Apprentissages des élèves

Dans ce chapitre, nous présentons les évaluations que nous avons élaborées. La première évaluation est adressée aux étudiants de BAB1 de notre université pour les sections mathématique, informatique et physique. Celle-ci a lieu en début d'année avant tout enseignement d'algèbre linéaire. Les notions de droites et de plans dans l'espace ont donc été vues par les étudiants en sixième secondaire. La deuxième évaluation est adressée aux élèves qui ont suivi notre séquence d'enseignement. Nous analysons ici les réponses fournies aux deux évaluations. Le dépouillement des copies nous permet d'inférer des éléments sur les apprentissages des étudiants et des élèves pour ces notions. Une comparaison entre les résultats des deux évaluations peut nous aider à préciser les effets de nos choix méthodologiques sur les apprentissages.

1 Éléments méthodologiques

Nous avons ébaloré deux évaluations adressées à des publics différents : les étudiants en première année universitaire et les élèves ayant suivi notre enseignement. Ce choix s'explique par une volonté de comparer les apprentissages d'un groupe témoin à ceux d'un groupe expérimental. L'analyse des copies des étudiants peut nous aider à mieux apprécier les effets de notre expérimentation sur les apprentissages des élèves.

Nous présentons dans un premier temps l'évaluation proposée aux étudiants de BAB1 dans les sections mathématique, informatique et physique. L'échantillon est composé de 132 étudiants. Ils ont été interrogés durant le mois d'octobre 2019 avant tout enseignement de géométrie analytique dans l'espace. L'évaluation se trouve dans l'annexe K (page 713). Nous choisissons de découper l'analyse de cette évaluation en fonction des questions. Pour chacune d'entre elles, nous expliquons les objectifs visés. Nous proposons également les solutions possibles et réalisons leur analyse *a priori*. Nous présentons ensuite les résultats des étudiants en illustrant nos propos par des extraits de copies.

Dans un second temps, nous présentons l'évaluation proposée aux élèves à la fin de notre enseignement. Cette évaluation se situe à l'annexe K (page 716). L'échantillon ici se compose de 7 élèves. Ils ont été directement interrogés après notre expérimentation (séance 17). L'analyse de cette évaluation est découpée de la même façon que la précédente.

Nous comparons finalement les résultats des deux évaluations pour en inférer des éléments sur les apprentissages des élèves pour les notions de droites et de plans dans l'espace.

2 Questionnaire pour les étudiants de BAB1

Notre étude de terrain réalisée dans le chapitre VIII a montré que l'aspect « description » de l'interprétation géométrique des objets est fortement travaillé dans l'enseignement secondaire pour les équations. L'objectif de ces questions est de tester si la reconnaissance des objets à partir d'équations et d'ensembles de points est développée par les sujets interrogés. Nous ne demandons pas de justifier toutes les affirmations mais seulement celles qui demandent quelques adaptations des connaissances.

Nous nous basons sur notre étude curriculaire (cf. chapitre IV), notre étude des manuels scolaires (cf. chapitre VII) et notre étude de terrain (cf. chapitre VIII) pour rédiger les solutions possibles de chaque question et pour réaliser leurs analyses *a priori*. Les équations des droites et des plans dans l'espace sont des connaissances anciennes des étudiants. Les ensembles peuvent ne pas avoir été vus dans l'enseignement secondaire mais ont été travaillés dès le début des cours universitaires.

2.1 Question 1

Dites si l'objet de l'espace $\mathbb{R}^3$ décrit par une équation, un système d'équations ou un ensemble est une droite ou un plan. Pour certaines réponses, une justification vous est demandée.

1. $2x+y=3$ — Droite ☐ Plan ☐ Je ne connais pas la réponse ☐
2. $x=1$ — Droite ☐ Plan ☐ Je ne connais pas la réponse ☐
3. $\begin{cases} 2x+3y+4z=2 \\ x=1 \end{cases}$ — Droite ☐ Plan ☐ Je ne connais pas la réponse ☐
4. $\begin{cases} x=1+4\lambda \\ y=2+5\lambda \text{ où } \lambda\in\mathbb{R} \\ z=3+6\lambda \end{cases}$ — Droite ☐ Plan ☐ Je ne connais pas la réponse ☐
5. $\begin{cases} x=1+4\lambda+7\mu \\ y=2+5\lambda+8\mu \text{ où } \lambda,\mu\in\mathbb{R} \\ z=3+6\lambda+9\mu \end{cases}$ — Droite ☐ Plan ☐ Je ne connais pas la réponse ☐
6. $\begin{cases} 2x+3y+4z=2 \\ 4x+6y+8z=4 \end{cases}$ — Droite ☐ Plan ☐ Je ne connais pas la réponse ☐
7. Droite ☐ Plan ☐ Je ne connais pas la réponse ☐

$$\left\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; (a,b,c) \text{ est simultanément orthogonal à } (1,-1,1) \text{ et } (1,2,1)\right\}$$

►► Solutions

Il s'agit de reconnaître les objets de l'espace décrits par des équations (paramétriques et cartésiennes) ou des ensembles de points. Les équations aux points 1 et 2 sont des équations incomplètes de plans. Le système donné au point 3 représente la droite d'intersection des plans d'équations $x = 1$ et $2x+3y+4z = 2$. Le système donné au point 4 est composé des équations paramétriques d'une droite. Le système donné au point 5 est lui composé des équations paramétriques d'un plan. Le système donné au point 6 décrit un plan. En effet, les deux équations données représentent deux plans parallèles confondus. Leur intersection est donc le plan lui-même.

L'ensemble donné au point 7 décrit une droite. Plusieurs justifications peuvent être apportées.

Première méthode

Nous cherchons l'ensemble des vecteurs (a,b,c) qui sont solutions du système suivant :

$$\begin{cases} a-b+c=0 \\ a+2b+c=0 \end{cases}$$

La première équation décrit un plan dont un vecteur normal est $(1,-1,1)$. La deuxième équation est un plan dont un vecteur normal est $(1,2,1)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires car quelle que soit la valeur du réel k, on n'aura jamais $(1,-1,1) = k(1,2,1)$. Les deux plans sont donc sécants. L'intersection de ces deux plans est donc une droite.

Deuxième méthode

Nous cherchons l'ensemble des vecteurs (a,b,c) qui sont solutions du système suivant :

$$\begin{cases} a-b+c=0 \\ a+2b+c=0 \end{cases}$$

Résolvons algébriquement ce système. Nous avons :

$$\begin{cases} a=b-c \\ a+2b+c=0 \end{cases}$$

En substituant la valeur de a trouvée dans la deuxième équation, nous obtenons :

$$\begin{cases} a=b-c \\ 3b=0 \end{cases}$$

De ce fait, $b = 0$ et $a = -c$. L'ensemble des solutions de ce système est : $\{(-c,0,c) \mid c \in \mathbb{R}\}$. Cet ensemble décrit une droite. Il est possible de préciser qu'il s'agit de la droite passant par l'origine du repère et dont un vecteur directeur est $(-1,0,1)$.

▸▸ Analyse *a priori*

La question est fermée.

Domaines de travail

Cadre de la géométrie analytique, cadre de la géométrie vectorielle, cadre de la géométrie synthétique.

Registres d'écriture

Registre algébrique, registre ensembliste, registre de la langue naturelle.

Points de vue

Point de vue paramétrique, point de vue cartésien.

Connaissances mises en jeu

- Connaissances anciennes : équations paramétriques et cartésiennes de droites et de plans dans l'espace, colinéarité, orthogonalité, produit scalaire, vecteur, positions relatives de deux plans, résolution de systèmes.
- Connaissances en cours d'acquisition : notions et notations ensemblistes.

Adaptations à réaliser

Aux points 1 et 2, il s'agit de reconnaître un plan à partir du point de vue cartésien (*reconnaissance des modalités d'application*, *mise en jeu de connaissances anciennes*). Aux points 4 et 5, la reconnaissance d'une droite et d'un plan se fait à partir du point de vue paramétrique (*reconnaissance des modalités d'application*, *mise en jeu de connaissances anciennes*).

Au point 3, une *reconnaissance des modalités d'application* des équations cartésiennes de plans est nécessaire (*mise en jeu de connaissances anciennes*). Il faut tester si les vecteurs normaux sont colinéaires (*mise en jeu de connaissances anciennes en géométrie vectorielle*). Une fois qu'il a été déterminé que les deux plans sont sécants, les connaissances de géométrie synthétique permettent de dire que ce système décrit une droite (*mise en jeu de connaissances anciennes*, *changement de cadres*). Des adaptations similaires sont à réaliser pour le point 6. Pour ces deux points, un *choix de méthode* s'impose également. En effet, il est possible de résoudre les deux systèmes pour déterminer l'objet décrit par l'ensemble des solutions des systèmes (*mise en jeu de connaissances anciennes*, *conversion de registres*).

Pour l'ensemble des vecteurs, des *connaissances en cours d'acquisition* sont en jeu (notations ensemblistes) ainsi que des *connaissances anciennes* telles que le produit scalaire entre deux vecteurs. L'*organisation du raisonnement* se découpe en plusieurs étapes. Il s'agit de traduire l'orthogonalité des vecteurs deux à deux en un produit scalaire nul (*conversion de registres*). Un *choix de méthode* est à effectuer. Il est possible de reconnaître que les deux équations écrites décrivent chacune un plan (*mise en jeu de connaissances anciennes*). Puisque les vecteurs normaux ne sont pas colinéaires, les plans sont sécants suivant une droite (*mise en jeu de connaissances anciennes*, *changement de cadres*). Une autre méthode consiste à résoudre le système composé des deux équations à trois inconnues (*mise en jeu de connaissances anciennes*). Un ensemble de solutions de ce système est écrit (*conversion de registres*). La droite est alors reconnue à partir de cet ensemble de solutions (*reconnaissance des modalités d'application*).

▸▸ Dépouillement des copies

Le tableau XIII.1 donne les réponses des 132 étudiants pour chaque sous-question. L'abréviation « JNCP » est utilisée pour la réponse « Je ne connais pas la réponse ». Nous mettons en gras les réponses correctes.

Questions	Droite	Plan	JNCP
1	108	**20**	4
2	100	**23**	9
3	**50**	60	22
4	**72**	52	8
5	23	**96**	13
6	38	**72**	22
7	**43**	60	29

TABLE XIII.1 – Réponses des étudiants à la première question.

