Analyse des manuels scolaires belges

La première étape de notre méthodologie générale est de compléter notre étude de relief sur les notions de droites et de plans dans l'espace par une analyse des manuels belges francophones. Puisque les manuels scolaires sont souvent utilisés par les enseignants lorsqu'ils élaborent leur séquence d'enseignement (Gueudet & Trouche, 2010), leur analyse permet d'avoir un accès aux scénarios que nous pouvons potentiellement trouver dans les classes. Dans ce chapitre, nous précisons la méthodologie suivie et les résultats de cette analyse.

1 Éléments méthodologiques

Nous avons étudié l'ensemble des manuels de mathématiques pour la sixième année [1] de l'enseignement secondaire disponibles sur le marché belge francophone pour l'option « mathématiques pour scientifiques ». Les élèves ayant choisi cette option ont 6 heures (voire parfois 8 heures) de mathématiques hebdommadaires. Nous avons sélectionné ces manuels car nous pensons qu'ils sont les plus « complets ». Nous avons ainsi analysé trois manuels : *CQFD* (2014), *Espace Math* (2004) et *Actimath* (2015). Bien que ces manuels ne soient pas conformes aux programmes actuels, il est possible que les enseignants les utilisent encore en classe au vu du nombre très limité de manuels conformes à ceux-ci. Nous avons également analysé le seul manuel actuellement conforme à ces nouveaux programmes : *CQFD* (2019).

Notre question de recherche formulée dans le chapitre VI nous amène à étudier le scénario (potentiel) qui est proposé dans les manuels. Nous voulons déterminer les activités qui peuvent potentiellement être attendues des élèves à partir des tâches mathématiques présentes dans le scénario et en tenant compte à la fois de leurs connaissances antérieures et du cours exposé dans le manuel. L'étude de relief sur les notions de géométrie analytique dans l'espace, réalisée dans la partie 1, nous aide à définir ce qui peut

1. Rappelons que lors de notre analyse de manuels, ceux-ci n'étaient pas conformes aux nouveaux programmes. Le chapitre des droites et de plans dans l'espace était alors vu en sixième année.

être dans la ZPD des élèves et nous guide dans nos analyses. En nous appuyant sur cette référence, nous analysons la partie cours du manuel. Nous y traquons les cadres, les registres et les points de vue en jeu ainsi que les traitements internes réalisés. Nous analysons également les moments où une interprétation géométrique est effectuée. Nous cherchons à préciser les aspects de l'interprétation géométrique (reconnaître - décrire) abordés par le scénario et les activités qui peuvent en découler. De plus, nous avons relevé que ces notions ont la spécificité d'être des extensions avec accidents des notions de géométrie analytique plane. Nous repérons alors la façon dont le scénario intègre les connaissances nouvelles aux connaissances que les élèves ont déjà ainsi que la gestion des éventuelles ruptures. Bien qu'il s'agit d'un manuel et que l'enseignant est absent de ce média, nous repérons les occasions de proximités qui peuvent être tentées par un enseignant en classe. Cela nous aidera par la suite à mieux comprendre le rôle des échanges entre l'enseignant et les élèves dans la classe (Bridoux et al., 2016a). Finalement, nous analysons *a priori* l'ensemble des tâches à l'aide de l'outil des adaptations des connaissances exposé au chapitre II (point 2.3) parmi lesquelles nous retrouvons les traitements internes. Nous pointons aussi les aspects de l'interprétation géométrique qui sont développés (ou non) dans ces tâches.

Nous choisissons de découper nos analyses en trois parties : les activités d'introduction, le cours [2] et les exercices. Pour chacune de ces parties, nous présentons une analyse globale pour l'ensemble des manuels. Nous en déduisons ensuite les activités qui peuvent être potentiellement attendues des élèves.

2 Chapitres analysés dans les manuels

Trois collections ont été étudiées : *Espace Math*, *CQFD* et *Actimath*. Nous précisons ici les chapitres qui ont été analysés.

Pour la collection *Espace Math* nous avons analysé à la fois le manuel contenant la théorie sur la géométrie analytique (Adam & Lousberg, 2004a) et le manuel d'exercices (Adam & Lousberg, 2004b). En particulier, pour ces deux manuels, nous nous sommes concentrée sur le chapitre 5 intitulé « Géométrie analytique dans l'espace (1re partie) » et sur le chapitre 8 intitulé « Géométrie analytique dans l'espace (2e partie) ». Pour la collection *CQFD*, nous avons ciblé le chapitre 6 intitulé « Géométrie analytique de l'espace » dans la version conforme aux anciens programmes (Annoye, Gilon, Van Eerdenbrugghe, & Wilemme, 2014) et le chapitre 11 intitulé également « Géométrie analytique de l'espace » dans la nouvelle version (Annoye, Gilon, Van Eerdenbrugghe, & Wilemme, 2019). En ce qui concerne la collection *Actimath*, nous nous intéressons au chapitre 2 intitulé « Géométrie analytique des plans et des droites ».

Nous abordons maintenant les analyses de ces différents chapitres.

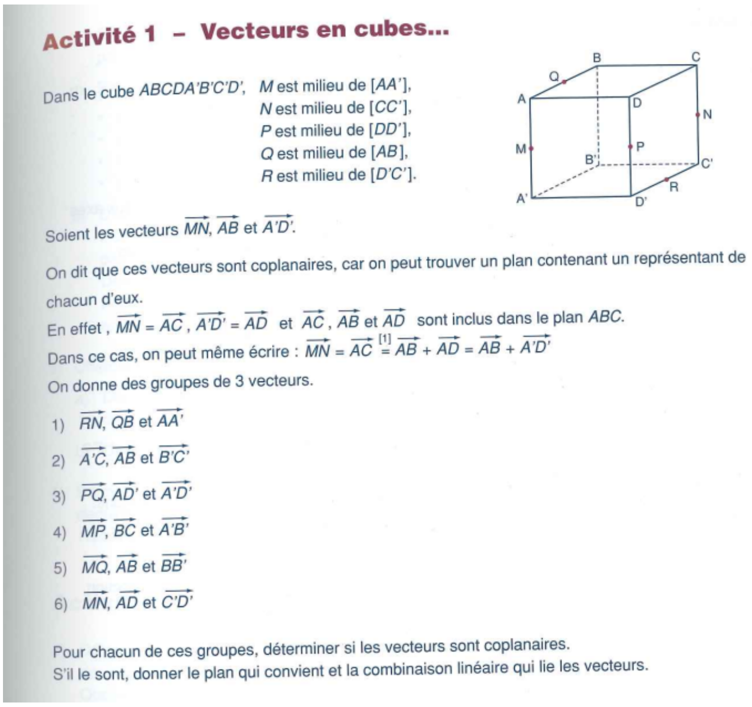
2. Nous étudions ici la mise en forme d'un texte du savoir proposé dans les manuels.

3 La géométrie analytique dans l'espace dans les « anciens » manuels

3.1 Les activités d'introduction

Le nombre d'activités d'introduction varie entre les trois manuels : 7 pour l'*Espace Math*, 10 pour le *CQFD* et 4 pour l'*Actimath*. Nous avons analysé l'ensemble de ces activités.

Dans tous les manuels, les activités s'appuient fortement sur les connaissances antérieures des élèves dans le cadre de la géométrie vectorielle. En effet, ils proposent tous au moins une activité dans laquelle un cube ou un parallélépipède rectangle est placé dans un repère orthonormé. Il est demandé de calculer les composantes des vecteurs et d'exprimer la colinéarité ou la coplanarité des vecteurs. Ainsi, le registre du dessin est un support important pour introduire les équations vectorielles des droites et des plans dans l'espace. C'est donc le point de vue paramétrique dans le cadre de la géométrie vectorielle qui est introduit en premier. La figure VII.1 illustre cet aspect.



Activité 1 – Vecteurs en cubes...

Dans le cube *ABCDA'B'C'D'*, *M* est milieu de [*AA'*],
N est milieu de [*CC'*],
P est milieu de [*DD'*],
Q est milieu de [*AB*],
R est milieu de [*D'C'*].

Soient les vecteurs $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'D'}$.

On dit que ces vecteurs sont coplanaires, car on peut trouver un plan contenant un représentant de chacun d'eux.

En effet, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont inclus dans le plan *ABC*.

Dans ce cas, on peut même écrire : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} \overset{[1]}{=} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'D'}$

On donne des groupes de 3 vecteurs.

1) $\overrightarrow{RN}$, $\overrightarrow{QB}$ et $\overrightarrow{AA'}$
2) $\overrightarrow{A'C}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{B'C'}$
3) $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{AD'}$ et $\overrightarrow{A'D'}$
4) $\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{A'B'}$
5) $\overrightarrow{MQ}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BB'}$
6) $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{C'D'}$

Pour chacun de ces groupes, déterminer si les vecteurs sont coplanaires.
S'il le sont, donner le plan qui convient et la combinaison linéaire qui lie les vecteurs.

FIGURE VII.1 – Activité issue du manuel *Actimath* (Delfeld, T'Kindt-Demulder, Sevrin, & Timmermans, 2015, p. 33).

Il est demandé de déterminer, à partir d'un solide, si les vecteurs donnés sont coplanaires. Cette activité mobilise des connaissances de géométrie synthétique (perspective cavalière, cube, Thalès, diagonale d'un carré, ...) et de géométrie vectorielle (égalité de vecteurs, combinaison linéaire de vecteurs, relation de Chasles, ...). Une conversion entre le registre du dessin et le registre algébrique est nécessaire pour écrire la relation demandée. Si les vecteurs sont coplanaires, une équation paramétrique d'un plan dans le cadre de la géométrie vectorielle doit être fournie pour ces exemples précis. Il s'agit donc de décrire un plan par une équation (paramétrique). Le deuxième aspect de l'interprétation géométrique est alors abordé. Aucun des manuels ne demande de généraliser cette équation vectorielle déterminée pour des exemples précis.

Après avoir déterminé une équation vectorielle, que ce soit pour les droites de l'espace ou les plans, les activités introductives demandent de calculer les composantes des vecteurs et d'écrire une équation paramétrique. Il s'agit donc de passer du cadre de la géométrie vectorielle au cadre de la géométrie analytique pour le point de vue paramétrique. Cette équation paramétrique doit ensuite être écrite sous la forme d'un système de trois équations à trois inconnues et deux paramètres. Les opérations sur les vecteurs sont ainsi mobilisées. En éliminant les paramètres dans ce système, le point de vue cartésien dans le cadre de la géométrie analytique est alors introduit. La figure VII.2 illustre cette démarche. Le registre de la langue naturelle et le registre algébrique sont ici privilégiés.

Dans un repère de l'espace, on donne les points A(1; −2; 3), B(3 : −2 : 1) et C(−1; 3; 2).

a) Si les coordonnées de X sont (x; y; z), calcule les composantes de $\overrightarrow{AX}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b) Traduis par une **équation vectorielle** *(de paramètres λ et μ) l'appartenance du point X au plan passant par les points A, B et C* (Manuel 2, p. 57).

c) Transforme l'équation vectorielle précédente à l'aide des composantes de $\overrightarrow{AX}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ calculées en **a)**. *Tu obtiens un système de trois équations linéaires en λ et μ du type*

$$\begin{cases} x - \ldots = \ldots\ \lambda - \ldots\ \mu \\ y - \ldots \\ z - \ldots \end{cases}$$

d) À l'aide de deux des trois équations précédentes, exprime les paramètres λ et μ en fonction de x, y ou z.
Porte les expressions trouvées de λ et μ dans l'équation non encore utilisée.
Quelle sorte d'équation trouves-tu ? Que représente-t-elle ?

FIGURE VII.2 – Activité issue du manuel *Espace Math* (Adam & Lousberg, 2004b, p. 194–195).

Un deuxième point commun aux trois manuels concerne le découpage des tâches proposées. Toutes les tâches sont découpées en plusieurs sous-tâches, chacune se limitant à un calcul ou à une application d'une méthode donnée dans l'énoncé. Ainsi, des tâches initialement complexes sont fortement réduites. Cet aspect est illustré par les figures VII.1 et VII.2.

Selon notre étude de relief réalisée dans la partie 1, les notions de droites et de plans dans l'espace sont des extensions des notions de droites dans le plan. Il s'agit, au regard du type de ces notions, d'étudier comment la distance entre les connaissances anciennes et les connaissances nouvelles des élèves est prise en compte par le scénario. En particulier, Robert (Vandebrouck, 2008) précise que les extensions de notions peuvent être introduites en proposant un problème qui est construit sur les connaissances anciennes et où le nouveau est utilisé pour le résoudre. De plus, elle précise qu'un moyen de contrôle interne doit être proposé aux élèves pour éviter les conceptions erronées qui peuvent se produire lors des différentes ruptures occasionnées par ces extensions. Bien que tous les manuels mettent en jeu des connaissances anciennes des élèves en géométrie vectorielle, aucun d'entre eux ne propose une activité d'introduction construite à partir des connaissances de géométrie analytique plane. Les droites et les plans dans l'espace ne sont pas introduits comme des extensions des droites dans le plan. Nous proposons une activité d'introduction étendant les notions et un moyen de contrôle interne dans notre séquence d'enseignement présentée dans la partie 3.

Les trois manuels se distinguent sur quelques aspects. Certaines connaissances anciennes des élèves en géométrie synthétique interviennent dans quelques activités pour les manuels *Espace Math* et *Actimath*. De plus, une comparaison entre les résultats obtenus dans les cadres de la géométrie synthétique et de la géométrie analytique est demandée dans le manuel *Actimath*, comme l'illustre la figure VII.3.

Activité 4 – Et d'autres encore...

1) Déterminer des équations cartésiennes des plans *DFG* et *ABC*.
Quelle particularité lie ces deux équations ?

2) En observant le dessin, que peut-on dire de ces deux plans ?
Justifier.
Quelle est leur intersection ?

3) Que faut-il faire pour déterminer par calcul l'intersection des deux plans ?
Suggestion : se rappeler la manière de déterminer par calcul l'intersection de deux droites dans le plan.

4) Comparer les résultats des points 2 et 3.

5) Déterminer une équation cartésienne du plan *ABE*.

