

Analyse de stabilité globale, de résolvant et adjoint

Dans ce chapitre nous allons détailler différents types d'analyse telles que l'analyse de stabilité globale, la recherche de l'adjoint et l'analyse du résolvant. Comme nous allons le voir par la suite, ces trois analyses sont basées sur la linéarisation des équations décrivant l'écoulement (RANS dans le cas présent). Différentes questions restent ouvertes concernant ces analyses dans le cadre d'un écoulement turbulent. Par exemple, si l'on regarde la littérature en incompressible sur le cas du cylindre en D dans des régimes turbulents, deux écoles s'affrontent. Dans un premier temps, Meliga et al. [80] fait une analyse de stabilité autour d'un champ moyen (moyenne temporelle d'une simulation 2D-URANS). L'analyse de stabilité globale a permis de prédire convenablement les fréquences instables. Une analyse de sensibilité lui a aussi permis de proposer des moyens de contrôle passif. Dans ces études, la variation de la viscosité turbulente a été prise en compte dans les équations des perturbations. Cependant une étude réalisée par Mettot et al. [85] a montré que faire ces mêmes analyses autour d'un champs 3D-URANS moyenné en temps et en la troisième dimension et ce sans prendre en compte la viscosité turbulente, abouti a des prédictions légèrement plus proches des résultats expérimentaux. La conclusion de l'article est que la prise en compte du modèle de turbulence a moins d'impact que la bonne prédiction du champ moyen sur les résultats de stabilité. Cependant, il apparaît que prendre en compte la viscosité turbulente et sa variation soit nécessaire à l'explication du phénomène de tremblement de choc comme instabilité globale (Crouch et al.[29]). La prise en compte de la tension de Reynolds turbulente dans les équations des perturbations est donc une des questions aujourd'hui encore non tranchée.

- Quand cette tension est négligée, nous parlerons d'analyse μ -laminaire.
- Si elle est prise en compte, la question est de savoir si on peut la considérer comme constante (on parlera alors d'analyse μ_t -figé)

- Si on la fait varier, dans ce cas la question est comment modéliser cette variation ? On parlera dans ce dernier cas de système complet.
- Dans le cadre d'un modèle RANS avec un critère de transition, on peut aussi être tenté de faire varier la viscosité turbulente sans changer la position de la transition (on parlera de γ figé). En effet, ces critères sont souvent non différentiables.

Enfin, une autre question posée est le champ porteur pour la linéarisation. Faut-il prendre une solution stationnaire des équations de Navier Stokes ou RANS (on parlera de champs de base), ou bien doit-on étudier le voisinage d'un champ instationnaire moyenné en temps ? On parlera dans ce dernier cas d'une analyse sur le champ moyen. Afin d'appréhender ces problématiques, Reynolds et al. [98] proposent de regarder, à l'aide d'une décomposition triple, des instationnarités, ou ondes organisées, de fréquences découplées de celles de la turbulence fine et ce autour d'un champ moyen des équations de Navier Stokes incompressibles. La première partie de ce chapitre reprend cette approche et y rajoute les équations pour l'énergie cinétique turbulente qui apparaît dans les équations RANS (voir le chapitre 3). La seconde partie s'intéressera à l'analyse autour d'un champ moyen obtenu avec une simulation URANS. On trouvera les équations satisfaites par ce champ moyen, et celles satisfaites par l'onde organisée. On pourra alors, dans un troisième temps, comparer les équations obtenues par les deux approches précédentes afin de comprendre quels termes de l'approche URANS modélisent quels termes des équations de l'onde organisée obtenues à partir des équations de Navier Stokes. Grâce à cette comparaison, nous donnerons, dans une quatrième partie, des interprétations et des limites aux différentes hypothèses faites sur la viscosité turbulente. Dans une cinquième partie, nous donnerons les équations satisfaites par une perturbation autour d'un champ de base. Nous les comparerons avec celles obtenues autour d'un champ moyen.

Finalement, nous présenterons l'analyse de stabilité globale, le problème adjoint ainsi que l'analyse du résolvant. Pour cette dernière analyse, Beneddine et al [13] proposent un lien entre la réponse optimale et la transformée de Fourier de l'écoulement instationnaire. Ce lien sera rappelé.

Afin d'être complet sur ces analyses, nous expliquerons comment elles sont réalisées d'un point de vue numérique. Nous expliquerons d'abord comment nous calculons les matrices nécessaires à ces analyses, puis comment nous trouvons les valeurs et les vecteurs propres de ces matrices.

4.1 Equations des ondes organisées dans le cadre de la décomposition triple

Reynolds et al. [98] proposent de regarder les instationnarités basses fréquences d'un écoulement turbulent. Pour ce faire, ils supposent que les fréquences des instationnarités

basses fréquences sont fortement découplées des fréquences de la turbulence. Cette hypothèse permet de décomposer les différentes quantités intervenant dans l'équation de Navier Stokes selon une décomposition triple,

$$f = \bar{f} + \tilde{f} + f', \quad (4.1)$$

où \bar{f} est la moyenne temporelle, $\langle f \rangle = \bar{f} + \tilde{f}$ est la moyenne de phase et f' les fluctuations turbulentes. Ces moyennes vérifient les propriétés suivantes :

$$\langle f' \rangle = 0, \quad \bar{\tilde{f}} = 0, \quad \overline{f'} = 0, \quad (4.2)$$

$$\overline{\tilde{f}g} = \bar{f}\bar{g}, \quad \langle \tilde{f}g \rangle = \tilde{f}\langle g \rangle, \quad \langle \bar{f} \rangle = \bar{f}\langle g \rangle, \quad (4.3)$$

$$\overline{\langle f \rangle} = \bar{f}, \quad \langle \bar{f} \rangle = \bar{f}, \quad \overline{\tilde{f}g'} = \langle \tilde{f}g' \rangle = 0. \quad (4.4)$$

Afin de simplifier la présentation, nous allons ici nous concentrer sur le cas d'un écoulement incompressible. Les équations compressibles sont disponibles dans l'annexe A.

