

Applications de la Décomposition Modale Empirique en traitement du signal et de l'image

Sommaire

5.1	Introduction	73
5.2	L'EMD appliqué aux images	74
5.2.1	Extension 2D de l'approche EDP pour l'EMD	74
5.2.2	Modèle de super-diffusion dans l'espace 2D	75
5.2.3	Relation avec les équations aux dérivées partielles définies sur des surfaces implicites	75
5.2.4	Quelques applications de l'approche EDP pour l'EMD 2D	76
5.3	EMD et applications	82
5.3.1	Le problème du mixage de modes	82
5.3.2	Débruitage de signaux par EMD	82
5.3.3	La compression par EMD	83
5.3.4	Le tatouage d'images : approche par EMD	85
5.3.5	L'analyse des composantes rythmiques dans les signaux EEG pour les Interfaces Cerveau-Machine (ICM) - ou Brain Computer Interface (BCI) -	87
5.4	Conclusion	92

5.1 Introduction

LA MÉTHODE *EMD* a marqué ces dernières années par le nombre croissant de ses applications en traitement du signal et de l'image. Les propriétés des modes issues

de la décomposition permettent une bonne séparation des différents atomes de fréquence qui composent le signal. Bien qu'étant introduite récemment, l'*EMD* a déjà été appliquée avec succès dans de nombreux domaines : débruitage, compression, analyse de textures, tatouage d'images, imagerie médicale... En effet, sa nature adaptative et algorithmique la rend à même de traiter des signaux non stationnaires issus de processus non linéaires, de manière simple et avec un coût algorithmique très raisonnable.

5.2 L'*EMD* appliqué aux images

La décomposition en ondelettes reste de nos jours très utilisée pour les applications nécessitant la séparation des composantes fréquentielles présentes dans une image. Malgré les résultats, la méthode ondelette reste toujours limitée par le fait que la base et l'échelle de décomposition sont données. Le signal résultant est alors limité sur une bande de fréquence fixe qui dépend uniquement de la fréquence d'échantillonnage et n'a aucune relation avec le signal lui-même, ce qui fait que la décomposition n'est pas adaptative. Comparée à la transformée en ondelettes, la décomposition modale empirique donne de meilleurs résultats du point de vue sélectivité et précision des données à analyser. L'*EMD* reste un outil très puissant pour l'analyse multi-résolution des signaux non stationnaires. Tous ces aspects intéressants motivent fortement une extension de l'*EMD* pour le traitement de l'image. La difficulté majeure de la décomposition modale empirique pour l'image reste la détermination des extrema *2D* - *sur une surface* - et le choix d'un interpolateur. Une fois ces paramètres déterminés, les détails de l'algorithme *EMD 2D* sont similaires au cas *1D*. De nombreux travaux ont été réalisés dans ce sens et ont permis de résoudre de nombreux défis pour la réduction de bruit, l'extraction de textures, la reconnaissance de formes ainsi que d'autres types d'application en traitement d'images.

5.2.1 Extension *2D* de l'approche *EDP* pour l'*EMD*

Dans [NTG⁺12a, Nia07], une extension *2D* de l'approche *EDP* pour l'*EMD* appliquée en traitement de l'image a été proposée. Ces travaux profitent du cadre théorique établi dans la version *1D*. Dans l'esprit du *processus de tamisage* original, cet algorithme de filtrage non linéaire est équivalent à une séquence itérative de régularisation et de reconstruction. Les résultats expérimentaux montrent que notre approche peut être utilisée pour décomposer des images avec des performances assez concurrentielles en termes de temps d'exécution, avec des algorithmes *EMD 2D* qui existent dans la littérature à l'exemple de *RBF-tools*. La principale contribution de cette approche est l'utilisation de la version *2D*

de l'interpolation *EDP* que nous nous avons présenté dans le chapitre 6 et qui fonctionne comme une méthode de lissage sélective d'image.

5.2.2 Modèle de super-diffusion dans l'espace 2D

On considère l'équation (4.18) avec une matrice de diffusion définie comme suit [NTG⁺12a] :

$$G_q(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} g_{q,1}(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & g_{q,2}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

où $g_{q,i}$ est la fonction d'arrêt d'ordre q suivant la direction i . L'équation de super diffusion ainsi proposée pour $q = 2$ et avec un paramètre de tension est la suivante :

$$u_t(\mathbf{x}, t) = \text{div}(\alpha G_1 \nabla u(\mathbf{x}, t) - (1 - \alpha) G_2 \nabla \Delta u(\mathbf{x}, t)) \quad (5.2)$$

Afin d'estimer les enveloppes supérieure et inférieure, les fonctions $g_{q,i} \in G_q$ doivent être spécifiées. Évidemment, il y a de nombreuses façons de construire une fonction de diffusion anisotropique en 2D. Par souci de simplicité, nous testons le choix suivant, avec $G_1 = G_2$ en se basant sur la définition (4.21) pour tout $q = 1, 2$:

$$g_{q,i}^{\pm}(\mathbf{x}) = \frac{1}{9} [|\text{sgn}(\delta_{x_i}^1 u_0)| \pm \text{sgn}(\delta_{x_i}^2 u_0) + 1]^2 \quad (5.3)$$

avec le signe $\pm$ définissant respectivement l'enveloppe supérieure et l'enveloppe inférieure.

5.2.3 Relation avec les équations aux dérivées partielles définies sur des surfaces implicites

Nous pouvons voir le lien entre cette équation *LRD* simple avec une équation de la chaleur du second ordre sur une courbe ou une surface $S \in R^N$ - $N = 2$ pour une courbe et $N = 3$ pour une surface -, qui est donnée par :

$$u_t(\mathbf{x}) = -(-1)^q \nabla_S^{2q} u(\mathbf{x}, t) \quad (5.4)$$

avec la condition initiale $u(y, 0) = f$ pour tout y de S . Ici, $\nabla_S^{2q} u$ est l'opérateur différentiel d'ordre $2q$ appliqué sur u intrinsèque à la surface S . Si S est définie comme une surface implicite à partir d'une fonction de niveau ϕ , - c'est-à-dire S est défini comme le niveau zéro de ϕ -, $S = \{\mathbf{x} \in R^N : \phi(\mathbf{x}) = 0\}$. Ainsi, il est facile de montrer que pour tout point

de S , l'opérateur Laplace $\Delta_S u$ intrinsèque à S peut être calculé en utilisant des dérivés extrinsèques comme suit :

$$\Delta_S u(x) = \frac{1}{|\nabla \phi(x)|} \nabla \cdot (P(x) \nabla u(x) |\nabla \phi(x)|) \quad (5.5)$$

où P est un opérateur de projection. Si ϕ est une fonction de distance signée, alors $|\nabla \phi(x)| = 1$, l'équation (5.5) peut être réduit en :

$$\Delta_S u(x) = \nabla \cdot (P(x) \nabla u(x) |\nabla \phi(x)|) \quad (5.6)$$

De la même manière, nous pouvons définir l'opérateur biharmonique, sur u intrinsèque à S comme suit :

$$\Delta_S^2 u(x) = \nabla \cdot (P(x) \nabla (\nabla \cdot \nabla P(x) \nabla u(x))) \quad (5.7)$$

A titre d'exemple, en considérant S la ligne faisant un angle θ avec l'axe x_1 dans le plan image $x = (x_1, x_2)$, la matrice de projection est alors définie par :

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

Notant que P ne dépend pas de x pour cet exemple, les équations de la chaleur du second et quatrième ordre sur S , pour $q = 1, 2$ dans l'équation (5.4) sont données par :

$$u_t = -(-1)^q (a^q \partial_{x_1}^2 q u + 2c^q \partial_{x_1}^q \partial_{x_2}^q + b^q \partial_{x_2}^2 q) \quad (5.9)$$

5.2.4 Quelques applications de l'approche *EDP* pour l'*EMD* 2D

Dans cette section, nous nous intéressons à diverses applications possibles de l'*EMD* 2D, comme l'extraction de texture, le débruitage ou la retouche d'image. Particulièrement, dans les problèmes de segmentation d'image, l'extraction de texture est une étape cruciale et, est l'une des techniques les plus importantes pour l'analyse et la compréhension de l'image. L'un des aspects cruciaux de l'analyse de texture est l'extraction de caractéristiques et les propriétés texturales. L'utilisation d'opérateurs de filtre a été appliquée avec succès à une variété de problèmes de vision par ordinateur. Un ensemble d'opérateurs linéaires ou non linéaires est généralement appliquée à l'image d'entrée, qui crée un espace de données multimodale. Il ya beaucoup de travaux connexes sur le choix du filtre optimal pour l'extraction de la texture. La plupart des approches utilisent des bancs

de filtres prédéfinis, composé de filtres isotropes ou anisotropes tels que l'opérateur *gaussien*, l'opérateur de *Laplace-Gauss* [TT99], ou les opérateurs de *Gabor 2D* avec différentes échelles et orientations [Wei99, Tum03]. Une approche alternative est la transformée en ondelettes, ce qui fournit un cadre unificateur pour l'analyse et la caractérisation d'images en différentes échelles - voir par exemple [EMU96] -.

