fait pour un vent à 10 m,  $u_{10} = 6 \text{ m.s}^{-1}$ , un azimut de tir,  $\phi = 0^\circ$  et une direction du vent,  $\phi_v = 0^\circ$ .

Nous constatons qu'au Nadir, la valeur moyenne du décalage Doppler est nulle, ce qui se comprend par le fait que les mouvements verticaux ascendants et descendants des vagues se compensent au Nadir. Mais cette valeur augmente lorsque l'incidence augmente, de 0 Hz pour  $\theta = 0^\circ$  à environ 170 Hz pour  $\theta = 20^\circ$ . La largeur à mi-hauteur de cette distribution augmente également avec l'incidence  $\theta$ , d'environ 110 Hz jusqu'à 140 Hz mais reste quasi-constante pour les 10 premiers degrés d'incidence. L'évolution de la largeur à mi-hauteur est moins marquée que l'évolution de la valeur moyenne du décalage Doppler, traduisant une diffusion autour de la fréquence moyenne quasi-constante en fonction de l'incidence de tir.

• Évolution du décalage Doppler des vagues en fonction de l'azimut de tir :

Nous avons tracé sur la figure 5.5, à gauche, un exemple de la distribution du Doppler des vagues pour un vent moyen à 10 m,  $u_{10} = 6 \text{ m.s}^{-1}$ , une direction du vent  $\phi_v = 0^\circ$  et une incidence de tir  $\theta = 2,6^\circ$  afin de rester dans la configuration de SWOT (voir tableau 1.1) en fonction de différents azimuts de tir  $\phi$  allant de  $0^\circ$  à  $90^\circ$  (de la direction upwind à la direction crosswind). Sur cette même figure, à droite, nous avons représenté l'évolution de la valeur moyenne de la fréquence Doppler ainsi que la largeur à mi-hauteur de la distribution du décalage Doppler.

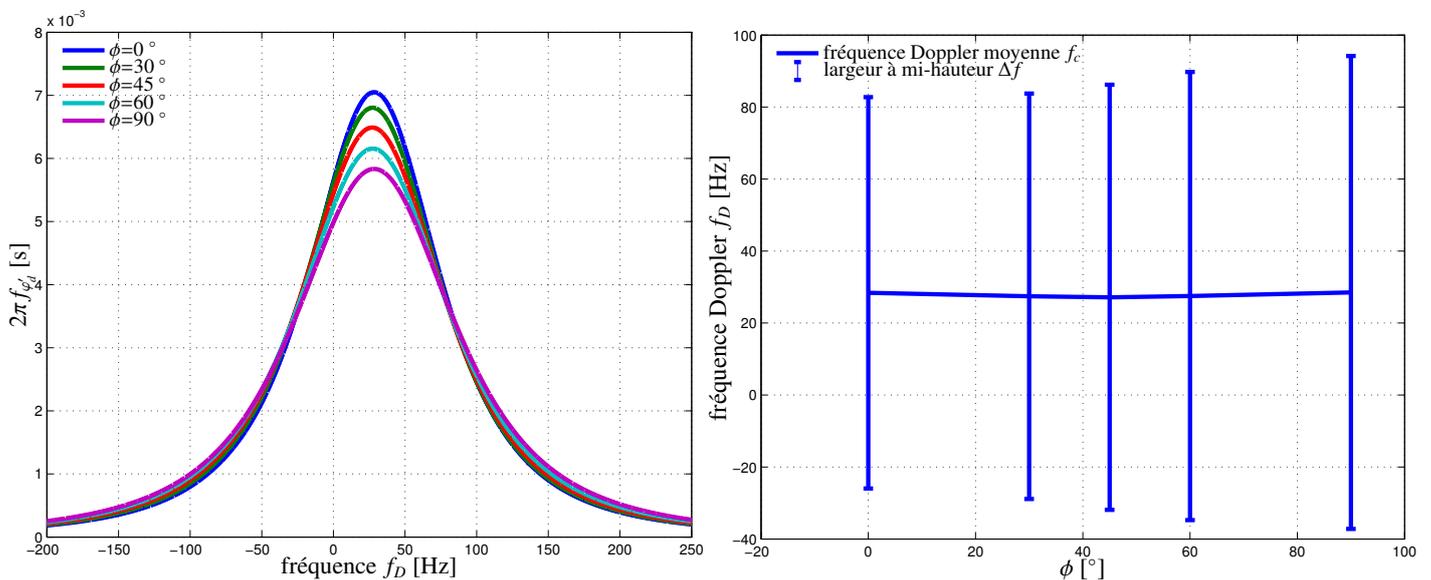


FIGURE 5.5 – Représentation de la distribution du Doppler des vagues (à gauche) pour différents azimuts de tir  $\phi$  et évolution de la valeur moyenne Doppler et de la largeur à mi-hauteur de la distribution en fonction de l'azimut de tir  $\phi$  (à droite). Les tracés ont été fait pour un vent à 10 m,  $u_{10} = 6 \text{ m.s}^{-1}$ , une incidence de tir,  $\theta = 2,6^\circ$  et une direction du vent,  $\phi_v = 0^\circ$ .

La fréquence Doppler moyenne des vagues varie très peu avec l'angle de tir en azimut  $\phi$  (environ 1 Hz entre les azimuts  $0^\circ$  et  $90^\circ$ ). La largeur à mi-hauteur varie d'environ 20 Hz entre les azimuts  $0^\circ$  et  $90^\circ$ . La faible variation de la fréquence Doppler moyenne se justifie par les angles d'incidences proches Nadir utilisé. La dépendance à l'azimut de tir (à la direction du vent) peut donc être négligée pour des incidences d'observations proches Nadir.