La majorité des étudiants (> 75% des étudiants) pense que les équations données aux points 1 et 2 décrivent une droite. Ainsi, ils semblent rencontrer des difficultés avec les équations incomplètes de plans dans l'espace. Celles-ci sont souvent repérées chez les étudiants de BAB1 comme nous l'avons montré dans le chapitre II. Nous constatons aussi que 8 étudiants modifient leur réponse entre le point 1 et le point 2. Six d'entre eux pensent que l'équation $2x+y=3$ décrit une droite alors que l'équation $x=1$ décrit un plan. Puisque nous n'avons pas demandé de justification pour ces questions, il est difficile de comprendre ce changement de réponse. Il est possible qu'un parallèle soit effectué par les étudiants entre la première équation et la forme générale des équations de droites dans le plan $ax+by=c$. Celui-ci ne semble pas avoir lieu lorsque la forme de l'équation donnée est moins proche de cette formule générale.

La plupart des étudiants ont reconnu les objets géométriques à partir du point de vue paramétrique (environ 72% pour la droite et 54% pour le plan). Il est possible que la reconnaissance des objets à partir de ce point de vue soit maîtrisée par les étudiants.

Le nombre de réponses « Je ne connais pas la réponse » augmente fortement lorsque des adaptations des connaissances sont à réaliser et lorsqu'une justification est attendue. Nous ne prenons pas en compte ces copies pour les sous-questions 3, 6 et 7. De plus, certains étudiants ont correctement répondu mais n'ont pas justifié leur réponse. Nous ne les prenons donc pas en compte. Le tableau XIII.2 indique le nombre d'étudiants ayant justifié leur réponse.

Questions	Droite	Plan	Total
3	**46**	49	95
6	27	**65**	92
7	**36**	47	83

TABLE XIII.2 – Nombre d'étudiants ayant justifié leurs réponses à la première question.

Nous analysons les justifications apportées par les étudiants pour ces trois sous-questions en illustrant nos propos avec des exemples de leurs productions.

La sous-question 3

Une conception erronée présente chez la plupart des étudiants consiste à penser que le nombre d'inconnues dans une équation cartésienne détermine l'objet géométrique décrit. Pour eux, si les trois inconnues x, y et z sont présentes alors l'objet décrit est un plan. Dans le cas contraire, l'objet décrit est une droite. Nous retrouvons cette justification pour expliquer que l'équation $2x+3y+4z=2$ est un plan chez 31 étudiants (32% des étudiants ayant justifié). Une difficulté liée aux équations incomplètes de plans apparaît pour cette sous-question. La figure XIII.1 illustre le genre de justification donnée.

> Quand il y a 3 variables on parle alors de plan car nous avons 3 composantes (x,y,z).

FIGURE XIII.1 – Réponse de l'étudiant E_2 à la sous-question 3.

Certains étudiants ne tiennent pas compte du système à résoudre. D'ailleurs, parmi les 31 étudiants cités précédemment il y en a 14 qui commettent aussi cette erreur. Il y a ici une difficulté à comprendre que la résolution d'un système de deux équations revient à déterminer les intersections éventuelles entre deux objets géométriques. Cette erreur est commise par 24 étudiants (soit 25% des étudiants ayant justifié). La figure XIII.2 illustre ce fait. L'étudiant y explique que la première équation du système décrit un plan et ne tient pas compte de l'équation $x=1$. Il répond alors que le système décrit un plan.

> Le plan comporte 3 composantes, selon x, y et z.
> $2x+3y+4z=2$ est une équation cartésienne de plan.

FIGURE XIII.2 – Réponse de l'étudiant E_{83} à la sous-question 3.

Une autre justification utilisée par 10 étudiants (10% des étudiants ayant justifié) consiste à dire que les deux droites décrites par le système d'équations définissent un plan. La reconnaissance des objets décrits par les deux équations du système ne semble pas du tout développée par ces étudiants. De plus, ils semblent faire l'union des deux objets au lieu de prendre leur intersection. Il y a donc, selon nous, des difficultés associées à la notion de système d'équations mais aussi liées aux notions ensemblistes. La figure XIII.3 illustre une justification de ce type.

> C'est un système où nous avons deux droite qui est impliqué, on regroupe alors c'est deux droites dans un plan.

FIGURE XIII.3 – Réponse de l'étudiant E_{53} à la sous-question 3.

Il y a 28 étudiants qui ont répondu et justifié correctement (29% des étudiants ayant justifié). Deux stratégies apparaissent : résolution algébrique du système et reconnaissance des objets. 15 étudiants ont choisi de résoudre algébriquement le système donné. Ils déduisent que l'objet décrit est une droite à partir d'une équation cartésienne. La figure XIII.4 illustre cette méthode. Les autres étudiants ont bien reconnu que les équations données décrivent chacun un plan et mobilise bien une connaissance ancienne de géométrie synthétique. La figure XIII.5 illustre cette méthode. Cette dernière semble engendrer moins de problèmes que la première. En effet, certains étudiants se lancent dans la résolution algébrique sans trop de difficultés mais ne parviennent pas à reconnaître l'objet décrit par les solutions du système comme dans la figure XIII.6.

$$\begin{cases} 2x+3y+4z=2 \\ x=1 \end{cases}$$
$$3y+4z=0$$
$$3y=-4z$$

Equation d'une droite dans l'espace où le x est fixé à 1.

FIGURE XIII.4 – Réponse de l'étudiant E_{47} à la sous-question 3.

> Il s'agit de l'intersection de deux plans dont l'un est d'équation $2x+3y+4z=2$ et l'autre d'équation $x=1$. L'intersection de deux plans est une droite.

FIGURE XIII.5 – Réponse de l'étudiant E_3 à la sous-question 3.

$$\begin{cases} 2x+3y+4z=2 \\ x=1 \end{cases}$$
$$3y+4z=0$$

C'est un plan.

FIGURE XIII.6 – Réponse de l'étudiant E_{119} à la sous-question 3.

La sous-question 6

La reconnaissance des objets décrits par les deux équations cartésiennes du système ne semble pas amener de difficultés à 51 étudiants (55% des étudiants ayant justifié). 24 d'entre eux la justifient comme à la sous-question 3 par la présence de trois variables.

Ils ne justifient pas pourquoi le système décrit bien un plan. Il est donc possible qu'ils décrivent seulement une équation et non le système dans son entièreté. Parmi ces 51 étudiants, 8 n'ont pas constaté que les deux équations sont équivalentes. De ce fait, ces étudiants ont répondu que l'objet décrit par le système d'équations est une droite et ils le justifient par le fait qu'il s'agit de l'intersection de deux plans. Ces étudiants ne semblent donc pas se questionner sur la position relative des plans et considèrent immédiatement qu'ils sont sécants. Cela est illustré à la figure XIII.7. 15 étudiants ont justifié que les deux plans sont confondus comme cela est illustré à la figure XIII.8.

L'intersection de deux plans est une droite.

FIGURE XIII.7 – Réponse de l'étudiant E_{10} à la sous-question 6.

Il s'agit de deux équations cartésiennes d'un même plan pour passer de l'une à l'autre il suffit de multiplier soit par 2, soit par $\frac{1}{2}$.

FIGURE XIII.8 – Réponse de l'étudiant E_3 à la sous-question 6.

Pour cette sous-question, aucune résolution algébrique n'a été proposée pour justifier la réponse fournie. Il est possible que cette méthode soit privilégiée par les étudiants lorsque les calculs sont simples et immédiats comme à la sous-question 3.

Parmi les étudiants ayant choisi la réponse « Plan », 10 ont justifié que les équations décrivent chacune une droite et que deux droites définissent un plan (soit 11% des étudiants ayant justifié). Il s'agit de la même conception erronée que celle mentionnée à la sous-question 3. 17 étudiants ont justifié qu'il s'agissait de deux droites confondues (18% des étudiants ayant justifié). Un extrait d'une copie est proposé à la figure XIII.9. Chez ces étudiants, la reconnaissance des objets ne semble pas maîtrisée.

$2x+3y+4z=2$ et $4x+6y+8z=4$ sont deux équations équivalentes qui définissent la même droite. En effet : $2(2x+3y+4z)=4x+6y+8z$ et $2.2=4$.

FIGURE XIII.9 – Réponse de l'étudiant E_{16} à la sous-question 6.

La sous-question 7

La principale difficulté rencontrée par les étudiants est de déterminer la nature des objets qu'ils manipulent. C'est une difficulté que nous avons repérée dans le chapitre II. Parmi les 83 étudiants qui ont justifié leur choix, 14 pensent que les triplets donnés représentent des coordonnées d'un point et non des composantes d'un vecteur (17% des étudiants ayant justifié). Certains d'entre eux ont justifié que l'ensemble décrit une droite car les deux points donnés la déterminent. Cela est illustré par l'extrait donné à la figure XIII.10. Ces étudiants ne tiennent absolument pas compte de la condition d'orthogonalité.

Comme (a,b,c) est orthogonal à 2 points, cela donne une droite car il passe par deux points.

FIGURE XIII.10 – Réponse de l'étudiant E_{50} à la sous-question 7.

Tout comme pour les autres sous-questions, il y a 16 étudiants (soit 19% des étudiants ayant justifié) qui justifient que l'objet décrit par cet ensemble est un plan car nous cherchons des triplets. La figure XIII.11 illustre cette justification. Ces étudiants semblent penser que les seuls objets de l'espace sont les plans.

Nous retrouvons ici aussi trois composantes donc nous sommes dans $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^3$ est un plan.

FIGURE XIII.11 – Réponse de l'étudiant E_2 à la sous-question 7.

La plupart des étudiants ne parviennent pas à reconnaître l'objet décrit par cet ensemble. Seuls 8 étudiants (10% des étudiants ayant justifié) reconnaissent l'objet décrit et le justifie correctement. Certains d'entre eux ont directement dit que l'objet décrit est une droite car elle représente l'intersection de deux plans. Ils ne donnent pas plus de détails. 4 étudiants (5% des étudiants ayant justifié) ont traduit la condition d'orthogonalité en un produit scalaire nul. Ils ont donc écrit un système de deux équations à trois inconnues mais ne l'ont pas résolu. Ils ont reconnu les objets à partir des équations données. Cela est illustré à la figure XIII.12.

Cela équivaut à $\begin{cases} a-b+c=0 \\ a+2b+c=0 \end{cases}$ par produit scalaire. Il s'agit donc de l'intersection de deux plans, donc une droite.

FIGURE XIII.12 – Réponse de l'étudiant E_{42} à la sous-question 7.