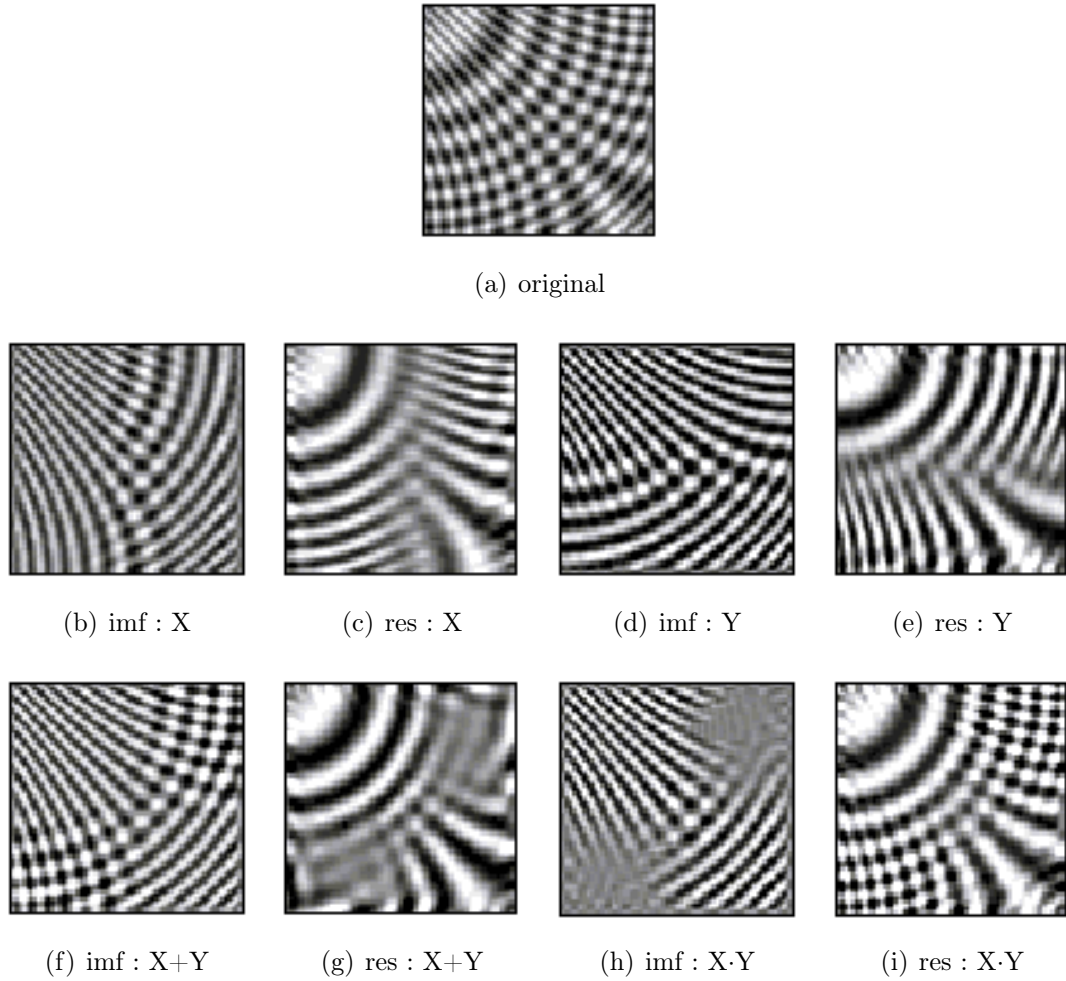


FIGURE 5.1 – Décomposition adaptative directionnelle en éléments de fréquences locales par la méthode *EDP-EMD-2D*. En (a), image origine composée de plusieurs éléments de fréquence modulés. En (b) et (c), premier *IMF* et le *résidu* pour la décomposition suivant la direction (X). En (d) et (e), premier *IMF* et *résidu* pour la décomposition suivant la direction (Y). En (f) et (g), premier *IMF* et *résidu* pour la décomposition suivant les deux directions ($X + Y$). En (h) et (i), premier *IMF* et *résidu* pour la décomposition suivant la ligne suivie d'une décomposition suivant les colonnes ($X \cdot Y$).

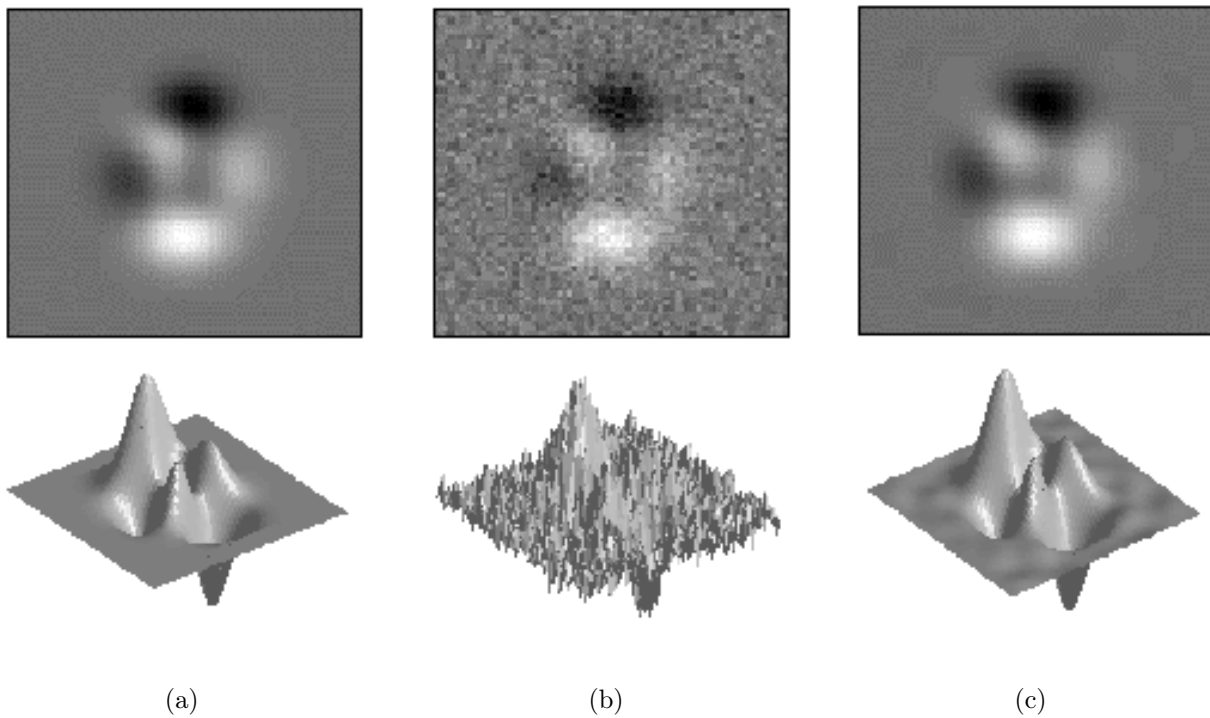


FIGURE 5.2 — Débruitage d'images utilisant la méthode *EDP-EMD-2D*. En (a), l'image non bruitée, avec une représentation *2D* - *en haut* - et une représentation en surface - *en bas* -. En (b), mêmes représentations qu'en (a) avec l'image ajoutée d'un bruit Gaussien. En (c), l'image débruitée est donnée par le cinquième *IMF*.

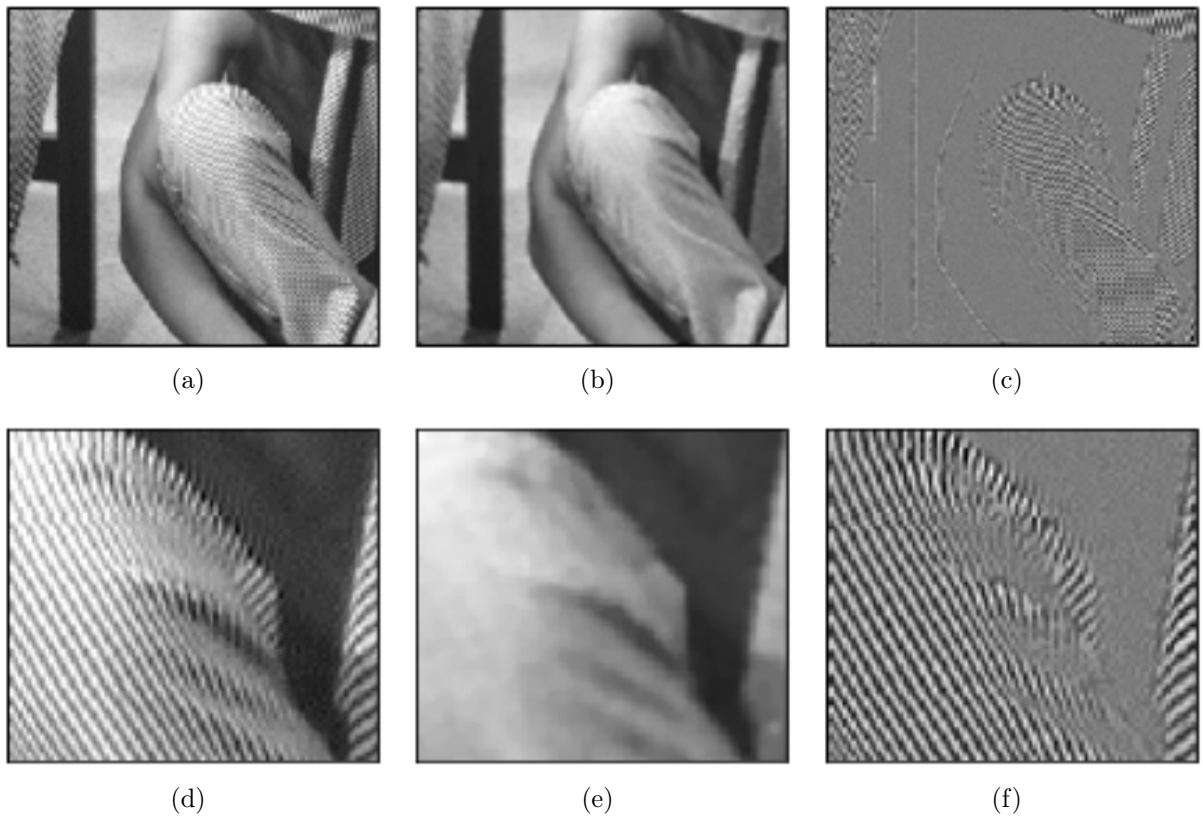


FIGURE 5.3 — Filtrage de l'image "BARBARA" par la méthode *EDP-EMD-2D*. En (a), l'image d'origine. En (b) et (c) les approximations - *résidu* - et les détails - *première IMF* - l'image. En (d), (e) et (f), zoom sur les images (a), (b) et (c).

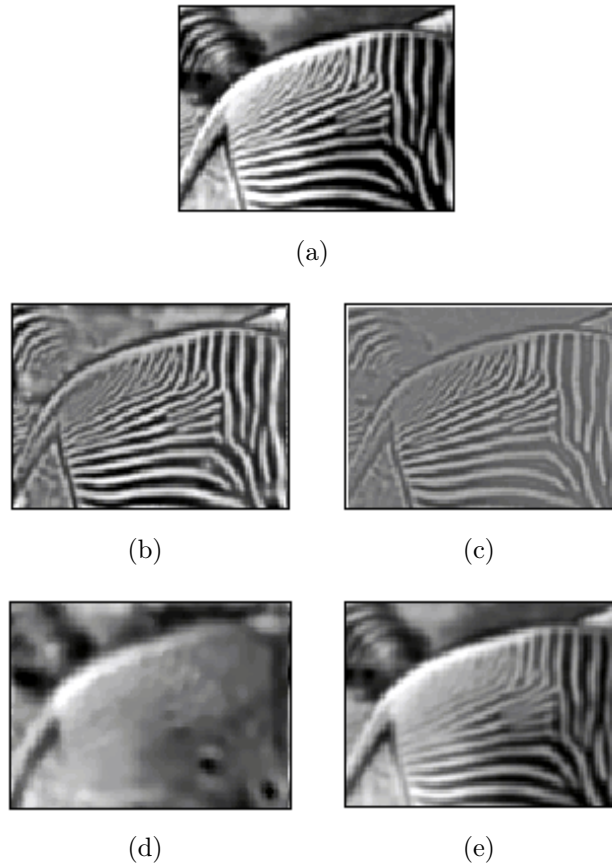


FIGURE 5.4 — Comparaison entre la méthode *EDP-EMD-2D* et l'approche des *Pyramides de Laplace*. En (a) l'image d'origine. En (b) et (d), le premier *IMF* et résidu de pour la méthode. En (c) et (e) premier niveau des pyramides Laplace gaussiennes. Considérant que la méthode *EDP-EMD-2D* est capable d'extraire une composante large bande *FM*, la décomposition de Laplace a échouée. Toutes les bandes de zèbre sont identifiées dans le premier *IMF* en (b), mais seules les bandes de haute fréquence sont observées en (c).