• Évolution du Doppler des vagues en fonction de l'état de mer :

Nous avons tracé sur la figure 5.6, à gauche, un exemple de la distribution du Doppler des vagues pour un azimut de tir  $\phi = 0^\circ$ , une direction du vent  $\phi_v = 0^\circ$  et une incidence de tir  $\theta = 2,6^\circ$  pour différentes valeurs de vent à 10 m. Sur cette même figure, à droite, nous avons représenté l'évolution de la valeur moyenne de la fréquence Doppler ainsi que la largeur à mi-hauteur de la distribution du Doppler.

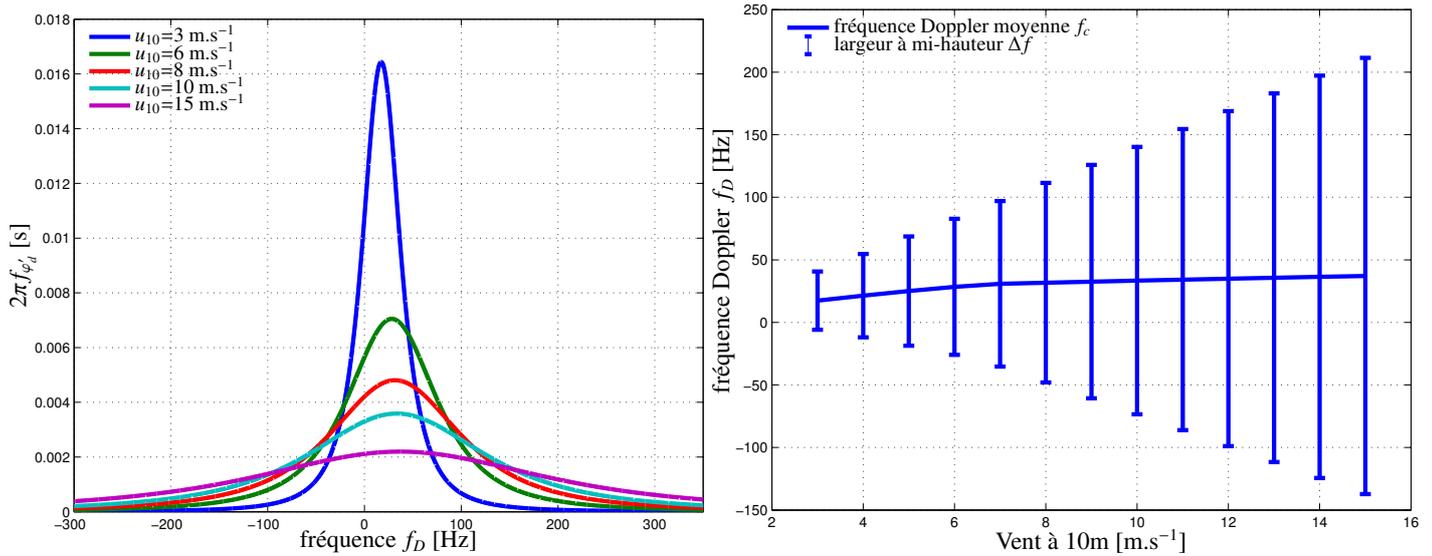


FIGURE 5.6 – Représentation de la distribution du Doppler des vagues (à gauche) pour différentes vitesses de vent à 10 m  $u_{10}$  et évolution de la valeur moyenne Doppler et de la largeur à mi-hauteur de la distribution en fonction de la vitesse du vent à 10 m  $u_{10}$  (à droite). Les tracés ont été fait pour une incidence de tir,  $\theta = 2,6^\circ$ , un azimut de tir  $\phi = 0^\circ$  et une direction du vent,  $\phi_v = 0^\circ$ .

La fréquence Doppler moyenne varie entre environ 20 Hz pour un vent de 3 m.s<sup>-1</sup> et environ 40 Hz pour un vent de 15 m.s<sup>-1</sup>. L'évolution de la fréquence Doppler moyenne n'est pas très importante en fonction du vent, néanmoins la largeur à mi-hauteur de la distribution augmente de manière conséquente avec la vitesse du vent, de 50 Hz à 350 Hz. Cet effet est bien marqué sur la distribution du Doppler des vagues. L'évolution de la fréquence Doppler moyenne des vagues est modérée en fonction de l'état de mer, par contre, lorsque l'état mer augmente (vent plus important) la probabilité de voir apparaître des phénomènes isolés (fréquence Doppler importante) devient plus forte.

En résumé, il apparaît sur les différentes figures précédentes une variabilité importante du décalage Doppler induit par le mouvement des vagues en fonction de l'incidence de tir et de l'état de mer. Néanmoins, la variabilité de cette fréquence est négligeable en fonction de l'azimut de tir, ceci dû aux faibles angles de visées en incidence. La dispersion de la distribution du décalage Doppler des vagues augmente avec le vent, rendant possible de forts décalages Doppler selon l'état de la mer observée. Cependant, en raison de la bande Doppler limitée du radar, les évènements extrêmes ne seront pas vus.

### 5.3 Application à la synthèse SAR non focalisée

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons aux effets entraînés par le mouvement de la surface, et principalement ceux liés au temps de corrélation du signal rétrodiffusé et au décalage Doppler des vagues. Nous nous servons par la suite des résultats énumérés dans le paragraphe 1.2.