▶▶ Conclusion

Notre analyse *a priori* a mis en évidence les adaptations des connaissances à réaliser pour chaque sous-question. Nous pouvons maintenant revenir sur les adaptations qui sont potentiellement réalisées par les étudiants et sur celles qui amènent des difficultés.

La reconnaissance des objets géométriques à partir des équations paramétriques ne semble pas amener de difficultés chez la majorité des étudiants (voir sous-questions 4 et 5) contrairement au point de vue cartésien. En effet, les réponses données pour les sous-questions 1 et 2 laissent penser qu'elle n'est pas développée pour les équations cartésiennes incomplètes de plans. Il semble néanmoins qu'ils parviennent à reconnaître les plans lorsqu'ils sont décrits par une équation où les trois variables sont explicites (voir sous-question 3). Les justifications apportées pour les sous-questions 3 et 6 nous informent sur le raisonnement des étudiants et les adaptations qu'ils ont réalisées. Les étudiants mobilisent effectivement leurs connaissances anciennes en géométrie analytique, géométrie vectorielle et géométrie synthétique. Toutefois, les connaissances sur les systèmes d'équations ne semblent pas être disponibles chez 32 étudiants. En effet, ils ne considèrent pas le système dans son entièreté et ne raisonnent que sur une des équations du système. Nous avons également montré qu'ils considèrent qu'un système permet de déterminer l'union de deux objets et non leur intersection. La mise en parallèle des sous-questions 3 et 6 met en évidence que la stratégie choisie par les étudiants pour justifier leur raisonnement varie. La résolution algébrique des systèmes apparaît plus souvent pour la sous-question 3 que la 6. À aucun moment, un ensemble de solutions de ces systèmes n'est donné. Il est donc possible que la conversion entre le registre algébrique et le registre ensembliste amène quelques difficultés chez les étudiants. Ils travaillent donc essentiellement dans le registre de la langue naturelle et le registre algébrique. Nous avons également montré que la position relative de deux plans est plus souvent justifiée lorsque les plans ne sont pas sécants. Ainsi, la principale difficulté rencontrée pour les équations cartésiennes est liée à la reconnaissance des modalités d'application des équations dans l'espace.

La reconnaissance des objets à partir d'un ensemble semble être très problématique (voir sous-question 7). Un premier facteur permettant de l'expliquer est que le nombre d'étudiants qui ne répondent pas à cette question est le plus élevé. Nous en déduisons que l'organisation du raisonnement pour cette question est difficile à réaliser pour eux. Cette hypothèse est validée par notre analyse des justifications apportées. En effet, très peu d'étudiants parviennent à traduire la relation d'orthogonalité entre deux vecteurs en un produit scalaire nul. Il est possible que la conversion entre le registre de la langue naturelle et le registre algébrique amène des difficultés chez les étudiants. Il se peut également que leurs connaissances de géométrie vectorielle sur l'orthogonalité ne soient pas disponibles. Ceux qui écrivent le système de deux équations à trois inconnues ne le résolvent pas mais déterminent immédiatement que les équations représentent deux plans sécants. Ainsi, un nombre très faible d'étudiants réalisent des conversions entre le registre algébrique et le registre de la langue naturelle, mobilisent leur connaissances anciennes et déterminent que l'ensemble décrit est une droite.

Les résultats à cette première question sont, selon nous, conformes à ce que nous attendions au vu de notre étude de relief sur les notions de droites et de plans dans l'espace et de notre étude de terrain (cf. parties 1 et 2).

2.2 Question 2

Soit l'ensemble $E = \left\{ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (a,b,c) \text{ est orthogonal à } (1,-1,1) \right\}$. Déterminez parmi les trois figures suivantes, quel est l'objet décrit par l'ensemble E. Justifiez ensuite votre réponse.

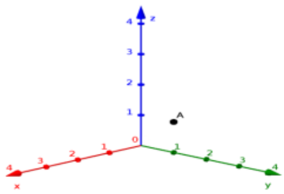

FIGURE 1

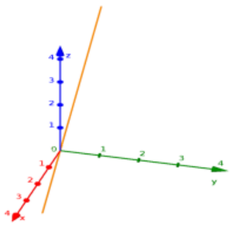

FIGURE 2

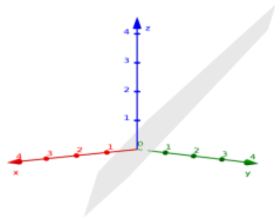

FIGURE 3

Au vu des résultats de nos diverses analyses de la partie 2, il est possible que ce genre de questions n'ait pas été abordé dans l'enseignement secondaire par les étudiants de BAB1. L'orthogonalité de deux vecteurs a été étudiée par les étudiants et les notions ensemblistes ont été un peu travaillées depuis le début de l'enseignement universitaire. Cette tâche relève donc du niveau disponible de mise en fonctionnement des connaissances.

►► Solutions

La bonne réponse est la figure 3. Plusieurs méthodes sont possibles pour justifier qu'il s'agit bien d'un plan.

Première méthode

$$E = \left\{ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (a,b,c) \cdot (1,-1,1) = 0 \right\} = \left\{ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; a-b+c=0 \right\}.$$

La reconnaissance du plan peut se faire à cette étape à partir de l'équation cartésienne $a-b+c=0$.

Il est possible aussi que cet ensemble soit écrit comme $\left\{ (b-c,b,c) \;\middle|\; b,c \in \mathbb{R} \right\}$. La reconnaissance du plan se fait alors ici à partir d'un ensemble de points. Il est possible d'écrire une équation paramétrique du plan et de reconnaître le plan à partir de celle-ci.

Deuxième méthode

Le vecteur $(1,1,0)$ est orthogonal au vecteur $(1,-1,1)$ car $1-1=0$. Nous pouvons rejeter la figure 1. Le vecteur $(2,0,-2)$ est orthogonal au vecteur $(1,-1,1)$ car $2-2=0$. Puisque les vecteurs $(1,1,0)$ et $(2,0,-2)$ ne sont pas colinéaires, nous pouvons éliminer la figure 2. Ainsi, cet ensemble est représenté par la figure 3.

▸▸ Analyse *a priori*

Domaines de travail

Cadre de la géométrie analytique, cadre de la géométrie vectorielle.

Registres d'écriture

Registre algébrique, registre ensembliste, registre de la langue naturelle, registre graphique.

Points de vue

Point de vue cartésien, point de vue paramétrique.

Connaissances mises en jeu

- Connaissances anciennes : équations paramétriques et cartésiennes de plans, produit scalaire, vecteur, colinéarité, orthogonalité.
- Connaissances en cours d'acquisition : notions et notations ensemblistes.

Adaptations à réaliser

L'énoncé est donné en langue naturelle. Il s'agit de reconnaître l'objet décrit par un ensemble et de l'associer au graphique correspondant. Plusieurs méthodes sont possibles (*existence de choix*). L'*organisation du raisonnement* y est à chaque fois découpée en plusieurs étapes. Pour la première méthode, un travail dans le registre ensembliste est effectué (*mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition*). Il s'agit de traduire l'orthogonalité des vecteurs en un produit scalaire nul (*conversion de registres*, *mise en jeu de connaissances anciennes en géométrie vectorielle*). La reconnaissance du plan peut se faire à partir de l'équation cartésienne ainsi obtenue (*mise en jeu de connaissances anciennes*, *reconnaissance des modalités d'application*). Des *traitements dans le registre ensembliste* peuvent être également ajoutés. Dans ce cas, la reconnaissance du plan se fait à partir du point de vue paramétrique (*mise en jeu de connaissances anciennes*, *conversion de registres*).

Pour la deuxième méthode, le raisonnement se fait par élimination des cas. Il s'agit de traduire l'orthogonalité des vecteurs en un produit scalaire nul (*conversion de registres*, *mise en jeu de connaissances anciennes en géométrie vectorielle*), de se donner des triplets vérifiant cette égalité (*traitements dans le registre algébrique*) et de voir que les vecteurs trouvés ne sont pas colinéaires (*mise en jeu de connaissances anciennes en géométrie vectorielle*). Puisque deux directions différentes sont données, l'ensemble décrit un plan.

▸▸ Dépouillement des copies

Pour cette question, il y a 14 abstentions. Le tableau XIII.3 donne les réponses fournies par 118 étudiants. Nous mettons en gras la réponse correcte. Nous précisons également le nombre d'étudiants qui ont justifié leur réponse.

Nb d'étudiants	Figure 1	Figure 2	Figure 3	Total
qui ont répondu	11	36	**71**	118
qui ont justifié	8	24	**51**	83

TABLE XIII.3 – Réponses des étudiants à la deuxième question.

La majorité des étudiants a correctement répondu à la question. Toutefois, la plupart des justifications sont incorrectes. Nous retrouvons par exemple chez 12 étudiants (14% des étudiants ayant justifié) cette idée qu'un ensemble de triplets ne peut déterminer qu'un plan. Nous repérons également, tout comme à la première question, une confusion chez 12 autres étudiants entre les coordonnées d'un point et les composantes d'un vecteur. De plus, nous relevons ici aussi une confusion chez 7 étudiants (8% des étudiants ayant justifié) entre les vecteurs directeurs et les vecteurs normaux comme cela est illustré à la figure XIII.13. Cette conception erronée peut être liée au passage du plan à l'espace. En effet, la justification fournie est correcte dans le plan $\mathbb{R}^2$ mais fausse dans l'espace $\mathbb{R}^3$.

> L'ensemble des triplets (a,b,c) est l'ensemble des vecteurs normaux à $(1,-1,1)$.
> Il est défini par 1 vecteur normal non-nul donc c'est une droite.

FIGURE XIII.13 – Réponse de l'étudiant E_{31} à la question 2.

Nous avons relevé des justifications correctes auxquelles nous ne nous attendions pas. 7 étudiants (8% des étudiants ayant justifié) expliquent qu'une infinité de droites sont orthogonales au vecteur donné et celles-ci forment donc un plan. Cela est illustré par l'extrait à la figure XIII.14. Bien que cette justification soit correcte, nous n'avons aucun élément permettant de déterminer leur raisonnement. La figure XIII.15 donne un extrait de la copie d'un étudiant qui exprime cette idée un peu différemment des autres.

> Le vecteur $(1,-1,1)$ doit être un vecteur normal d'un plan pour que toutes les droites dans ce plan soient orthogonales à $(1,-1,1)$.

FIGURE XIII.14 – Réponse de l'étudiant E_{41} à la question 2.

> Le vecteur (a,b,c) doit former un angle de 90° avec le vecteur. Toute direction possible tant que l'angle est de 90°. Donc plan.