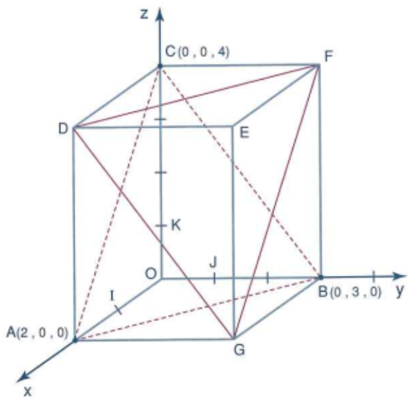


FIGURE VII.3 – Activité issue du manuel *Actimath* (Delfeld et al., ibid., p. 35).

Dans cette activité, deux équations cartésiennes de plans doivent être trouvées. Le deuxième aspect de l'interprétation géométrique est donc abordé (la description). Il s'agit d'analyser les deux relations et de repérer que les vecteurs normaux sont colinéaires. L'analyse du dessin permet de déterminer la position relative des deux plans et d'en déduire leur intersection. Il est ensuite demandé de résoudre un système composé des deux équations cartésiennes trouvées à la question 1. Finalement, une comparaison entre l'ensemble des solutions du système et la position relative occupée par les deux plans est demandée. Elle offre la possibilité d'introduire le fait que deux plans parallèles ont des vecteurs normaux colinéaires.

Dans le manuel *Espace Math*, les activités se limitent à introduire les équations des droites et des plans dans l'espace. Pour les deux autres manuels, des activités sont aussi prévues pour introduire les positions relatives des objets. Un exemple est proposé à la figure VII.4. Il s'agit de déterminer si les affirmations proposées sont vraies ou fausses.

Les équations des droites et des plans sont présentes dans tous les points de vue, ainsi que la notion de vecteur directeur, vecteur normal et produit scalaire. Cette activité mobilise alors des connaissances anciennes et en cours d'acquisition. Pour chaque affirmation, il est nécessaire soit de calculer un produit scalaire entre deux vecteurs, soit de montrer la colinéarité de deux vecteurs. Puisque l'énoncé associe déjà les équations aux objets géométriques, aucun aspect de l'interprétation géométrique n'est en jeu dans ce type d'exercice.

Examiner chacune des propositions suivantes. Si elle est vraie, la justifier ; si elle est fausse, donner un contre-exemple.

a. Soit $\pi \equiv ax+by+cz=0$, avec $(a\,;b\,;c)\neq(0\,;0\,;0)$. La droite d de vecteur directeur $(2a\,;2b\,;2c)$ est parallèle au plan π.

b. La droite $d\equiv\begin{cases}x=2+\lambda\\y=-2\lambda\\z=-1+3\lambda\end{cases}$ est parallèle au plan $\alpha\equiv x+2y+z=3$.

c. Les droites $d_1\equiv\begin{cases}x=3-2\lambda\\y=1+\lambda\\z=-2-3\lambda\end{cases}$ et $d_2\equiv\begin{cases}x=1+\mu\\y=-3+2\mu\\z=5\end{cases}$ sont orthogonales.

d. Les plans $\alpha\equiv 3x-2y+z-1=0$ et $\beta\equiv\begin{cases}x=\lambda+\mu\\y=1-\lambda+\mu\\z=2-5\lambda-\mu\end{cases}$ sont parallèles.

e. La droite $d\equiv\frac{x-1}{3}=\frac{2y+1}{2}=\frac{2-z}{3}$ est sécante au plan $\pi\equiv 2x-3y+4z=7$.

FIGURE VII.4 – Activité issue du manuel *CQFD* (Annoye, Gilon, Van Eerdenbrugghe, & Wilemme, 2014, p. 180).

Le manuel *CQFD* propose, contrairement aux deux autres manuels, une activité traitant des ensembles de points vérifiant une certaine condition. Cette activité est donnée à la figure VII.5.

c. Quels sont les ensembles de points de l'espace qui vérifient les équations suivantes ?

1) $x=0$
2) $x=y=0$
3) $z=-1$
4) $\begin{cases}x=0\\z=2\end{cases}$
5) $x+y=1$

FIGURE VII.5 – Activité issue du manuel *CQFD* (Annoye et al., ibid., p. 179).

Par exemple pour le premier exercice, il est possible de reconnaître directement le plan à partir de l'équation cartésienne $x=0$ car celle-ci a été introduite dans une activité préalable. Il est également possible que les ensembles de points soient explicitement écrits, bien que cela ne soit pas demandé par les anciens programmes. L'ensemble des points de l'espace vérifiant l'équation $x=0$ s'écrit comme $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|\ x=0\}$ ou encore comme l'ensemble $\{(0,y,z)|\ y,z\in\mathbb{R}\}$. La reconnaissance du plan peut se faire à partir de l'ensemble, à partir d'un dessin ou à partir d'une équation paramétrique de celui-ci. Des conversions de registres peuvent donc avoir lieu. Dans les deux cas, le premier aspect de l'interprétation géométrique est travaillé car il s'agit de reconnaître à partir d'un ensemble de points ou d'une équation les objets géométriques.

L'analyse *a priori* des activités d'introduction met en évidence que ce sont principalement les connaissances des élèves en géométrie vectorielle qui sont utilisées. La plupart des activités proposées ne lient pas la géométrie synthétique à la géométrie analytique. Or, notre étude de relief montre que ce changement de cadres est important pour favoriser la conceptualisation de ces notions. Les conversions entre le registre de la langue naturelle et le registre algébrique sont les plus travaillées. Des conversions entre le registre du dessin et le registre algébrique sont moins fréquentes mais présentes dans tous les manuels. Au niveau des points de vue, il s'agit de passer du point de vue paramétrique vers le point de vue cartésien uniquement. Aucune activité ne propose le changement de points de vue réciproque. Au niveau de l'interprétation géométrique, l'aspect de description des objets par une équation apparait plus souvent que la reconnaissance des objets à partir d'une équation ou d'un ensemble de points. D'ailleurs ce dernier aspect n'apparait que dans une seule activité du *CQFD*. Notre analyse montre aussi qu'il n'y a aucune activité d'introduction étendant à l'espace les équations vues en géométrie analytique plane.

Nous allons maintenant analyser la partie cours des trois manuels en question.

3.2 Les cours

L'analyse de la partie exposant le texte du savoir fournit des résultats assez semblables pour les trois manuels, bien qu'ils soient organisés différemment. Par exemple, les mêmes notions sont abordées dans les manuels mais l'ordre dans lequel elles sont introduites est très différent. En ce qui concerne le manuel *CQFD*, les équations de droites dans l'espace sont étudiées avant les équations de plans. Aucun lien n'apparait au sein de ce manuel entre les deux objets géométriques excepté lorsque les positions relatives sont abordées. Pour le manuel *Espace Math*, le premier chapitre analysé concerne principalement le cadre de la géométrie vectorielle. Dans ce chapitre, les équations de droites sont vues avant les équations de plans. Cependant, dans le deuxième chapitre (cadre de la géométrie analytique) et pour le manuel *Actimath*, les équations de plans sont introduites avant les équations de droites dans l'espace. L'ordre dans lequel ces notions apparaissent semble avoir une influence sur les commentaires méta, que nous pouvons trouver dans les manuels, liés à l'interprétation géométrique des équations. En effet, le fait d'étudier les équations de plans avant celles des droites de l'espace permet de décrire une droite comme l'intersection de deux plans et ainsi de donner un système d'équations cartésiennes d'une droite dans l'espace (voir figures VII.6 et VII.7). Ceci est totalement absent du manuel *CQFD*.

Nous avons vu la forme canonique des équations cartésiennes d'une droite. D'autre part, nous savons qu'une droite est l'intersection de deux plans sécants.

La forme générale des équations cartésiennes d'une droite est donnée par le système formé des équations de deux plans sécants.

$$d \equiv \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

FIGURE VII.6 – Extrait issu du manuel *Actimath* (Delfeld et al., ibid., p. 50).

Dans cet extrait, le deuxième aspect de l'interprétation géométrique est travaillé. En effet, il s'agit de décrire une droite dans l'espace par des équations cartésiennes. Pour ce faire, une connaissance ancienne de géométrie synthétique est rappelée. Il y a une occasion de proximité horizontale avec les connaissances des élèves. La forme canonique des équations cartésiennes de droites dans l'espace a été vue précédemment. Cette forme est équivalente à la forme générale donnée dans cet extrait. Aucune explication algébrique n'est donnée au lecteur pour expliquer cette équivalence. Un enseignant en classe peut éventuellement donner un exemple d'un système d'équations cartésiennes dans une des deux formes. Il y a alors une occasion de proximité descendante. De plus, il peut sur la base de cet exemple expliquer aux élèves comment passer d'une forme à l'autre et ainsi travailler la reconnaissance des plans à partir des équations cartésiennes. Il y a alors des explications algébriques ajoutées dans le discours de l'enseignant pour rapprocher ce que l'élève vient de voir à ce qu'il a déjà vu (forme canonique et équations cartésiennes de plans). Il y a donc une occasion de proximité horizontale et un travail possible du premier aspect de l'interprétation géométrique.

- **Si $x_u \neq 0$, $y_u \neq 0$ et $z_u \neq 0$,** alors

$$\boxed{d \equiv \frac{x - x_A}{x_u} = \frac{y - y_A}{y_u} = \frac{z - z_A}{z_u}}$$

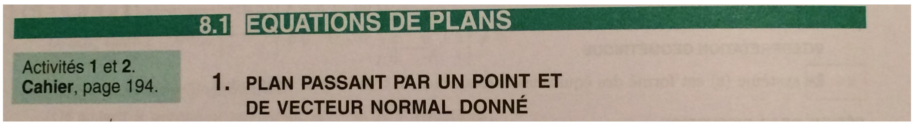
Ces équations forment un **système d'équations cartésiennes** de la droite d passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\,(x_u; y_u; z_u)$. Ce système est formé des équations cartésiennes de trois plans dont l'intersection est la droite d. On n'en retient que deux.

FIGURE VII.7 – Extrait issu du manuel *Espace Math* (Adam & Lousberg, 2004a, p. 96).

Dans ce passage du manuel *Espace Math*, le deuxième aspect de l'interprétation géométrique est abordé puisqu'il s'agit de décrire une droite par des équations cartésiennes dans le cas où toutes les composantes d'un vecteur directeur sont non nulles. Nous trouvons à la figure VII.7 un commentaire méta qui permet un rapprochement entre les équations cartésiennes de plans vues précédemment par les élèves et les équations cartésiennes de droites dans l'espace. Cependant, la mise en relation entre cette forme canonique et les équations cartésiennes des trois plans cités n'est pas effectuée. Un enseignant peut en classe écrire cette double égalité comme un système de trois équations à deux inconnues et faire reconnaître aux élèves les trois plans à partir d'une équation incomplète. Il y a donc une occasion de proximité horizontale et un travail possible du premier aspect de l'interprétation géométrique des objets. De plus, aucune explication n'est donnée à propos de l'expression « on n'en retient que deux ». L'enseignant peut montrer qu'une des trois équations dans le système est inutile et amener la forme générale des équations cartésiennes de droites dans l'espace. Il peut aussi rappeler aux élèves qu'il n'est pas nécessaire d'avoir trois plans sécants pour décrire une droite mais que deux suffisent. Il y a donc une occasion de proximité horizontale supplémentaire.

Ainsi, l'étude des équations de plans avant celle des équations de droites permet de proposer une interprétation géométrique des équations de droites dans le point de vue cartésien. En effet, les deux aspects de l'interprétation géométrique peuvent être abordés. Toutefois, les commentaires qui sont donnés pourraient faire l'objet d'ajouts (compléments d'explications) par un enseignant en classe. De ce fait, il y a plusieurs occasions de proximités horizontales.

L'analyse des trois manuels révèle également qu'aucun d'entre eux ne s'appuie sur le travail déjà réalisé dans les activités introductives pour introduire les notions du cours. Il n'y a d'ailleurs aucune référence dans le cours à ces activités, sauf pour le manuel *Espace Math* (voir la figure VII.8). Les liens entre les activités d'introduction et le cours, c'est-à-dire les liens contextualisé/décontextualisé, sont laissés à la charge du lecteur (élève ou enseignant). Il est possible qu'un enseignant s'appuyant sur ces manuels intègre dans son discours des commentaires méta pour rapprocher ce que les élèves sont en train de voir avec les activités qu'ils ont déjà réalisées. Des occasions de proximités ascendantes seraient alors possibles. Un exemple est donné aux figures VII.9 et VII.10.



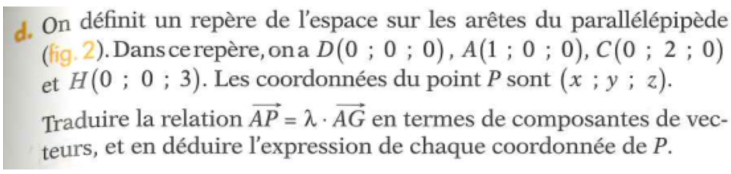
8.1 EQUATIONS DE PLANS

Activités 1 et 2. Cahier, page 194.

1. PLAN PASSANT PAR UN POINT ET DE VECTEUR NORMAL DONNÉ

FIGURE VII.8 – Extrait issu du manuel *Espace Math* (Adam & Lousberg, ibid., p. 92).

À la figure VII.9, nous présentons une activité d'introduction du manuel *CQFD*. Dans celle-ci, il s'agit de passer du cadre de la géométrie vectorielle au cadre de la géométrie analytique pour le point de vue paramétrique.



d. On définit un repère de l'espace sur les arêtes du parallélépipède (fig. 2). Dans ce repère, on a $D(0\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $A(1\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $C(0\ ;\ 2\ ;\ 0)$ et $H(0\ ;\ 0\ ;\ 3)$. Les coordonnées du point P sont $(x\ ;\ y\ ;\ z)$.
Traduire la relation $\overrightarrow{AP} = \lambda \cdot \overrightarrow{AG}$ en termes de composantes de vecteurs, et en déduire l'expression de chaque coordonnée de P.