#### 5.3.1 Critères d'application de la synthèse SAR non focalisée

Après compression d'impulsions en distance, les données brutes issues des impulsions retours du signal sont multipliées par des rampes de phase, le processus effectué est similaire à un processus de transformée de Fourier rapide (FFT). Nous cherchons à estimer le nombre d'impulsions successives brutes  $N_p$  permettant d'appliquer le processus de synthèse SAR non focalisée dans le cas de la mission SWOT. Le processus de synthèse SAR non focalisée nécessite de respecter certains critères, à savoir :

1. assurer un nombre d'impulsions successives brutes  $N_p$  cohérentes entre elles.
2. assurer la condition de variation sur la phase :  $\Delta\phi(t) \leq \pi/4$ .

Nous cherchons à estimer les nombre d'impulsions successives brutes  $N_p$  maximales permettant de respecter les deux critères d'application de la synthèse SAR non focalisée. Nous nous plaçons dans la même configuration que le paragraphe 1.2.1.

1. La condition de cohérence entre les impulsions brutes successives implique que, pour  $N_p$  impulsions successives, séparées d'un temps  $\Delta t = 1/f_a$ , où  $f_a$  est la PRF du système, et pour un temps de corrélation du signal rétrodiffusé  $\tau_c$  une condition nécessaire est :

$$N_p \Delta t \leq \tau_c \quad \Leftrightarrow \quad N_p \leq \tau_c f_a \quad (5.59)$$

2. La distribution de la phase dans une fauchée azimut a été développée précédemment (1.23) :

$$\Delta\phi(t) = \frac{2\pi}{\lambda_0} [A_r t^2 - 2V_r t] \quad (5.60)$$

Le paramètre  $A_r$  se réduit à :  $A_r \simeq V_{sat}^2/R_0$ , car nous pouvons négliger la vitesse tangentielle de la surface par rapport à la vitesse de déplacement du satellite ( $V_c \ll V_{sat}$ ) et l'accélération radiale de la surface peut-être négligée devant l'accélération relative au déplacement du satellite ( $a_r \ll V_{sat}^2/R_0$ ). La distribution de la phase se réduit ainsi à :

$$\Delta\phi(t) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \left[ \frac{V_{sat}^2}{R_0} t^2 + \lambda_0 f_D t \right] \quad (5.61)$$

où  $V_r = -\lambda_0 f_D/2$  avec  $f_D$  la fréquence du décalage Doppler induit par le mouvement des vagues. La condition d'évolution sur la distribution de la phase impose :

$$\Delta\phi(t) \leq \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda_0} \left[ \frac{V_{sat}^2}{R_0} t^2 + \lambda_0 f_D t \right] \leq \frac{\pi}{4} \quad (5.62)$$

Nous cherchons à estimer l'intervalle de temps  $\Delta T$  permettant de respecter l'inégalité (5.62). Deux cas se présentent :

• **1<sup>er</sup> cas : la surface est immobile ( $f_D = 0$ )**

La résolution de l'inégalité (5.62) devient :

$$t^2 \leq \frac{\lambda_0 R_0}{8V_{sat}^2} \Rightarrow t_0 \leq t \leq t_1 \quad (5.63)$$

avec  $t_0$  et  $t_1$  les racines de l'équation du second degré correspondante. L'intervalle de temps  $\Delta T^0$  permettant de respecter l'inégalité (5.62) dans le cas d'une surface immobile est :

$$\Delta T^0 = t_1 - t_0 = \frac{\sqrt{\lambda_0 R_0}}{\sqrt{2}V_{sat}} \quad (5.64)$$

Nous remarquons ici que nous retrouvons l'expression de la taille de la surface au sol résolue minimale :  $a_0 = \sqrt{\frac{\lambda_0 R_0}{2}}$  (ou le rayon de la première zone de Fresnel, voir Raney [1998]). La taille de la surface au sol résolue minimale vaut, dans le cas de SWOT, environ 60 m et la résolution de la synthèse SAR non focalisée est d'environ 250 m (voir paragraphe 1.1.3.4). La taille de la surface au sol résolue minimale est donc respectée.

La taille de la surface au sol résolue minimale est directement liée au nombre d'impulsions  $N_p^0$  en divisant cette valeur ( $a_0$ ) par la taille du pixel ( $V_{sat}/f_a$ ). De manière équivalente, nous retrouvons cette expression à partir de la relation (5.64) en écrivant :

$$N_p^0 \Delta t = \frac{N_p^0}{f_a} = \Delta T^0 \Rightarrow N_p^0 = \Delta T^0 f_a = \frac{\sqrt{\lambda_0 R_0}}{\sqrt{2}V_{sat}} f_a \quad (5.65)$$

• **2<sup>ème</sup> cas : la surface est mobile** ( $f_D \neq 0$ )

L'expression de la distribution azimuth de la phase (5.61) peut s'écrire à l'aide de l'expression (5.64) :

$$\Delta\phi(t) = \frac{\pi}{(\Delta T^0)^2} t [t + 2(\Delta T^0)^2 f_D] \quad (5.66)$$

Nous constatons que l'effet d'une surface d'observation en mouvement translate la distribution de la phase dans le plan (temps, phase) mais n'influence pas la forme de cette distribution, comme l'illustre la figure 5.7. La résolution de l'inégalité (5.62) conduit alors à l'intervalle de temps  $\Delta T$  permettant de respecter cette inégalité :

$$\Delta T = \Delta T^0 \quad (5.67)$$

Le décalage Doppler induit par la vitesse radiale des vagues n'influence donc pas le critère sur la phase d'application de la synthèse SAR non focalisée. Un raisonnement similaire peut-être fait à partir de l'expression fréquentielle de cette distribution de phase (1.26) :

$$\Delta\phi(f) = \pi \frac{\lambda_0}{2A_r} (f^2 - f_D^2) \quad (5.68)$$

En effet, nous constatons que la fréquence Doppler induit par le mouvement des vagues ( $f_D$ ) translate simplement la distribution. Seuls les effets liés à l'accélération radiale de la surface ( $a_r$ ) et la vitesse tangentielle de la surface ( $V_c$ ), que l'on retrouve dans le paramètre  $A_r$ , influent sur la forme de cette distribution.