On rappelle que les équations de Navier Stokes deviennent alors,

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (4.5)$$

et

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{1}{Re} \frac{\partial u_i}{\partial x_j \partial x_j}. \quad (4.6)$$

En prenant d'abord la moyenne de phase puis la moyenne temporelle de l'équation (4.5), on montre que

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i} = \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = 0. \quad (4.7)$$

En prenant la moyenne de phase de (4.6), on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \tilde{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \langle u'_i u'_j \rangle + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tilde{u}_i \tilde{u}_j) \\ = -\left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} \right) \end{aligned} \quad (4.8)$$

En prenant la moyenne temporelle de cette dernière équation, on montre que

$$\bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u'_i u'_j}) - \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_j}). \quad (4.9)$$

On déduit l'équation sur \tilde{u}_i en soustrayant les deux dernières équations,

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_j} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_j} - \tilde{u}_i \tilde{u}_j) - \frac{\partial}{\partial x_j} \underbrace{(\langle u'_i u'_j \rangle - \overline{u'_i u'_j})}_{\tilde{u}'_i \tilde{u}'_j} \quad (4.10)$$

On en déduit l'équation sur la partie turbulente,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u'_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \tilde{u}_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \\ &= -\frac{\partial p'}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\langle u'_i u'_j \rangle - u'_i u'_j) \end{aligned} \quad (4.11)$$

On remarque que (4.10) fait intervenir $\langle u'_i u'_j \rangle - \overline{u'_i u'_j} = \widetilde{u'_i u'_j}$ qui n'est pas connu et qui est l'effet de la turbulence sur l'onde organisée. Reynolds et al. [98] proposent de modéliser ce terme. Différentes approches ont été proposées à cet effet.

La première est l'analyse dite quasi-laminaire (ou μ -laminaire). Cette approche consiste à ignorer ce terme. L'effet de la turbulence est alors pris en compte seulement via \bar{u} présent dans l'équation (4.10).

La seconde approche proposée, notamment par Mettot et al. [85], consiste à modéliser ce terme par une viscosité turbulente :

$$\widetilde{u'_i u'_j} = \frac{2}{3} \tilde{k} \delta_{ij} - 2\tilde{\nu}_t \tilde{S}_{ij} - 2\tilde{\nu}_t \bar{S}_{ij}, \quad (4.12)$$

avec $\tilde{k} = \frac{1}{2} \widetilde{u'_i u'_i}$. \tilde{k} est la solution d'une équation qui peut être déterminée explicitement. On cherche alors l'équation satisfaite par $k = \frac{1}{2} u'_i u'_i$. Pour cela, on multiplie (4.11) par u'_i .

$$\begin{aligned} & \frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} + \tilde{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} + u'_i u'_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + u'_i u'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \\ &= -\frac{\partial u'_i p'}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} u'_i \frac{\partial u'_i}{\partial x_j \partial x_j} + u'_i \frac{\partial}{\partial x_j} (\langle u'_i u'_j \rangle - u'_i u'_j) \end{aligned} \quad (4.13)$$

En prenant la moyenne de phase de cette équation, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \langle k \rangle}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \langle k \rangle}{\partial x_j} + \tilde{u}_j \frac{\partial \langle k \rangle}{\partial x_j} + \langle u'_i u'_j \rangle \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \langle u'_i u'_j \rangle \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \\ &= -\frac{\partial \langle u'_i p' \rangle}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \langle u'_i \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_j} \rangle - \langle u'_i \frac{\partial u'_i u'_j}{\partial x_j} \rangle. \end{aligned} \quad (4.14)$$

En décomposant $\langle k \rangle = \bar{k} + \tilde{k}$, l'équation précédente se réécrit

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{k}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{k}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} + \bar{u}_j \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j} + \tilde{u}_j \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j} \\ & \quad + \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \widetilde{u'_i u'_j} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \widetilde{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \\ &= -\frac{\partial \overline{u'_i p'}}{\partial x_i} - \frac{\partial \widetilde{u'_i p'}}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \overline{u'_i \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_j}} + \frac{1}{Re} \widetilde{u'_i \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_j}} - \overline{u'_i \frac{\partial u'_i u'_j}{\partial x_j}} - \widetilde{u'_i \frac{\partial u'_i u'_j}{\partial x_j}}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

On prend la moyenne temporelle de cette équation pour avoir

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{k}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} + \overline{\tilde{u}_j \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j}} + \overline{u'_i u'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}} + \overline{u'_i u'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}} \\ = - \frac{\partial \overline{u'_i p'}}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \overline{u'_i \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_j}} - \overline{u'_i \frac{\partial u'_i u'_j}{\partial x_j}}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Finalement on trouve l'équation pour \tilde{k} en soustrayant ces deux dernières,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{k}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j} - \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j} + \widetilde{u'_i u'_j} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \\ + \widetilde{u'_i u'_j} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} - \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial \widetilde{u'_i p'}}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \widetilde{u'_i \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_j}} - \widetilde{u'_i \frac{\partial u'_i u'_j}{\partial x_j}} \end{aligned} \quad (4.17)$$

On peut réécrire l'équation (4.16) pour regarder l'origine des différents termes.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{k}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} = \underbrace{-\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}}_P - \underbrace{\frac{\partial \overline{u'_i p'}}{\partial x_i}}_{\Pi} + \underbrace{\frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \bar{k}}{\partial x_j \partial x_j}}_{(1)} - \underbrace{\frac{1}{Re} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}}_{\varepsilon} - \underbrace{\overline{u'_j \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j}}}_{T} \\ - \underbrace{\widetilde{u}_j \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j}}_{(2)} - \underbrace{\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}}_{(3)} \end{aligned} \quad (4.18)$$

P est le terme de production usuel des modèles de turbulence. (3) est une moyenne temporelle d'un terme qui ressemble beaucoup à P dans lequel on a changé la moyenne temporelle par la moyenne de phase. On remarque de plus que

$$(3) + P = - \overline{\langle u'_i u'_j \rangle} \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} \quad (4.19)$$

(3) est donc un terme de production de turbulence dû à l'onde organisée. Le terme ε est le terme de dissipation de la turbulence habituel des modèles RANS de type $k - \varepsilon$ ou $k - \omega$. (1) est le terme de diffusion visqueuse. $\Pi + T$ est modélisé dans les approches RANS par un terme de diffusion turbulente que l'on notera ici $\frac{1}{Re_t} \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j \partial x_j}$. Finalement le terme (2) est la moyenne d'un terme d'advection.