FIGURE VII.9 – Activité issue du manuel *CQFD* (Annoye et al., ibid., p. 177).

Nous présentons à la figure VII.10 le point théorique correspondant à l'activité de la figure VII.9. Un repère de l'espace, les coordonnées des points A et P et les composantes des vecteurs directeurs sont donnés. La démarche consiste, tout comme dans l'activité d'introduction, à traduire une équation vectorielle en termes de composantes pour obtenir une équation paramétrique d'une droite. Il y a une généralisation possible de la démarche et des résultats proposés dans l'activité d'introduction, donc une occasion de proximité ascendante.

Dans un repère dans l'espace, on considère le point $A(x_A\ ;\ y_A\ ;z_A)$ et le vecteur $\vec{u}(x_{\vec{u}};\ y_{\vec{u}};\ z_{\vec{u}})$.
Soit $P(x\ ;\ y\ ;\ z)$ un point quelconque de l'espace. Il appartient à la droite d définie par le point A et un vecteur directeur $\vec{u}$ si et seulement si il vérifie l'équation (1) pour une valeur réelle de λ.
L'équation (1), traduite en termes de composantes de vecteurs, s'écrit

$$(x-x_A\,;\,y-y_A\,;\,z-z_A)=\lambda(x_{\vec{u}}\,;\,y_{\vec{u}}\,;\,z_{\vec{u}})$$

Cette dernière équation peut être écrite sous forme d'une équation matricielle ou d'un système.
Ce système est un **système d'équations paramétriques** de la droite d, comprenant le point $A(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}$; on écrit

$$d\equiv\begin{pmatrix}x-x_A\\ y-y_A\\ z-z_A\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x_{\vec{u}}\\ y_{\vec{u}}\\ z_{\vec{u}}\end{pmatrix}\quad \text{ou}\quad d\equiv\begin{cases}x-x_A=\lambda x_{\vec{u}}\\ y-y_A=\lambda y_{\vec{u}}\\ z-z_A=\lambda z_{\vec{u}}\end{cases}\ (2)$$

FIGURE VII.10 – Extrait issu du manuel *CQFD* (Annoye et al., ibid., p. 183).

La démarche pour introduire les équations de droites dans l'espace est identique à celle suivie pour les équations de droites dans le plan (équation vectorielle, équation paramétrique, équation cartésienne). Un enseignant peut en classe rapprocher le travail qui est à réaliser ou qui a été réalisé pour l'espace avec le travail déjà effectué par les élèves pour les droites dans le plan. Il y a donc des occasions de proximités horizontales lors de cette extension de la démarche du plan à l'espace. L'analyse des trois manuels met également en évidence qu'aucune attention n'est portée sur les éventuelles continuités et ruptures entre les notions vues dans le plan et les notions de l'espace. Nous notons que les notions du plan n'apparaissent dans aucun des manuels pour les chapitres étudiés. Ainsi, ils ne semblent pas prendre en compte le type des notions de droites et de plans dans l'espace.

Un autre résultat est que les cadres de la géométrie synthétique, de la géométrie vectorielle et de la géométrie analytique sont tous présents dans les manuels. Cependant, les jeux de cadres sont peu nombreux. Les connaissances de géométrie synthétique ne servent que de point de départ pour introduire les vecteurs directeurs des objets et les positions relatives. Un changement de cadres a donc lieu entre la géométrie synthétique et la géométrie vectorielle. Nous illustrons ce point aux figures VII.11 et VII.12.

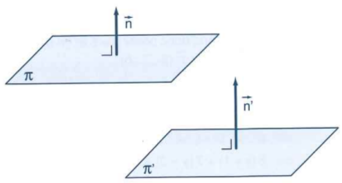
	Comment reconnaître le parallélisme de droites et de plans ?	Comment reconnaître l'orthogonalité de droites et de plans ?
Droites d_1 et d_2	Elles ont un même vecteur directeur.	Un vecteur directeur de d_1 est orthogonal à un vecteur directeur de d_2.
Plans α_1 et α_2	Ils ont un même couple de vecteurs directeurs (non parallèles) ou un même vecteur normal.	Un vecteur normal à α_1 est orthogonal à un vecteur normal à α_2.
Droite d et **plan** α	Un vecteur directeur de d est un vecteur directeur de α.	Un vecteur directeur de d est un vecteur normal à α_2.

FIGURE VII.11 – Extrait issu du manuel *Espace Math* (Adam & Lousberg, ibid., p. 105).

Dans cet extrait, les registres du tableau et de la langue naturelle sont en jeu. La position relative de deux droites, de deux plans et d'une droite avec un plan est traduite en termes de vecteurs directeurs et/ou normaux. Ce tableau permet de passer des connaissances de la géométrie synthétique sur les positions relatives des objets à des propriétés vectorielles.

Deux plans sont parallèles si et seulement si des vecteurs normaux à chacun sont parallèles.

Soient les plans
$\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$
et $\pi' \equiv a'x + b'y + c'z + d' = 0$
et leurs vecteurs normaux respectifs :
$\vec{n}\,(a, b, c)$ et $\vec{n'}\,(a', b', c')$



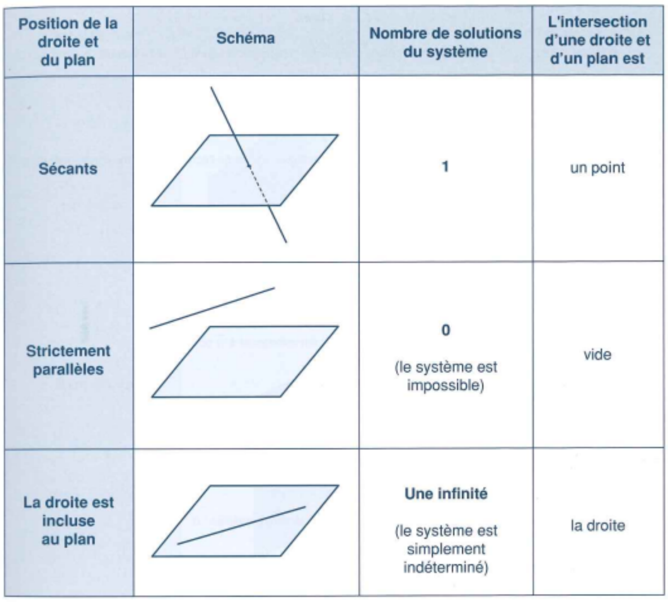
$$\pi \,/\!/\, \pi' \Leftrightarrow \vec{n} \,/\!/\, \vec{n'}$$
$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}_0 \mid \begin{cases} a = ka' \\ b = kb' \\ c = kc' \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$
si aucune composante des vecteurs n'est nulle.

FIGURE VII.12 – Extrait issu du manuel *Actimath* (Delfeld et al., ibid., p. 56).

La figure VII.12 met en jeu d'autres registres que les précédents. Les registres symbolique, algébrique, de la langue naturelle et du dessin sont ici présents. La propriété donnée en langue naturelle pour le parallélisme de deux plans est illustrée par un dessin. Des équations cartésiennes générales sont données pour les deux plans. L'analyse du dessin permet de déterminer le parallélisme des vecteurs normaux. Ce dernier est traduit grâce à la colinéarité des vecteurs. Un changement de cadres entre la géométrie synthétique et la géométrie vectorielle a bien lieu.

Un autre changement de cadres entre la géométrie vectorielle et la géométrie analytique est effectué dans tous les manuels. Nous avons illustré à la figure VII.10 un tel changement concernant le point de vue paramétrique. Ainsi, bien que ces manuels ne soient pas conformes aux nouveaux programmes, le cadre de la géométrie vectorielle permet de lier les cadres de la géométrie synthétique et de la géométrie analytique, comme le proposent les nouveaux programmes. Notons quand même que ces jeux de cadres sont très peu nombreux dans la partie théorique des manuels et se font principalement de la géométrie synthétique vers la géométrie vectorielle et ensuite vers la géométrie analytique.

Dans les trois manuels, les registres principaux sont le registre de la langue naturelle, le registre du dessin et le registre algébrique. Les registres du tableau et symbolique apparaissent de façon plus ponctuelle. Notre analyse met en évidence que le registre algébrique et le registre du dessin viennent généralement appuyer le registre de la langue naturelle. En effet, toute la théorie est formulée dans le registre de la langue naturelle. Le registre du dessin intervient souvent pour illustrer la théorie. Le registre algébrique est présent dans les exemples proposés ou dans les éventuelles démonstrations. Plusieurs conversions de registres sont réalisées dans les manuels mais elles sont toujours non explicitées. La figure VII.13 illustre ce fait.



Position de la droite et du plan	Schéma	Nombre de solutions du système	L'intersection d'une droite et d'un plan est
Sécants		1	un point
Strictement parallèles		0 (le système est impossible)	vide
La droite est incluse au plan		Une infinité (le système est simplement indéterminé)	la droite

FIGURE VII.13 – Extrait issu du manuel *Actimath* (Delfeld et al., ibid., p. 65).

Il s'agit, dans cet extrait, de lier la position relative occupée par une droite et un plan avec le nombre de solutions du système composé des équations de ces objets. Ainsi, la position relative donnée dans le registre de la langue naturelle est traduite par un dessin. Le dessin permet de mettre en évidence les points communs aux deux objets et de déduire le nombre de solutions des systèmes. Les intersections possibles entre le plan et la droite sont décrites en fonction du nombre de solutions. Il y a donc plusieurs conversions de registres à effectuer : de la langue naturelle vers le dessin, du dessin vers l'algébrique, de l'algébrique vers la langue naturelle. Aucune explication n'est ajoutée dans ce manuel. Un enseignant s'appuyant sur cet extrait en classe peut donner des explications supplémentaires sur ces conversions, offrant ainsi des occasions de proximités horizontales avec les connaissances des élèves en géométrie synthétique et en algèbre.

Les traitements dans le registre algébrique sont nombreux et ne sont pas justifiés dans deux des trois manuels. La figure VII.14 fournit un extrait dans lequel aucune justification n'apparait. Seul le manuel *Espace Math* justifie certaines étapes de calculs, comme nous pouvons le voir à la figure VII.15.

Un point P de l'espace appartient au plan π

si et seulement si $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AP}$

si et seulement si $\vec{n} \perp \overrightarrow{AP}$

si et seulement si $\vec{n} \bullet \overrightarrow{AP} = 0$

si et seulement si $a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$

si et seulement si $ax+by+cz=ax_A+by_A+cz_A$.

FIGURE VII.14 – Extrait issu du manuel *CQFD* (Annoye et al., ibid., p. 191).

- Dans un repère de l'espace,

si $(x_A; y_A; z_A)$ sont les coordonnées du point A,
$(x; y; z)$ celles d'un point X quelconque de π,
$(x_u; y_u; z_u)$ les composantes de $\vec{u}$,

alors $\overrightarrow{AX} = k\,\vec{u}$

$\Updownarrow$ (composantes d'un vecteur)

$(x - x_A; y - y_B; z - z_B) = k(x_u; y_u; z_u)$

$\Updownarrow$ (égalité de triplets de réels)

$$\boxed{\begin{cases} x - x_A = kx_u \\ y - y_A = ky_u \\ z - z_A = kz_u \end{cases}}$$

Ces équations forment un **système d'équations paramétriques** de la droite d;
k en est le **paramètre** réel.

FIGURE VII.15 – Extrait issu du manuel *Espace Math* (Adam & Lousberg, ibid., p. 96).

Il est possible qu'un enseignant ajoute certaines de ces justifications en classe. Les traitements et les conversions de registres sont donc une source importante d'occasions de proximités horizontales.

Un autre résultat de notre analyse est que les points de vue cartésien et paramétrique sont travaillés dans tous les manuels. Les changements de points de vue peuvent s'effectuer différemment selon les manuels et selon la notion. Le tableau VII.1 permet de mettre en évidence les changements de points de vue qui sont réalisés dans les trois manuels en distinguant les équations de plans des équations de droites. La lettre « P » désigne le point de vue paramétrique et la lettre « C » le point de vue cartésien. Nous y précisons également la démarche adoptée par chaque manuel pour les effectuer : soit de manière générale, soit sur un exemple.

	Actimath	*CQFD*	*Espace Math*
Droites	P → C Général	P → C Général	P → C Général
		C → P Exemple	C → P Exemple
Plans	P → C Exemple	P → C Exemple Général	P → C Exemple Général
			C → P Exemple

TABLE VII.1 – Les changements de points de vue proposés dans les manuels analysés.

Le tableau met en évidence que tous les manuels passent du point de vue paramétrique au point de vue cartésien pour les équations de droites dans l'espace. Pour les manuels *Actimath* et *Espace Math*, le paramètre λ dans une équation paramétrique générale est bien isolé pour écrire un système d'équations cartésiennes. La démarche est entièrement explicitée. Par contre, pour le manuel *CQFD*, la méthode est donnée mais les calculs ne sont pas effectués. La figure VII.16 illustre ce changement de points de vue.

En éliminant λ entre les équations du système (2), on obtient des équations cartésiennes de la droite d, définie par un point $A(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$ et un vecteur directeur $\vec{u}(x_{\vec{u}}\ ;\ y_{\vec{u}}\ ;\ z_{\vec{u}})$.

1. Si $x_{\vec{u}} \neq 0$, $y_{\vec{u}} \neq 0$ et $z_{\vec{u}} \neq 0$, alors $d \equiv \dfrac{x - x_A}{x_{\vec{u}}} = \dfrac{y - y_A}{y_{\vec{u}}} = \dfrac{z - z_A}{z_{\vec{u}}}$

Si la droite d est définie par les points $A(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$, $B(x_B\ ;\ y_B\ ;\ z_B)$ et si $(x_B - x_A) \neq 0$, $(y_B - y_A) \neq 0$ et $(z_B - z_A) \neq 0$, alors $AB \equiv \dfrac{x - x_A}{x_B - x_A} = \dfrac{y - y_A}{y_B - y_A} = \dfrac{z - z_A}{z_B - z_A}$.

FIGURE VII.16 – Extrait issu du manuel *CQFD* (Annoye et al., ibid., p. 183).