FIGURE XIII.15 – Réponse de l'étudiant E_{118} à la question 2.

Parmi les justifications correctes, 4 étudiants (5% des étudiants ayant justifié) ont traduit la condition d'orthogonalité en un produit scalaire nul et identifié l'objet décrit par l'équation cartésienne ainsi obtenue (voir figure XIII.16). 8 ont justifié que l'objet décrit est un plan car tous ses vecteurs directeurs sont orthogonaux à un de ses vecteurs normaux (cf. figure XIII.17). Ces derniers semblent connaître la description du plan par un ensemble.

> Par définition du produit scalaire de deux vecteurs :
> $(a,b,c)\cdot(1,-1,1) = a.1 + b.(-1) + c.1 = a - b + c = 0.$
> E est l'ensemble des triplets orthogonaux au vecteur $(1,-1,1)$ tels que $a - b + c = 0$. C'est un plan.

FIGURE XIII.16 – Réponse de l'étudiant E_{82} à la question 2.

> car un vecteur est orthogonal à tous vecteur directeur d'un plan. Ce vecteur est un vecteur normal du plan.

FIGURE XIII.17 – Réponse de l'étudiant E_{57} à la question 2.

Les étudiants qui n'ont pas répondu correctement donnent des justifications variées. Certains choisissent des valeurs particulières pour (a,b,c) et pensent que l'ensemble décrit un point. Ces étudiants rencontrent des difficultés avec les notions et les notations ensemblistes. D'autres étudiants considèrent que l'ensemble décrit tous les points d'une droite dont un vecteur directeur est $(1,-1,1)$. D'autres encore pensent que les vecteurs (a,b,c) et $(1,-1,1)$ représentent des plans et donc que l'ensemble décrit la droite d'intersection des deux plans. Ces étudiants rencontrent beaucoup de difficultés concernant la nature des objets qu'ils manipulent.

▸▸ Conclusion

Nous pouvons maintenant déterminer les adaptations qui ont été réalisées par les étudiants lors de la résolution de cette question.

Tout d'abord, plus d'un tiers des étudiants ne parviennent pas à organiser leur raisonnement pour répondre à la question et justifier leur choix. Cela peut être lié à un travail inhabituel ou inadéquat dans le registre ensembliste. La reconnaissance des objets à partir d'ensembles ne semble pas du tout développée chez les étudiants. Ce résultat ne nous étonne pas puisque la théorie des ensembles n'était pas dans les programmes scolaires qu'ils ont suivis.

Ensuite, la majorité des étudiants qui justifient leur réponse (erronée ou non) rencontre des difficultés au niveau de la reconnaissance des modalités d'application. En effet, ils utilisent des résultats valides dans le plan mais pas dans l'espace ou ne manipulent pas les bons objets. Ils mobilisent donc bien des connaissances anciennes sans tenir compte des éventuelles ruptures lors du changement de la dimension de l'espace.

Finalement, seuls 20 étudiants ont répondu et justifié correctement. Ces étudiants ont réussi à organiser leur raisonnement, à reconnaître les modalités d'application, à mobiliser leurs connaissances anciennes et en cours d'acquisition sur les ensembles et à effectuer une conversion entre le registre ensembliste et le registre de la langue naturelle. Selon nous, ils sont capables de reconnaître l'objet décrit par un ensemble. Peu d'étudiants ont traduit l'orthogonalité des vecteurs en un produit scalaire nul. Ces derniers ont effectué une conversion entre le registre de la langue naturelle et le registre algébrique. Ils ont également pu reconnaître l'objet décrit par cette équation.

Ainsi, la reconnaissance des objets à partir d'ensembles n'est pas développée par la plupart des étudiants.

3 Questionnaire auprès des élèves du secondaire

Dans ce questionnaire, les deux premières questions sont identiques à celles posées pour les étudiants de BAB1. Deux autres questions ont été ajoutées pour tester si une certaine flexibilité a été développée par les élèves à la suite de notre enseignement. En particulier, nous regardons l'articulation des points de vue paramétrique et cartésien.

3.1 Question 1

▸▸ Analyse *a priori*

L'analyse *a priori* de cette question se réalise avec comme référence l'enseignement que nous avons proposé. Cette fois-ci, les équations de droites et de plans ainsi que les ensembles sont des connaissances en cours d'acquisition pour les élèves. Cette analyse ne diffère pas beaucoup de celle réalisée précédemment.

Connaissances mises en jeu

- Connaissances anciennes : colinéarité, produit scalaire, vecteur, positions relatives de deux plans, résolution de systèmes, orthogonalité.
- Connaissances en cours d'acquisition : équations paramétriques et cartésiennes de droites et de plans dans l'espace, notions et notations ensemblistes.

▸▸ Dépouillement des copies

Le tableau XIII.4 fournit pour chaque sous-question les réponses des 7 élèves. L'abréviation « JNCP » est utilisée pour la réponse « Je ne connais pas la réponse ». Nous mettons en gras les réponses correctes.

Questions	Droite	Plan	JNCP
1	4	**3**	0
2	2	**4**	1
3	**2**	3	2
4	**6**	1	0
5	0	**7**	0
6	1	**4**	2
7	**1**	3	3

TABLE XIII.4 – Réponses des élèves à la première question.

Pour la première sous-question, les élèves sont partagés entre les réponses « Plan » et « Droite ». La différence entre ces deux choix n'est pas très significative. Toutefois, la majorité des élèves rencontre encore des difficultés à reconnaître les plans à partir d'équations incomplètes. Ces difficultés semblent s'atténuer lorsque l'équation n'est pas de la forme $ax+by=c$. En effet, la majorité des élèves a correctement répondu à la deuxième sous-question. La reconnaissance des objets décrits par des équations paramétriques semble quant à elle maîtrisée par la majorité des élèves, et ce, pour les droites et les plans comme en témoignent les résultats des sous-questions 4 et 5.

Nous analysons maintenant les sous-questions 3, 6 et 7 et en particulier les justifications associées. Ici aussi, nous constatons que le nombre de réponses « Je ne connais pas la réponse » augmente lorsque des adaptations sont à réaliser et lorsqu'une justification doit être produite.

La sous-question 3

La majorité des élèves a répondu que le système décrit un plan. Les justifications apportées par ces élèves sont données aux figures XIII.18, XIII.19 et XIII.20.

> cela va nous donner un plan car nous sommes dans un système avec une équation cartésienne avec un inconnu qui est fixe. Donc nous avons une condition sur notre système. Ce qui va nous donner un plan.

FIGURE XIII.18 – Réponse de l'élève E_1 à la sous-question 3.

> Il s'agit de l'équation cartésienne d'un plan car elle est de type $ax+by+cz=d$ et x est fixé à 1 donc le plan sera parallèle à Oyz.

FIGURE XIII.19 – Réponse de l'élève E_2 à la sous-question 3.

> car c'est un plan où le x est invariable et tjr $=1$ et $y,z \in \mathbb{R}$.

FIGURE XIII.20 – Réponse de l'élève E_6 à la sous-question 3.

Les élèves apportent principalement des justifications qui peuvent être correctes pour des ensembles de points. En effet, l'ensemble $\{(1,y,z) \mid y,z \in \mathbb{R}\}$ décrit bien un plan parallèle à Oyz. Nous avons souvent justifié cela en classe par le fait que l'abscisse est fixée et que l'ordonnée et la cote peuvent varier. Il se peut donc que le travail spécifique mené dans notre enseignement sur les ensembles de points n'aide pas les élèves à mieux reconnaître les objets décrits par des équations cartésiennes. Nous notons que ces élèves ont bien tenu compte des deux équations données contrairement à la plupart des étudiants.

Parmi les élèves qui ont correctement répondu, seul un élève a justifié son choix (voir figure XIII.21).

Système d'équation : on isole les inconnues, on trouvera (x,y,z) ce qu'il est une droite car $\frac{x-x_A}{x_v}$ et $x_v = 0$.

FIGURE XIII.21 – Réponse de l'élève E4 à la sous-question 3.

Nous pensons que cet élève est capable de donner un système d'équations cartésiennes d'une droite sous forme canonique et qu'il essaie de faire un parallèle avec la forme générale donnée. Cela peut se justifier par le fait qu'il dit que $x_v = 0$ c'est-à-dire que la première composante du vecteur directeur de la droite est nulle. Toutefois, il ne parvient à donner ni les autres composantes du vecteur directeur, ni la forme canonique du système.

Ainsi, nous considérons que tous les élèves ont échoué à cette question. En effet, seuls deux élèves ont correctement répondu et ils ne justifient qu'en partie ou pas du tout leur choix. Nous pensons que ce n'est pas la reconnaissance des objets à partir des équations qui fait défaut aux élèves mais plutôt la prise en compte de toutes les équations du système. Bien que cela ait fait l'objet d'un travail important dans notre activité d'introduction, il semble difficile pour les élèves d'associer à ce système d'équations l'ensemble de triplets correspondant. Cela peut s'expliquer par le fait que cette conversion entre le registre algébrique et le registre ensembliste a souvent été prise en charge par l'enseignant à cause notamment du caractère nouveau de celle-ci et des difficultés rencontrées par les élèves.

La sous-question 6

La sixième sous-question est réussie par la majorité des élèves. Les justifications apportées sont données aux figures XIII.22, XIII.23, XIII.24 et XIII.25.

$$\overrightarrow{v_n}(1)(2,3,4)$$
$$\overrightarrow{v_n}(2)(4,6,8)$$
$$\exists k \in \mathbb{R}_0, (2,3,4) = k(4,6,8)$$
$$k = \frac{1}{2}$$
plan parallèle confondu

FIGURE XIII.22 – Réponse de l'élève E_2 à la sous-question 6.

α et β sont parallèles confondu car les vecteurs sont colinéaires.
$\exists k \in \mathbb{R}_0, (4,6,8) = k(2,3,4)$, $k = 2$.

FIGURE XIII.23 – Réponse de l'élève E_3 à la sous-question 6.

2 plans $\|$ confondus $\rightarrow$ plan.

FIGURE XIII.24 – Réponse de l'élève E_7 à la sous-question 6.

Ces trois élèves ont réussi à reconnaître les plans à partir des équations données mais aussi à déterminer leur position relative. Bien que les élèves E_2 et E_3 montrent que les vecteurs normaux des plans sont colinéaires, aucun élève ne justifie que les plans sont effectivement bien confondus et non distincts. Les connaissances des élèves en géométries vectorielle, synthétique et analytique ont bien été mobilisées.