On peut réarranger de la même façon (4.17),

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{k}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j} = \left(\tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j} - \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j} \right) - \left(\widetilde{u'_i u'_j} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \right) \\ + \left(\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} - \widetilde{u'_i u'_j} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial \widetilde{u'_i p'}}{\partial x_i} - \widetilde{u'_j \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j}} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \tilde{k}}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{1}{Re} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (4.20)$$

On a ainsi explicité ici les équations satisfaites par les différentes parties de la décomposition triple. Nous avons en particulier aussi donné l'équation l'énergie cinétique turbulente en terme de moyenne de phase et de moyenne temporelle. Nous utiliserons par la suite ces différentes équations pour étudier les différents types d'analyses et de modélisations.

4.2 Analyse sur un champ moyen URANS

On cherchera dans cette section, comment les équations obtenues dans la section précédente peuvent être reliées à un modèle URANS, pour lequel on calcule l'évolution de $\langle u \rangle$, $\langle k \rangle$ et $\langle \omega \rangle$ en modélisant la turbulence. Nous nous placerons dans le cas de $k - \omega$ de Wilcox, en oubliant les constantes pour simplifier les notations.

Pour la vitesse, l'équation de conservation de la quantité de mouvement est la suivante,

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} + \langle u_j \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} = -\frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu_t \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} \right) \quad (4.21)$$

où $\nu_t = \frac{\langle k \rangle}{\langle \omega \rangle}$. En développant les moyennes de phase, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \tilde{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \bar{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} = \\ -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\bar{k} + \tilde{k}}{\bar{\omega} + \tilde{\omega}} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\bar{k} + \tilde{k}}{\bar{\omega} + \tilde{\omega}} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \right) \end{aligned} \quad (4.22)$$

Maintenant, étudions $\frac{\bar{k} + \tilde{k}}{\bar{\omega} + \tilde{\omega}}$. Son développement en série entière donne

$$\frac{\bar{k} + \tilde{k}}{\bar{\omega} + \tilde{\omega}} = \frac{\bar{k} + \tilde{k}}{\bar{\omega}} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\tilde{\omega}}{\bar{\omega}} \right)^n \right). \quad (4.23)$$

L'avant dernier terme de l'équation (4.22) peut alors s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\bar{k} + \tilde{k}}{\bar{\omega} + \tilde{\omega}} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\bar{k}}{\bar{\omega}} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\tilde{k}}{\bar{\omega}} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\bar{k}\tilde{\omega}}{\bar{\omega}^2} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) + N_1 \quad (4.24)$$

avec

$$N_1 = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\frac{\tilde{k}}{\bar{\omega}} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\tilde{\omega}}{\bar{\omega}} \right)^n + \frac{\tilde{k}}{\bar{\omega}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\tilde{\omega}}{\bar{\omega}} \right)^n \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right]; \quad (4.25)$$

et le dernier terme s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\bar{k} + \tilde{k}}{\bar{\omega} + \tilde{\omega}} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\tilde{k}}{\bar{\omega}} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \right) + N_2 \quad (4.26)$$

avec

$$N_2 = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\frac{\bar{k}}{\bar{\omega}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\tilde{\omega}}{\bar{\omega}} \right)^n + \frac{\tilde{k}}{\bar{\omega}} + \frac{\tilde{k}}{\bar{\omega}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\tilde{\omega}}{\bar{\omega}} \right)^n \right) \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \right]. \quad (4.27)$$

En prenant la moyenne temporelle de (4.22)

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \overline{\tilde{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\bar{k}}{\bar{\omega}} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) + \bar{N}_1 + \bar{N}_2 \quad (4.28)$$

On trouve alors l'équation pour \tilde{u} , en insérant les derniers développements dans (4.22)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \tilde{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \bar{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} - \overline{\tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}} = \\ -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\tilde{k}}{\bar{\omega}} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\bar{k} \tilde{\omega}}{\bar{\omega}^2} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) + N_1 - \bar{N}_1 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\bar{k}}{\bar{\omega}} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \right) + N_2 - \bar{N}_2 \end{aligned} \quad (4.29)$$

On s'intéresse maintenant aux équations de fermeture. Tout d'abord, celle de k donnée dans le chapitre 3,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle k \rangle}{\partial t} + \langle u_j \rangle \frac{\partial \langle k \rangle}{\partial x_j} = 2 \frac{\langle k \rangle}{\langle \omega \rangle} \langle D_{ij} \rangle \langle D_{ij} \rangle - \langle k \rangle \langle \omega \rangle \\ + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \langle k \rangle}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu_t \frac{\partial \langle k \rangle}{\partial x_j} \right) \end{aligned} \quad (4.30)$$

En développant $\langle k \rangle = \bar{k} + \tilde{k}$ cette dernière équation se réécrit

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{k}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{k}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} + \tilde{u}_j \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} + \bar{u}_j \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j} = \\ 2 \frac{\bar{k} + \tilde{k}}{\bar{\omega} + \tilde{\omega}} (\bar{D}_{ij} \bar{D}_{ij} + 2 \tilde{D}_{ij} \bar{D}_{ij} + \tilde{D}_{ij} \tilde{D}_{ij}) \\ - \bar{k} \bar{\omega} - \tilde{k} \bar{\omega} - \bar{k} \tilde{\omega} - \tilde{k} \tilde{\omega} \\ + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\bar{k} + \tilde{k}}{\bar{\omega} + \tilde{\omega}} \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\bar{k} + \tilde{k}}{\bar{\omega} + \tilde{\omega}} \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j} \right). \end{aligned} \quad (4.31)$$