Le passage du point de vue cartésien vers le point de vue paramétrique n'est pas effectué dans le manuel *Actimath*. Or, ce passage est proposé dans les deux autres manuels, mais uniquement sur un exemple comme l'illustre la figure VII.17.

EXEMPLE
La droite d a pour équations cartésiennes $\begin{cases} 2x+3y-z-4=0 \\ x-y+z-6=0. \end{cases}$
Trouver des équations paramétriques de d.
En résolvant le système, on trouve successivement

$$\begin{cases} 2x+3y-z-4=0 \\ x=y-z+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(y-z+6)+3y-z-4=0 \\ x=y-z+6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5y-3z+8=0 \\ x=y-z+6 \end{cases}$$

En donnant des valeurs arbitraires à z (par exemple), soit $z=\gamma$, on obtient

$y=\frac{3}{5}\gamma-\frac{8}{5}$ et $x=\frac{3}{5}\gamma-\frac{8}{5}-\gamma+6.$ D'où $d \equiv \begin{cases} x=-\frac{2}{5}\gamma+\frac{22}{5} \\ y=\frac{3}{5}\gamma-\frac{8}{5} \\ z=\gamma. \end{cases}$

FIGURE VII.17 – Extrait issu du manuel *Espace Math* (Adam & Lousberg, ibid., p. 98).

En ce qui concerne les plans, le passage du point de vue paramétrique vers le point de vue cartésien est effectué dans les trois manuels. L'élimination des deux paramètres ne se fait que sur un exemple particulier. Les manuels *CQFD* et *Espace Math* proposent ce changement de points de vue en utilisant également la méthode des déterminants. Cette démarche est illustrée à la figure VII.18.

Un système d'équations paramétriques d'un plan π peut s'écrire sous forme matricielle (synthèse 5)

$$\pi \equiv \begin{pmatrix} x-x_A \\ y-y_A \\ z-z_A \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \\ z_{\vec{u}} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{v}} \\ z_{\vec{v}} \end{pmatrix} \quad (4)$$

Considérons la matrice $M = \begin{pmatrix} x-x_A & x_{\vec{u}} & x_{\vec{v}} \\ y-y_A & y_{\vec{u}} & y_{\vec{v}} \\ z-z_A & z_{\vec{u}} & z_{\vec{v}} \end{pmatrix}$.

Puisque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs non parallèles du plan, ils sont non nuls et non multiples l'un de l'autre. De même, leurs composantes ne sont pas toutes nulles simultanément et ne sont pas proportionnelles. Dès lors, les deux dernières colonnes de la matrice M ne sont pas entièrement nulles et ne sont pas proportionnelles.

Par contre, l'écriture (4) signifie que les composantes du vecteur $\overrightarrow{AP}$ sont des sommes de multiples (ou combinaisons linéaires) des composantes des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. La première colonne de la matrice M est donc combinaison linéaire des deux autres colonnes, ce qui entraîne (CQFD5e 6 périodes/semaine, propriété e, synthèse 11, page 341) que

$$\begin{vmatrix} x-x_A & x_{\vec{u}} & x_{\vec{v}} \\ y-y_A & y_{\vec{u}} & y_{\vec{v}} \\ z-z_A & z_{\vec{u}} & z_{\vec{v}} \end{vmatrix} = 0 \quad (5)$$

Cette équation est une équation cartésienne du plan π, comprenant le point $A(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$ et de vecteurs directeurs non parallèles $\vec{u}(x_{\vec{u}}\ ;\ y_{\vec{u}}\ ;\ z_{\vec{u}})$ et $\vec{v}(x_{\vec{v}}\ ;\ y_{\vec{v}}\ ;\ z_{\vec{v}})$. Un point $P(x\ ;\ y\ ;\ z)$ de l'espace est un point du plan π si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation (5). On écrit

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-x_A & x_{\vec{u}} & x_{\vec{v}} \\ y-y_A & y_{\vec{u}} & y_{\vec{v}} \\ z-z_A & z_{\vec{u}} & z_{\vec{v}} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ou} \quad \pi \equiv \begin{vmatrix} x-x_A & y-y_A & z-z_A \\ x_{\vec{u}} & y_{\vec{u}} & z_{\vec{u}} \\ x_{\vec{v}} & y_{\vec{v}} & z_{\vec{v}} \end{vmatrix} = 0$$

FIGURE VII.18 – Extrait issu du manuel *CQFD* (Annoye et al., ibid., p. 188).

À la figure VII.18, il s'agit d'écrire une équation paramétrique sous la forme d'une matrice, de poser que le déterminant de cette matrice est nul, puis de le calculer. Cette démarche met en jeu des connaissances sur les matrices et les déterminants. Dans les anciens programmes, ces notions ont déjà été étudiées en cinquième année. Or, elles sont absentes des nouveaux programmes. Pourtant, il y est demandé de pouvoir déterminer une équation cartésienne de plans à l'aide des déterminants. Ce changement de points de vue demande, au sein des nouveaux programmes, une mise en œuvre de plusieurs connaissances nouvelles. Les enseignants abordant le passage du point de vue paramétrique au point de vue cartésien avec cette démarche peuvent ajouter dans leurs discours de nombreux commentaires méta. Cependant, comme les notions de matrices et de déterminants n'ont pas été étudiées auparavant, ces commentaires peuvent possiblement se trouver en dehors de la ZPD des élèves.

Le tableau met également en évidence que le passage du point de vue cartésien vers le point de vue paramétrique pour les plans n'est pas effectué dans deux des trois manuels. De plus, le troisième manuel ne le réalise que sur un exemple. La méthode est illustrée à la figure VII.19. Il s'agit, tout comme pour les droites, d'introduire deux paramètres dans une équation cartésienne.

1. Comment déterminer des équations paramétriques d'un plan dont on donne une équation cartésienne ?

On détermine les coordonnées d'un point quelconque du plan.

EXEMPLES

1) Le plan π a pour équation cartésienne $5x-3y+2z-7=0$.
En donnant des valeurs arbitraires à x et y (par exemple), soit $x=\alpha$ et $y=\beta$, les coordonnées d'un point quelconque de π sont $\left(\alpha;\beta;\frac{7-5\alpha+3\beta}{2}\right)$.
Des *équations paramétriques* de π sont donc alors

$$\begin{cases} x=\alpha \\ y=\beta \\ z=\dfrac{7-5\alpha+3\beta}{2}. \end{cases}$$

2) Le plan π a pour équation cartésienne $5x-y=6$.
En donnant des valeurs arbitraires à x (par exemple) et à z, soit $x=\alpha$ et $z=\gamma$, les coordonnées d'un point quelconque de π sont $(\alpha;5\alpha-6;\gamma)$.
Des *équations paramétriques* de π sont donc alors

$$\begin{cases} x=\alpha \\ y=5\alpha-6 \\ z=\gamma. \end{cases}$$

FIGURE VII.19 – Extrait issu du manuel *Espace Math* (Adam & Lousberg, ibid., p. 95).

Un autre point commun dans les trois manuels concerne l'importance du point de vue cartésien dans le cours par rapport au point de vue paramétrique. En effet, le point de vue paramétrique est le premier abordé et permet d'introduire le point de vue cartésien par élimination du ou des paramètres. Une fois que le point de vue cartésien a été introduit, toutes les notions étudiées ensuite sont uniquement définies à partir de ce point de vue. C'est le cas, par exemple, pour les différentes positions relatives de deux droites, de deux ou trois plans, d'une droite et d'un plan.

L'analyse des trois manuels révèle également qu'il y a de nombreux exemples dans le cours. Il s'agit en général d'applications directes de la notion qui vient d'être introduite. Cependant, certains exemples demandent quelques adaptations des connaissances de la part du lecteur (élève ou enseignant). C'est le cas, par exemple, pour la description d'un plan dans le point de vue paramétrique. La figure VII.20 fournit le résultat du cours. La figure VII.21 donne l'exemple qui suit ce point théorique.

$$\pi \equiv \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \\ z_{\vec{u}} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{v}} \\ z_{\vec{v}} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \pi \equiv \begin{cases} x - x_A = \lambda \cdot x_{\vec{u}} + \mu \cdot x_{\vec{v}} \\ y - y_A = \lambda \cdot y_{\vec{u}} + \mu \cdot y_{\vec{v}} \\ z - z_A = \lambda \cdot z_{\vec{u}} + \mu \cdot z_{\vec{v}} \end{cases}$$

FIGURE VII.20 – Extrait issu du manuel *CQFD* (Annoye et al., ibid., p. 186).

Exemple

Équations paramétriques du plan π comprenant les trois points $A(1\ ;\ 3\ ;\ 7)$, $B(5\ ;\ 2\ ;\ 1)$ et $C(7\ ;\ 8\ ;\ 9)$.

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (4\ ;\ -1\ ;\ -6)\ ;\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (6\ ;\ 5\ ;\ 2).$$

On obtient

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 1 + 4\lambda + 6\mu \\ y = 3 - \lambda + 5\mu \\ z = 7 - 6\lambda + 2\mu \end{cases}$$

FIGURE VII.21 – Extrait issu du manuel *CQFD* (Annoye et al., ibid., p. 186).

La figure VII.20 donne une équation paramétrique ou un système d'équations paramétriques pour un plan passant par le point $A(x_A, y_A, z_A)$ et dont deux vecteurs directeurs sont $\overrightarrow{u} = (x_u, y_u, z_u)$ et $\overrightarrow{v} = (x_v, y_v, z_v)$. Par contre, à la figure VII.21, trois points A, B et C sont donnés. Il s'agit donc de construire deux vecteurs directeurs non colinéaires à partir de ces trois points. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont choisis. Une reconnaissance des modalités d'application de la notion est nécessaire. Notons qu'il n'est pas précisé que les deux vecteurs choisis sont bien non colinéaires. D'ailleurs, le manuel n'y fait pas référence non plus dans le point théorique. Finalement, un système d'équations paramétriques est donné. La forme de celui-ci est légèrement différente de celle fournie dans le point théorique. En effet, ici, les coordonnées du point A sont mises à droite de l'égalité et non à gauche. Il est possible qu'un enseignant dans sa classe apporte des compléments d'explication. Ces commentaires peuvent s'appuyer sur les connaissances anciennes des élèves sur les systèmes d'équations et sur la colinéarité des vecteurs. Ils peuvent aussi s'appuyer sur les connaissances en cours d'acquisition et sur le passage du décontextualisé au contextualisé, amenant ainsi des occasions de proximités descendantes et horizontales.

Nous présentons un deuxième exemple, cette fois-ci pour le manuel *Actimath*. Une description du plan dans le point de vue paramétrique est donnée en toute généralité à la figure VII.22. L'exemple qui suit ce point théorique est donné à la figure VII.23.

Les équations paramétriques du plan π comprenant le point $A\,(x_A\,,y_A\,,z_A)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}\,(x_{\vec{u}}\,,y_{\vec{u}}\,,z_{\vec{u}})$ et $\vec{v}\,(x_{\vec{v}}\,,y_{\vec{v}}\,,z_{\vec{v}})$ ($\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ et $\vec{u}$, $\vec{v}$ non colinéaires sont

$$\pi \equiv \begin{cases} x = x_A + \lambda x_{\vec{u}} + \mu x_{\vec{v}} & (1) \\ y = y_A + \lambda y_{\vec{u}} + \mu y_{\vec{v}} & (2) \\ z = z_A + \lambda z_{\vec{u}} + \mu z_{\vec{v}} & (3) \end{cases}$$

où λ et μ sont les paramètres réels.

FIGURE VII.22 – Extrait issu du manuel *Actimath* (Delfeld et al., ibid., p. 38).

Exemples :

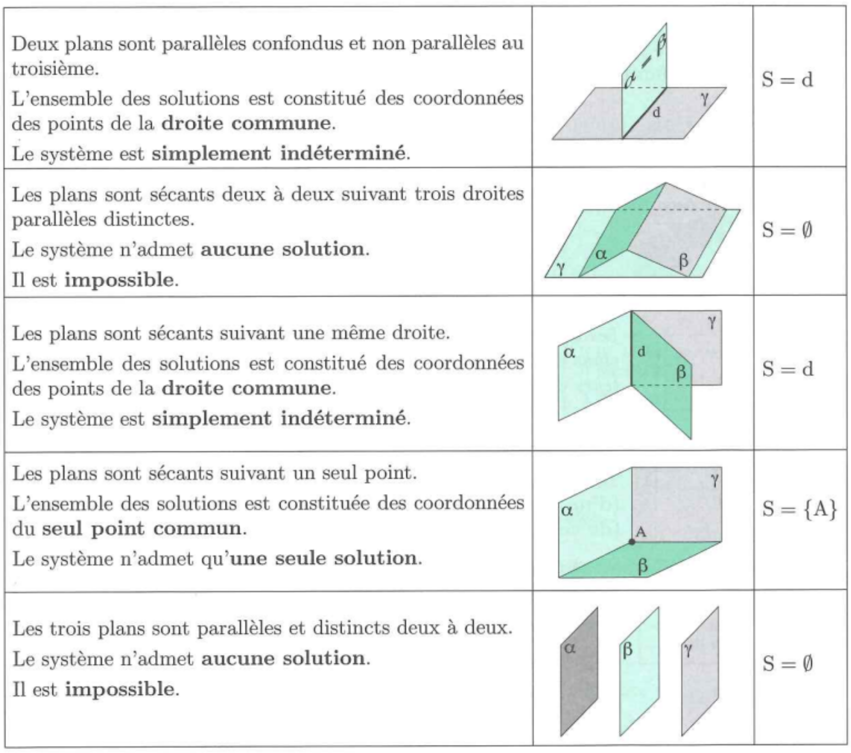
1) Dans l'espace muni du repère $(O\,,\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$, on considère le plan α défini par les points $A\,(1\,,-1\,,2)$, $B\,(0\,,3\,,1)$ et $C\,(-2\,,1\,,2)$. Recherchons les équations paramétriques du plan α.
Ces points ne sont pas alignés; en effet, les composantes de $\overrightarrow{AB}\,(-1\,,4\,,-1)$ et $\overrightarrow{AC}\,(-3\,,2\,,0)$ nous montrent que ces vecteurs ne sont pas colinéaires.
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont donc des vecteurs directeurs de α.
Le plan α a donc pour équation vectorielle $\overrightarrow{AP} = \lambda\,\overrightarrow{AB} + \mu\,\overrightarrow{AC}$
Ou encore, en donnant à P les coordonnées $(x\,,y\,,z)$

$(x-1\,,y+1\,,z-2) = (-\lambda-3\mu\,,4\lambda+2\mu\,,-\lambda)$ ou encore $\begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \\ z-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda-3\mu \\ 4\lambda+2\mu \\ -\lambda \end{pmatrix}$

FIGURE VII.23 – Extrait issu du manuel *Actimath* (Delfeld et al., ibid., p. 38).