À la figure XIII.25, l'élève reconnait bien l'objet décrit par l'équation cartésienne donnée mais ne parle pas de l'équivalence des deux équations. Il est donc difficile de dire si cet élève a bien considéré le système dans son entièreté.

Système d'équation : déterminer les inconnues pour vérifier l'égalité.
$2x+3y+4z=2 \Rightarrow$ eq. cartésienne d'un plan

FIGURE XIII.25 – Réponse de l'élève E_4 à la sous-question 6.

Un élève a répondu que le système décrit une droite. Celui-ci a bien reconnu les objets décrits par une équation mais n'a pas constaté que les équations sont équivalentes comme cela est illustré à la figure XIII.26.

Cela va donner une droite car on nous donne 2 équations cartésiennes et dans un système comme cela, ça va nous donner l'intersection de 2 plans donc une droite.

FIGURE XIII.26 – Réponse de l'élève E_1 à la sous-question 6.

Un élève a répondu qu'il ne pouvait pas répondre à la question. Pourtant, il a bien reconnu que les équations décrivent un plan et qu'elles sont équivalentes. Toutefois, à l'inverse des élèves précédents, il ne considère pas que les plans peuvent être confondus. Un manque de connaissances anciennes sur les positions relatives de deux plans peut expliquer cette erreur. La figure XIII.27 donne un extrait de la copie de cet élève.

équations cartésiennes du plan qui sont colinéaires. Donc pas d'intersection entre ces 2 plans.

FIGURE XIII.27 – Réponse de l'élève E_5 à la sous-question 6.

Globalement, cette sous-question a été bien réussie. La reconnaissance des objets à partir des équations ne semble pas du tout problématique pour les élèves. Par contre, c'est la mobilisation de leurs connaissances antérieures qui peut faire défaut telles que la colinéarité ou les positions relatives de deux plans.

La sous-question 7

La sous-question 7 est très mal réussie. Nous repérons non seulement une difficulté à organiser leur raisonnement à partir de cet ensemble de points mais aussi à traiter le registre ensembliste. Les figures XIII.28 et XIII.29 mettent en évidence celles-ci pour des élèves qui ont répondu que l'ensemble décrit un plan.

> car on a 2 vecteur directeurs.

FIGURE XIII.28 – Réponse de l'élève E_4 à la sous-question 7.

> plan car 2 vecteurs normaux

FIGURE XIII.29 – Réponse de l'élève E_5 à la sous-question 7.

L'élève E_4 considère à juste titre que les deux vecteurs donnés sont des vecteurs directeurs d'un plan. Toutefois, il ne prend pas en compte que l'ensemble ne décrit pas ce plan mais plutôt une droite perpendiculaire à ce plan. L'élève E_5 considère quant à lui qu'il faut deux vecteurs normaux pour décrire un plan. Nous pensons qu'il confond les notions de vecteur directeur et de vecteur normal à un plan. Il ne considère pas non plus l'ensemble des vecteurs orthogonaux à ce plan. Il s'agit donc bien chez ces élèves, selon nous, d'une difficulté à raisonner sur un ensemble de vecteurs qui vérifient une condition précise.

L'élève E_1 est le seul à répondre correctement à la question. Sa justification montre cependant un problème qui peut être lié à la notion d'infini ou à la notion de dimension. En effet, il pense qu'il y a moins de points dans une droite que dans un plan comme cela est illustré à la figure XIII.30.

> Cela va être une droite car nous avons 2 conditions, il faut que (a,b,c) soit orthogonal à $(1,-1,1)$ et $(1,2,1)$. Donc nous avons plus beaucoup de points. Donc cela va donner une droite.

FIGURE XIII.30 – Réponse de l'élève E_1 à la sous-question 7.

L'élève E_3 a réussi à organiser son raisonnement et à traduire l'orthogonalité des vecteurs en un système de deux équations cartésiennes de plans. Par contre, il n'est pas capable de reconnaître l'objet décrit par celui-ci. La figure XIII.31 montre qu'il mobilise bien ses connaissances antérieures en géométrie vectorielle et qu'il reconnait bien que chaque équation décrit un plan. Les positions relatives de deux plans ne semblent pas disponibles chez cet élève ce qui l'amène à répondre qu'il ne connait pas la réponse.

$$(a,b,c)\cdot(1,-1,1)=0 \Rightarrow a-b+c=0$$
$$(a,b,c)\cdot(1,2,1)=0 \Rightarrow a+2b+c=0$$
Ce n'est ni un plan, ni une droite car on ne trouve pas la même équation de plan.

FIGURE XIII.31 – Réponse de l'élève E_3 à la sous-question 7.

Ainsi, la reconnaissance des objets à partir d'ensemble de points reste encore très problématique chez les élèves à la suite de notre enseignement.

▶▶ Conclusion

Nous revenons maintenant sur les adaptations des connaissances qui ont été réalisées par les élèves à la suite de notre enseignement.

Au niveau des équations, les analyses menées révèlent que les élèves sont capables de reconnaître les objets décrits par des équations dans le point de vue paramétrique et dans le point vue cartésien. Toutefois, le point de vue cartésien soulève quelques difficultés rencontrées par les élèves. Notre enseignement ne semble pas aider les élèves à surmonter la difficulté liée aux équations incomplètes de plans de la forme $ax+by=c$. Nous avons pourtant passé beaucoup de temps en classe sur ce type d'équations. Nous avons également repéré dans les copies des élèves qu'ils ont tendance à associer à une équation un ensemble de points la vérifiant. C'est donc un point positif de notre expérimentation. Cependant, ils ne considèrent qu'une seule équation à la sous-question 3 et non le système composé de deux équations. Leurs justifications ne sont donc valables que pour l'équation $x=1$ et non pour l'entièreté du système donné. Il est possible que cela soit lié au fait qu'ils n'ont pas eu beaucoup la possibilité d'effectuer en autonomie les conversions entre le registre algébrique et le registre ensembliste. Cette adaptation n'est donc pas réalisée par la majorité des élèves.

Les élèves choisissent une méthode pour justifier leur réponse. Cette méthode n'est jamais une résolution algébrique des systèmes proposés aux sous-questions 3 et 6. Cela semble montrer que la résolution algébrique n'est plus privilégiée par les élèves et qu'un raisonnement plutôt géométrique questionnant les objets décrits par les équations est bien développé. C'est un point positif de notre enseignement. Les justifications proposées sont majoritairement dans le registre de la langue naturelle bien que quelques élèves travaillent plutôt dans le registre algébrique ou le registre du dessin. Dans celles-ci, les connaissances de géométries vectorielle, synthétique et analytique ont bien été mobilisées par la majorité des élèves. Nous avons toutefois constaté que les positions relatives de deux plans ne sont pas disponibles chez un élève.

La reconnaissance des objets à partir d'un ensemble semble encore être très problématique pour la plupart des élèves (voir sous-question 7). Un seul élève parvient à répondre correctement à la question mais la justification apportée montre une conception erronée de la notion d'infini à laquelle nous ne nous attendions pas. En effet, cet élève pense qu'il y a moins de points dans une droite que dans un plan. Nous considérons alors qu'aucun élève n'a réussi cette sous-question. L'organisation du raisonnement et la mobilisation de leurs connaissances en cours d'acquisition (ensembles) ne sont pas des adaptations réalisées par la majorité des élèves. Seul un élève a effectué une conversion entre le registre de la langue naturelle et le registre algébrique et mobilisé des connaissances anciennes de géométrie vectorielle. Toutefois, il n'est pas parvenu à reconnaître l'objet décrit par le système d'équations certainement à cause d'une absence de connaissances en géométrie synthétique sur la position relative de deux plans.

Les résultats de cette première question mettent en évidence que le premier aspect de l'interprétation géométrique a bien été développé par les élèves pour les équations. Toutefois, le travail sur les ensembles amène des difficultés chez les élèves notamment de par son caractère nouveau, mais aussi parce qu'ils n'ont certainement pas eu beaucoup l'occasion de travailler en autonomie les traitements et les conversions avec le registre ensembliste, comme notre étude des déroulements en classe l'a montré (cf. chapitre XII).

3.2 Question 2

▸▸ Analyse *a priori*

La référence pour cette analyse est l'enseignement que nous avons proposé. L'analyse *a priori* est similaire à celle effectuée précédemment si ce n'est que les connaissances des élèves ne sont pas les mêmes. Nous les précisons.

Connaissances mises en jeu

- □ Connaissances anciennes : orthogonalité, produit scalaire, vecteur, colinéarité.
- □ Connaissances en cours d'acquisition : équations paramétriques et cartésiennes de plans, notions et notations ensemblistes, description d'un plan par un ensemble de vecteurs.

Adaptations à réaliser

Une autre méthode peut s'ajouter aux deux déjà décrites précédemment. Puisque nous avons vu en classe qu'un plan est un ensemble de vecteurs tous orthogonaux à un vecteur donné, ce résultat peut directement être appliqué ici. Il y a une *mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition*.

▸▸ Dépouillement des copies

Le tableau XIII.5 donne les réponses fournies par les 7 élèves. Nous mettons en gras la réponse correcte.

Figure 1	Figure 2	Figure 3
0	3	**4**

TABLE XIII.5 – Réponses des élèves à la deuxième question.

Les élèves se sont répartis entre la figure 2 et la figure 3. Toutefois, la majorité des élèves a répondu correctement. Certains d'entre eux ont traduit l'orthogonalité des vecteurs en un produit scalaire nul. Ils ont ensuite reconnu le plan à partir d'une équation cartésienne comme à la figure XIII.32.

$$(a,b,c)\cdot(1,-1,1)=0 \Rightarrow a-b+c=0.$$

FIGURE XIII.32 – Réponse de l'élève E_3 à la deuxième question.

L'élève E_1 a répondu que l'objet décrit par l'ensemble donné est un plan en fonction du nombre de conditions imposées. Nous repérons encore une fois une conception erronée liée à la notion d'infini ou de dimension dans sa justification. Cela est illustré à la figure XIII.33.

C'est la figure 3 car nous n'avons qu'une condition, il faut que (a,b,c) soit orthogonal à $(1,-1,1)$. Donc nous avons beaucoup de choix de points. Donc cela va donner un plan.

FIGURE XIII.33 – Réponse de l'élève E_1 à la deuxième question.