On réécrit (4.31) sous la forme

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \bar{k}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{k}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} + \tilde{u}_j \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} + \bar{u}_j \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j} = \\
& + 2 \frac{\bar{k}}{\bar{\omega}} \bar{D}_{ij} \bar{D}_{ij} + 2 \frac{\tilde{k}}{\bar{\omega}} \bar{D}_{ij} \bar{D}_{ij} - 2 \frac{\bar{k}}{\bar{\omega}^2} \tilde{\omega} \bar{D}_{ij} \bar{D}_{ij} + 4 \frac{\bar{k}}{\bar{\omega}} \bar{D}_{ij} \tilde{D}_{ij} + N_3 \\
& \quad - \bar{k} \bar{\omega} - \tilde{k} \bar{\omega} - \bar{k} \tilde{\omega} - \tilde{k} \tilde{\omega} \\
& \quad + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j} \right) \\
& + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\bar{k}}{\bar{\omega}} \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\bar{k}}{\bar{\omega}^2} \tilde{\omega} \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\tilde{k}}{\bar{\omega}} \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} \right) \\
& \quad + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\bar{k}}{\bar{\omega}} \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j} \right) + N_4,
\end{aligned} \tag{4.32}$$

avec

$$\begin{aligned}
N_3 = & 2 \frac{\bar{k} + \tilde{k}}{\bar{\omega} + \tilde{\omega}} \bar{D}_{ij} \tilde{D}_{ij} + 2 \bar{D}_{ij} \bar{D}_{ij} \left(\frac{\bar{k}}{\bar{\omega}} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^2 \left(\frac{\tilde{\omega}}{\bar{\omega}} \right)^n + \frac{\tilde{k}}{\bar{\omega}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^2 \left(\frac{\tilde{\omega}}{\bar{\omega}} \right)^n \right) \\
& 4 \bar{D}_{ij} \tilde{D}_{ij} \left(\frac{\bar{k}}{\bar{\omega}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^2 \left(\frac{\tilde{\omega}}{\bar{\omega}} \right)^n + \frac{\tilde{k}}{\bar{\omega}} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^2 \left(\frac{\tilde{\omega}}{\bar{\omega}} \right)^n \right) \right)
\end{aligned} \tag{4.33}$$

et

$$\begin{aligned}
N_4 = & \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\frac{\bar{k}}{\bar{\omega}} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\tilde{\omega}}{\bar{\omega}} \right)^n + \frac{\tilde{k}}{\bar{\omega}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\tilde{\omega}}{\bar{\omega}} \right)^n \right) \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} \right] \\
& + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\frac{\bar{k}}{\bar{\omega}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\tilde{\omega}}{\bar{\omega}} \right)^n + \frac{\tilde{k}}{\bar{\omega}} + \frac{\tilde{k}}{\bar{\omega}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\tilde{\omega}}{\bar{\omega}} \right)^n \right) \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j} \right].
\end{aligned} \tag{4.34}$$

N_3 et N_4 sont des termes non-linéaires.

On a l'équation de \bar{k} en prenant la moyenne temporelle de cette équation,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{k}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} + \overline{\tilde{u}_j \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j}} = & 2 \frac{\bar{k}}{\bar{\omega}} \bar{D}_{ij} \bar{D}_{ij} + \bar{N}_3 - \bar{k} \bar{\omega} - \overline{\tilde{k} \bar{\omega}} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} \right) \\
& + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\bar{k}}{\bar{\omega}} \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} \right) + \bar{N}_4.
\end{aligned} \tag{4.35}$$

On détermine l'équation sur \tilde{k} en soustrayant (4.35) à (4.31), ce qui donne

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \tilde{k}}{\partial t} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j} + \bar{u}_j \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j} - \overline{\tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j}} = \\
& 2 \frac{\tilde{k}}{\bar{\omega}} \bar{D}_{ij} \bar{D}_{ij} - 2 \frac{\tilde{k}}{\bar{\omega}^2} \tilde{\omega} \bar{D}_{ij} \bar{D}_{ij} + 4 \frac{\tilde{k}}{\bar{\omega}} \bar{D}_{ij} \tilde{D}_{ij} + N_3 - \bar{N}_3 \\
& \quad - \tilde{k} \bar{\omega} - \bar{k} \tilde{\omega} - \tilde{k} \tilde{\omega} + \bar{k} \bar{\omega} \\
& \quad + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j} \right) \\
& - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\bar{k}}{\bar{\omega}^2} \tilde{\omega} \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\tilde{k}}{\bar{\omega}} \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j} \right) \\
& \quad + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\tilde{k}}{\bar{\omega}} \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j} \right) + N_4 - \bar{N}_4.
\end{aligned} \tag{4.36}$$

L'équation pour $\langle \omega \rangle$ est

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \langle \omega \rangle}{\partial t} + \langle u \rangle_j \frac{\partial \langle \omega \rangle}{\partial x_j} = 2 \langle D_{ij} \rangle \langle D_{ij} \rangle - \langle \omega \rangle^2 \\
& \quad + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \langle \omega \rangle}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\langle k \rangle \frac{\partial \langle \omega \rangle}{\partial x_j} \right).
\end{aligned} \tag{4.37}$$

En développant cette équation on trouve

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x_j} + \bar{u}_j \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x_j} + \tilde{u}_j \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x_j} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x_j} \\
& \quad = 2 \bar{D}_{ij} \bar{D}_{ij} + 4 \tilde{D}_{ij} \bar{D}_{ij} + 2 \tilde{D}_{ij} \tilde{D}_{ij} \\
& \quad \quad - \bar{\omega}^2 - 2 \tilde{\omega} \bar{\omega} - \tilde{\omega}^2 \\
& \quad + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x_j} \right) \\
& \quad + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\bar{k} + \tilde{k}}{\bar{\omega} + \tilde{\omega}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\bar{k} + \tilde{k}}{\bar{\omega} + \tilde{\omega}} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x_j} \right).
\end{aligned} \tag{4.38}$$

L'avant dernier terme de cette équation peut s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\bar{k} + \tilde{k}}{\bar{\omega} + \tilde{\omega}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\bar{k}}{\bar{\omega}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\tilde{k}}{\bar{\omega}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\bar{k} \tilde{\omega}}{\bar{\omega}^2} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x_j} \right) + N_5 \tag{4.39}$$

avec

$$N_5 = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\frac{\bar{k}}{\bar{\omega}} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\tilde{\omega}}{\bar{\omega}} \right)^n + \frac{\tilde{k}}{\bar{\omega}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\tilde{\omega}}{\bar{\omega}} \right)^n \right) \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x_j} \right] \tag{4.40}$$

et le dernier terme s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\bar{k} + \tilde{k}}{\bar{\omega} + \tilde{\omega}} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\bar{k}}{\bar{\omega}} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x_j} \right) + N_6, \quad (4.41)$$

avec

$$N_6 = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\frac{\bar{k}}{\bar{\omega}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\tilde{\omega}}{\bar{\omega}} \right)^n + \frac{\tilde{k}}{\bar{\omega}} + \frac{\tilde{k}}{\bar{\omega}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\tilde{\omega}}{\bar{\omega}} \right)^n \right) \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x_j} \right]. \quad (4.42)$$