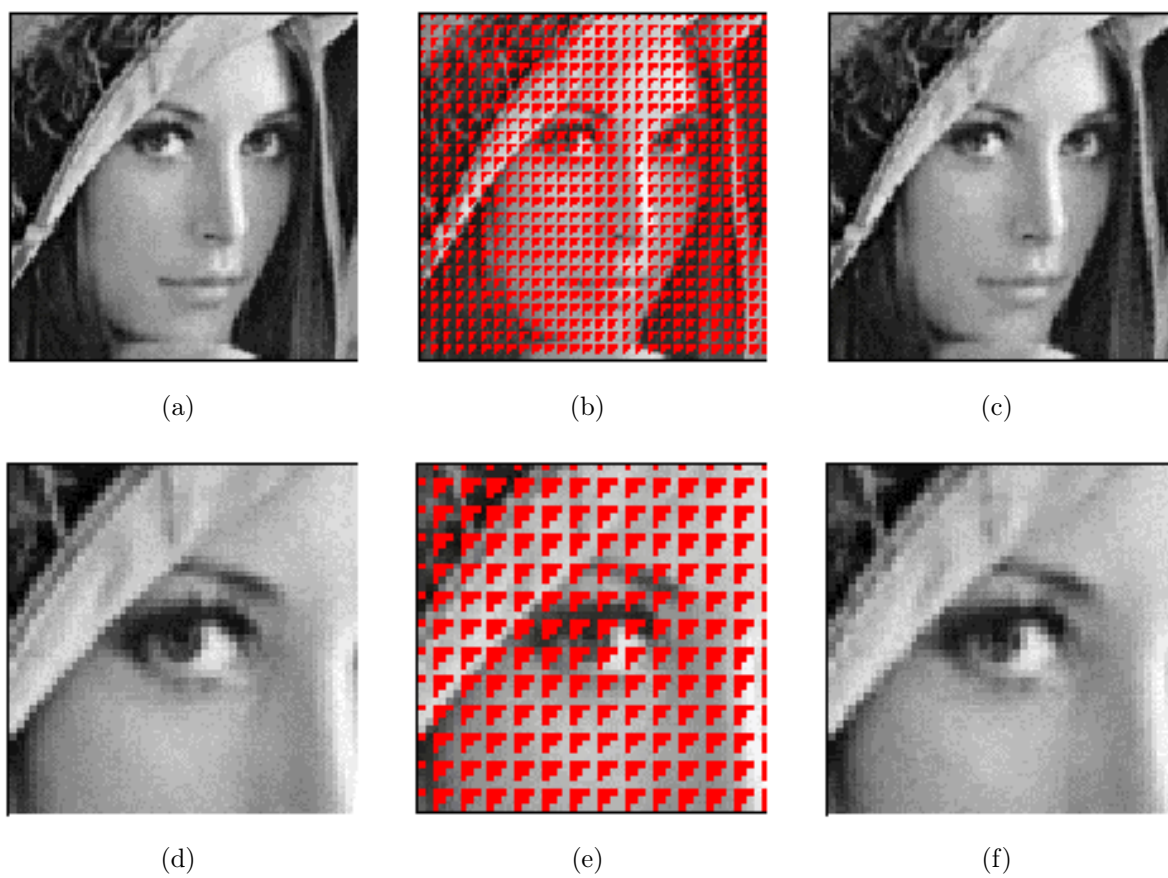


FIGURE 5.5 — Inpainting sur l'image de "*Lena*". En (a) l'image d'origine. En (b) image dégradée. En (c) résultat après Inpainting. En (d) et (f) Zoom sur les images (a) et (c).

5.3 EMD et applications

5.3.1 Le problème du mixage de modes

La décomposition modale empirique est une méthode itérative permettant de décomposer un signal en différents *modes* - ou *IMF Intrinsic Mode Function* -. Ces modes sont sensés contenir des niveaux de fréquence présents dans le signal à décomposer ou bien tout simplement du bruit additif. Cependant un phénomène de mixage de modes peut apparaître et aboutir à une mauvaise séparation des niveaux de fréquence ou une surestimation du niveau de bruit dans le signal original. Différentes approches ont été proposées dans la littérature pour apporter une solution à cette anomalie. Dans [TMK09], Terrien *et al.* ont proposé une méthode générale de détection du mixage de modes basée sur la détection de non stationnarité sur la première *IMF*. Une fois le mixage de modes identifié, ils ont ensuite proposé de corriger l'estimation du niveau de bruit contenu sur la première *IMF* par une extraction sur cette *IMF* de la partie signal et de la partie correspondant uniquement au bruit.

Dans [Nia07], O. Niang a introduit une estimation de la valeur optimale d'un paramètre de régularisation effectuée à partir de la technique de *régularisation de Tikhonov* appliquée au *proto-mode* obtenu après la première itération du sifting process. La localisation de cette valeur optimale est obtenue par application de l'algorithme proposé dans [RT05]. Une fois que cette estimation est faite et que les modes mélangés sont séparés, le sifting process continue. Cette technique a été appliquée avec beaucoup d'efficacité pour l'extraction de signaux transitoires, la séparation temporelle d'un mélange de modes, la séparation temporelle d'un double mélange de modes, la séparation fréquentielle de mélange de modes, ainsi qu'à la décomposition d'un signal composite standard.

5.3.2 Débruitage de signaux par EMD

Supposons que le signal observé s'écrit sous la forme :

$$s(t) = y(t) + n(t) \quad ,$$

contenant $y(t)$ le signal utile et $n(t)$ un bruit additif. Certains algorithmes de débruitage de séries temporelles sont largement utilisés - *exemple les modèles basés sur la transformée en ondelettes* -, en supposant que la série soit stationnaire. Cependant, pour les séries non-linéaires et non stationnaires, les approches par les ondelettes peuvent échouer. Pour la décomposition en ondelettes de L au niveau d'un signal, le nombre des coefficients à énergie significative est faible. Ceci est une conséquence directe de la propriété d'approximation des ondelettes. Le signal peut être correctement représenté par un petit

nombre de coefficients. Le débruitage par ondelettes, développé par *Johnstone et Donoho* [Don95], est basé sur la sélection des coefficients sur lesquelles on applique un seuillage. Dans le même esprit de l'approche du shrinkage ondelettes et suivant les travaux publiés dans [FG04], où les auteurs montrent comment l'EMD révèle une structure de banc de filtres équivalente à la plupart des actions propriétés de la décomposition en ondelettes, *O. Niang* [Nia07] introduit et teste une nouvelle approche de débruitage basée sur la Décomposition Modale Empirique en utilisant la même fonction de shrinkage que l'approche par ondelette [DJ94], sur les k premier *IMFs* du signal.

$$\theta_k = \sqrt{2 \log(N)} \hat{\sigma}_k \quad (5.10)$$

avec N la taille du signal et $\hat{\sigma}_k = 1.4826 \text{ median}(|imf_k|)$.

5.3.3 La compression par EMD

La compression est un domaine du traitement du signal qui a connu des avancées fondamentales ces vingt dernières années. Le développement de la transformée en r a permis des progrès considérables, conduisant à des formats de compression des signaux et images extrêmement efficaces, tels que *MPEG* [Nol97], *JPEG* [SCE01]. Dans [Lin02, Lin05], *Linderhed* utilise la décomposition modale empirique pour définir un modèle de compression d'image. Ce modèle se base sur la quantification et le codage des extrema issus du calcul des *IMFs*. La décompression se fait en appliquant le procédé inverse : décodage des extrema, interpolation par spline pour reconstituer les *IMFs* puis on passe à la recomposition pour obtenir le signal initial. En 2009, *Khaldi et al.* développent une nouvelle technique de compression audio à bas débit, basée sur la décomposition modale empirique, en association avec un modèle d'audition - seuil de masquage - [KBTCV09, KBT⁺10]. Le nombre de bits alloué au codage des extrema seuillés varie d'une *IMF* à une autre et respecte la contrainte d'inaudibilité de l'erreur de quantification. Les techniques de seuillage des extrema et d'allocation des bits sur lesquelles repose le procédé de compression, garantissent un bas débit et une bonne qualité d'écoute du signal codé-décodé.

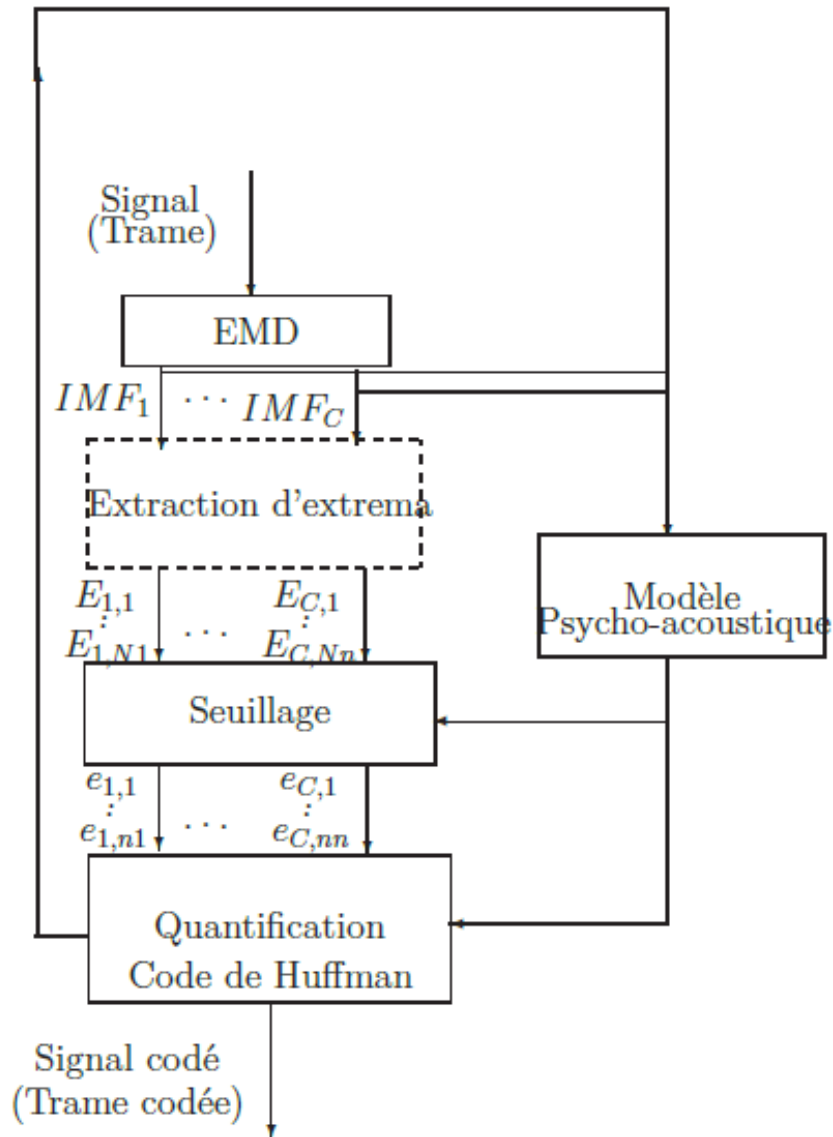


FIGURE 5.6 — Organigramme de la compression par *EMD* [KBTCV09].