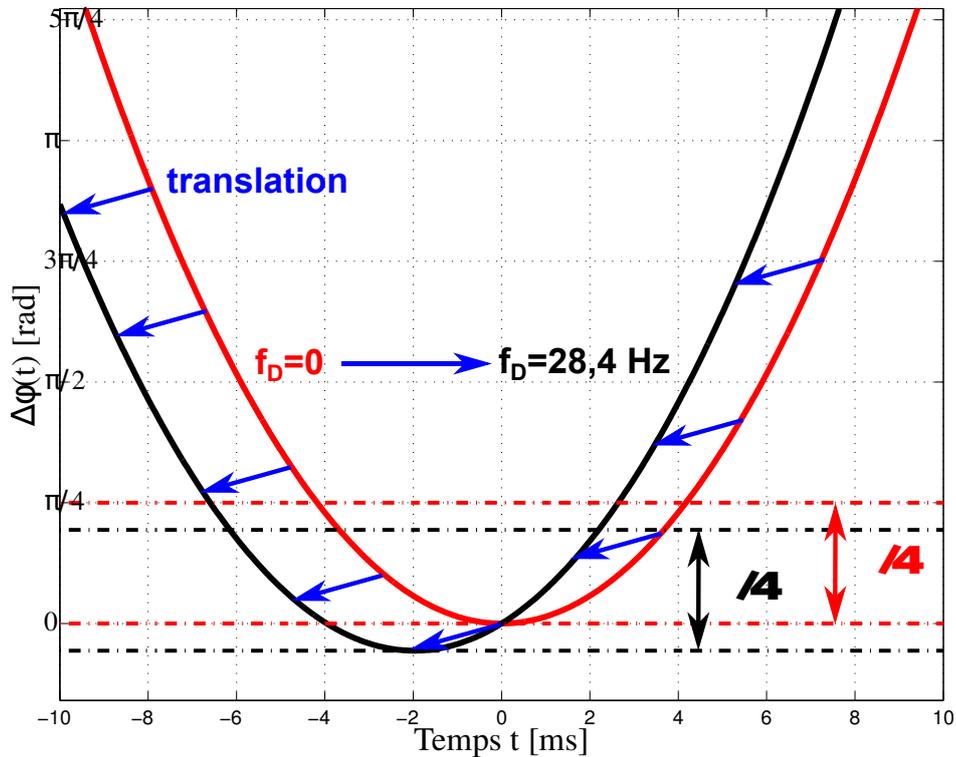


FIGURE 5.7 – Exemples de distribution de phase azimuth calculées à partir de l'expression (5.70) dans la configuration de SWOT. En rouge, le cas où la surface observée est immobile ( $f_D = 0$ ), en noir, le cas où un vent à 10 m de  $6 \text{ m.s}^{-1}$  souffle ( $f_D = 28,4 \text{ Hz}$ ). La courbe noire est une translation dans le plan (temps, phase) de la courbe rouge.

### 5.3.2 Application à la synthèse SAR non focalisée de SWOT

Nous avons représenté sur la figure 5.8 le nombre d'impulsions successives brutes  $N_p$  maximales pour satisfaire les deux conditions d'applicabilité de la synthèse SAR non focalisée dans le mode LR de SWOT, à savoir le critère sur la cohérence du signal rétrodiffusé  $N_p = \tau_c f_a$  et le critère sur la phase  $N_p^0$  en fonction du vent à 10 m (à gauche) et du  $H_s$  (à droite). Les valeurs des paramètres sont celles du tableau 1.1 et la valeur  $R_0$  a été fixée à 900 km. Nous avons représenté en trait pointillé vert le nombre de vues  $N_p = 9$  pour le mode LR de SWOT. Pour des états de mer moyens ( $u_{10} \approx 6 \text{ m.s}^{-1}$  ou  $H_s \approx 1 \text{ m}$ ) et faibles nombre d'impulsions successives brutes  $N_p$  respecte les conditions d'applications souhaitées. Néanmoins, il apparaît que pour des conditions de mer plus agitées la valeur de  $N_p = 9$  ne permet plus d'assurer les conditions d'applicabilités de la synthèse SAR non focalisée. Dans ce cas là, la condition limitante est alors la condition de cohérence des signaux rétrodiffusés.