En prenant la moyenne temporelle de l'équation (4.38) on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x_j} + \overline{\tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x_j}} \\ &= 2\bar{D}_{ij} \bar{D}_{ij} + \overline{2\tilde{D}_{ij} \tilde{D}_{ij}} \\ & \quad - \bar{\omega}^2 - \overline{\tilde{\omega}^2} \\ & \quad + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x_j} \right) \\ & \quad + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\bar{k}}{\bar{\omega}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x_j} \right) + \bar{N}_5 + \bar{N}_6. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Finalement, on trouve l'équation satisfaite par $\tilde{\omega}$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x_j} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x_j} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x_j} - \overline{\tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x_j}} \\ &= 4\tilde{D}_{ij} \bar{D}_{ij} + 2\tilde{D}_{ij} \tilde{D}_{ij} - \overline{2\tilde{D}_{ij} \tilde{D}_{ij}} \\ & \quad - 2\tilde{\omega} \bar{\omega} - \bar{\omega}^2 + \overline{\tilde{\omega}^2} \\ & \quad + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x_j} \right) \\ & \quad + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\tilde{k}}{\bar{\omega}} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\bar{k} \tilde{\omega}}{\bar{\omega}^2} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x_j} \right) + N_5 - \bar{N}_5 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\bar{k}}{\bar{\omega}} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x_j} \right) + N_6 - \bar{N}_6. \end{aligned} \quad (4.44)$$

En résumé, en partant des équations URANS, nous avons dérivé les équations satisfaites par la moyenne temporelle (équations (4.28), (4.35) et (4.43)) et l'onde organisée (équations (4.29), (4.36) et (4.44)). Dans la section suivante, nous allons comparer ces équations à celles obtenues par la décomposition triple appliquées aux équations de Navier Stokes.

4.3 Comparaison des équations

L'objet de cette section est de comparer les équations obtenues en utilisant la décomposition triple (section 4.1) et celles obtenues avec les équations URANS (section 4.2). Ceci a pour but d'essayer de comprendre quels termes de l'équation obtenue par le URANS modélisent quels termes de l'équation obtenue par la décomposition triple. **Dans cette partie on précise**

que les équations $a = b$ signifient que le terme a issu de la décomposition triple sur les équations de Navier-Stokes est modélisé par le terme b issu des équations URANS.

On s'intéresse d'abord à l'équation de perturbation de l'énergie cinétique turbulente en utilisant la décomposition triple (4.20), et à celle obtenue avec l'équation URANS (4.36).

- Le terme $\widetilde{u'_i u'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}}$ est un terme de production dû au cisaillement du champ moyen et aux fluctuations turbulentes, la comparaison donne donc

$$\widetilde{u'_i u'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}} = 2 \frac{\tilde{k}}{\bar{\omega}} \bar{D}_{ij} \bar{D}_{ij} - 2 \frac{\bar{k}}{\bar{\omega}} \bar{\omega} \bar{D}_{ij} \bar{D}_{ij}. \quad (4.45)$$

- Le terme $\overline{u'_i u'_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}}$ est un terme de production dû au cisaillement de l'onde organisée et de la moyenne temporelle des corrélations turbulentes, d'où

$$\overline{u'_i u'_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}} = 4 \frac{\bar{k}}{\bar{\omega}} \bar{D}_{ij} \bar{D}_{ij}. \quad (4.46)$$

- Le terme $\widetilde{u'_i u'_j \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_j}} - \overline{u'_i u'_j \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_j}}$ est un terme de production dû aux effets non-linéaires que l'on peut comparer aux termes non-linéaires venant du terme de production de l'équation URANS.

$$\widetilde{u'_i u'_j \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_j}} - \overline{u'_i u'_j \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_j}} = N_3 - \bar{N}_3 \quad (4.47)$$

- La dissipation $\frac{1}{Re} \widetilde{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}}$ peut être reliée à tout ce qui vient du terme de dissipation de l'équation issue du URANS,

$$\frac{1}{Re} \widetilde{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} = \tilde{k} \bar{\omega} - \bar{k} \bar{\omega} - \tilde{k} \bar{\omega} + \bar{k} \bar{\omega}. \quad (4.48)$$

- Enfin le terme de diffusion turbulente $-\frac{\partial \widetilde{u'_i p'}}{\partial x_i} - \widetilde{u'_j \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j}}$ doit être relié à tout ce qui vient du terme de diffusion du URANS, ainsi

$$-\frac{\partial \widetilde{u'_i p'}}{\partial x_i} - \widetilde{u'_j \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j}} = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\bar{k}}{\bar{\omega}^2} \bar{\omega} \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\tilde{k}}{\bar{\omega}} \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\bar{k}}{\bar{\omega}} \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j} \right) + N_4 - \bar{N}_4. \quad (4.49)$$

Comparons maintenant l'équation obtenue pour \bar{k} sans modélisation (4.18) avec celle du URANS (4.35) :

- Le terme de production $-\overline{u'_i u'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}}$ est le terme de production usuel du système RANS. Il s'agit d'un terme de production dû à la moyenne temporelle des corrélations d'ordre

2 et du cisaillement du champ moyen, ce terme est donc modélisé par

$$-\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_j} = 2 \frac{\bar{k}}{\bar{\omega}} \bar{D}_{ij} \bar{D}_{ij}. \quad (4.50)$$

- Le terme $-\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_j}$ est la moyenne du terme de production dû aux corrélations entre la moyenne de phase des corrélations turbulentes, et le cisaillement de l'onde organisée, on a donc

$$-\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_j} = \bar{N}_1. \quad (4.51)$$

- Le terme de dissipation $\frac{1}{Re} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}$ se regroupe avec les termes de dissipation du URANS donnant ainsi

$$\frac{1}{Re} \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} = \bar{k} \bar{\omega} - \bar{k} \tilde{\omega}. \quad (4.52)$$

- Enfin le terme de diffusion turbulente $-\frac{\partial \overline{u'_i p'}}{\partial x_i} - \overline{u'_j} \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j}$ doit être relié à tout ce qui vient du terme de diffusion du URANS,

$$-\frac{\partial \overline{u'_i p'}}{\partial x_i} - \overline{u'_j} \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\bar{k}}{\bar{\omega}} \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} \right) + \bar{N}_2 \quad (4.53)$$