5.3.4 Le tatouage d'images : approche par EMD

La multiplication des données numériques, et plus encore la facilité avec laquelle il est possible de les reproduire, pose la question de la protection des droits d'auteur. Deux approches sont possibles pour tenter de résoudre ce problème :

- brider l'outil qui effectue la copie ou la lecture du médium pour empêcher la reproduction : c'est le cas par exemple des lecteurs *DVD* qui nécessitent une clé pour déchiffrer le disque ;
- protéger le médium lui-même en y insérant des données qui identifient son propriétaire.

Le tatouage d'image correspond exactement à cette seconde catégorie. Le principe des techniques dites de tatouage est d'insérer une marque imperceptible dans les valeurs de la donnée. Dans le cadre de la protection des droits d'auteurs, la marque insérée, appelée *watermarque* correspond au code du copyright. Ce type de tatouage doit répondre à des contraintes fortes en termes de robustesse. En effet, quelles que soient les transformations - *licites ou illicites* - que la donnée tatouée subit, la marque doit rester présente tant que la donnée reste exploitable. De plus, la présence de la marque ne doit être détectée que par des personnes autorisées - *possédant une clef de détection privée* -. Le tatouage est aussi utilisé en médecine - *déontologie médicale* - pour préserver le secret médical ou pour la transmission des dossiers médicaux facilitant ainsi le diagnostic à distance. Le tatouage peut être utilisé comme un outil de contrôle d'intégrité des documents. Enfin, le tatouage permet la surveillance des émissions en cours de diffusion.

En résumé, l'objectif du tatouage est le suivant :

- ❶ le propriétaire d'une image originale souhaite défendre ces droits de propriétés ;
- ❷ pour ce faire, il introduit une marque - *un identifiant* - dans l'image ;
- ❸ l'image ainsi modifiée est ensuite diffusée ;
- ❹ à tout moment, le propriétaire souhaite pouvoir extraire son identifiant de l'image face à une tierce personne, et ce même si l'image marquée a été modifiée entre-temps en une image "proche".

Nous illustrons cela sur la figure 5.7 : De nos jours, de nombreux algorithmes sont largement utilisés et certains produits sont même commercialisés, dont la plupart utilisent le domaine des transformées pour une meilleure résistance à certaines attaques basées sur des transformations géométriques spatiales souvent non malveillantes. L'utilisation des ondelettes pour le tatouage est actuellement très répandue et se justifie par le fait que le domaine multirésolution est le soubassement des normes de compression et de débruitage les plus utilisées. En plus, les sous-bandes hautes fréquences - *HH, HL, LH* -

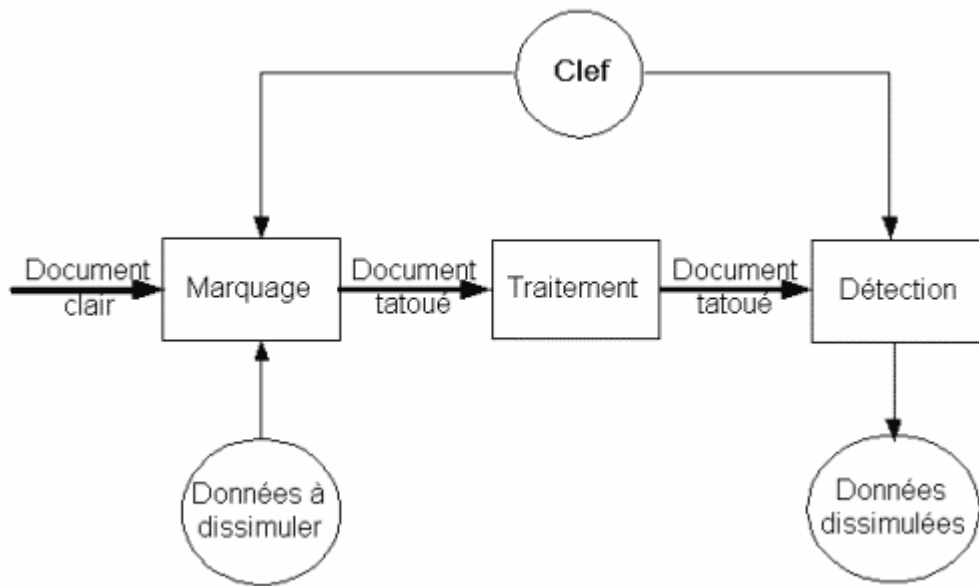


FIGURE 5.7 – Schéma illustratif du tatouage numérique.

permettent de bien exploiter les parties fortement texturées et les zones de contour de l'image. Ces éléments offrent des propriétés psycho-visuelles pouvant améliorer l'invisibilité du tatouage. Son utilisation comme support d'insertion de la marque assure une meilleure robustesse à la compression et au débruitage [XBA97, KH98, FF04]. Cette robustesse peut être obtenue à travers le choix des coefficients d'ondelette sur lesquels on doit insérer la marque. En constatant que la compression élimine les coefficients les plus bas, représentant les fréquences basses de l'image et le débruitage élimine les coefficients les plus élevés représentant les hautes fréquences, un choix judicieux serait d'insérer la marque sur les coefficients moyens.

Vu que ces mêmes propriétés multi-résolution se retrouvent dans la décomposition modale empirique, *Sabri et al.* introduisent un modèle de tatouage utilisant les IMFs comme support d'insertion de la marque [SKTA09]. Ce schéma de tatouage est caractérisé par une bonne capacité de détection de la marque et une bonne robustesse face à certaines attaques du fait de la redondance de l'information ajoutée dans l'image - *la marque* -. De nombreux travaux sont aussi réalisés en alliant la décomposition en ondelettes pour la sélection de l'espace de marquage et la décomposition modale empirique pour la technique d'insertion de la marque [BSH⁺07, TDT08].

5.3.5 L'analyse des composantes rythmiques dans les signaux *EEG* pour les Interfaces Cerveau-Machine (*ICM*) - ou *Brain Computer Interface (BCI)* -

Une interface cerveau-machine (*BCI*) est un système de communication qui ne nécessite aucune activité musculaire périphérique. En effet, les systèmes *BCI* permettent à un sujet d'envoyer des commandes à un dispositif électronique seulement à partir de son activité cérébrale. Ces interfaces peuvent être considérées comme étant le seul moyen de communication pour les personnes atteintes par certains handicaps moteurs.

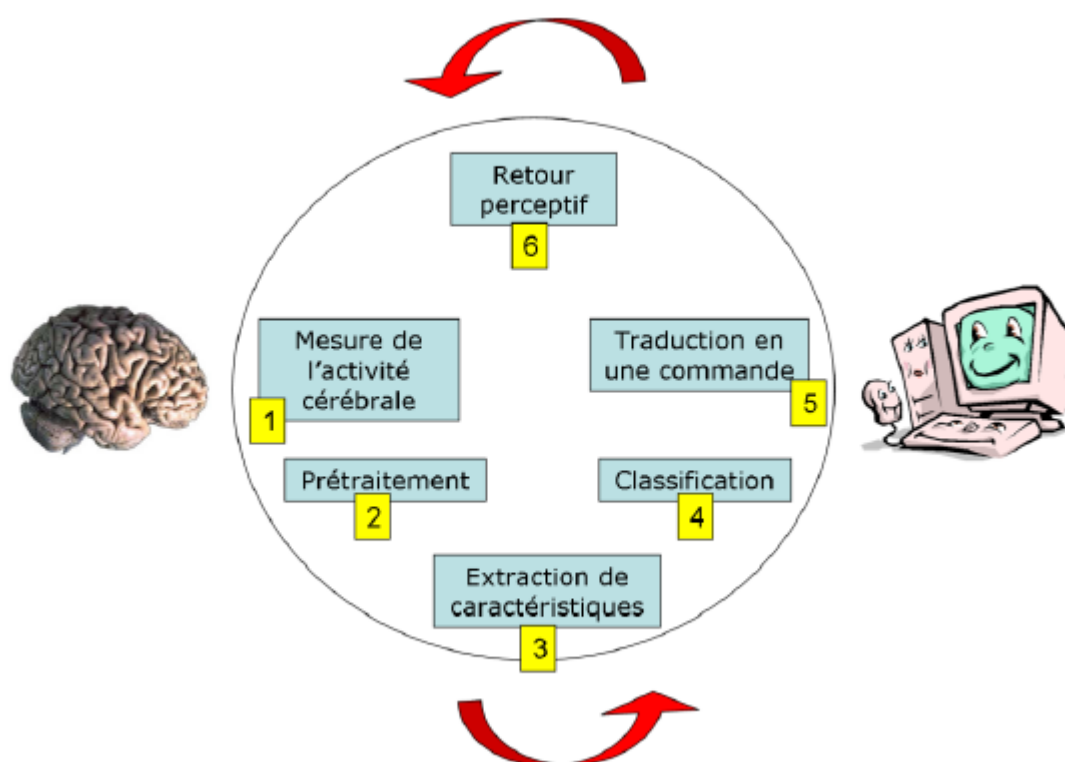


FIGURE 5.8 — Schéma général de fonctionnement d'une interface cerveau ordinateur.

Afin de sélectionner le classificateur le plus approprié pour un système *BCI* donné, il est essentiel de comprendre clairement quelles sont les caractéristiques utilisées, quelles sont leurs propriétés et comment elles sont utilisées. Cette section vise à décrire les caractéristiques communes de *BCI* et plus particulièrement leurs propriétés ainsi que la manière de les utiliser afin de tenir compte des variations de temps de l'*EEG*. Une grande variété de fonctionnalités ont été tentées pour la conception *BCI* tel que l'amplitude, les valeurs de signaux *EEG*, la puissance de bande, la densité spectrale de puissance (*PSD*), les paramètres autorégressifs (*AR*) et autorégressifs adaptatifs (*AAR*), les caractéris-

tiques temps-fréquence et les caractéristiques basées sur des modèles inverses. Concernant la conception d'un système *BCI*, certaines propriétés essentielles de ces caractéristiques doivent être considérées :

- **Le bruit et les valeurs aberrantes** : les caractéristiques du *BCI* sont bruyantes ou contiennent des valeurs aberrantes car les signaux *EEG* ont un faible rapport signal sur bruit ;
- **La haute dimensionnalité** : Dans les systèmes *BCI*, les vecteurs de caractéristiques sont souvent d'une haute dimensionnalité. En effet, plusieurs caractéristiques sont généralement extraites de plusieurs canaux et de plusieurs segments de temps avant d'être concaténés dans un vecteur caractéristique unique ;
- **L'information temporelle** : les caractéristiques *BCI* doivent contenir des informations temporelles car les patterns de l'activité cérébrale sont généralement liées à des variations temporelles du signal *EEG*.
- **La non-stationnarité** : les caractéristiques *BCI* sont non stationnaires car les signaux *EEG* peuvent rapidement varier dans le temps et plus particulièrement durant les sessions expérimentales ;

La base sous-jacente des caractéristiques électrophysiologiques au cours d'une *MI* (*motor imagery*) est que le *MI* unilatéral provoque une synchronisation contralatérale des événements liés - *ERS* pour *Event Related Synchronization* - et une désynchronisation - (*ERD*) pour *Event Related Desynchronization* - dans le cortex moteur. La *DRE* - ou *ERS* - provoque une diminution - ou une augmentation - de l'énergie des composantes rythmiques de l'*EEG*, respectivement. Une découverte précédente a montré que le *MI* provoque la *DRE* et *ERS* sur les bandes *alpha* ($8 - 12Hz$) et *bêta* ($14 - 30Hz$), ainsi que sur l'exécution du mouvement. De nombreuses études ont également montré que les événements *DRE* / *ERS* sont une spécificité du sujet. Compte tenu des défauts théoriques inhérents des méthodes classiques d'analyse temps-fréquence dans l'étude des signaux non-stationnaires, la Décomposition Modale Empirique (*EMD*) et la Transformation de Huang-Hilbert (*HHT*) se sont montrées très efficaces pour analyser les composantes rythmiques contenues dans les signaux *EEG*. La première étape de la procédure est d'extraire les caractéristiques temps-fréquence à partir du spectre *HHT* [WLL09].