La figure VII.22 met plus en évidence les hypothèses sur les vecteurs directeurs que dans le manuel *CQFD*. Il est bien précisé ici qu'ils sont non nuls et non colinéaires. La figure VII.23 donne trois points A, B et C. Contrairement à la figure VII.21, il est bien justifié que les deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Cependant, une traduction est laissée à la charge du lecteur entre « les points ne sont pas alignés » et « les vecteurs formés de ces trois points sont non colinéaires ». De plus, il n'est ni expliqué comment calculer les composantes des vecteurs, ni réellement pourquoi ils ne sont pas colinéaires. Dans ce manuel, il ne s'agit pas d'appliquer directement le résultat qui vient d'être introduit. En effet, une équation vectorielle est d'abord donnée et puis traduite avec les composantes des vecteurs. C'est la démarche appliquée pour obtenir le point théorique de la figure VII.22 qui est particularisée à cet exemple. Les deux formes d'équations dans l'exemple ont été données en toute généralité, mais il ne s'agit pas d'une application directe du résultat vu. Un enseignant peut mettre en évidence dans sa classe les liens décontextualisé/contextualisé et ajouter des explications, notamment pour la non colinéarité, ce qui donnerait lieu à des occasions de proximités descendantes et horizontales.

En ce qui concerne l'interprétation géométrique des objets, il s'agit principalement dans les trois manuels de décrire les droites et les plans par des équations. Le deuxième aspect de l'interprétation géométrique est omniprésent dans tous les manuels mais se limite à une description par des équations. Le premier aspect de l'interprétation géométrique à partir des équations est peu travaillé dans les trois manuels car bien souvent les objets sont explicités. Toutefois, les commentaires présents dans les cours sur les systèmes d'équations cartésiennes des droites, comme illustrés aux figures VII.6 et VII.7, offrent la possibilité de travailler cet aspect pour les équations cartésiennes. La reconnaissance des objets à partir d'ensembles apparait dans une activité introductive (voir figure VII.5) et dans quelques tâches dans les trois manuels mais concerne uniquement les ensembles de solutions des systèmes. Pour les manuels *CQFD* et *Espace Math*, celle-ci n'est réalisée que pour les intersections de trois plans, comme le montre la figure VII.24. Le manuel *Actimath* en propose une pour les intersections entre deux droites, deux plans et une droite avec un plan (voir figure VII.13).



Deux plans sont parallèles confondus et non parallèles au troisième. L'ensemble des solutions est constitué des coordonnées des points de la **droite commune**. Le système est **simplement indéterminé**.		S = d
Les plans sont sécants deux à deux suivant trois droites parallèles distinctes. Le système n'admet **aucune solution**. Il est **impossible**.		S = ∅
Les plans sont sécants suivant une même droite. L'ensemble des solutions est constitué des coordonnées des points de la **droite commune**. Le système est **simplement indéterminé**.		S = d
Les plans sont sécants suivant un seul point. L'ensemble des solutions est constituée des coordonnées du **seul point commun**. Le système n'admet qu'**une seule solution**.		S = {A}
Les trois plans sont parallèles et distincts deux à deux. Le système n'admet **aucune solution**. Il est **impossible**.		S = ∅

FIGURE VII.24 – Extrait issu du manuel *Espace Math* (Adam & Lousberg, ibid., p. 101).

Nous déduisons de cette analyse du cours proposé dans les trois manuels quelques éléments de réponse à notre problématique. Nous nous intéressons à la possibilité de développer une flexibilité entre les cadres géométriques, les registres et les points de vue chez les élèves, ainsi que leur interprétation géométrique des équations et des ensembles de points. Notre analyse révèle que tous les manuels proposent des changements de cadres, des conversions de registres et des changements de points de vue. Cependant, ces traitements internes restent non explicités, ponctuels et à sens unique. En effet, en ce qui concerne les jeux de cadres, nous avons montré qu'il s'agit principalement de passer de la géométrie synthétique à la géométrie vectorielle et de cette dernière à la géométrie analytique. Les passages réciproques ne sont pas abordés. Il en est de même pour les conversions de registres qui s'effectuent le plus souvent du registre de la langue naturelle soit vers le registre du dessin, soit vers le registre algébrique. Nous avons également montré que l'explicitation de ces traitements internes, par un enseignant en classe, peut occasionner de nombreuses proximités horizontales avec les connaissances que les élèves ont déjà. Nous pointons aussi des occasions de proximités descendantes lorsque les notions sont exemplifiées. Par contre, les trois manuels ne s'appuient pas sur les démarches et les résultats obtenus dans les activités d'introduction. Dans une classe, un enseignant pourra très bien lier le contextualisé au décontextualisé et tenter les occasions de proximités ascendantes repérées.

Nous avons également montré que l'interprétation géométrique des objets n'est que peu présente dans les trois manuels. En effet, les deux aspects de l'interprétation géométrique n'appraissent que pour le point de vue cartésien et uniquement pour les droites, à la condition que les équations de plans soient étudiées avant. Ainsi, l'ordre dans lequel les notions sont introduites peut avoir une influence sur l'interprétation géométrique des objets. Les ensembles et les notions ensemblistes associées (union, intersection, ...) sont peu travaillés dans les trois manuels. Cela peut expliquer que la reconnaissance des objets par des ensembles n'est travaillée que pour les ensembles de solutions des systèmes d'équations linéaires.

Bien que ces manuels soient conformes aux anciens programmes, les changements de points de vue sont abordés et la géométrie vectorielle établit un lien entre la géométrie synthétique et la géométrie analytique. Cependant, ces manuels proposent de passer du point de vue paramétrique au point de vue cartésien pour les plans grâce aux matrices et aux déterminants. Puisque ces notions ne sont plus présentes dans les nouveaux programmes, il se peut que ce changement de point de vue se fasse à partir d'un exemple et plus en toute généralité. De plus, ces manuels ne mettent pas en évidence l'extension des notions entre le plan et l'espace au sein de la partie théorique. Il se peut que cela soit fait dans les manuels conformes aux nouveaux programmes. Nous parlons de ceci au point 4.

Nous complétons maintenant ces premiers résultats par une analyse des exercices proposés dans les trois manuels.

3.3 Les exercices

Les exercices proposés dans les trois manuels sont nombreux. Le tableau VII.2 indique le nombre de tâches proposées par les trois manuels.

	Actimath	*CQFD*	*Espace Math*
Nombres de tâches	132	82	72

TABLE VII.2 – Le nombre de tâches proposées dans les manuels analysés.

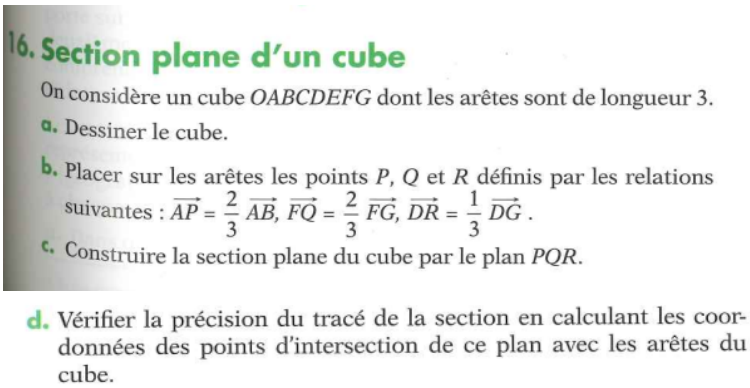
Afin d'inférer des éléments sur la flexibilité qui peut être développée chez les élèves sur les notions visées, nous avons regardé les adaptations des connaissances nécessaires pour la résolution des différentes tâches. Nous avons ainsi précisé le niveau de mise en fonctionnement des connaissances pour chacune des tâches et pour les trois manuels. Le tableau VII.3 regroupe cette information.

Niveaux de mise en fonctionnement	*Actimath*	*CQFD*	*Espace Math*
Technique	42	12	30
Mobilisable	78	49	35
Disponible	12	21	7

TABLE VII.3 – Niveaux de mise en fonctionnement des tâches dans les manuels.

Nous ne présentons pas l'analyse *a priori* de toutes les tâches proposées dans les trois manuels. Partant du tableau VII.3, nous exposons nos constatations et les exemplifions par une ou plusieurs tâches des manuels. Nous avons réalisé et encadré l'analyse *a priori* des tâches sélectionnées.

Le manuel *CQFD* propose beaucoup plus de tâches de niveau disponible car ce manuel est composé d'une section « résoudre un problème ». Dans cette partie du manuel, nous retrouvons huit tâches permettant de travailler les notions de droites et de plans dans l'espace dans leur dimension outil, mais aussi de lier les outils et les démarches de la géométrie synthétique et de la géométrie analytique (voir figure VII.25). Ce travail de comparaison entre les démarches propres aux géométries synthétique et analytique est préconisé dans les nouveaux programmes.



16. Section plane d'un cube

On considère un cube $OABCDEFG$ dont les arêtes sont de longueur 3.

a. Dessiner le cube.

b. Placer sur les arêtes les points P, Q et R définis par les relations suivantes : $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{FQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{DR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DG}$.

c. Construire la section plane du cube par le plan PQR.

d. Vérifier la précision du tracé de la section en calculant les coordonnées des points d'intersection de ce plan avec les arêtes du cube.

FIGURE VII.25 – Extrait issu du manuel *CQFD* (Delfeld et al., ibid., p. 203–204).

Analyse *a priori* de la tâche présentée à la figure VII.25

Toutes les questions sont fermées.

Domaines de travail

Cadre de la géométrie synthétique, cadre de la géométrie vectorielle, cadre de la géométrie analytique.

Registres d'écriture

Registre de la langue naturelle, registre algébrique, registre du dessin, registre ensembliste.

Points de vue

Point de vue paramétrique, point de vue cartésien.

Connaissances mises en jeu

- Connaissances anciennes : perspective cavalière, cube, repère orthonormé de l'espace, repérage des points dans l'espace, opérations vectorielles, composantes d'un vecteur, section d'un cube par un plan, parallélisme, point de percée d'une droite dans un plan (GS), droites sécantes, vecteurs directeurs, systèmes d'équations.
- Connaissances en cours d'acquisition : équations paramétriques et cartésiennes de plans, équations paramétriques de droites de l'espace.

Adaptations à réaliser

L'énoncé est donné en langue naturelle. Un cube doit être dessiné à la première question (*conversion de registres*). Cela met en jeu les connaissances de géométrie synthétique sur la perspective cavalière et les propriétés du cube (*mise en jeu de connaissances anciennes*). Les points P, Q et R sont définis via une relation vectorielle. Il s'agit de placer le cube dans un repère orthonormé de l'espace et de donner les coordonnées des sommets (*mise en jeu de connaissances anciennes*, *changement de cadres*). Les coordonnées des points P, Q et R sont déterminées en utilisant les opérations vectorielles et le calcul des composantes d'un vecteur (*mise en jeu de connaissances anciennes*). Le placement de ces trois points sur le cube amène à mesurer des distances entre deux points (*conversion de registres*). Une fois ces trois points placés, il s'agit de construire une section du cube par le plan PQR dans le cadre de la géométrie synthétique. Cette construction fait intervenir beaucoup de connaissances anciennes de ce cadre tels que le parallélisme des faces du cube, la recherche d'un point de percée d'une droite dans un plan, la recherche du point d'intersection de deux droites. La résolution détaillée de cette tâche est proposée en annexe B. Il est enfin demandé de vérifier la précision du tracé. Il s'agit donc de construire la section du cube par le plan PQR dans le cadre de la géométrie analytique. Pour cela, une équation du plan PQR et de chaque arête du cube doit être donnée dans un point de vue à choisir (*existence de choix*, *mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition*). Des vecteurs directeurs peuvent facilement être donnés pour les différents objets (*mise en jeu de connaissances anciennes en géométrie vectorielle*). Une équation paramétrique est écrite pour le plan PQR et pour les arêtes. Il est possible de donner une équation cartésienne du plan pour faciliter les calculs suivants (*changement de points de vue*). Plusieurs systèmes doivent ensuite être résolus dans le registre algébrique (*mise en jeu de connaissances anciennes*). L'ensemble des solutions est ensuite donné (*conversion de registres*). Chaque ensemble représente les coordonnées d'un sommet de la section qu'il faut déterminer. Ces points sont placés sur le dessin (*conversion de registres*, *mise en jeu de connaissances anciennes*). Il reste à comparer les deux sections pour juger de la précision du tracé effectué dans le cadre de la géométrie synthétique.

Ainsi, cette tâche mélange les cadres de la géométrie synthétique, de la géométrie vectorielle et de la géométrie analytique. Elle peut aussi entrainer des changements de points de vue du paramétrique au cartésien. Elle met en œuvre des conversions entre le registre algébrique et le registre du dessin. De plus, la comparaison entre les deux constructions permet de travailler l'interprétation géométrique des équations. En effet, la mise en parallèle des objets et des équations qui les décrivent amène à travailler les deux aspects de l'interprétation géométrique. Cette tâche relève du niveau de mise en fonctionnement disponible et peut amener les élèves à développer une certaine flexibilité et favoriser ainsi la conceptualisation des notions de géométrie analytique dans l'espace.

Dans le manuel *Actimath*, une partie « problèmes » est également proposée, ainsi qu'une partie « exercices dirigés ». Cependant, les tâches sont très découpées et elles ne comparent pas les démarches de géométrie synthétique et analytique, à l'inverse du *CQFD*. Le manuel *Espace Math* possède également une partie « pour chercher », mais les tâches qui y sont proposées sont similaires au manuel *Actimath*. Un exemple est fourni à la figure VII.26.