De même pour les équations sur les champs de vitesse, on compare (4.29) et (4.10). On constate que l'on modélise

$$-\frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\bar{k}}{\bar{\omega}} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\bar{k}}{\bar{\omega}} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\bar{k}}{\bar{\omega}^2} \tilde{\omega} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) N_3 - \bar{N}_3 + N_4 - \bar{N}_4 \quad (4.54)$$

et de la comparaison entre (4.28) et (4.9) vient

$$-\frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\bar{k}}{\bar{\omega}} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) + \bar{N}_3 + \bar{N}_4. \quad (4.55)$$

4.4 Différentes analyses

Comme explicité dans l'introduction de ce chapitre, différents traitements du terme de diffusion turbulente dans les équations des perturbations ont été proposés (μ laminaire [13], système complet [29], [98], [85]). Le but de cette section est de montrer en quoi consistent les différentes approximations faites lors de ces analyses et d'en identifier les limites. Ceci sera fait en se basant sur les équations de la section précédente. Les critères de validité qui seront explicités ici, seront appliqués dans le cas du buffet à la fin du chapitre 7.

4.4.1 μ laminaire

Faire une analyse μ laminaire est équivalent à supposer que $\frac{\partial \widetilde{u'_i u'_j}}{\partial x_j}$ est nul, ou faible devant les autres termes dans l'équation (4.10) sur \tilde{u}_i , par exemple si $\frac{\partial \widetilde{u'_i u'_j}}{\partial x_j} \ll \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}$. Si on suppose que $\frac{\partial \widetilde{u'_i u'_j}}{\partial x_j} \sim \frac{\bar{k}}{L}$ et $\tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \sim \frac{\tilde{u}_j \bar{u}}{L}$ alors cette hypothèse est vérifiée si $\frac{\bar{k}}{\bar{u}} \ll 1$.

Dans le cadre de cette hypothèse, il n'est plus nécessaire de regarder les équations de \tilde{k} et $\tilde{\omega}$ pour trouver \tilde{u} . L'effet de la turbulence se fait sentir sur \tilde{u}_i uniquement par l'intermédiaire de \bar{u} .

L'avantage de cette méthode est que le résultat dépend moins de la modélisation de la turbulence que dans le cas du système complet. En revanche, Sartor [105] et Crouch [31] montrent que dans le cas du buffet, l'analyse de stabilité globale est incapable de prédire cette instationnarité si les variations de la viscosité turbulente ne sont pas prises en compte.

Il est intéressant de plus de remarquer que si l'on regarde tout de même l'équation (4.20) sur \tilde{k} , supposer en plus que $\widetilde{u'_i u'_j} = 0$ revient à ne garder qu'un terme de production sur les 4, $\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}$, c'est à dire la production due aux corrélations en moyenne temporelle des fluctuations turbulentes et au cisaillement du à l'onde organisée.

Si on regarde l'équation (4.36) de \tilde{k} issue de l'approche URANS, on constate que l'on néglige tout le terme de production, ainsi que le terme de diffusion turbulente.

4.4.2 Approche μ_t figé

Cette approche consiste à modéliser $-\frac{\partial \widetilde{u'_i u'_j}}{\partial x_j}$ de l'équation sur \tilde{u}_i (4.10) par le terme $\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\bar{k}}{\bar{\omega}} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \right)$ (cf. (4.54)). Ceci revient à négliger la perturbation due à l'onde organisée de la turbulence mais en gardant la viscosité turbulente moyenne. En comparant les différents termes de la diffusion turbulente dans (4.29), on constate que ceci revient à supposer que

$$\frac{\tilde{k}}{\bar{k}} \ll \frac{\tilde{u}}{\bar{u}} \quad (4.56)$$

et

$$\frac{\tilde{\omega}}{\bar{\omega}} \ll \frac{\tilde{u}}{\bar{u}}. \quad (4.57)$$

autrement dit que l'énergie cinétique et la dissipation spécifique associées à l'onde organisée sont faibles devant la vitesse de cette onde.

Même dans le cadre de l'analyse linéaire, rien ne garantit que ces deux hypothèses soient satisfaites.

De plus, en regardant l'équation (4.35), on constate que l'influence de \tilde{k} et $\tilde{\omega}$ est négligeable sur \bar{k} si $\frac{\tilde{k}}{\bar{k}} \ll 1$, si $\frac{\tilde{\omega}}{\bar{\omega}} \ll 1$ et si $\bar{u}\bar{k} \gg \tilde{u}\tilde{k}$. Dans le cas de faibles perturbations, comme dans le cas d'une analyse linéaire, ces hypothèses sont vérifiées. Toutefois, si un mode \tilde{u} est instable, cette hypothèse peut être mise en défaut du fait de la croissance du mode.

Comme dans le cas de l'approche μ laminaire, il n'y a pas besoin de résoudre les équations sur \tilde{k} et $\tilde{\omega}$. Cette approche dépend donc peu du modèle de turbulence. En revanche elle est incapable de prédire le phénomène de buffet.

4.4.3 Système complet

Cette approche considère les équations de \tilde{k} et de $\tilde{\omega}$, elle revient donc à modéliser $-\frac{\partial \widetilde{u'_i u'_j}}{\partial x_j}$.

$$-\frac{\partial \widetilde{u'_i u'_j}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\tilde{k}}{\bar{\omega}} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\bar{k}}{\bar{\omega}^2} \tilde{\omega} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\bar{k}}{\bar{\omega}} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \right) + N_3 - \bar{N}_3 + N_4 - \bar{N}_4 \quad (4.58)$$

Les termes non linéaires N_3 , \bar{N}_3 , N_4 et \bar{N}_4 peuvent être négligés dans le cadre de l'analyse linéaire. On doit alors trouver \tilde{k} et $\tilde{\omega}$, ce qui est fait par le modèle de turbulence. On peut poser $\tilde{\nu}_t = \frac{\tilde{k}}{\bar{\omega}} - \frac{\bar{k}}{\bar{\omega}^2} \tilde{\omega}$. C'est la linéarisation de la viscosité turbulente.