Parmi les élèves qui ont choisi la figure 2, nous relevons que l'élève E_2 traduit bien l'orthogonalité des vecteurs en un produit scalaire nul mais il ne parvient pas à reconnaître l'objet décrit par cette équation. La figure XIII.34 présente cette copie. Comme cet aspect de l'interprétation géométrique pour les équations cartésiennes ne lui pose pas de problème pour les autres questions, nous pensons qu'une explication peut être liée aux noms des variables. En effet, l'équation à étudier ici est $a-b+c=0$ et non $x-y+z=0$.

Orthogonal : le produit scalaire vaut 0.
$$a.1+b.(-1)+c.1=0$$
$$a-b+c=0$$
On ne peut faire le produit scalaire qu'entre deux vecteurs.

FIGURE XIII.34 – Réponse de l'élève E_2 à la deuxième question.

Les autres élèves ont rencontré des difficultés à organiser leur raisonnement et à traiter avec le registre ensembliste. Nous repérons comme pour la première question qu'ils ne considèrent que le vecteur $(1,-1,1)$ et non l'ensemble de tous les vecteurs qui lui sont orthogonaux.

▸▸ Conclusion

La reconnaissance des objets à partir d'ensembles ne semble pas du tout développée chez les élèves. Pourtant, un résultat du cours aurait pu être automatiquement utilisé. Il se peut que les élèves n'aient pas vu que ce résultat pouvait être particularisé à cette question. Il est également possible que le résultat ne fasse pas partie du bagage mathématique des élèves à cause d'un manque de travail personnel en vue de préparer cette évaluation.

La majorité des élèves a correctement répondu à la question. Ils ont principalement recherché une équation afin de déterminer l'objet qu'elle décrit. Ils ont donc réussi à organiser leur raisonnement, à reconnaître les modalités d'application, à mobiliser leurs connaissances anciennes et en cours d'acquisition sur les ensembles et à effectuer une conversion entre le registre de la langue naturelle et le registre algébrique. Ils ont donc reconnu l'objet décrit à partir d'une équation dans le point de vue cartésien.

3.3 Question 3

> Donnez une équation paramétrique du plan α parallèle au plan $\beta \equiv 2x+3y+4z=8$ et comprenant le point $A(1,4,5)$.

Nous nous basons sur le travail fait en classe lors de notre expérimentation pour donner les solutions possibles et réaliser l'analyse *a priori*.

▸▸ Solutions

Plusieurs méthodes sont possibles.

Première méthode

Puisque le plan α est parallèle au plan β, un vecteur normal de α est colinéaire à un vecteur normal de β. Un vecteur normal de β est $(2,3,4)$. Nous pouvons écrire une équation cartésienne du plan α : $\alpha \equiv 2x+3y+4z=d$.

Puisque le point $A(1,4,5)$ est un point du plan α, nous pouvons déterminer la valeur de d. Nous avons : $2+12+20=d \Leftrightarrow d=34$. Ainsi, $\alpha \equiv 2x+3y+4z=34$.

Nous cherchons une équation paramétrique du plan α. Nous introduisons alors deux paramètres. Posons $x=\lambda$ et $y=\mu$ où λ et μ sont deux paramètres réels. Nous déduisons $z=\frac{34-2\lambda-3\mu}{4}$.

Une équation paramétrique du plan α est (où $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$) :

$$(x,y,z)=\left(0,0,\frac{17}{2}\right)+\lambda\left(1,0,\frac{-1}{2}\right)+\mu\left(0,1,\frac{-3}{4}\right).$$

Deuxième méthode

Puisque le plan α est parallèle au plan β, deux vecteurs directeurs de β sont des vecteurs directeurs de α. Nous devons déterminer deux vecteurs directeur de β. Nous introduisons alors deux paramètres. Posons $x=\lambda$ et $y=\mu$ où λ et μ sont deux paramètres réels. Nous déduisons $z=\frac{8-2\lambda-3\mu}{4}$. Une équation paramétrique du plan β est (où $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$) :

$$(x,y,z)=\left(0,0,2\right)+\lambda\left(1,0,\frac{-1}{2}\right)+\mu\left(0,1,\frac{-3}{4}\right).$$

Ainsi, une équation paramétrique du plan α est (où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$) :

$$(x,y,z) = \left(1,4,5\right) + \lambda\left(1,0,\frac{-1}{2}\right) + \mu\left(0,1,\frac{-3}{4}\right).$$

▶▶ Analyse *a priori*

La question est fermée. Le travail à réaliser ici est relativement proche de ce qui a été fait en classe.

Domaines de travail

Cadre de la géométrie analytique, cadre de la géométrie vectorielle.

Registres d'écriture

Registre de la langue naturelle, registre algébrique.

Points de vue

Point de vue paramétrique, point de vue cartésien.

Connaissances mises en jeu

- Connaissances anciennes : parallélisme, colinéarité, vecteur.
- Connaissances en cours d'acquisition : équations cartésiennes et paramétriques de plans, vecteur normal, positions relatives de deux plans.

Adaptations à réaliser

L'énoncé est donné en langue naturelle. Il s'agit de déterminer une équation paramétrique d'un plan sachant sa position relative par rapport à un objet décrit dans le point de vue cartésien. Plusieurs méthodes peuvent être envisagées (*existence de choix*). Pour la première méthode, l'*organisation du raisonnement* est découpée en plusieurs étapes. Il s'agit tout d'abord au vu des informations données d'écrire une équation cartésienne du plan α (*reconnaissance des modalités d'application*). Pour ce faire, le parallélisme des deux plans doit être traduit en la colinéarité des vecteurs normaux (*mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition*). Un vecteur normal du plan β est déterminé (*reconnaissance des modalités d'application*). Un vecteur qui lui est colinéaire doit être choisi (*existence de choix*, *changement de cadres*). Une équation cartésienne avec un terme indépendant générique peut être donnée (*mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition*). Le point permet de trouver la valeur du terme indépendant (*changement de points de vue au sens de Robert*). Pour obtenir une équation paramétrique du plan α, un *changement de points de vue* doit être effectué.

Pour la deuxième méthode, l'*organisation du raisonnement* est découpée en plusieurs étapes. Il s'agit tout d'abord de traduire le parallélisme des deux plans en termes de colinéarité des vecteurs directeurs (*mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition*). Pour ce faire, une équation paramétrique du plan β doit être écrite (*mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition*). Un *changement de points de vue* doit être effectué. Une fois que deux vecteurs directeurs du plan β ont été déterminés (*reconnaissance* *des modalités d'application*), deux vecteurs qui leur sont colinéaires doivent être choisis (*existence de choix*, *changement de cadres*). Comme un point du plan α est donné, une équation paramétrique du plan peut être écrite (*mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition*).

►► Dépouillement des copies

La question vaut 4 points et est considérée comme réussie lorsque l'élève a une note supérieure ou égale à 2 sur 4. Les résultats des élèves sont repris dans le tableau XIII.6.

Note	Nombre d'élèves
0	2
1	4
2	1
3	0
4	0

TABLE XIII.6 – Répartition des notes des élèves pour la troisième question.

Le taux de réussite à cette question est de 14%. Nous dépouillons les copies des élèves pour déterminer les adaptations qui sont réalisées de celles qui peuvent amener des difficultés.

Tous les élèves ont choisi une méthode de résolution pour cette question. La première méthode est choisie par 4 élèves. Ils ont tous été capables de traduire le parallélisme des deux plans en termes vectoriels. Ils ont donc bien mobilisé leurs connaissances pour effectuer la conversion entre le registre de la langue naturelle et le registre algébrique. Ils ont également réussi à déterminer un vecteur normal du plan β et donc à reconnaître les modalités d'applications des équations cartésiennes. Le choix d'un vecteur colinéaire au vecteur normal trouvé est bien effectué par 3 élèves sur les 4. L'élève E_7 n'a pas choisi un vecteur en particulier mais a considéré l'ensemble des vecteurs colinéaires au vecteur normal du plan β. Cette adaptation ne lui a pas permis de continuer son raisonnement. Nous illustrons cela avec l'extrait de sa copie à la figure XIII.35.

$$\vec{v_n}(2,3,4) \perp \alpha.$$
$$2kx + 3ky + 4kz = .$$

FIGURE XIII.35 – Réponse de l'élève E_7 à la troisième question.

L'élève E_2 n'a pas réussi à organiser son raisonnement pour le reste de la tâche. En particulier, il n'est pas parvenu à déterminer ce qu'il pouvait faire pour trouver une équation paramétrique du plan α connaissant un vecteur normal de ce plan. L'élève E_3 a voulu écrire directement une équation paramétrique du plan α en connaissant un point et un vecteur normal du plan. Pour ce faire, il a cherché deux vecteurs orthogonaux au vecteur normal choisi comme la figure XIII.36 le montre.

$$(-2,0,1)\cdot(2,3,4)=0$$
$$(2,3,4)\cdot(a,b,c)=0$$
$$2a+3b+4c=0 \quad \overrightarrow{v_d}(0,0,0)$$
$$\Rightarrow \alpha \equiv (x,y,z)=(1,4,5)+\lambda(0,0,0)+\mu(-2,0,1).$$

FIGURE XIII.36 – Réponse de l'élève E_3 à la troisième question.

Cet élève semble être capable de dire que deux vecteurs directeurs et un point sont nécessaires pour écrire une équation paramétrique d'un plan. Il connait également la relation d'orthogonalité entre les vecteurs directeurs et les vecteurs normaux. Toutefois, il pense que le vecteur nul peut être un vecteur directeur du plan. Une connaissance en cours d'acquisition n'est certainement pas disponible pour lui.

L'élève E_1 a écrit une équation cartésienne valide pour le plan α. Il n'est pas allé plus loin dans la réalisation de la tâche. Il est possible qu'il rencontre des difficultés à passer du point de vue cartésien au point de vue paramétrique. Il se peut également qu'il pense avoir effectivement bien écrit une équation paramétrique du plan α. Nous pensons tout de même que cette dernière possibilité est insensée puisque cet élève a été capable aux trois autres questions de l'évaluation de distinguer les équations cartésiennes des équations paramétriques.

La deuxième méthode possible de résolution a été choisie par 2 élèves. Pour écrire une équation paramétrique du plan β, l'élève E_5 a posé trois variables et a voulu isoler chacune de celles-ci. La figure XIII.37 illustre ses difficultés à passer du point de vue cartésien au point de vue paramétrique.

Posons $x=\lambda$, $y=\mu$ et $z=\delta$.

$$\begin{cases} \lambda = \frac{3\mu+4\delta}{2} \\ \mu = \frac{2\lambda+4\delta}{3} \\ \delta = \frac{2\lambda+3\mu}{4} \end{cases}$$

FIGURE XIII.37 – Réponse de l'élève E_5 à la troisième question.