79. On donne le plan $\pi \equiv 3x - 2y + z + 5 = 0$ et la droite $d \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{5} = \frac{z+2}{-1}$.

Déterminer des équations cartésiennes de la droite de π perpendiculaire à d qui comprend le point de percée P de d dans π.

Pour ce faire,

1) Déterminer le point commun P au plan π et à la droite d.
2) Exprimer successivement que la droite d' cherchée
   a) comprend le point P,
   b) est perpendiculaire à la droite d,
   c) est parallèle au plan π.
3) En déduire des équations cartésiennes de la droite d'.

FIGURE VII.26 – Extrait issu du manuel *Actimath* (Delfeld et al., ibid., p. 88–89).

Analyse *a priori* de la tâche présentée à la figure VII.26

Toutes les questions sont fermées.

Domaines de travail

Cadre de la géométrie vectorielle, cadre de la géométrie analytique.

Registres d'écriture

Registre de la langue naturelle, registre algébrique, registre ensembliste.

Point de vue

Point de vue cartésien.

Connaissances mises en jeu

- □ Connaissances anciennes : vecteurs directeurs, systèmes d'équations, produit scalaire.
- □ Connaissances en cours d'acquisition : équations cartésiennes de plans, équations cartésiennes de droites de l'espace, positions relatives d'une droite et d'un plan, point de percée d'une droite dans un plan, vecteurs normaux.

Adaptations à réaliser

L'énoncé est donné en langue naturelle. Une équation d'un plan et un système d'équations d'une droite sont donnés dans le point de vue cartésien. Il est demandé de déterminer une description d'une droite dans le point de vue cartésien connaissant sa position relative par rapport aux deux autres objets (*reconnaissance des modalités d'application*). Le *raisonnement est organisé* et découpé par l'énoncé en plusieurs étapes. Il s'agit tout d'abord de déterminer le point de percée P de la droite d dans le plan π (*conversion de registres*). Afin de déterminer le point P, un système de trois équations à trois inconnues doit alors être résolu (*mise en jeu de connaissances anciennes*, *conversion de registres*). L'ensemble des solutions de ce système sont les coordonnées du point P (*conversion de registres*). Puis, un vecteur directeur de la droite d' doit être recherché. Pour ce faire, il faut traduire la position relative de la droite d' par rapport à la droite d et au plan π en termes de vecteurs (*changement de cadres*, *mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition*). Un vecteur directeur de la droite d et un vecteur normal du plan π sont donnés. Un vecteur directeur de la droite d' est orthogonal à ces deux vecteurs. Un système de deux équations à trois inconnues peut être écrit en développant le produit scalaire entre le vecteur recherché et le vecteur directeur ou le vecteur normal (*mise en jeu de connaissances anciennes*, *conversion de registres*). L'ensemble des solutions du système fournit tous les vecteurs orthogonaux à ces deux vecteurs donnés (*conversion de registres*). Il s'agit de choisir un vecteur directeur de la droite d' (*existence d'un choix*). Un système d'équations cartésiennes de cette droite peut finalement être écrit (*changement de cadres*, *mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition*).

La résolution de cette tâche amène des conversions entre les registres de la langue naturelle, algébrique et ensembliste, et des jeux de cadres entre la géométrie vectorielle et la géométrie analytique. De nombreuses connaissances anciennes et en cours d'acquisition sont mises en œuvre. Cependant, aucun changement de points de vue n'est nécessaire. De plus, la tâche est découpée en sous-tâches indiquant l'organisation du raisonnement à suivre. Cette tâche qui peut être de niveau de mise en fonctionnement disponible se voit ainsi devenir mobilisable (voire technique). La flexibilité attendue pour conceptualiser les notions ne nous semble pas être développée sur ce type de tâche.

Ainsi, les problèmes proposés par les manuels *Actimath* et *Espace Math* ne mettent pas en jeu des adaptations variées des connaissances. En effet, leur analyse *a priori* ne met en évidence que peu de traitements internes. Cela s'explique notamment par le fait que les tâches soient très découpées.

Le tableau VII.3 indique qu'il y a plus d'exercices techniques dans le manuel *Actimath*. Cela s'explique par la présence de nombreux exemples dans le cours. En effet, plusieurs tâches proposées dans la partie exercices sont considérées comme étant techniques car le travail à réaliser a déjà été effectué auparavant. Nous proposons un exercice résolu dans le cours à la figure VII.27 et une tâche similaire dans les exercices à la figure VII.28.

Déterminons les équations paramétriques de la droite *d*.

- Posons $z = \lambda$ dans les équations cartésiennes de *d*. $\begin{cases} x - y - \lambda - 3 = 0 & (1) \\ 5x + 3y - 3\lambda + 1 = 0 & (2) \end{cases}$
- Transformons les équations de manière à ne plus avoir qu'une inconnue dans chacune.
$$\begin{cases} -8y - 2\lambda - 16 = 0 & 5 \,.\, (1) - (2) \\ 8x - 6\lambda - 8 = 0 & 3 \,.\, (1) + (2) \end{cases}$$
- Explicitons les équations par rapport aux inconnues. $\begin{cases} y = -\frac{1}{4}\lambda - 2 \\ x = \frac{3}{4}\lambda + 1 \end{cases}$

Les équations paramétriques de *d* sont $\begin{cases} x = \frac{3}{4}\lambda + 1 \\ y = -\frac{1}{4}\lambda - 2 \\ z = \lambda \end{cases}$

Un vecteur directeur de *d* ($\lambda = 1$) est $\left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, 1\right)$

FIGURE VII.27 – Extrait issu du manuel *Actimath* (Delfeld et al., ibid., p. 53).

Dans cet extrait (figure VII.27), un système d'équations cartésiennes d'une droite est donné sous une forme générale [3]. Une méthode est proposée dans le cours pour déterminer une équation paramétrique et un vecteur directeur de la droite *d* à partir de cette forme générale. Il s'agit de poser une inconnue comme étant le paramètre et d'exprimer les deux autres inconnues en fonction de ce paramètre.

9. Déterminer des équations paramétriques et un vecteur directeur des droites *d* suivantes.

1) $d \equiv \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - 5z = -1 \end{cases}$

2) $d \equiv \begin{cases} x = y \\ z = -1 \end{cases}$

3) $d \equiv \begin{cases} x + 2y - 3z + 1 = 0 \\ 2x - y - z - 5 = 0 \end{cases}$

FIGURE VII.28 – Extrait issu du manuel *Actimath* (Delfeld et al., ibid., p. 77).

La figure VII.28 illustre un exercice qui est proposé par le manuel. Tout comme dans l'exemple traité au sein du cours, il s'agit de déterminer une équation paramétrique et un vecteur directeur d'une droite dont on connait un système d'équations cartésiennes sous forme générale. La même méthode s'applique donc ici. Ainsi, au regard du travail effectué dans le cours, la résolution de cette tâche amène à appliquer une méthode donnée. Le niveau de mise en fonctionnement est dès lors technique. Ainsi, le travail proposé dans le cours peut influencer les adaptations qui doivent être réalisées pour résoudre les tâches et donc le niveau de mise en fonctionnement des connaissances des élèves également.

Les manuels proposent majoritairement des tâches de niveau de mise en fonctionnement mobilisable. Un exemple est donné pour chaque manuel aux figures VII.29,

3. Il s'agit de décrire une droite par un système de deux équations cartésiennes de plans. Celles-ci sont explicites contrairement à la forme canonique des équations cartésiennes de droites dans l'espace

VII.30 et VII.31. Ces exemples nous amènent à pointer les similitudes et les différences en termes d'adaptations.

c. Déterminer le point de percée, dans le plan $\pi \equiv 2x - y + 3z - 2 = 0$, de la droite comprenant les points $A(-2\,;1\,;2)$ et $B(0\,;3\,;2)$.

FIGURE VII.29 – Extrait issu du manuel *CQFD* (Annoye et al., ibid., p. 200).

Analyse *a priori* de la tâche présentée à la figure VII.29

La question est fermée.

Domaines de travail

Cadre de la géométrie vectorielle, cadre de la géométrie analytique.

Registres d'écriture

Registre de la langue naturelle, registre algébrique, registre ensembliste.

Points de vue

Point de vue paramétrique, point de vue cartésien.

Connaissances mises en jeu

- □ Connaissances anciennes : vecteurs directeurs, composantes de vecteurs, systèmes d'équations.
- □ Connaissances en cours d'acquisition : équations cartésiennes de plans, équations paramétriques et cartésiennes de droites de l'espace.
- □ Connaissances nouvelles : positions relatives d'une droite et d'un plan.

Adaptations à réaliser

L'énoncé est donné en langue naturelle. Il s'agit de déterminer un point de percée entre une droite et un plan. La résolution algébrique d'un système composé des équations du plan et de la droite amène à cet objectif (*reconnaissance des modalités d'application*, *conversion de registres*). L'énoncé donne une équation du plan dans le point de vue cartésien. Il reste à rechercher une équation de la droite passant par les points *A* et *B* (*organisation du raisonnement*). Puisque les coordonnées des points *A* et *B* sont données, les composantes d'un vecteur directeur de la droite *AB* doivent être calculées (*mise en jeu de connaissances anciennes en géométrie vectorielle*). La droite peut être décrite dans un point de vue cartésien ou paramétrique (*existence de choix*). La résolution algébrique du système permet de déterminer le point de percée de la droite dans le plan (*mise en jeu de connaissances anciennes*). L'ensemble des solutions décrit le point (*conversion de registres*).

16. Écrire des équations paramétriques du plan π' parallèle au plan $\pi \equiv \begin{cases} x = 3 + 2\lambda - \mu \\ y = 5 - \lambda + 2\mu \\ z = -3 - \mu \end{cases}$

et comprenant le point $P(1\ ,\ 0\ ,\ -2)$.

FIGURE VII.30 – Extrait issu du manuel *Actimath* (Delfeld et al., ibid., p. 78).

Analyse *a priori* de la tâche présentée à la figure VII.30

La question est fermée.

Domaines de travail

Cadre de la géométrie vectorielle, cadre de la géométrie analytique.

Registres d'écriture

Registre de la langue naturelle, registre algébrique.

Point de vue

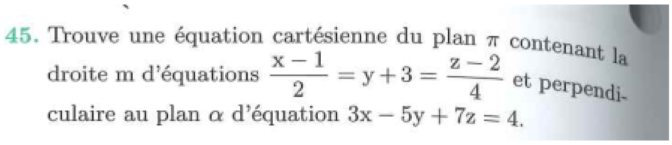
Point de vue paramétrique.

Connaissances mises en jeu

- Connaissances anciennes : vecteurs directeurs.
- Connaissances en cours d'acquisition : équations cartésiennes de plans.
- Connaissances nouvelles : positions relatives de deux plans.

Adaptations à réaliser

L'énoncé est donné en langue naturelle. Une équation du plan π' dans le point de vue paramétrique doit être déterminée. Un point et deux vecteurs directeurs de ce plan doivent être recherchés (*reconnaissance des modalités d'application*). Un point de ce plan est donné dans l'énoncé. Pour trouver deux vecteurs directeurs du plan π', il faut traduire la position relative des deux plans en termes de vecteurs (*changement de cadres*, *mise en jeu de connaissances nouvelles*). Deux vecteurs directeurs du plan π peuvent être donnés à partir du point de vue paramétrique (*mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition*). Il faut choisir deux vecteurs colinéaires à ceux-ci (*existence de choix*). Ces deux vecteurs sont des vecteurs directeurs du plan π'. Une équation paramétrique du plan peut finalement être écrite (*mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition*) dans le cadre de la géométrie analytique.



45. Trouve une équation cartésienne du plan π contenant la droite m d'équations $\frac{x-1}{2} = y+3 = \frac{z-2}{4}$ et perpendiculaire au plan α d'équation $3x - 5y + 7z = 4$.

FIGURE VII.31 – Extrait issu du manuel *Espace Math* (Adam & Lousberg, 2004b, p. 198).

Analyse *a priori* de la tâche présentée à la figure VII.31

La question est fermée.

Domaines de travail

Cadre de la géométrie vectorielle, cadre de la géométrie analytique.

Registres d'écriture

Registre de la langue naturelle, registre algébrique.

Points de vue

Point de vue paramétrique, point de vue cartésien.

Connaissances mises en jeu

- Connaissances anciennes : vecteurs directeurs, colinéarité de vecteurs, calculs de déterminants, produit scalaire.
- Connaissances en cours d'acquisition : équations cartésiennes de plans, vecteurs normaux, équations cartésiennes de plans sous forme de déterminants.
- Connaissances nouvelles : positions relatives d'une droite et d'un plan, de deux plans.

Adaptations à réaliser

L'énoncé est donné en langue naturelle. Une équation cartésienne d'un plan sachant sa position relative par rapport à un autre plan et une droite doit être déterminée (*reconnaissance des modalités d'application*). Le *raisonnement est organisé* en plusieurs étapes : traduire les différentes informations liées aux positions relatives des objets entre eux, écrire une équation cartésienne du plan. Puisque la droite m est incluse au plan π, un vecteur directeur du plan π est colinéaire à un vecteur directeur de la droite m (*changement de cadres*, *mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition*). Un vecteur directeur de la droite m est déterminé à partir du point de vue cartésien. Un vecteur qui lui est colinéaire est un vecteur directeur du plan π (*existence d'un choix*). Puisque le plan α et le plan π sont perpendiculaires, un vecteur directeur du plan π est colinéaire à un vecteur normal du plan α (*mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition*, *changement de cadres*). Un vecteur normal du plan α peut être déterminé directement à partir du point de vue cartésien (*mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition*). Un choix de vecteur colinéaire à ce vecteur normal est à faire (*existence de choix*). Une vérification de la non colinéarité des deux vecteurs directeurs du plan π est à effectuer (*mise en jeu de connaissances anciennes en géométrie vectorielle*). Plusieurs méthodes sont possibles pour trouver une équation cartésienne du plan π (*existence de choix*). Une première méthode consiste à écrire une équation paramétrique du plan π et d'éliminer les deux paramètres pour obtenir une équation cartésienne (*changement de points de vue*, *mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition*). Une deuxième méthode consiste à écrire un déterminant 3×3 nul et de le calculer par la méthode de son choix : Sarrus ou cofacteurs (*existence de choix*, *mise en jeu de connaissances anciennes et en cours d'acquisition*, *changement de points de vue*). Une troisième méthode consiste à tenter de déterminer un vecteur normal du plan π en cherchant un vecteur orthogonal aux deux vecteurs directeurs trouvés. Cela amène à résoudre un système de deux équations à trois inconnues dont chaque équation est obtenue en utilisant le produit scalaire (*mise en jeu de connaissances anciennes*). Un vecteur normal est alors à choisir (*existence de choix*) et une équation cartésienne peut être écrite (*mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition*).