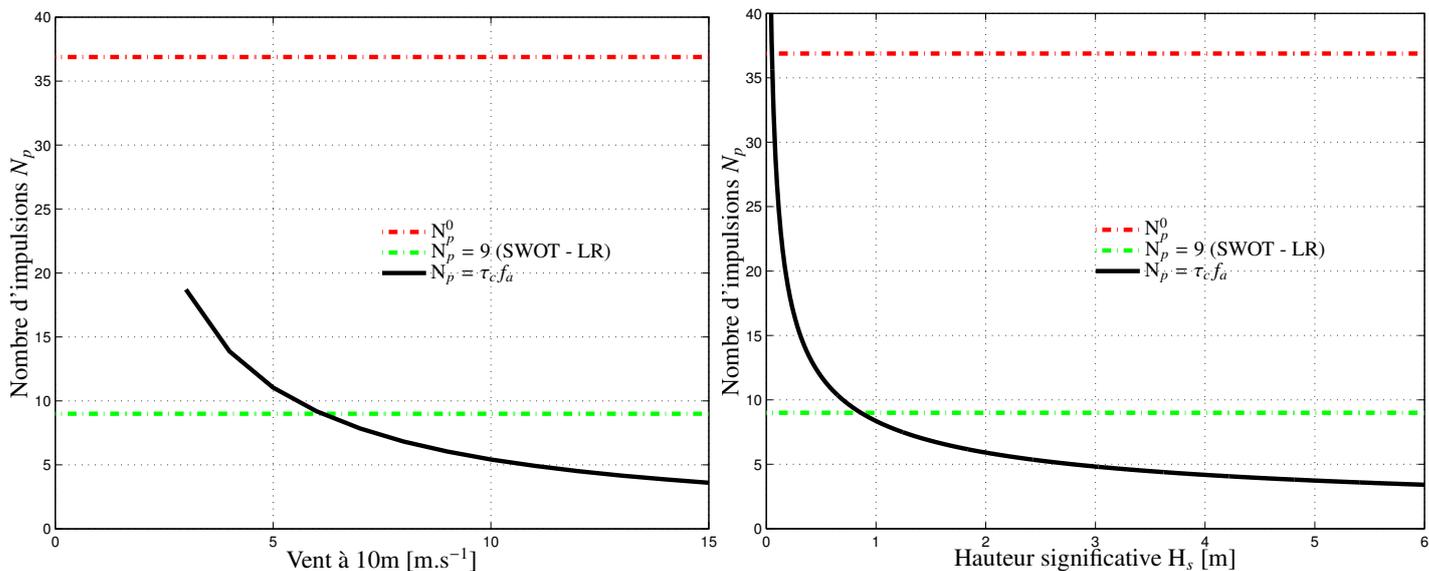


FIGURE 5.8 – Représentation des conditions d'applicabilités de la synthèse SAR non focalisée sur le nombre d'impulsions successives brutes  $N_p$  maximales du mode LR de SWOT estimées avec un spectre d'Elfouhaily et al. [1997]. À gauche, le calcul est fait avec la formule exacte du temps de corrélation (5.12) et à droite avec la formule approchée avec le  $H_s$  (5.19).

Le nombre d'impulsions successives brutes  $N_p$  optimales pour la synthèse SAR non focalisée du mode LR de SWOT en fonction du vent à 10 m est résumé dans le tableau 5.2.  $N_p$  est défini de tel sorte que :

$$N_p = \min \left[ N_p^0, E(\tau_c f_a) \right] \tag{5.69}$$

où  $E(x)$  représente la partie entière du réel  $x$ . Ce nombre de vues varie de 9 à 3 lorsque la rugosité de la surface augmente.

$u_{10} \text{ [m.s}^{-1}\text{]}$	0	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$N_p$	36	18	13	11	9	7	6	6	5	4	4	4	3	3

TABLEAU 5.2 – Nombres d'impulsions successives brutes  $N_p$  optimales en fonction du vent à 10 m permettant de respecter les conditions d'applications de la synthèse SAR non focalisée pour le mode LR de SWOT.

Nous pouvons également évaluer la résolution azimutale optimale à partir des valeurs  $N_p$  définies précédemment (1.31) :

$$r_{az} = \frac{\lambda_0 R_0 f_a}{2V_{sat} N_p} \tag{5.70}$$

Cette résolution azimut est tracée sur la figure 5.9 en fonction du vent à 10 m pour les nombres d'impulsions successives brutes  $N_p$  optimales du tableau 5.2. Dans le cas de SWOT, nous retrouvons bien la résolution de 250 m pour un vent d'environ  $6 \text{ m.s}^{-1}$ , néanmoins, pour des  $N_p$  adaptées à la synthèse SAR non focalisée, il apparaît que celle-ci se dégrade pour des forts états de mer ( $r_{az} \approx 760 \text{ m}$  pour un vent à 10 m de  $15 \text{ m.s}^{-1}$ ). Malgré cela, SWOT remoyenne les pixels au kilomètre ce qui donne de la marge par rapport à la résolution effective utilisée.

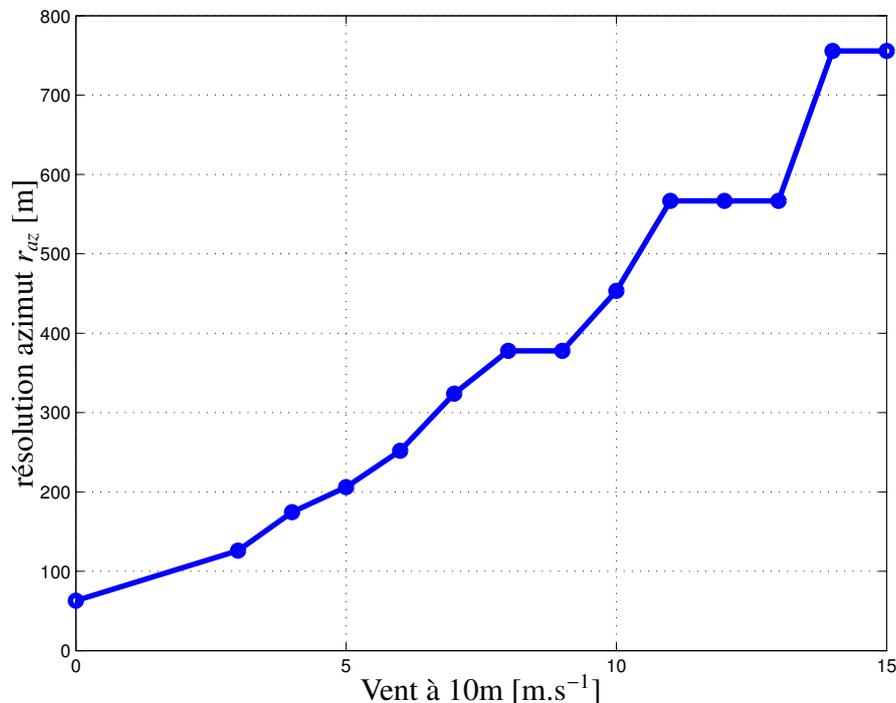


FIGURE 5.9 – Résolution azimut  $r_{az}$  optimale du processus de synthèse SAR non focalisée du mode LR de SWOT en fonction du vent à 10 m.