La propriété multi-résolution de l'*EMD* permet de récupérer facilement les sous-bandes de fréquence du signal *EEG* qui interviennent sur la représentation du mouvement ou du caractère à étudier. Vu que le signal *EEG* est récupéré à partir de plusieurs capteurs du système 10 – 20, nous pouvons utiliser l'*EMD* multivariée afin de pouvoir récupérer les mêmes niveaux de fréquences sur les mêmes numéros d'*IMF*.

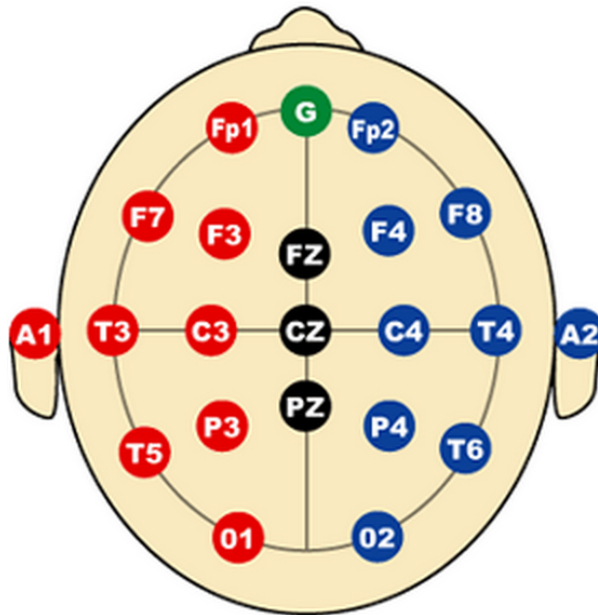


FIGURE 5.9 — Le système international 10 – 20, image de «l'institut Immrama».

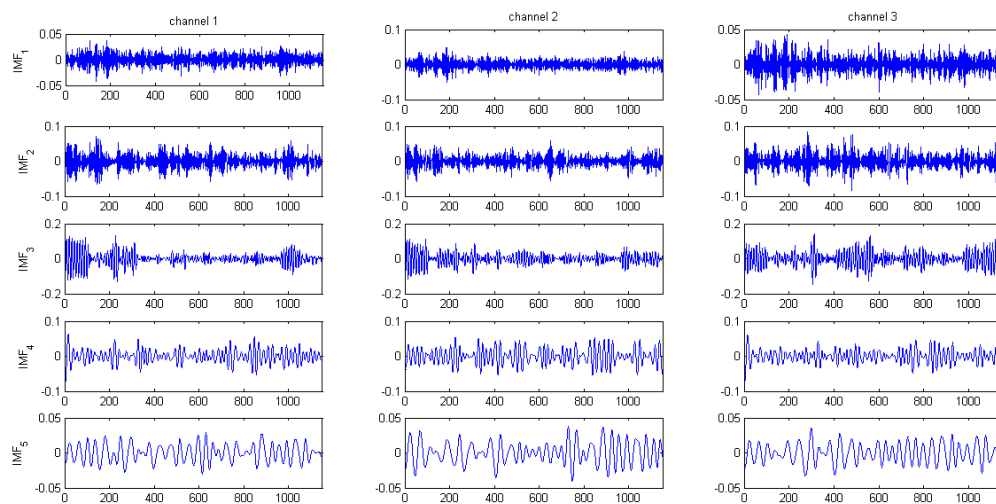


FIGURE 5.10 — Les 5 premières *IMF* de la décomposition *EMD multivariée* d'un signal *EEG* récupéré à partir de 3 canaux du système 10 – 20.

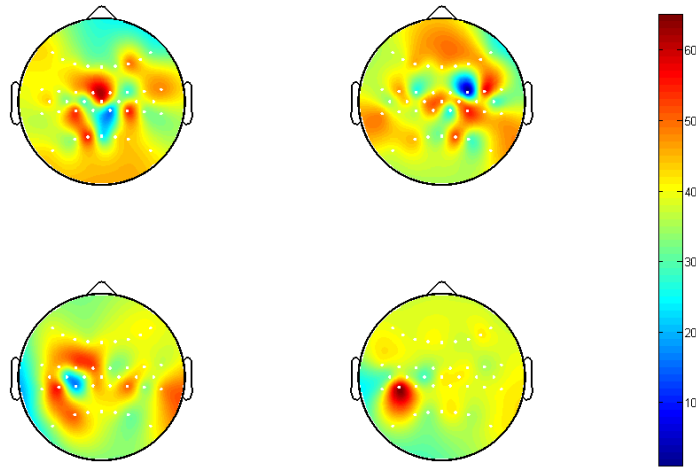


FIGURE 5.11 — Représentation de la densité spectrale de puissance sur un scalpe.

Pour sélectionner des caractéristiques spatiales, on peut utiliser la méthode du maximum d'informations mutuel (*MMI*) afin de séparer les classes de signaux les plus discriminables de tous les canaux. Pour la classification, ils utilisent l'algorithme de la machine à vecteur de support *SVM*.

Nous pouvons donner l'exemple de la classification de l'intension de mouvement de la main droite ou de la main gauche d'une personne. Les données utilisées proviennent du *BCI Competition*. L'expérience comporte une phase d'apprentissage avec des données bien maîtrisées, étiquetées avec le type de mouvement concerné. Une fois le système bien renseigné sur un individu donné, on pourra passer au test avec des données non maîtrisées.

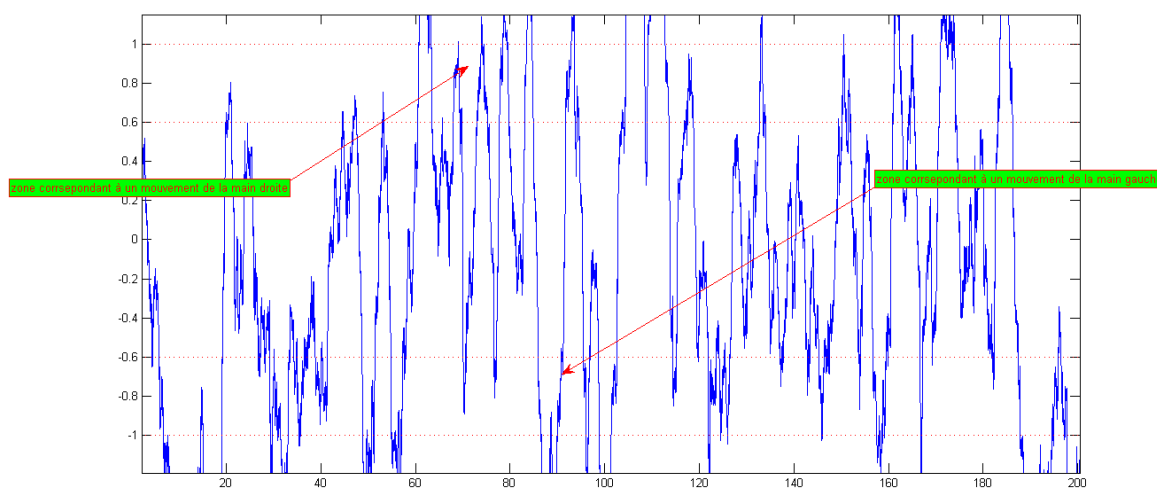


FIGURE 5.12 — Classification d'une série d'intensions de mouvement de la main droite ou de la main gauche pour un individu donné.

5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié quelques applications de la décomposition modale empirique sur des signaux et images aussi bien synthétiques que réels. Etant très comparable avec la transformée en ondelettes, l'*EMD* est devenu un outil pouvant donner des résultats parfois meilleurs sans besoin d'une connaissance a priori sur le signal contrairement aux ondelettes qui nécessitent la définition d'une base d'ondelettes adapté à chaque type de signal. Le cadre mathématique offert par l'approche *EDP* pour la décomposition modale empirique permet une meilleure maîtrise d'outils favorisant une extension *2D* pour des applications en traitement de l'image. Comme chaque *IMF* est sensée avoir un sens physique en capturant une certaine gamme de fréquences, on peut supposer que le bruit est contenu dans les premières *IMFs*, qui contiennent les fréquences les plus élevées. L'*EMD* s'est montrée aussi très efficace pour des applications comme la compression, et est utilisé pour le tatouage d'image, l'analyse de texture, en imagerie médicale et les interfaces cerveau-machine.

Troisième partie

Une nouvelle méthode auto-adaptative
pour la représentation du signal :
la Décomposition Spectrale Intrinsèque.

Chapitre

6

Un nouvel interpolateur *EDP* : existence, résultats et applications

Sommaire

6.1	Introduction	95
6.2	Modélisation mathématique du nouvel interpolateur <i>EDP</i> . .	96
6.3	Interprétation de l'action de la diffusivité dans le processus de diffusion	99
6.4	Résolution spectrale de l'équation aux dérivées partielles . .	100
6.5	Solution asymptotique de l'<i>EDP</i>	101
6.6	Quelques résultats de l'interpolateur <i>EDP</i>	101
6.7	Conclusion	107

6.1 Introduction

LES interpolateurs sont largement utilisés dans le traitement et l'analyse du signal ou de données. Dans le cas particulier de l'algorithme de la décomposition modale empirique [HSLa98, DLN05], l'estimation itérative de la tendance du signal est basée sur l'estimation de l'enveloppe obtenue par interpolation par spline cubique des extrema locaux. L'interpolation par spline a été reconnue comme étant très efficace pour l'*EMD*, mais pour les signaux qui n'ont pas d'extrema locaux, l'interpolation par spline cubique échoue. Un modèle basé sur les équations aux dérivées partielles qui surmonte cette limite de l'*EMD* classique a été proposé dans [DLN05, Nia07, NTG⁺12a]. Récemment nous avons proposé la décomposition spectrale intrinsèque (en anglais *Spectral Intrinsic Decomposition*

SID) [NTDL12] qui est basée sur la décomposition spectrale de l'interpolateur *EDP*. Cette interpolateur *EDP* contribue à la modélisation mathématique de l'*EMD* et fournit diverses applications dans le domaine du traitement du signal et de l'image [NDL10, NTG⁺12a]. Dans ce qui suit, nous décrivons la modélisation mathématique du nouvel interpolateur *EDP*. La résolution du problème variationnel conduit à l'existence et des résultats d'unicité de la solution dans les espaces appropriés.