Ces tâches mettent toutes en jeu une conversion de registres entre la langue naturelle et l'algébrique. Les seuls jeux de cadres effectués sont entre la géométrie vectorielle et la géométrie analytique. Dans toutes ces tâches, l'articulation des points de vue se réalise dans le sens paramétrique vers cartésien. Ainsi, certaines adaptations sont à réaliser. Le raisonnement n'est pas explicitement donné par l'énoncé mais il reste relativement proche de celui effectué dans les cours des trois manuels. Ces résultats peuvent être généralisés pour la majorité des tâches proposées. Certaines tâches nécessitent d'articuler les points de vue dans le sens cartésien/paramétrique, elles sont peu nombreuses. Les traitements internes développés dans la partie exercices des trois manuels sont donc similaires à ceux réalisés dans le cours.

Nous déduisons de cette analyse de tâches que les traitements internes travaillés par les manuels ne sont pas variés. Seules les tâches « problèmes » du manuel *CQFD* demandent de réaliser des changements de cadres entre la géométrie synthétique et la géométrie analytique et des conversions plus nombreuses et variées, notamment parce que le registre du dessin est présent. Ce type de tâches requiert une certaine disponibilité des connaissances et une plus grande flexibilité entre les cadres, les registres et les points de vue que les autres tâches. Ce sont aussi les seuls exercices proposant de travailler la dimension outil des notions de droites et de plans dans l'espace. La flexibilité nécessaire entre les cadres, les registres et les points de vue est donc peu exploitée.

Cette analyse met également en évidence que la reconnaissance des objets (premier aspect de l'interprétation géométrique) à partir d'équations n'est jamais explicitement travaillée dans les exercices des trois manuels. Cependant, elle est parfois demandée à partir de l'ensemble des solutions d'un système. Il s'agit alors de déterminer l'objet décrit par cet ensemble pour en déduire par la suite la position relative des objets entre eux. Un exemple de tâche demandant d'interpréter géométriquement les solutions d'un système est donné à la figure VII.32. Aucun des exercices dans les trois manuels ne demande de décrire une droite ou un plan par un ensemble de points ou de vecteurs.

36. Déterminer l'intersection des plans α, β, γ. En déduire la position relative des trois plans.

1) $\alpha \equiv x + 2y + 3z = 14$; $\beta \equiv 2x - y + z = 3$; $\gamma \equiv 3x + 2y - 4z = -5$
2) $\alpha \equiv x - y - 3z = 1$; $\beta \equiv -y + z = 1$; $\gamma \equiv x - 3y - z = 3$
3) $\alpha \equiv x + y + z = 1$; $\beta \equiv 2x + 2y + 2z = 2$; $\gamma \equiv 3x + 3y + 3z = 3$
4) $\alpha \equiv x + y - 2z = 3$; $\beta \equiv 2x - y + 3z = 4$; $\gamma \equiv 4x - 5y + 13z = 0$
5) $\alpha \equiv 2x - 4y + z = 0$; $\beta \equiv -x + 2y - \frac{z}{2} = 2$; $\gamma \equiv 3x - 6y + \frac{3}{2} z = 1$

FIGURE VII.32 – Extrait issu du manuel *Actimath* (Delfeld et al., ibid., p. 82).

Analyse *a priori* de la tâche présentée à la figure VII.32

La question est fermée.

Domaines de travail

Cadre de la géométrie analytique, cadre de la géométrie synthétique.

Registres d'écriture

Registre de la langue naturelle, registre algébrique, registre ensembliste.

Points de vue

Point de vue paramétrique, point de vue cartésien.

Connaissances mises en jeu

- Connaissances anciennes : systèmes d'équations, échelonnement de matrices, colinéarité de vecteurs.
- Connaissances en cours d'acquisition : équations cartésiennes et paramétriques de plans, équations paramétriques de droites de l'espace, vecteurs normaux.
- Connaissances nouvelles : positions relatives de trois plans.

Adaptations à réaliser

L'énoncé est donné en langue naturelle. Pour déterminer l'intersection des trois plans, il s'agit de résoudre algébriquement des systèmes de trois équations à trois inconnues (*conversion de registres*). La résolution de ces systèmes peut se faire selon plusieurs méthodes : substitution, combinaison linéaire, échelonnement de matrices (*existence de choix*, *mise en jeu de connaissances anciennes*). L'ensemble des solutions est à écrire pour chaque système (*conversion de registres*). Chaque ensemble doit ensuite être interprété géométriquement afin de déduire la position relative des trois plans. Dans trois cas sur les cinq, l'ensemble des solutions décrit un point. Il s'agit de reconnaître que les trois plans sont sécants en un point (*changement de cadres*). Dans le cas (3), l'ensemble des solutions décrit un plan. Il s'agit de reconnaître ce plan à partir du point de vue paramétrique (*conversion de registres*). Il faut en déduire que les trois plans sont confondus (*changement de cadres*). Pour le déterminer, il n'est pas nécessaire de résoudre le système puisque les équations sont équivalentes. Dans le cas (5), l'ensemble des solutions est l'ensemble vide. Il faut en déduire que les trois plans sont parallèles distincts (*changement de cadres*). Encore une fois, il n'est pas nécessaire de résoudre le système pour le déterminer puisque les vecteurs normaux des plans sont colinéaires et que les termes indépendants ne respectent pas cette proportionnalité (*mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition et anciennes*).

Cette tâche met en jeu une conversion entre le registre de la langue naturelle et le registre algébrique mais aussi une conversion entre le registre algébrique et le registre ensembliste. Des changements de cadres entre la géométrie analytique et la géométrie synthétique sont possibles pour déterminer la position des trois plans. Cependant, aucun changement de point de vue n'est nécessaire. Cette tâche travaille le premier aspect de l'interprétation géométrique à la fois pour les ensembles de solutions d'un système et les équations (cartésiennes).

Comme nous l'avons déjà précisé, ces trois manuels ne sont pas conformes aux très récents programmes. Seul le manuel *CQFD* a été mis à jour, à l'heure actuelle, pour se conformer aux nouveaux programmes. Il nous semble intéressant d'analyser cette nouvelle version du manuel et de la comparer à celle que nous venons de présenter. Les éventuelles différences repérées nous guident dans l'analyse de la prise en compte des nouveaux programmes par les enseignants sur ces notions. Nous nous intéressons donc au manuel *CQFD* (2019) au point suivant.

4 La géométrie analytique dans l'espace dans le « nouveau » manuel

Le manuel *CQFD* (2019) est très similaire au manuel *CQFD* (2014). En réalité, le chapitre sur les équations de droites et de plans dans l'espace dans la nouvelle version constitue une fusion de deux chapitres de la version précédente. En effet, les notions du chapitre 14, intitulé « Systèmes d'équations », ont été intégrées à celles du chapitre 13 sur la géométrie analytique dans l'espace étudié au point précédent. Dans le chapitre 14 du manuel de 2014, les différentes méthodes de résolution des systèmes sont abordées comme par exemple l'échelonnement des matrices. Or, ces notions ne sont plus présentes dans les nouveaux programmes. Pourtant, il est demandé d'introduire une équation cartésienne d'un plan à l'aide d'un déterminant nul. Ceci peut expliquer pourquoi ces notions sont désormais introduites au sein du chapitre de la géométrie analytique dans l'espace. Nous nous intéressons ici qu'aux différences entre les deux versions du manuel dans les activités d'introduction, dans le cours et dans les exercices proposés.

En ce qui concerne les activités d'introduction, seule une nouvelle activité a été ajoutée concernant la résolution d'un système par la méthode du pivot de Gauss. Cette activité s'étend sur deux pages complètes du manuel. La notion de matrice et la méthode du pivot de Gauss sont introduites par un texte explicatif. Il est ensuite demandé d'appliquer directement cette méthode sur un système donné. Il s'agit donc d'écrire la matrice augmentée associée au système et de l'échelonner par la méthode du pivot de Gauss. Un système équivalent au premier ainsi que l'ensemble des solutions des systèmes peuvent être écrits. Il est explicitement demandé de déterminer l'objet géométrique décrit par cet ensemble de solutions. Cette activité introductive met donc en jeu les cadres matriciel et de la géométrie analytique. Plusieurs conversions de registres sont nécessaires. En effet, une conversion entre le registre de la langue naturelle et le registre algébrique est réalisée lorsque la méthode donnée dans le texte explicatif est appliquée. Une conversion entre le registre ensembliste et le registre de la langue naturelle apparait également pour l'interprétation géométrique de l'ensemble des solutions. Il s'agit aussi de reconnaître une droite dans le point de vue paramétrique et trois plans dans le point de vue cartésien. Aucun changement de point de vue n'est abordé. Le premier aspect de l'interprétation géométrique semble être un peu plus développé à partir d'un ensemble dans ce manuel.

L'ordre dans lequel les notions du cours sont introduites est légèrement différent entre les deux versions du manuel. Jusqu'aux équations paramétriques, les deux manuels sont identiques (mots pour mots). Avant d'introduire les équations cartésiennes des plans, la nouvelle version du manuel aborde les matrices et les déterminants, ainsi que leurs propriétés et les méthodes de calculs des déterminants (Sarrus et cofacteurs). Le point de vue cartésien est ensuite amené comme dans l'ancienne version du manuel, c'est-à-dire de manière générale à l'aide des déterminants. Les différentes positions relatives sont présentées de façon identique à la version précédente du manuel. Finalement, les différentes méthodes de résolution des systèmes (substitution, Gauss, Cramer) sont présentées et exemplifiées. Ainsi, les résultats énoncés au point ci-dessus pour la version précédente du manuel restent inchangés pour cette version-ci.

Le manuel de 2019 ajoute une partie intitulée « Outils numériques ». Nous avons mis en évidence dans la partie 1 que l'outil numérique devait être intégré au besoin au sein des chapitres. Notons que le programme ne précise pas forcément quand et comment l'utiliser. La figure VII.33 illustre deux idées proposées par le manuel.

> Les logiciels de géométrie dynamique en 3D permettent de visualiser les positions relatives de droites et de plans dans l'espace.
>
> La méthode de Gauss, introduite pas à pas dans un tableur, permet d'obtenir la matrice échelonnée du système et la solution si elle est unique. La fonction « solveur » du tableur n'est pas développée dans le cadre de ce manuel.

FIGURE VII.33 – Extrait issu du manuel *CQFD* (Annoye, Gilon, Van Eerdenbrugghe, & Wilemme, 2019, p. 403).

L'outil numérique utilisé est le logiciel gratuit *GeoGebra*. Toutes les manipulations à effectuer sont indiquées par le manuel. Il s'agit d'introduire trois équations cartésiennes de plans et de visualiser leur position relative dans l'espace. Ensuite, il est demandé d'utiliser les fonctionnalités du logiciel pour déterminer la droite d'intersection des plans deux à deux. Finalement, le point d'intersection des droites doit être mis en évidence, toujours grâce aux fonctionnalités du logiciel. Cette démarche a pour objectif de faire visualiser aux élèves la position relative des trois plans et leur point d'intersection.

Dans la partie exercices de ce nouveau manuel, 7 exercices et 6 problèmes ont été ajoutés par rapport à la version précédente du manuel. Les problèmes concernent uniquement la résolution de systèmes d'équations linéaires. Le cadre de la géométrie analytique n'y est pas en jeu. Parmi les 7 exercices ajoutés, deux d'entre eux amènent à calculer des déterminants. Cela correspond à 17 tâches techniques. Trois d'entre eux demandent de résoudre un système comme l'illustre la figure VII.34.

Résoudre les systèmes suivants. On pourra utiliser différentes méthodes et comparer.

Série 1 (en guise de rappel ou pour tester de nouvelles méthodes)

a. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 4 \\ 5x_1 - 7x_2 = -5 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 = 8 \\ -6x_1 - 2x_2 = 3 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 3x_1 - \dfrac{x_2}{2} = 7 \\ 6x_1 - x_2 = -5 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = 1 \\ -2x_1 + x_2 = -0{,}5 \end{cases}$

Série 2

a. $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 6 \\ 5x_1 - 2x_2 - 12x_3 = -5 \\ 3x_1 - x_2 - 4x_3 = 1 \end{cases}$

d. $\begin{cases} \dfrac{5}{2}x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ -\dfrac{7}{2}x_1 + 5x_2 + x_3 = -\dfrac{5}{2} \\ -2x_1 + 2x_2 + \dfrac{3}{5}x_3 = \dfrac{8}{5} \end{cases}$

FIGURE VII.34 – Extrait issu du manuel *CQFD* (Annoye et al., ibid., p. 413).

La première série amène à résoudre des systèmes de deux équations à deux inconnues. La deuxième série amène à résoudre des systèmes de trois équations à trois inconnues. Le contexte dans lequel il faut résoudre ces systèmes n'est jamais précisé. En effet, pour la première série, il est certainement sous-entendu que nous sommes dans le plan $\mathbb{R}^2$. Or, il est possible de résoudre de tels systèmes dans l'espace $\mathbb{R}^3$. Il est, selon nous, important de préciser ce contexte car les équations et l'ensemble des solutions ne décrivent pas les mêmes objets géométriques. Il se peut que cela renforce une difficulté des élèves, mentionnées à la partie 1, sur les équations incomplètes de plans.