En conclusion, nous avons ici développé une méthode d'estimation du nombre d'impulsions successives brutes  $N_p$  optimales respectant les conditions de la synthèse SAR non focalisée. Il ressort de cette étude que le critère limitant est le critère du temps de corrélation. Dans le cadre du mode LR de SWOT, il apparaît que le nombre d'impulsions brutes  $N_p = 9$  respecte les conditions d'application de la synthèse SAR non focalisée dans le cas de faibles états de mer ( $u_{10} \leq 6 \text{ m.s}^{-1}$  ou  $H_s \leq 1 \text{ m}$ ). Néanmoins, à la lumière de l'étude précédente ce nombre de vues peut être ajusté en fonction de l'état de mer. Cette technique pourrait être appliquée sur le traitement des données SWOT en se servant du  $H_s$  fourni par la mesure de l'altimètre Nadir embarqué et ainsi automatiser le nombre d'impulsions successives brutes à utiliser pour le processus de synthèse SAR non focalisée. Le point contraignant sur SWOT est le fait que le traitement LR est fait à bord (pour des raisons techniques, afin de limiter le volume de données de télémessure à envoyer au sol) et la technique énoncée ici n'est donc pas applicable sans connaissance préalable du  $H_s$ .

## 5.A Annexe - Implémentation numérique des fonctions de corrélation

Nous développons dans cette annexe la méthode d'implémentation numérique des fonctions d'autocorrélation permettant le calcul de la distribution du décalage Doppler des vagues (paragraphe 5.2.2.1) avec un spectre de mer d'Elfouhaily et al. [1997].

$$(5.56) \Rightarrow \rho_{\phi_v}(r, \phi_r, 0) = \rho_0(r, 0) + \rho_2(r, 0) \cos[2(\phi_r - \phi_v)]$$

$$\text{où : } \begin{cases} \rho_0(r, 0) = \int_0^\infty \Psi_0(k) J_0(kr) dk \\ \rho_2(r, 0) = - \int_0^\infty \Psi_0(k) \Delta(k) J_2(kr) dk \end{cases} \quad (5.71)$$

$$(5.57) \Rightarrow \partial_t \rho_{\phi_v}(r, \phi_r, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} [\partial_t \rho_n^{iso}(r, \phi_r, 0) + \partial_t \rho_n^{aniso}(r, \phi_r, 0)]$$

$$\text{où : } \begin{cases} \partial_t \rho_n^{iso}(r, \phi_r, 0) = -\frac{4}{\pi} \text{sgn}[\sin(\theta)] \frac{\cos[(2n+1)(\phi_r - \phi)]}{2n+1} \int_0^\infty \omega_k \Psi_0(k) J_{2n+1}(kr) dk \\ \partial_t \rho_n^{aniso}(r, \phi_r, 0) = \frac{2}{\pi} \text{sgn}[\sin(\theta)] \int_0^\infty \frac{\omega_k \Psi_0(k) \Delta(k)}{2n+1} \left\{ J_{2n-1}(kr) \cos\{(2n-1)\phi_r - [(2n+1)\phi - 2\phi_v]\} + \right. \\ \left. J_{2n+3}(kr) \cos\{(2n+3)\phi_r - [(2n+1)\phi + 2\phi_v]\} \right\} dk \end{cases} \quad (5.72)$$

Le développement et l'implémentation numérique de l'expression (5.72) sont donnés ci-après.

$$(5.58) \Rightarrow \partial_{tt} \rho_{\phi_v}(r, \phi_r, 0) = \partial_{tt} \rho_0(r, 0) + \partial_{tt} \rho_2(r, 0) \cos[2(\phi_r - \phi_v)]$$

$$\text{où : } \begin{cases} \partial_{tt} \rho_0(r, 0) = - \int_0^\infty \omega_k^2 \Psi_0(k) J_0(kr) dk \\ \partial_{tt} \rho_2(r, 0) = \int_0^\infty \omega_k^2 \Psi_0(k) \Delta(k) J_2(kr) dk \end{cases} \quad (5.73)$$

### • Développement et implémentation numérique de l'expression (5.72) :

Il intervient dans le calcul de l'intégrale (5.57) le paramètre  $S_{\mathbf{k}} = \text{sgn}(\widehat{\mathbf{k}} \cdot \widehat{\mathbf{K}}_0)$ . Ce paramètre peut être exprimé dans le repère de la figure 2.6 :

$$\text{sgn}(\widehat{\mathbf{k}} \cdot \widehat{\mathbf{K}}_0) = \text{sgn}[\sin(\theta) \cos(\phi_k - \phi)] = \text{sgn}[\sin(\theta)] \text{sgn}[\cos(\phi_k - \phi)] \quad (5.74)$$

où  $\theta$  est l'incidence de tir et  $\phi$  l'azimut de tir.