6.2 Modélisation mathématique du nouvel interpolateur *EDP*

Rappelons que le modèle *EDP* vise à contribuer à la modélisation mathématique de l'*EMD*, comme il est montré dans [DLN05]. Dans un premier temps, pour être en conformité avec l'*EMD* classique, notre objectif est de modéliser l'enveloppe supérieure ou inférieure comme une solution asymptotique d'un système *EDP* dont le premier état est le signal d'entrée dont nous voulons interpoler les extrema locaux - *ou plus généralement des points caractéristiques* -. Au départ, cette enveloppe est obtenue par interpolation par spline cubique. Soit Ω le domaine de définition d'un signal d'énergie finie c'est à dire $u_0 \in L^2(\omega)$. Nous construisons un opérateur A de domaine $D(A)$ approprié tel que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + Au &= 0 \quad \text{dans } [0, T] \times \Omega \\ &\quad ; \text{ plus les conditions aux bords} \\ u(0, x) &= u_0 \quad \text{dans } \Omega \end{aligned} \tag{6.1}$$

Comme nous ne devons pas nous éloigner de ce que nous voulons modéliser - *une enveloppe par spline cubique* -, les propriétés de l'opérateur A doivent rappeler les qualités de l'enveloppe calculée par spline cubique. Ainsi cet opérateur doit :

1. préserver les extrema de u_0 ;
2. permettre d'obtenir une solution pour l'*EDP* de régularité semblable à celle d'une spline cubique ;
3. et enfin, vérifier éventuellement des contraintes supplémentaires issues de l'esprit de l'algorithme *EMD*.

Le besoin d'avoir la solution asymptotique notée u_∞ , entraîne que

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\infty, x) = 0 \quad ;$$

c'est à dire que, d'après l'équation (6.1)

$$Au(\infty, x) = 0$$

De plus, le besoin que la solution ait la même régularité qu'une spline cubique conduit à

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\infty, x) = 0$$

Ainsi, en première analyse on peut choisir

$$Au = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$$

Pour laisser invariant les points caractéristiques durant la diffusion, il suffit de multiplier dans l'expression de $Au(\infty, x) = 0$, le terme $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$ par une fonction g dépendant de la variable spatiale x et ne s'annulant qu'aux points caractéristiques. Ce qui donne

$$Au(x) = g(x) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \quad (6.2)$$

Une autre forme possible qui rejoint le standard de modèles connus sous le nom de *Long Range Diffusion* [Mur93] est la suivante

$$Au(x) = \frac{\partial u}{\partial x} \left(g(x) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) \quad (6.3)$$

La fonction g peut être interprétée comme une fonction de diffusivité dont le rôle est de contrôler la diffusion ; elle est prise nécessairement positive pour obtenir un phénomène de diffusion directe et pour le besoin de l'existence de solution. D'autres formes d'opérateurs sont possibles, nous en citons quelques unes :

1. une variante de l'équation (6.2)

$$Au(x) = g(x) \left[-\theta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1 - \theta) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right] \quad (6.4)$$

2. ou une variante de l'équation (6.3)

$$Au(x) = \frac{\partial u}{\partial x} \left[g(x) \left(-\theta \frac{\partial u}{\partial x} + (1 - \theta) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) \right] \quad (6.5)$$

3. ou une diffusion complète faisant intervenir un flux

$$Au(x) = \frac{\partial u}{\partial x} \left[-\theta g(x) \frac{\partial u}{\partial x} + (1 - \theta) \frac{\partial u}{\partial x} \left(g(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \right] \quad (6.6)$$

où $0 < \theta < 1$ est le facteur de tension. Ces deux formes autorisent plus de liberté sur la régularité de la solution u . Pour accéder aux propriétés mathématiques de la solution, nous avons choisi la deuxième forme (6.5) avec $\theta = 0$ et qui correspond à l'équation (6.3). A l'échelle locale, entre deux points caractéristiques consécutifs - *deux maxima locaux par*

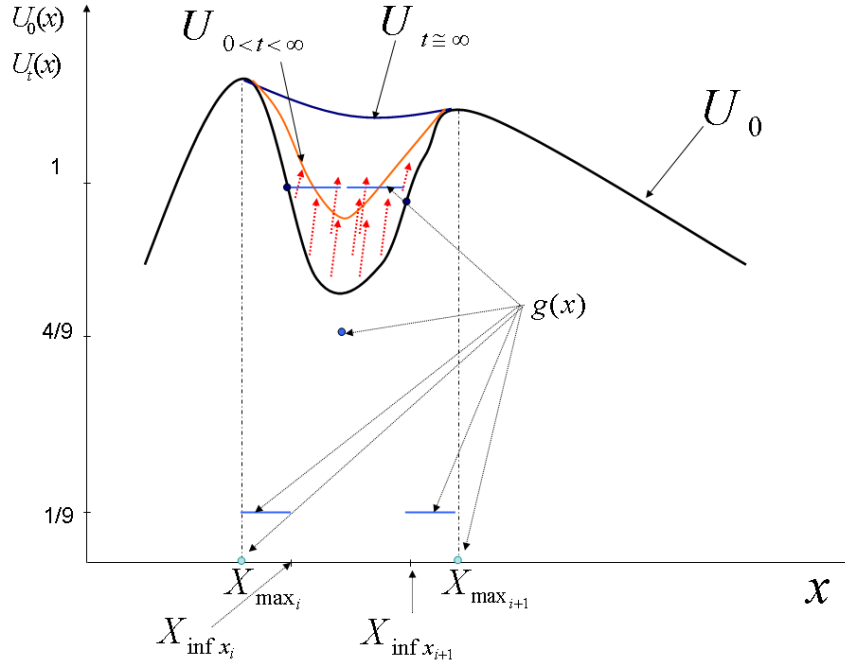


FIGURE 6.1 — La diffusion qui se fait dans la direction de l’enveloppe supérieure, a pour effet de supprimer le minimum local entre deux maxima consécutifs. Ici, la fonction g est constante par morceaux

exemple -, la diffusion induit un phénomène de lissage qui élimera le minimum local, voir figure 6.1.

L’un des avantages du modèle ci-dessus est son caractère intrinsèque car, il ne procède pas explicitement à une détection des points caractéristiques du signal. Cette détection s’opère implicitement et est gouvernée par la fonction $g(x)$ qu’on peut appeler fonction de diffusivité. Cette fonction de diffusivité ne dépend que de u_0 et des points caractéristiques - *extrema ou points d’inflexion ou points de changement de maximum de courbure* - .

Comme il est défini dans [DLN05, NDL10], l’enveloppe supérieure (s^+) et l’enveloppe inférieure (s^-) peuvent être assimilées à la solution asymptotique de l’équation aux dérivées partielles couplée suivante :

$$\frac{\partial s^\pm(x, t)}{\partial t} + g^\pm(x, t) \left(\theta \frac{\partial^2 s^\pm(x, t)}{\partial x^2} + (1 - \theta) \frac{\partial^4 s^\pm(x, t)}{\partial x^4} \right) = 0 \quad (6.7)$$

où θ est le paramètre de tension qui varie de 0 à 1. La solution initiale de cette équation est $s^\pm(x, t) = s_0$, $g^\pm$ sont les fonctions d’arrêt ou fonctions de diffusivité et dépendent des dérivées du signal, avec $0 \leq g \leq 1$.

Dans ce qui suit, nous définissons $g_e^\pm$ pour la détection des extrema, g_f les points d’inflexion et $g_{mc}^\pm$ pour les maxima et minima de courbure :

$$g_e^\pm(x) = \frac{1}{9} \left[\left| \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial s_0(x)}{\partial x} \right) \right| \pm \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial^2 s_0(x)}{\partial x^2} \right) + 1 \right]^2 \quad (6.8)$$

(+) pour les maxima et (−) pour les minima,

$$g_f(x) = \left[\operatorname{sgn}_\theta \left(\frac{\partial^2 s_0(x)}{\partial x^2} \right) \right]^2 \quad (6.9)$$

pour les points d'inflexion,

$$g_{mc}^\pm(x) = \left[\left| \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial^3 s_0(x)}{\partial x^3} \right) \right| \pm \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial^2 s_0(x)}{\partial x^2} \right) + 1 \right]^2 \quad (6.10)$$

(+) pour les points de maximum de courbure et (−) pour les points de minimum de courbure. Toutes ces fonctions sont de la forme $g(x) = [h(x)]^2$ avec $h(x) = 0$ aux points caractéristiques. Pour assurer l'existence et de la régularité de la solution, nous avons eu à travailler avec la version régularisée de la fonction *signe* :

$$\operatorname{sgn}_\theta(z) = \arctan\left(\frac{\pi z}{\theta}\right), \quad (6.11)$$

où θ est un facteur de régularisation.

6.3 Interprétation de l'action de la diffusivité dans le processus de diffusion

Entre deux maxima consécutives X_{max_i} et $X_{max_{i+1}}$, la fonction g_e^+ est constante par morceaux et peut s'écrire comme suit :

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{en } X_{max_i}, X_{max_{i+1}} \\ \frac{4}{9}, & \text{en } X_{inf_i}, X_{inf_{i+1}}, X_{min_i} \\ 1, & \text{sur }]X_{inf_i}, X_{min_i}[\cup]X_{min_i}, X_{inf_{i+1}}[\\ \frac{1}{9}, & \text{sur }]X_{max_i}, X_{inf_i}[\cup]X_{inf_{i+1}}, X_{max_{i+1}}[\end{cases} \quad (6.12)$$

Nous avons une diffusion dans le sens où $u_t = \partial u / \partial t$ décroche vers le maximum de la courbe u_0 . La raison en est que la diffusion est plus prononcée au niveau des minima locaux parce que l'effet de lissage tend à régulariser les courbes. Ainsi, l'enveloppe supérieure $u(t \cong \infty, \cdot)$ de u_0 est moins oscillante que le signal u_0 . Le même phénomène se produit pour l'enveloppe moyenne. Nous pourrions alors essayer d'interpréter localement la relation $u \geq u_0$ en évoquant le principe du maximum [Spe81]. Mais, ce principe n'est pas immédiatement vérifiable pour les équations du type (6.3). La justification réside dans le fait que le lissage implique $\|\nabla u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)}$.