L'élève E_4 a posé $x=\lambda$ et $z=\mu$. Il a donc bien introduit deux paramètres mais il n'est pas parvenu à écrire le système d'équations paramétriques adéquat comme cela est illustré à la figure XIII.38.

$$\begin{cases} 2x = \lambda \\ 3y = 8 - 2x - 4z \\ 4z = \mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\lambda}{2} \\ y = \frac{8-2\lambda-4\mu}{3} \\ z = \frac{\mu}{4} \end{cases}$$

$(x,y,z) = (0, \frac{8}{3}, 0) + \lambda(\frac{1}{2}, \frac{-2}{3}, 0) + \mu(0, \frac{-4}{3}, \frac{1}{4})$ où λ, μ sont des réels.

FIGURE XIII.38 – Réponse de l'élève E_4 à la troisième question.

Cet élève n'écrit pas un système correspondant aux variables qu'il a posées mais plutôt aux variables $2x = \lambda$ et $4z = \mu$. Or, il remplace x et z dans le deuxième système par λ et μ. L'équation paramétrique donnée pour le plan β est donc incorrecte. Nous repérons cependant que cet élève a une démarche globale correcte. En effet, il pose bien deux paramètres, écrit un système dans lequel il vient isoler x, y et z et il est capable de passer du système d'équations à une équation paramétrique. Ainsi, bien qu'il y ait des erreurs algébriques, nous pensons que le changement de points de vue dans le sens cartésien/paramétrique est réalisé par cet élève. Il ne fournit néanmoins aucune équation paramétrique du plan α. Il est possible qu'il ne soit pas capable d'effectuer la conversion entre le registre de la langue naturelle et le registre algébrique permettant de traduire le parallélisme des deux plans.

L'élève E_6 a voulu écrire une équation paramétrique du plan α sans changer de points de vue. La figure XIII.39 illustre sa démarche.

$(x,y,z) = \mu(1,4,5) + \lambda(4x, 6y, 8z)$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x = \mu + \lambda(4x) = 16 \\ y = 4\mu + \lambda(6y) = 16 \\ z = 5\mu + \lambda(8z) = 16 \end{cases}$$

FIGURE XIII.39 – Réponse de l'élève E_6 à la troisième question.

Un vecteur directeur donné par cet élève est $(1,4,5)$. Or, ce sont les coordonnées du point A appartenant au plan. Il semble confondre les vecteurs et les points. De plus, le deuxième vecteur directeur donné n'a aucun sens car il dépend lui aussi de x, y et z. Nous remarquons que $(4,6,8)$ est un vecteur colinéaire au vecteur $(2,3,4)$. Nous pensons qu'il a voulu exprimer qu'il prenait un vecteur colinéaire au vecteur normal du plan β. Cet élève rencontre donc des difficultés à réaliser toutes les adaptations en jeu dans cette tâche. En effet, il ne parvient pas à organiser son raisonnement et à mobiliser ses connaissances anciennes et en cours d'acquisition, ce qui le bloque dans la résolution de l'exercice.

▸▸ Conclusion

Tous les élèves se lancent bien dans la réalisation de la tâche. Toutefois, aucun élève ne parvient à donner une solution complète de cet exercice. Nous avons montré que la majorité des élèves choisit une méthode de résolution valide et mobilise bien les connaissances anciennes et en cours d'acquisition. La reconnaissance des modalités d'application des équations cartésiennes et paramétriques ne semble pas être problématique pour la plupart d'entre eux.

Nos analyses de copies semblent montrer que la conversion entre le registre de la langue naturelle et le registre algébrique n'amène pas de difficultés chez les élèves (sauf E_6). Il est toutefois difficile de nous prononcer quant au changement de points de vue attendu dans cette question. En effet, 4 élèves sur 7 n'arrivent pas à cette étape du raisonnement. Nous ne pouvons donc pas affirmer qu'ils ne sont pas capables d'articuler les points de vue. Toutefois, ils rencontrent des difficultés à organiser leur raisonnement. Parmi les élèves qui ont changé de points de vue, aucun ne parvient à donner une équation paramétrique valide d'un plan soit parce que la démarche n'est pas acquise, soit par une indisponibilité d'une connaissance nouvelle ou encore par des erreurs de calculs. Il se peut donc que l'articulation des points de vue ne soit pas développée par les élèves à la suite de notre enseignement.

3.4 Question 4

Déterminez une équation cartésienne du plan α parallèle à la droite $d \equiv \frac{x+1}{2} = y = -2z+1$, perpendiculaire au plan $\beta \equiv x+y+2z=0$ et passant par le point $A(2,3,1)$.

Nous nous basons sur le travail fait en classe lors de notre expérimentation pour donner les solutions possibles et réaliser l'analyse *a priori*.

►► Solutions

Le plan α est parallèle à la droite d. Un vecteur directeur de la droite d est alors un vecteur directeur du plan α. Écrivons le système d'équations cartésiennes de la droite sous la forme canonique. Nous avons :

$$\frac{x-(-1)}{2} = y = \frac{z-\frac{1}{2}}{\frac{-1}{2}}.$$

Un vecteur directeur de la droite d est $(2,1,\frac{-1}{2})$ ou encore $(4,2,-1)$.

Le plan α est perpendiculaire au plan β. Un vecteur normal de β est un vecteur directeur du plan α. Un vecteur normal du plan β est $(1,1,2)$.

Nous avons un point et deux vecteurs directeurs du plan α. Une équation paramétrique du plan α est :

$$(x,y,z) = (2,3,1) + \lambda(4,2,-1) + \mu(1,1,2)$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Pour obtenir une équation cartésienne du plan α, nous éliminons les deux paramètres. Nous écrivons un système d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = 2 + 4\lambda + \mu \\ y = 3 + 2\lambda + \mu \\ z = 1 - \lambda + 2\mu \end{cases}$$

Nous isolons μ dans les deux premières équations. Nous avons :

$$\begin{cases} x - 2 - 4\lambda = \mu \\ y - 3 - 2\lambda = \mu \\ z = 1 - \lambda + 2\mu \end{cases}$$

Nous pouvons égaler les deux premières équations et isoler λ. Nous obtenons :

$$\begin{cases} x + 1 - y = 2\lambda \\ y - 3 - 2\lambda = \mu \\ z = 1 - \lambda + 2\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 - y = 2\lambda \\ 2y - 4 - x = \mu \\ z = 1 - \lambda + 2\mu \end{cases}$$

En remplaçant dans la troisième équation les valeurs trouvées de λ et μ, nous avons :

$$\begin{aligned} & & z = 1 - \frac{x + 1 - y}{2} + 4y - 8 - 2x \\ \Leftrightarrow & & 2z = 2 - x - 1 - y + 8y - 16 - 4x \\ \Leftrightarrow & & 5x - 9y + 2z = -15 \end{aligned}$$

Ainsi, une équation cartésienne de α est $5x - 9y + 2z = -15$.

▸▸ Analyse *a priori*

L'analyse *a priori* de cette question est similaire à celle de l'exercice 11 que nous avons présentée dans le chapitre XI à la page 378.

▸▸ Dépouillement des copies

La question vaut 4 points et est considérée comme réussie lorsque l'élève a une note supérieure ou égale à 2 sur 4. Les résultats des élèves sont repris dans le tableau XIII.7. L'élève E_6 n'a pas répondu à la question.

Note	Nombre d'élèves
0	1
1	1
2	0
3	4
4	1

TABLE XIII.7 – Répartition des notes des élèves pour la quatrième question.

Le taux de réussite à cette question est de 71%. Nous dépouillons les copies des élèves pour déterminer les adaptations qui sont réalisées de celles qui peuvent amener des difficultés.

La majorité des élèves a réalisé toutes les adaptations attendues pour la réalisation de cette tâche. Le système d'équations cartésiennes de la droite d a été mis sous forme canonique et un vecteur directeur de celle-ci a été déterminé. Un vecteur normal du plan β a également été déterminé. 5 élèves sur 6 ont réussi à organiser leur raisonnement en s'aidant d'un dessin. Une conversion entre les registres de la langue naturelle et du dessin mais aussi entre les registres du dessin et algébrique ont été réalisées correctement. Ces élèves ont tous écrit une équation paramétrique du plan α et ont éliminé les deux paramètres afin d'obtenir une équation cartésienne de celui-ci. Le changement de points de vue dans le sens paramétrique/cartésien semble donc développé par la majorité des élèves. Toutefois, 4 élèves sur 5 ont commis des erreurs de calculs lors de cette articulation. L'équation cartésienne qu'ils fournissent n'est pas une équation cartésienne du plan α.

L'élève E_5 n'a pas réussi à organiser son raisonnement. Bien qu'il ait identifié correctement un vecteur directeur de la droite d et un vecteur normal du plan β, il n'est pas capable de déterminer ce qu'il doit en faire. Comme nous l'avons suggéré en classe, cet élève fait un dessin de la situation. Toutefois, cela ne semble pas l'aider à effectuer la conversion entre le registre de la langue naturelle et le registre algébrique. La figure XIII.40 illustre sa copie.

EC de la droite : $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{-2z+1}{1} \Leftrightarrow \frac{x+1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-\frac{1}{2}}{\frac{-1}{2}}$

$$\overrightarrow{u}(2,1,\tfrac{-1}{2})$$

$$\beta \equiv x+y+2z=0$$

$$\overrightarrow{v_n}(1,1,2)$$

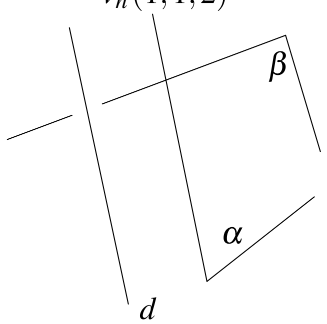

FIGURE XIII.40 – Réponse de l'élève E_5 à la quatrième question.

►► Conclusion

La majorité des élèves se lance bien dans la réalisation de la tâche et propose une équation cartésienne d'un plan. Toutefois, elle n'est correcte que chez un seul élève car ils commettent des erreurs de calculs lors du changement de points de vue. Les difficultés rencontrées sont, selon nous, liées aux traitements dans le registre algébrique. Le taux de réussite à cette question semble montrer que les élèves font preuve d'une certaine flexibilité entre les registres de la langue naturelle, algébrique et du dessin ainsi qu'entre les points de vue paramétrique et cartésien.