L'équation (5.57) s'écrit alors dans le repère polaire lié au spectre  $(k, \phi_k)$  pour l'intégration et le repère polaire  $(r, \phi_r)$  pour la corrélation :

$$\partial_t \rho_{\phi_v}(r, \phi_r, 0) = \text{sgn}[\sin(\theta)] \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \text{sgn}[\cos(\phi_k - \phi)] \omega_k \frac{\Psi_0(k)}{2\pi k} \{1 + \Delta(k) \cos[2(\phi_k - \phi_v)]\} e^{ikr \cos(\phi_k - \phi_r)} dk d\phi_k \quad (5.75)$$

Cette expression peut alors s'écrire comme la somme d'une partie isotrope (sans fonction d'étalement, partie isotrope du spectre)  $\partial_t \rho_{\phi_v}^{iso}(r, \phi_r, 0)$  et d'une partie anisotrope (avec fonction d'étalement, partie anisotrope du spectre)  $\partial_t \rho_{\phi_v}^{aniso}(r, \phi_r, 0)$  :

$$\begin{aligned} \partial_t \rho_{\phi_v}(r, \phi_r, 0) &= \partial_t \rho_{\phi_v}^{iso}(r, \phi_r, 0) + \partial_t \rho_{\phi_v}^{aniso}(r, \phi_r, 0) \\ \text{où : } \begin{cases} \partial_t \rho_{\phi_v}^{iso}(r, \phi_r, 0) &= \frac{\text{sgn}[\sin(\theta)]}{2\pi} \int_0^\infty \omega_k \Psi_0(k) \left( \int_0^{2\pi} \text{sgn}[\cos(\phi_k - \phi)] e^{ikr \cos(\phi_k - \phi_r)} d\phi_k \right) dk \\ \partial_t \rho_{\phi_v}^{aniso}(r, \phi_r, 0) &= \frac{\text{sgn}[\sin(\theta)]}{2\pi} \int_0^\infty \omega_k \Psi_0(k) \Delta(k) \left( \int_0^{2\pi} \text{sgn}[\cos(\phi_k - \phi)] \cos[2(\phi_k - \phi)] e^{ikr \cos(\phi_k - \phi_r)} d\phi_k \right) dk \end{cases} \end{aligned} \quad (5.76)$$

La fonction  $\text{sgn}[\cos(\phi_k - \phi)]$  est la fonction "créneau" classique comprise entre  $[-1; 1]$  et de période  $2\pi$ , décalée de  $-\pi/2$  et s'exprime, sous forme d'un développement en série de fourier :

$$\text{sgn}[\cos(\phi_k - \phi)] = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin[(2n+1)(\phi_k - \phi + \pi/2)]}{2n+1} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos[(2n+1)(\phi_k - \phi)]}{2n+1} \quad (5.77)$$

Un exemple de comparaison entre la fonction  $\text{sgn}[\cos(\phi_k - \phi)]$  et son développement en série de fourier pour un nombre p d'harmoniques et un azimut d'observation  $\phi = 0^\circ$  est représenté sur la figure 5.10 suivante :

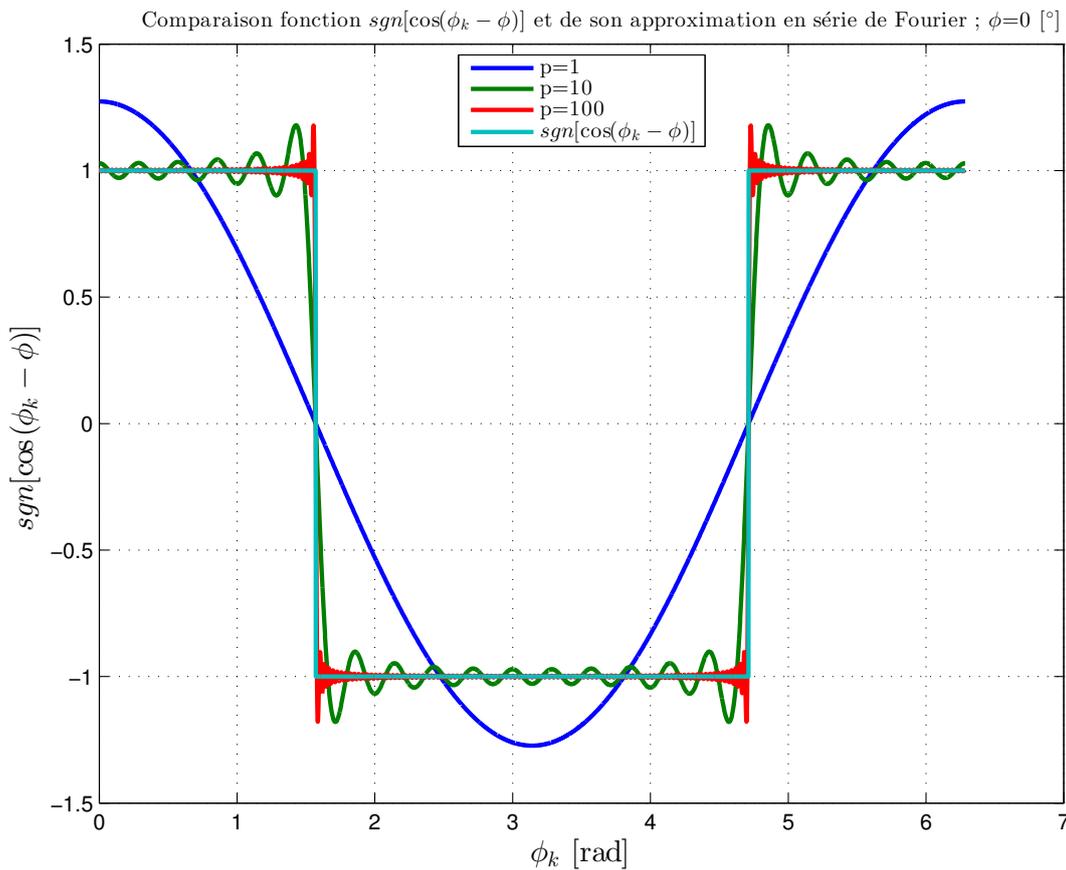


FIGURE 5.10 – Comparaison entre la fonction  $\text{sgn}[\cos(\phi_k - \phi)]$  et son développement en série de fourier pour un nombre p d'harmoniques et un azimut  $\phi=0^\circ$ .