6.4 Résolution spectrale de l'équation aux dérivées partielles

L'approximation numérique de la solution de l'équation (6.7) est obtenue par une discrétisation en différences finies avec les schémas numériques classiques tels que le schéma explicite, le schéma de *Crank-Nikelson* ou celui de *Du Fort et Frankel* [AK02, Mur93] peuvent être utilisés.

$$S^{k+1} = S^k + \Delta t A S^{k+1}, S^0 = S_0. \quad (6.13)$$

On note Δt le pas temporel et A est une matrice issue de l'approximation en différence finie des coefficient du second et quatrième des opérateurs différentiels (resp. D_2 et D_4), comme suit :

$$A = G [\alpha D_2 - (1 - \alpha) D_4], \quad (6.14)$$

avec G la matrice diagonale de la fonction de diffusion $g^\pm[n]$ construite avec la version discrète de la fonction $g(x)$ comme suit :

$$g(\delta_x^3 s_0, \delta_x^2 s_0) = g(D_1 D_2 s_0, D_2 s_0), \quad (6.15)$$

où $D_2 z = D^+ D^- z$ et $D_1 z = m(D^+ z, D^- z)$ avec D^+ et D^- les dérivées à gauche et à droite en x , et $m(a, b)$ l'estimation de la dérivée au sens de *minmod* [Nia07, DLN05],

$$m(a, b) = 0.5(\text{sgn}(a + b) \min(|a|, |b|)).$$

Ainsi, la forme explicite conduit à la résolution numérique suivante :

$$S^{k+1} = (I - \Delta t A)^{-1} S^k, S^0 = S_0. \quad (6.16)$$

avec I la matrice identité. Enfin (6.7) peut être décomposée comme suit :

$$S^{k+1} = L^{-1} S^k, S^0 = S_0, k \geq 0, \quad (6.17)$$

où L est l'opérateur linéaire y compris les valeurs de la fonction de diffusion et l'opérateur différentiel formé par dérivée du quatrième et du second ordre. Ainsi, en se référant à des schémas numériques (6.16), L est donnée par :

$$L = I - \Delta t A. \quad (6.18)$$

La matrice opérateur L a des valeurs propres réelles qui sont toujours supérieures ou égales à 1. Ainsi, les valeurs propres, λ_n , de L^{-1} sont toujours inférieures ou égal à 1, ($0 \leq \lambda_n \leq 1$), voir [NDL10]. Dans la figure 7.1(d), une distribution des valeurs propres est tracée pour un signal donné.

6.5 Solution asymptotique de l'EDP

Le schéma itératif (6.17) peut être réécrit en fonction de la solution initiale S_0 :

$$S^k = (L^{-1})^k S_0, k \geq 1, \quad (6.19)$$

à la convergence, la solution asymptotique, S_∞ est donnée par :

$$S_\infty = (L^{-1})^\infty S_0. \quad (6.20)$$

Soit V une matrice dont les colonnes sont les vecteurs propres V_n de L^{-1} et D une matrice diagonale ayant les valeurs propres λ_n de L^{-1} à la diagonale. Nous avons donc la décomposition suivante :

$$L^{-1} = V\mathcal{D}V^{-1} \quad (6.21)$$

Il est alors évident de voir que :

$$(L^{-1})^k = (V\mathcal{D}V^{-1})^k = V(\mathcal{D})^k V^{-1} \quad (6.22)$$

Donc, la solution asymptotique définie dans (6.21) est obtenue par :

$$S_\infty = (V\mathcal{D}^\infty V^{-1})S_0. \quad (6.23)$$

Lorsqu'on fait tendre k vers l'infini, la matrice diagonale de valeurs propres $\mathcal{D}$ prendra les valeurs $\lambda_n^\infty = 0$ si $\lambda_n < 0$ et $\lambda_n^\infty = 1$ ailleurs, - *c'est à dire là où $\lambda_n^\infty = 1$* -. Ainsi, nous allons nous retrouver avec une matrice asymptotique qui est nulle presque partout sauf en quelques points de la diagonale où la valeur propre tend vers 1 à l'infini. Comme nous l'avons montré dans (6.23), la solution enveloppe S_∞ est une combinaison linéaire des vecteurs propres associés à la valeur propre 1 pondérés par l'amplitude du signal.

6.6 Quelques résultats de l'interpolateur EDP

D'abord, nous présentons dans la figure 6.2 un cas pathologique de signal sans extremum local, dont on ne peut pas calculer les enveloppes par interpolation par spline des extrema. Notre interpolateur EDP fonctionne bien avec la détection points *Max-Min de courbure* dans la fonction de diffusivité. La figure 6.3 représente l'évolution de la solution EDP avec la forme donnée par l'équation (6.2). Lors de l'itération 40000, la solution évolue presque plus, il est potentiellement une enveloppe.

Dans la figure 6.4, nous représentons le calcul de l'enveloppe de la même fonction avec la forme donnée par l'équation (6.4) pour différents facteurs de tension. Nous pouvons

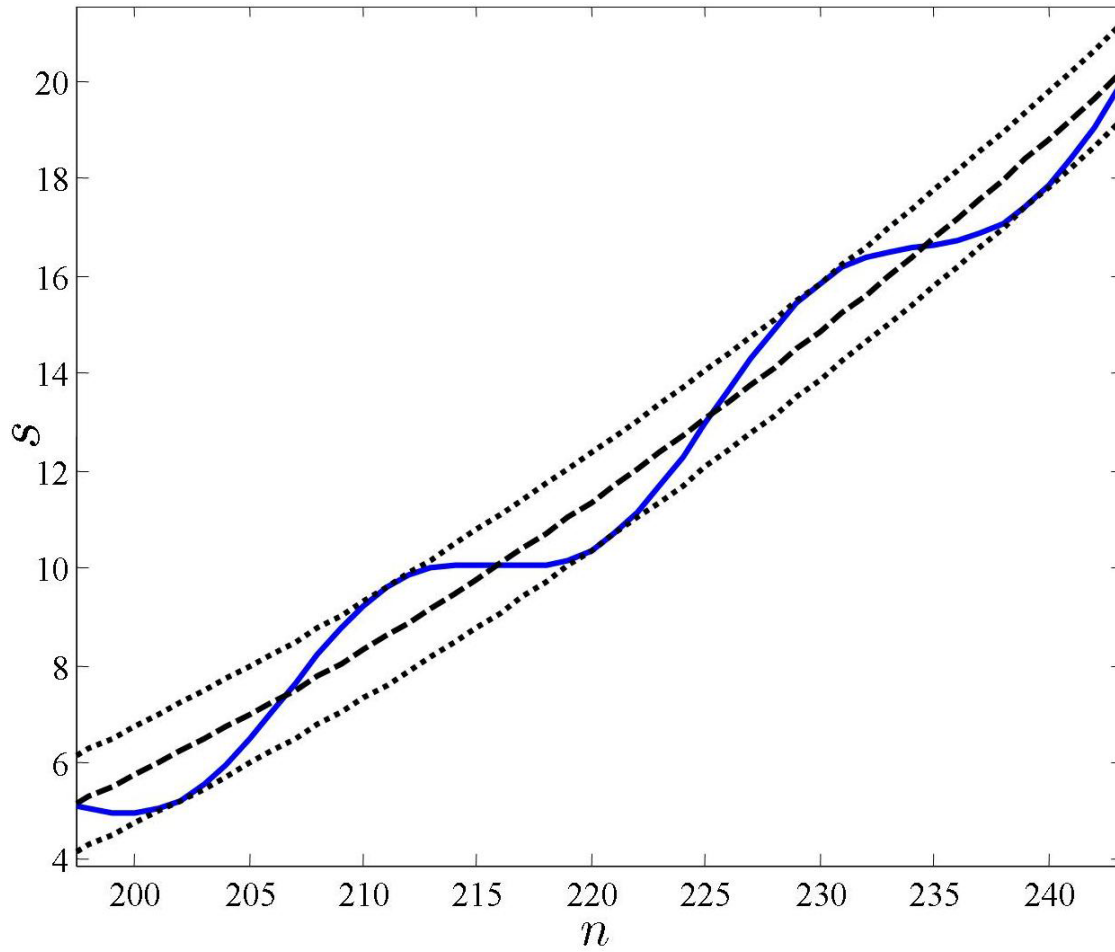
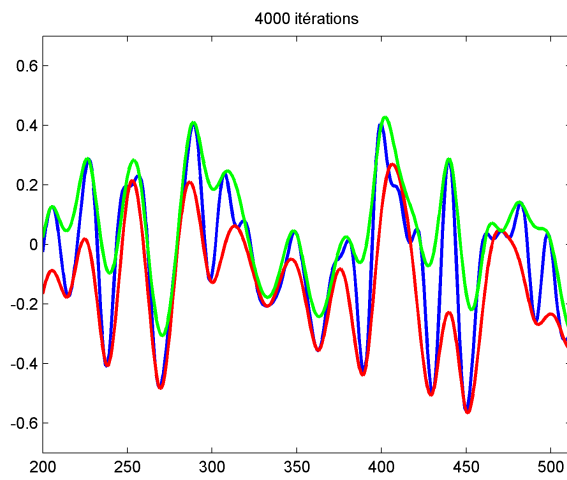


FIGURE 6.2 – Interpolateur *EDP* pour un signal sans extrema locaux.

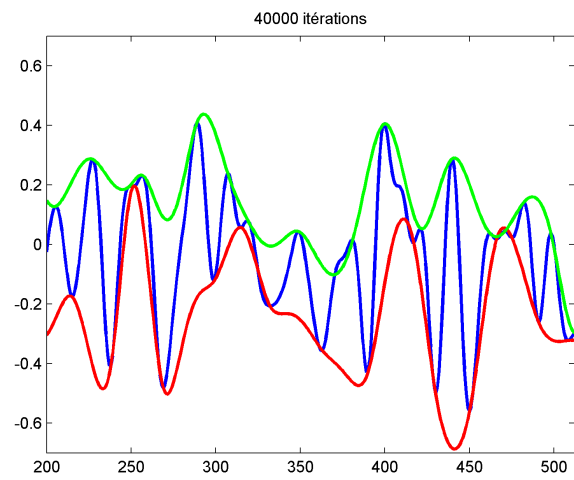
constater que la régularité des enveloppes n'y est plus pour des valeurs de θ proches de zéro.

Dans la figure 6.5, nous représentons le calcul des enveloppes avec la forme de l'*EDP* donnée par l'équation (6.4) pour la valeur de la tension $\theta = 0$.