Deux des exercices ajoutés permettent, selon nous, de travailler le premier aspect de l'interprétation géométrique à partir d'ensembles. Nous présentons ces deux exercices aux figures VII.35 et VII.36.

Les ensembles suivants peuvent-ils être des ensembles de solutions de systèmes d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^3$?

a. $\{(3;4;-2)\}$

b. $\{(3;4;-2);(1;6;-1)\}$

c. $\varnothing$

d. $\mathbb{R}^3$

e. $\{(\lambda;2\lambda;-2)|\lambda\in\mathbb{R}\}$

f. $\{4;-2;3\}$

g. $\{(\lambda;2\lambda;-2)|\lambda\in\mathbb{R}\}\cup\{(\mu;\mu+3;5)|\mu\in\mathbb{R}\}$

h. $\{(\lambda+3\mu;\lambda-\mu;\mu-2)|\lambda,\mu\in\mathbb{R}\}\cup\{(4;5;2)\}$

i. $\{(2\lambda+5\mu;2\lambda+3\mu;\lambda+4\mu-2)|\lambda,\mu\in\mathbb{R}\}\cup\{(12;8;7)\}$

FIGURE VII.35 – Extrait issu du manuel *CQFD* (Annoye et al., ibid., p. 406).

La tâche proposée à la figure VII.35 est assez différente de ce que nous avons pu trouver dans les manuels analysés. En effet, les tâches habituelles demandent de résoudre un système et de trouver l'ensemble des solutions. Ce type de tâches fait intervenir les registres algébrique et ensembliste. Ici, il s'agit de partir d'un ensemble et de déterminer si cela peut être ou non un ensemble de solutions d'un système. Un travail sur les notions ensemblistes est proposé ici, notamment l'union de deux ensembles. Les élèves peuvent ainsi rencontrer des ensembles qui ne sont pas des ensembles de solutions. La reconnaissance des objets géométriques à partir de ces ensembles est alors nécessaire pour résoudre ces tâches. Si l'ensemble donné est un ensemble de solutions, il reste encore à fournir les objets géométriques dont l'intersection peut être cet ensemble. Par exemple, l'ensemble (a) décrit un point dans l'espace. Cet ensemble peut être l'ensemble des solutions d'un système composé des équations de deux droites sécantes ou des équations de trois plans sécants. Le point de vue paramétrique des droites et des plans est en jeu pour plusieurs des ensembles donnés. Ce type de tâches peut être abordé en classe pour développer chez les élèves le premier aspect de l'interprétation géométrique.

Les systèmes ci-dessous ont-ils une solution unique ? Répondre le plus rapidement possible et avec un minimum de calculs.

a. $\begin{cases}2x+2y+3z=1\\x+y+z=-1\\x+y+z=7\end{cases}$

b. $\begin{cases}5x-2y+3z=6\\4x-y+2z=-5\end{cases}$

c. $\begin{cases}3x-2y+z=1\\36x-24y+12z=12\\2x-7y-z=2\end{cases}$

d. $\begin{cases}0x+0y+0z=0\\2x+3y+4z=-2\\5x+2y+3z=7\end{cases}$

e. $\begin{cases}5x-4y+2z=3\\4x+2y-z=9\\2x+3y-z=2\end{cases}$

f. $\begin{cases}3x-4y+2z=3\\4x+2y-z=9\\x+6y-3z=2\end{cases}$

FIGURE VII.36 – Extrait issu du manuel *CQFD* (Annoye et al., ibid., p. 407).

À la figure VII.36, il ne faut pas résoudre algébriquement le système et écrire l'ensemble des solutions. Deux méthodes peuvent être envisagées pour déterminer si le système a une unique solution. La première consiste à écrire la matrice associée à chaque système et de calculer son déterminant. Le système a une unique solution si ce déterminant est non nul. Cette méthode amène à effectuer des calculs et peut être plus ou moins rapide en fonction des élèves. La deuxième méthode est selon nous plus rapide et amène moins de calculs. Pour que le système ait une solution unique, il faut que l'intersection des objets géométriques donne un point. Il est question ici de déterminer l'objet décrit par chacune des équations du système, d'étudier la position relative des objets entre eux et d'analyser si leur intersection peut donner un point. Par exemple, pour la tâche (a), chacune des équations décrit un plan dans le point de vue cartésien. Or, deux des trois plans sont parallèles car un vecteur normal du deuxième plan est un vecteur normal du troisième plan. Ainsi, il n'est pas possible que leur intersection donne un point. Dans ce cas-ci, le premier aspect de l'interprétation géométrique des objets peut être développé pour les équations cartésiennes de plans avec ce type de tâches. Cependant, aucune tâche ne propose un travail similaire avec des droites ou avec des équations dans le point de vue paramétrique.

L'analyse de ce « nouveau » manuel donne des résultats identiques aux analyses précédentes en termes de cadres, de registres, de points de vue et de traitements internes. Cependant, certaines tâches sont proposées dans ce manuel pour travailler le registre ensembliste et le premier aspect de l'interprétation géométrique des objets à partir des ensembles et des équations, comme le suggère les programmes qui viennent d'entrer en vigueur. Notons que le manuel *CQFD*, dans la version de 2014, propose déjà des comparaisons entre les outils et les démarches propres aux différents cadres géométriques, contrairement aux autres manuels. Ce point est aussi souligné par les nouveaux programmes.

Cette analyse de manuels fournit les premiers éléments de réponses à notre problématique de recherche développée à la page 170.

5 Conclusion

Nous nous intéressons aux différents scénarios que les enseignants proposent à leurs élèves pour les notions de géométrie analytique dans l'espace. Avant de nous rendre sur le terrain, nous avons complété l'étude de relief, réalisée dans la partie 1, par une analyse de plusieurs manuels scolaires belges en mathématiques pour l'option scientifique. Nous avons ainsi étudié quatre manuels : *Actimath*, *CQFD* (2014), *CQFD* (2019) et *Espace Math*. Cette analyse a permis d'étudier quelques scénarios qui peuvent potentiellement être réalisés en classe. De plus, nous avons analysé deux versions du manuel *CQFD*. La première est conforme aux anciens programmes et la deuxième est conforme aux programmes actuels. L'analyse des deux versions de ce manuel nous a aidé à mettre en évidence les éventuels changements qui peuvent apparaître lorsque les enseignants vont adapter leur scénario aux nouveaux programmes.

Dans un premier temps, nous avons cherché à préciser la flexibilité attendue des élèves pour ces notions. Nous avons analysé quels cadres, registres et points de vue sont abordés et quels sont les traitements internes développés dans ces manuels. De plus, nous avons pointé les moments où les aspects de l'interprétation géométrique des objets sont travaillés (pour les équations et les ensembles) car elle peut favoriser la conceptualisation des notions. Ensuite, notre cadre théorique nous a amené à étudier le scénario dans sa globalité. Nous avons donc analysé les activités d'introduction, les cours et les tâches qui sont proposées dans les manuels. Nous avons alors réalisé une analyse *a priori* des différents scénarios dans l'objectif de déterminer les activités attendues des élèves.

L'analyse *a priori* des scénarios potentiels (activités introductives, cours, exercices) a mis en évidence plusieurs résultats. Bien que les cadres de la géométrie synthétique, vectorielle et analytique soient tous les trois utilisés, les jeux entre ces cadres restent peu développés et sont principalement présents dans les cours. La progression des contenus est similaire dans les manuels. Il s'agit de caractériser les droites et les plans dans le cadre de la géométrie synthétique. Cela amène à introduire le point de vue paramétrique dans le cadre de la géométrie vectorielle. Ces équations dites vectorielles sont ensuite traduites en termes de composantes pour écrire une équation paramétrique des objets dans le cadre de la géométrie analytique. Ainsi, la géométrie vectorielle apparaît bien comme le lien privilégié entre la géométrie synthétique et la géométrie analytique dans les manuels, comme le suggère notre étude historique réalisée au chapitre III. Cependant, la majorité des tâches proposées dans les manuels se résolvent dans le cadre analytique et il n'y a que peu de changements de cadres à réaliser. Ces activités peuvent ne pas être attendues de la part des élèves. Nous avons toutefois noté que les problèmes traités dans le manuel *CQFD* (les deux versions) permettent de comparer les démarches et les outils de la géométrie synthétique et de la géométrie analytique, comme le suggèrent les programmes actuels. Rappelons que ce type de tâches est important pour que les élèves puissent distinguer le niveau de conceptualisation « à la Euclide » et le niveau de conceptualisation de la géométrie affine et affine-euclidienne. Nous avons montré que les principaux registres en jeu sont le registre de la langue naturelle, le registre algébrique et le registre du dessin. Le registre de la langue naturelle est omniprésent. Le registre algébrique intervient principalement dans les différentes tâches à résoudre et les quelques démonstrations réalisées. Le registre du dessin intervient principalement dans le cours pour illustrer les notions. Les activités de conversions de registres sont peu variées et peuvent ne pas être attendues de la part des élèves.

Tous les manuels abordent le point de vue cartésien et le point de vue paramétrique. Leur articulation est prise en compte par chacun d'eux, bien que les programmes ne le demandent pas. Nous avons montré que certains changements de points de vue s'effectuent sur un exemple et d'autres se font en toute généralité. Principalement, le passage du point de vue paramétrique au point de vue cartésien se fait soit en éliminant le ou les paramètres dans une équation paramétrique, soit en utilisant les propriétés des déterminants. Nous avons repéré que le manuel conforme aux nouveaux programmes introduit les matrices, les déterminants et leurs propriétés, juste avant d'aborder le point de vue cartésien pour les plans. Ces éléments apparaissent donc après que le point de vue paramétrique soit introduit et ils constituent des outils pour trouver plus rapidement une équation cartésienne d'un plan. Nous en avons déduit que la théorie des déterminants sert à articuler les deux points de vue et non, comme historiquement, à introduire le point de vue paramétrique. Il est donc possible que ça soit le cas également dans notre étude de terrain. L'articulation des points de vue dans le sens cartésien/paramétrique est effectué sur un exemple pour la notion de droite dans tous les manuels. Or, ce passage pour les plans n'est effectué sur un exemple que dans un seul des manuels. Cette articulation nous a donc semblé secondaire dans tous les manuels vu qu'elle n'est pas effectuée en toute généralité et que très peu de tâches permettent ce traitement interne. Ainsi, seul le passage paramétrique/cartésien peut être une activité attendue des élèves.

Dans le chapitre VI, nous avons considéré qu'une interprétation géométrique des objets est développée à la condition que la reconnaissance et la description de ces objets soient possibles pour les équations et les ensembles. L'analyse des manuels nous a amené à penser que l'interprétation géométrique des droites et des plans dans l'espace n'est que peu développée. En effet, nous avons montré que le travail proposé dans les manuels consiste principalement à décrire les droites et les plans par des équations bien souvent cartésiennes. La reconnaissance des objets par une équation ou un ensemble ainsi que leur description par des ensembles sont peu abordés dans tous les manuels. De ce fait, le deuxième aspect de l'interprétation géométrique pour les équations semble être une activité attendue des élèves. Nous avons également mis en évidence que l'ordre dans lequel les notions apparaissent au sein du cours peut avoir une influence sur l'interprétation géométrique des objets. L'étude des équations cartésiennes de plans avant celle des équations cartésiennes de droites semble faciliter un travail sur les deux aspects de l'interprétation géométrique. Nous serons donc particulièrement attentive dans notre étude de terrain à l'ordre dans lequel ces notions sont introduites et si, effectivement, les deux aspects de l'interprétation géométrique semblent apparaitre uniquement pour les droites dans le point de vue cartésien.

Cette analyse nous amène à nous demander s'il est possible de proposer un ensemble de tâches, sur les notions de géométrie analytique dans l'espace, permettant aux élèves de développer à la fois les activités de traitements internes et d'interprétation géométrique des objets. En effet, le travail qui vient d'être mené nous amène à penser que la flexibilité entre les cadres géométriques (synthétique, vectorielle, analytique), les registres de représentation sémiotiques (langue naturelle, algébrique, dessin, logique, ensembliste) et les points de vue (paramétrique et cartésien) n'est que peu développée dans les tâches proposées par les manuels. Les traitements internes sont principalement effectués dans les cours mais cela reste très ponctuel. Ils ne sont surtout ni explicités ni expliqués car ce n'est sans doute pas le rôle des manuels. Il est possible que les enseignants ajoutent des explications, des justifications, des reformulations, des rappels dans leur classe. C'est pourquoi nous avons relevé de nombreuses occasions de proximités horizontales avec les connaissances que les élèves ont déjà. De plus, l'analyse des manuels nous amène aussi à penser que l'interprétation géométrique des objets n'est que peu développée notamment parce que la reconnaissance des objets est minorée. Il est possible que les enseignants proposent des tâches permettant de développer à la fois la reconnaissance et la description des objets par des équations et des ensembles. Il se peut aussi que les enseignants ajoutent dans leur discours des commentaires permettant de développer les deux aspects de l'interprétation géométrique. Nous serons donc aussi particulièrement attentive à la prise en compte de l'interprétation géométrique par les enseignants. Ensuite, nous avons mis en évidence que les notions de géométrie analytique plane n'apparaissent à aucun moment dans les manuels. Nous en avons déduit que les notions ne sont pas étendues du plan à l'espace et qu'aucune attention n'est portée sur les éventuelles ruptures et continuités lors de cette extension. Il se peut donc que les enseignants ne la prenne pas en compte dans leurs scénarios. Nous avons finalement montré que les exercices relèvent essentiellement du niveau mobilisable de mise en fonctionnement des connaissances. Les tâches disponibles sont peu courantes car elles sont parfois trop découpées. Nous avons tout de même retenu que les problèmes du manuel *CQFD* sont plus complexes et demandent plus d'adaptations. Il se peut que les enseignants ne proposent pas ce type de tâches ou qu'ils les découpent en plusieurs sous-tâches, réduisant ainsi les adaptations à réaliser. Nous allons donc maintenant regarder si ces manques relevés dans l'analyse de ces scénarios potentiels sont pris en compte par les enseignants dans les scénarios qu'ils proposent ou dans le déroulement en classe.