Finalement, le remplacement de l'expression (5.77) dans l'expression (5.76) permet de retrouver l'expression (5.72).

Afin de rendre le calcul réalisable numériquement, le nombre d'harmoniques p suffisant pour obtenir une Erreur Quadratique Moyenne (EQM) faible doit être évalué. Pour ce faire, nous avons calculé la dérivée temporelle en 0 de la corrélation spatio-temporelle de la surface de mer exacte via l'équation (5.57) et via son développement en série de fourier (5.72) pour différents nombres d'harmoniques p. On calcule alors l'EQM selon la formule :

$$\text{EQM} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left[ \widehat{\partial_t \rho(\mathbf{r}_n, 0)} - \partial_t \rho(\mathbf{r}_n, 0) \right]^2} \quad [\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}] \quad (5.78)$$

où  $\widehat{\partial_t \rho(\mathbf{r}_n, 0)}$  est la valeur calculée avec le développement en série de fourier (5.72) et  $\partial_t \rho(\mathbf{r}_n, 0)$  est la valeur exacte (5.57) au point  $\mathbf{r}_n$ . La figure 5.11 représente un exemple de l'EQM calculée pour un vent à 10m,  $u_{10}=6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , un azimut,  $\phi=0^\circ$  et une direction du vent,  $\phi_v=30^\circ$ . Nous avons également représenté l'EQM relative à la valeur maximale de la valeur exacte de  $\partial_t \rho(\mathbf{r}, 0)$ .

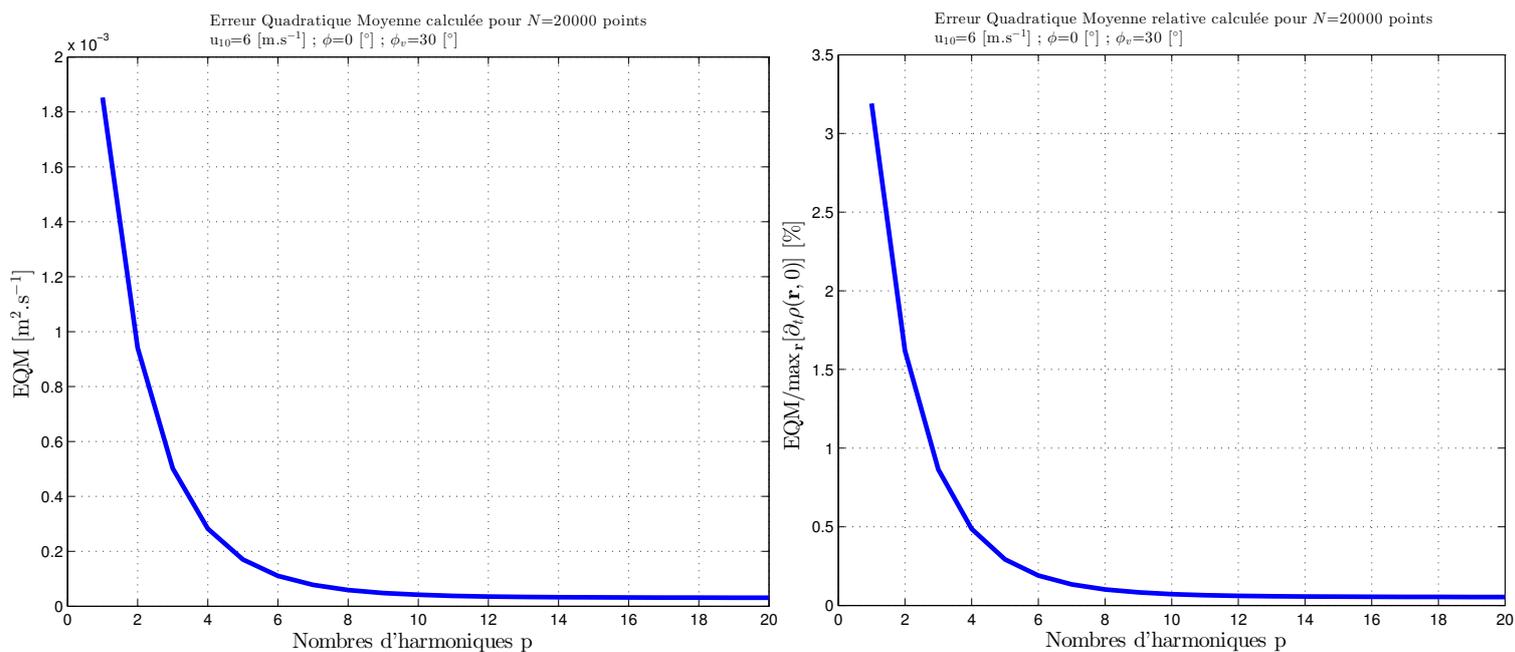


FIGURE 5.11 – Tracé de l'EQM (à gauche) et de l'EQM relative (à droite) pour un vent à 10m :  $u_{10}=6$  m.s<sup>-1</sup>, un azimut :  $\phi=0$  ° et une direction du vent :  $\phi_v=30$  °.

Dans toutes les applications numériques relative au Doppler des vagues nous choisissons de prendre un nombre d'harmoniques  $p$ , pour le calcul de  $\partial_t \rho_{\phi_v}(\mathbf{r}, 0)$  égal à 10. Dans ce cas, l'erreur quadratique moyenne reste inférieure à 0,1% sur le calcul de la dérivée temporelle .