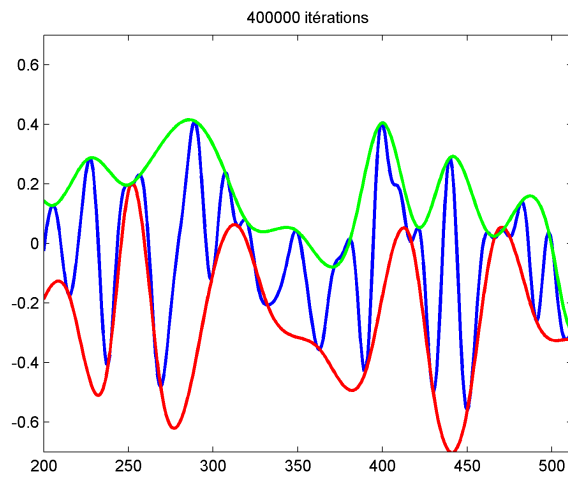
Dans la figure 6.6, nous faisons une comparaison entre notre *interpolateur EDP* et l'interpolation *spline cubique* pour un signal d'entrée s issu de la superposition de deux composantes sinusoïdales d'amplitudes et de fréquences différentes, s_1 et s_2 . Quand il s'agit d'interpoler les extrema locaux classiques, nous avons presque le même résultat, les deux n'étant pas satisfaisants, ce qui nécessite certainement un peu plus d'itérations dans le sifting process. Par contre notre interpolateur qui passe par les points de maximum et minimum de courbure locale donne les enveloppes correctes assez proprement.



(a) Les enveloppes à l'itération 4000



(b) Les enveloppes à l'itération 40000



(c) Les enveloppes à l'itération 400000

FIGURE 6.3 — En (a) : calcul des enveloppes avec un nombre d'itérations égal à 4000. En (b) : calcul des enveloppes avec un nombre d'itérations égal à 40000. En (c) : calcul des enveloppes avec un nombre d'itérations égal à 400000.

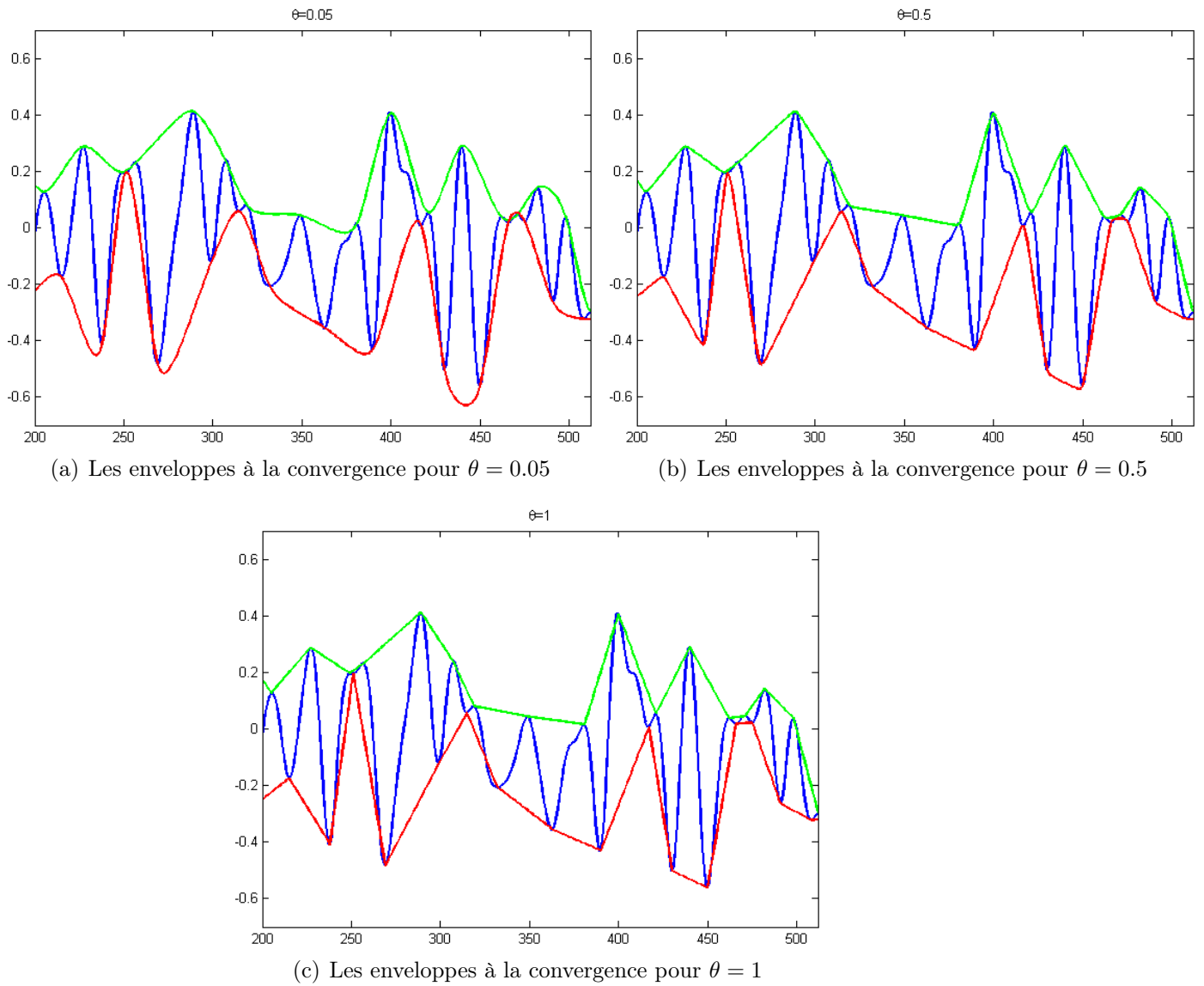
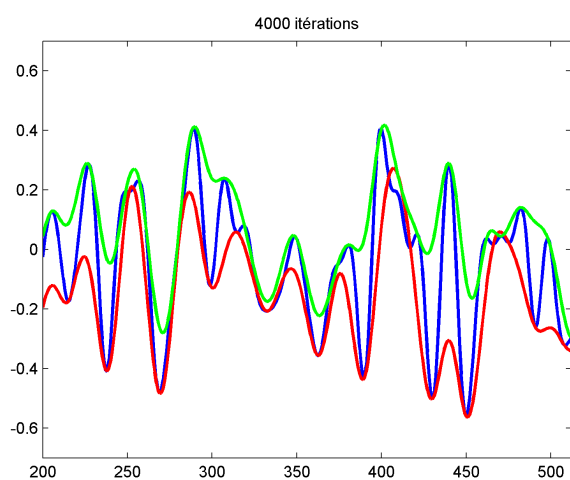
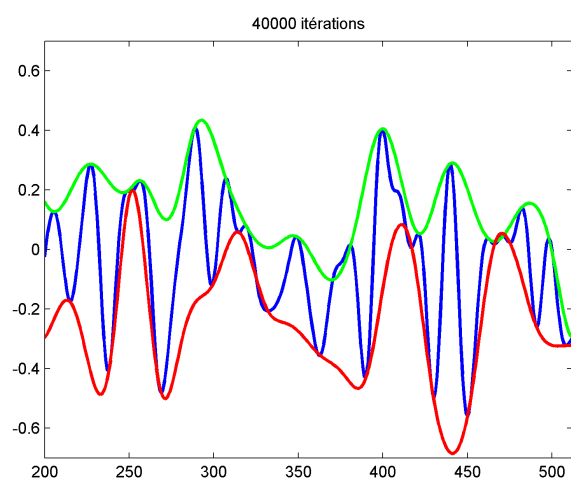


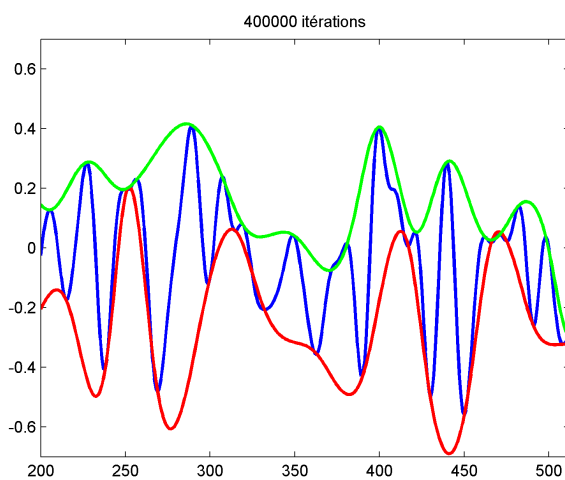
FIGURE 6.4 — En (a, b, c) représentations des enveloppes à la convergence de l'*EDP*.



(a) Les enveloppes à l'itération 4000



(b) Les enveloppes à l'itération 40000



(c) Les enveloppes à l'itération 400000

FIGURE 6.5 — Calcul des enveloppes sur la base du modèle de l'équation (6.4) avec $\theta = 0$. En (a) : à cette étape les deux enveloppes se chevauchent par endroit. En (b) : moins de chevauchement constaté et pratiquement la solution asymptotique est atteinte. En (c) : stabilité de l'évolution aboutissant à la solution.

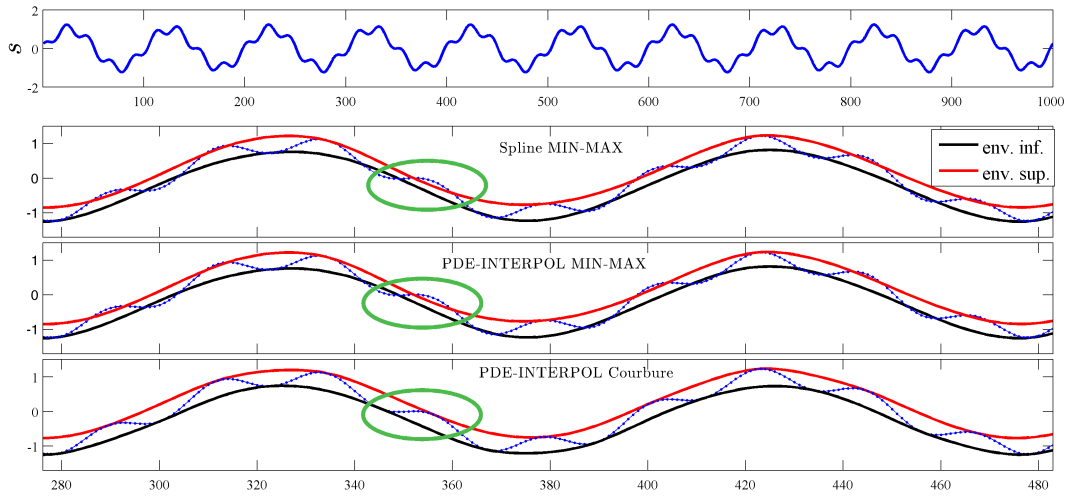


FIGURE 6.6 — Interpolateur *EDP* pour un signal sans extrema locaux.



FIGURE 6.7 — Interpolateur *EDP* pour la restauration d'image. Une image originale est altérée et restaurée avec la version 2D de l'interpolateur *EDP*.

6.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons défini un nouvel interpolateur *EDP* qui permet de calculer les enveloppes d'un signal. Le cadre théorique contribue à la modélisation mathématique de l'algorithme *EMD*. Les tests à la fois en traitement du signal et de l'image démontrent l'efficacité du nouvel interpolateur et fournit un aperçu des possibilités de l'analyse multi-échelle d'un signal multidimensionnel.