Il a été montré que cette approche était capable de prédire le phénomène de buffet (voir Crouch et al. [29] et Sartor et al. [107]), en revanche elle dépend a priori du modèle de turbulence choisi. Un autre problème de cette approche est qu'elle nécessite que la viscosité turbulente soit différentiable (ce qui n'est pas le cas pour $k - \omega$ SST par exemple).

4.4.4 γ figé

Dans le cadre d'une analyse RANS avec un critère de transition, on remplace la viscosité turbulente ν_t par $\gamma \nu_t$. γ est une fonction des variables conservatives q et des variables turbulentes q_t . Dans le cadre du modèle de Langtry (voir section 3.4.2), γ est la solution d'une équation de transport. On peut appliquer les mêmes procédés que précédemment pour trouver l'équation vérifiée par $\tilde{\gamma}$. Ainsi la perturbation de la viscosité turbulente est

$$\tilde{\nu}_t = \tilde{\gamma} \frac{\bar{k}}{\bar{\omega}} + \bar{\gamma} \frac{\tilde{k}}{\bar{\omega}} - \bar{\gamma} \frac{\bar{k}}{\bar{\omega}^2} \tilde{\omega} \quad (4.59)$$

La fonction γ représente l'intermittence. Elle décrit la région où la transition se produit. Ainsi supposer que $\tilde{\gamma} = 0$ signifie que la position de la transition n'est pas changée par l'onde organisée. Cela est justifié si $\frac{\tilde{\gamma}}{\bar{\gamma}} \ll \frac{\tilde{k}}{\bar{k}}$ et $\frac{\tilde{\gamma}}{\bar{\gamma}} \ll \frac{\tilde{\omega}}{\bar{\omega}}$. Il peut paraître étrange que l'onde organisée ne change pas la position de la transition. L'approche paraît raisonnable lorsque l'onde organisée agit loin de la transition mais est sinon discutable. Dans le cas de TFAST (voir chapitres 5 et 6) et de BUTERFLI (voir chapitre 7) cette approche semble peu satisfaisante puisque le phénomène instationnaire modélisé se situe à la même position que la transition. Elle a cependant l'avantage de ne plus nécessiter de différencier le modèle de transition, ce qui est une étape difficile d'un point de vue pratique compte tenu du fait que les critères AHD et $\gamma - \overline{R_{\theta_i}}$ ne sont pas différentiables dans leur définition standard.

4.5 Analyse autour d'un champ de base

Dans ce qui précède, l'analyse est faite autour du champ moyen. Nous allons maintenant comparer cette approche à celle consistant à étudier la stabilité autour du champ de base (ie. la solution stationnaire des équations RANS). Une analyse de stabilité autour de ce champ consiste à étudier l'évolution d'une petite perturbation autour de cette solution. Cela revient à chercher la solution \tilde{q} autour de \bar{q} avec $\tilde{q} \ll \bar{q}$, où q représente une variable du système. On peut trouver comme précédemment les équations satisfaites par \tilde{q} dans le cas du modèle k - ω de Wilcox,

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i} = 0, \quad (4.60)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \tilde{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \bar{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} = \\ - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\tilde{k}}{\bar{\omega}} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\bar{k} \tilde{\omega}}{\bar{\omega}^2} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) + N_1 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\bar{k}}{\bar{\omega}} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \right) + N_2, \end{aligned} \quad (4.61)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{k}}{\partial t} + \tilde{u}_j \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} + \bar{u}_j \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j} = \\ 2 \frac{\tilde{k}}{\bar{\omega}} \bar{D}_{ij} \bar{D}_{ij} - 2 \frac{\bar{k}}{\bar{\omega}^2} \tilde{\omega} \bar{D}_{ij} \bar{D}_{ij} + 4 \frac{\bar{k}}{\bar{\omega}} \bar{D}_{ij} \tilde{D}_{ij} + N_3 \\ - \tilde{k} \tilde{\omega} - \bar{k} \tilde{\omega} - \tilde{k} \tilde{\omega} \\ + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j} \right) \\ - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\bar{k}}{\bar{\omega}^2} \tilde{\omega} \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\tilde{k}}{\bar{\omega}} \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\bar{k}}{\bar{\omega}} \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j} \right) + N_4 \end{aligned} \quad (4.62)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x_j} + \bar{u}_j \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x_j} + \tilde{u}_j \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x_j} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x_j} \\ = 4 \bar{D}_{ij} \bar{D}_{ij} + 2 \tilde{D}_{ij} \tilde{D}_{ij} - 2 \tilde{\omega} \bar{\omega} - \tilde{\omega}^2 \\ + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x_j} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\tilde{k}}{\bar{\omega}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\bar{k} \tilde{\omega}}{\bar{\omega}^2} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x_j} \right) + N_5 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\bar{k}}{\bar{\omega}} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x_j} \right) + N_6. \end{aligned} \quad (4.63)$$

On remarque que la différence avec les équations obtenues dans les parties précédentes (4.1 et 4.2) est l'absence ici des moyennes des termes non-linéaires dans les équations. Faire une analyse du champ de base revient donc à négliger les transferts d'énergie venant de l'onde organisée vers le champ moyen. Par exemple pour l'équation sur \tilde{k} on néglige les termes \bar{N}_3 , $\overline{k\tilde{\omega}}$, $\tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j}$ et \bar{N}_4 .

4.6 Analyse de stabilité globale

Dans cette section nous expliquerons le concept d'analyse de stabilité globale. Le but de cette analyse est de voir si une dynamique peut se développer au cours du temps autour du champ moyen ou du champ de base.

D'abord, remarquons que les systèmes d'équations pour les ondes organisées obtenues dans les sections précédentes peuvent toutes se réécrire sous la forme

$$P \frac{\partial \tilde{q}}{\partial t} = L_{\tilde{q}}(\tilde{q}) + PN_{\tilde{q}}(\tilde{q}), \quad (4.64)$$

avec $L_{\tilde{q}}$ les termes linéaires des équations et $N_{\tilde{q}}$, les termes non-linéaires. En incompressible laminaire, le terme non-linéaire dans l'équation de conservation de la masse est nul, ce qui incite à utiliser un opérateur P tel que

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.65)$$

avec $q = (p, u, v, w)$.

Dans le cas d'un écoulement compressible, $q = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho E)$ pour les équations de Navier Stokes et $q = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho E, \rho k, \rho \omega)$ dans le cas RANS. Les équations en annexe montrent que le terme non-linéaire est non-nul pour toutes les équations. P est donc l'identité. Cet opérateur n'est donc plus nécessaire dans ce cas.