Ce type de tâche a déjà été réalisé en classe lors d'une unique correction collective. Celle-ci avait été improvisée par l'enseignant car les élèves rencontraient des difficultés à organiser leur raisonnement. Nos analyses des copies semblent montrer que la plupart des élèves ont apparemment surmonté cette difficulté à la suite de notre enseignement.

4 Comparaison des résultats

Nous comparons ici les réponses proposées par les étudiants et les élèves aux deux premières questions de l'évaluation. Nous cherchons à mettre en évidence les points communs et les différences entre les deux questionnaires afin de préciser les effets éventuels de notre expérimentation sur la reconnaissance des objets à partir d'équations et d'ensembles.

Le premier aspect de l'interprétation géométrique pour les équations paramétriques semble relativement développé par les étudiants et les élèves. En effet, le taux de réussite aux sous-questions 4 et 5 dans chaque questionnaire est d'au moins 54%.

Dans la première évaluation, la reconnaissance des objets à partir d'équations cartésiennes est très problématique notamment parce que les étudiants pensent qu'il est nécessaire que les trois variables soient présentes dans l'équation pour décrire un plan. Cela ressort particulièrement de nos analyses des copies pour les sous-questions 1, 2 et 3. Dans la seconde évaluation, les élèves semblent rencontrer moins de difficultés à reconnaître un plan à partir d'une équation cartésienne même s'ils pensent encore majoritairement que l'équation $2x+y=3$ est une droite. Ainsi, bien que notre enseignement semble améliorer l'interprétation géométrique des équations chez les élèves, des difficultés demeurent pour les équations dont la forme se rapproche de celle des équations cartésiennes de droites dans le plan.

Le premier aspect de l'interprétation géométrique des objets à partir d'ensembles est très problématique pour les étudiants. La sous-question 7 et la deuxième question montrent qu'ils ont beaucoup de difficultés à organiser leur raisonnement et à déterminer la nature des objets qu'ils manipulent. En particulier, nous avons montré qu'ils ne parviennent pas à traduire l'orthogonalité des vecteurs et confondent même parfois les notions de points et de vecteurs ainsi que les notions de vecteurs directeurs et de vecteurs normaux. Cet aspect de l'interprétation géométrique semble être un peu plus développé par les élèves. En effet, bien qu'ils éprouvent encore des difficultés à organiser leur raisonnement pour la sous-question 7, ils réussissent mieux la deuxième question et parviennent à formuler des justifications valides. De plus, nous ne repérons pas les confusions précédentes chez la plupart des élèves. Ainsi, notre enseignement semble avoir un impact positif sur la reconnaissance des objets à partir d'ensembles. Toutefois, cet aspect de l'interprétation géométrique est encore limité chez eux notamment parce que le registre ensembliste est relativement nouveau mais aussi parce que l'enseignant l'a souvent pris en charge lors des déroulements. D'autres choix de l'enseignant en classe auraient pu améliorer davantage cet aspect.

5 Inférences sur les apprentissages

Dans le chapitre XII, nous avons partiellement caractérisé les apprentissages des élèves grâce à nos analyses des déroulements en classe. Le dépouillement de leurs copies permet de préciser ce qu'ils sont capables de faire seuls, sans l'aide de l'enseignant, et ainsi d'approcher leurs apprentissages pour le chapitre des droites et des plans dans l'espace.

Un objectif principal de notre enseignement est de développer l'interprétation géométrique des objets chez les élèves. L'analyse des copies montre que la majorité d'entre eux reconnait les objets décrits à partir d'équations paramétriques et cartésiennes. Toutefois, des difficultés persistantes ont été repérées pour les équations incomplètes de plans de la forme $ax+by=c$. De plus, la troisième et la quatrième questions de l'évaluation montrent que les élèves sont capables de décrire un objet à la fois dans le point de vue cartésien et dans le point de vue paramétrique. Ainsi, les élèves interprètent géométriquement les objets dès qu'ils sont décrits par des équations.

L'expérimentation a mis en évidence que les élèves sont capables de reconnaître les objets décrits par des ensembles. Toutefois, lorsque ceux-ci s'éloignent de ceux travaillés en classe des difficultés apparaissent chez les élèves dans la manipulation du registre ensembliste et dans l'organisation de leur raisonnement. Ces constats sont confirmés par notre évaluation. En effet, les élèves ont mieux réussi la deuxième question, plus proche du travail réalisé en classe, que la sous-question 7 pour laquelle deux conditions doivent être traduites. Nous avons repéré dans l'analyse des copies de la sous-question 3 que les élèves veulent décrire l'ensemble des points associés au système d'équations. Or, ils ne tiennent compte que d'une seule des équations du système. De ce fait, la description des objets géométriques par des ensembles est encore problématique pour la plupart des élèves. Cela semble cohérent avec les résultats de notre analyse des déroulements. En effet, nous avons noté que celle-ci est souvent prise en charge par l'enseignant en classe, ce qui a limité le travail individuel des élèves dans ce registre d'écriture. Ainsi, seul le premier aspect de l'interprétation géométrique est dévéloppé par les élèves pour les ensembles.

Un deuxième objectif principal de notre enseignement est de développer une certaine flexibilité chez les élèves entre les cadres, les registres et les points de vue. Notre expérimentation a mis en évidence qu'ils l'ont bien développée mais que celle-ci n'est pas celle attendue. Ce constat se confirme également par le dépouillement des copies des élèves. Nous avons en effet repéré dans l'analyse de la troisième et de la quatrième questions que les élèves sont capables d'effectuer des conversions entre le registre de la langue naturelle, le registre du dessin et le registre algébrique. Cela témoigne donc d'une certaine flexibilité entre les registres. Toutefois, les difficultés repérées avec le registre ensembliste montrent bien qu'elle est moins développée que celle visée dans notre expérimentation. L'articulation des points de vue dans le sens paramétrique/cartésien est bien maîtrisée par la plupart des élèves. Il est difficile de se prononcer de manière semblable pour celle dans le sens cartésien/paramétrique. En effet, la majorité des élèves a été bloquée dans la résolution de la troisième question avant de devoir articuler les points de vue. Cependant, l'analyse des déroulements a bien montré que les élèves sont capables en toute autonomie et sans difficulté majeure de réaliser cette adaptation. La flexibilité entre les deux points de vue semble donc bien développée par les élèves.

6 Bilan

Les analyses didactiques menées dans les parties 1 et 2 nous ont amenée à nous questionner sur la possibilité de proposer un enseignement pour le chapitre des droites et des plans dans l'espace susceptible d'enclencher des activités chez les élèves favorisant leur conceptualisation des notions. Dans cette partie, nous avons présenté un scénario dans lequel un travail sur les traitements internes et l'interprétation géométrique est proposé aux élèves. Nous avons mis en évidence les choix que nous avons effectués en tant que chercheur pour que ce scénario soit conforme aux contraintes institutionnelles et qu'il favorise la conceptualisation visée pour ces notions. Après avoir déterminé les activités attendues des élèves, nous l'avons expérimenté dans une classe de l'enseignement secondaire. L'analyse des déroulements a permis, par comparaison aux activités attendues des élèves, de préciser les activités qu'ils ont potentiellement développées. L'analyse de l'évaluation proposée à la suite de notre enseignement a quant à elle permis d'inférer des éléments sur les apprentissages des élèves.

Nous avons donc montré ici que les objectifs que nous nous sommes fixés ont été globalement atteints. En effet, nos analyses *a posteriori* révèlent que l'interprétation géométrique des objets est bien développée par les élèves pour les équations. Cependant, l'interprétation géométrique des objets à partir d'ensembles n'est pas maîtrisée par les élèves. Nous avons effectivement mis en évidence plusieurs difficultés chez les élèves à organiser leur raisonnement à partir du registre ensembliste et à manipuler les notions et notations de la théorie des ensembles. Ainsi, bien que notre enseignement mette souvent en jeu ce registre d'écriture, son caractère nouveau reste un facteur bloquant pour les élèves. Selon nous, cela témoigne du fait qu'un travail ponctuel sur les notions de théorie des ensembles n'est pas porteur de sens à ce niveau d'enseignement. Il est important que ce travail soit mené plus régulièrement dans le parcours des élèves pour les aider à surmonter leurs difficultés et à développer les dimensions outil et objet de ces notions. Nous avons toutefois montré, grâce à une comparaison entre les résultats des étudiants et des élèves à un même questionnaire, que la reconnaissance des objets à partir des ensembles s'améliore à la suite du travail proposé dans notre expérimentation. Ce résultat semble donc bien valider le fait que les proximités tentées par l'enseignant en classe favorise l'intégration de l'interprétation géométrique des objets chez les élèves.

Nous voulions également développer la flexibilité entre les cadres, les registres et les points de vue chez les élèves. Nos analyses des déroulements et des copies lors de l'évaluation montrent qu'ils ont bien développé une certaine flexibilité entre ces traitements internes mais celle-ci est quelque peu différente de celle que nous visions dans notre scénario. Ainsi, ce résultat semble également valider le fait que les proximités que nous avons tentées en classe favorise le développement d'une certaine flexibilité chez les élèves. Toutefois, les choix spontanés que nous avons faits en classe pour respecter les contraintes horaires et pour rester le plus possible dans la ZPD des élèves peuvent expliquer que la flexibilité développée n'est pas celle attendue. En effet, nous avons souvent pris en charge lors des moments de cours et des corrections collectives les adaptations liées au registre ensembliste. Nous pensons *a posteriori* que les aides apportées réduisent la tâche à l'instant t mais permettent *in fine* à plus d'élèves de développer une certaine flexibilité entre les cadres, les registres et les points de vue. Cela peut se justifier grâce aux résultats de l'évaluation.

En conclusion, nous avons bien proposé un enseignement du chapitre de géométrie analytique dans lequel les activités de traitements internes et d'interprétation géométriques sont possibles. Notre expérimentation a donc bien contribué à l'acquisition de ces notions par les élèves comme en témoignent leurs résultats à l'examen [1] pour cette partie (voir figure XIII.8).

	Note sur 18
E1	16,5
E2	10,5
E3	11
E4	15
E5	9,5
E6	1,5
E7	16,5

TABLE XIII.8 – Notes des élèves pour le chapitre des droites et des plans dans l'espace à l'examen.

1. Celui-ci a été organisé par l'enseignant habituel et les résultats donnés ne sont liés qu'aux questions sur les équations de droites et de plans dans l'espace (sans le calcul de distance). Rappelons que nous n'avons pas accès aux copies des élèves.