L'analyse de stabilité globale consiste à se placer dans le cadre des petites perturbations, et donc à négliger le terme non linéaire. Ainsi on a

$$\frac{\partial \tilde{q}}{\partial t} = L_{\tilde{q}}(\tilde{q}) \quad (4.66)$$

De plus, si on prend une perturbation harmonique, $\tilde{q} = \hat{q}(X)e^{(i\omega + \sigma)t}$, cette équation se simplifie en

$$(i\omega + \sigma)\hat{q} = L_{\tilde{q}}(\hat{q}) \quad (4.67)$$

avec ω et σ des réels. ω est donc la fréquence et σ le taux de croissance. Il s'agit maintenant de trouver les valeurs et les vecteurs propres de $L_{\bar{q}}$. Si $\sigma < 0$, l'amplitude du mode va diminuer exponentiellement au cours du temps. On dit que le mode est globalement stable. Si $\sigma = 0$, l'amplitude du mode reste la même au cours du temps, on dit que le mode est marginalement stable. Si $\sigma > 0$, l'amplitude va croître exponentiellement jusqu'à ce que l'amplitude soit assez élevée pour donner lieu à des effets non-linéaires. Le mode est globalement instable.

Remarque

Si on écrit les équations RANS sous la forme

$$R(\bar{q}) = 0 \quad (4.68)$$

L'évolution de petites perturbations vérifie

$$\frac{\partial \tilde{q}}{\partial t} = J\tilde{q} \quad (4.69)$$

où J est la Jacobienne de R . $L_{\bar{q}}$ est donc la Jacobienne du résidu des équations RANS autour d'un champ de base.

4.7 Problème adjoint

Définition

Si on considère un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_Q$, on peut définir un opérateur adjoint à $L_{\bar{q}}$, $L_{\bar{q}}^\dagger$, qui vérifie

$$\langle \hat{q}_2, L_{\bar{q}} \hat{q}_1 \rangle_Q = \langle L_{\bar{q}}^\dagger \hat{q}_2, \hat{q}_1 \rangle_Q \quad (4.70)$$

pour tous vecteurs \hat{q}_1 et \hat{q}_2 . On définit le problème adjoint comme la recherche des vecteurs propres et des valeurs propres de $L_{\bar{q}}^\dagger$. On peut montrer que les valeurs propres du problème direct et celles du problème adjoint sont complexes conjugués l'une de l'autre. On peut donc associer à chaque vecteur propre du problème direct un vecteur propre du problème adjoint (Sipp et al. [111]). Si on note $\overset{\circ}{q}$ un vecteur propre du problème adjoint, il est intéressant de normaliser ce vecteur de telle sorte que

$$\langle \overset{\circ}{q}_i, \hat{q}_j \rangle_Q = \delta_{ij}. \quad (4.71)$$

De cette façon, tout vecteur q' peut être exprimé dans la base modale de façon simple : $q' = \sum_{j \geq 1} \langle \overset{\circ}{q}_j, q' \rangle_Q \hat{q}_j$.

Interprétation et remarques

Comme il est montré dans Mettot et al. [84], le mode adjoint peut donner des informations sur la localisation où mettre un actionneur si l'on veut faire du contrôle. Il faut placer le système d'aspiration ou de soufflage là où le mode adjoint est maximal pour avoir un effet maximal sur l'écoulement.

Si les modes globaux sont non-normaux, Marquet et al. [75] montrent qu'alors le mode direct et le mode adjoint sont localisés à des endroits différents de l'écoulement.

Enfin, il est montré dans Chomaz [24] que les modes adjoints et les modes directs se propagent dans le sens opposé l'un de l'autre.

Choix du produit scalaire

Dans le cadre du problème continu le produit scalaire usuellement utilisé est le produit scalaire canonique. Ici, comme nous le verrons plus tard, nous sommes dans le cas des équations RANS discrétisées. Dans ce cas, il a été proposé par Mettot [83] un produit scalaire qui prend en compte la taille des mailles de calcul. Si f et g , sont deux fonctions continues de Ω , alors

$$\int_{\Omega} f^{\dagger} g d\Omega = \sum_i F_i^{\dagger} G_i \Omega_i = F^{\dagger} Q G = \langle F, G \rangle_Q . \quad (4.72)$$

où F_i (resp. G_i) est le vecteur de la discrétisation de f (resp. g) et Ω_i le volume de la cellule i . Q est donc une matrice diagonale dont les valeurs propres sont les volumes des cellules de calcul.

4.8 Analyse du résolvant

Cette section a pour but de présenter l'analyse du résolvant et son interprétation selon Bennedine et al. [13].

4.8.1 Présentation de l'analyse du résolvant

Comme vu précédemment, les perturbations répondent à des équations qui peuvent s'écrire

$$\frac{\partial \tilde{q}}{\partial t} = L_{\tilde{q}}(\tilde{q}) + N_{\tilde{q}}(\tilde{q}). \quad (4.73)$$

En prenant la transformée de Fourier de cette équation, on obtient

$$i\omega \hat{q} = L_{\tilde{q}}(\hat{q}) + \hat{f}. \quad (4.74)$$

où l'on a noté $\hat{f} = \widehat{N_{\tilde{q}}(\tilde{q})}$. On peut donc trouver une relation simple entre \hat{q} et \hat{f} ,

$$\hat{q} = (i\omega I - L_{\tilde{q}})^{-1} \hat{f} = A \hat{f} \quad (4.75)$$

On a alors un système entrée-sortie, où le terme \hat{f} apparaît comme un forçage et la dynamique \hat{q} comme une réponse. On peut alors définir une fonction de gain entrée/sortie pour ce système

$$G(\hat{f}) = \frac{\langle \hat{q}, \hat{q} \rangle_q}{\langle \hat{f}, \hat{f} \rangle_f}, \quad (4.76)$$

où l'on a introduit deux produits scalaires

$$\langle a, b \rangle_q = \int_{\Omega_q} a Q_q b d\omega \quad (4.77)$$

et

$$\langle a, b \rangle_f = \int_{\Omega_f} a Q_f b d\omega. \quad (4.78)$$

Le gain peut être réécrit

$$G(\hat{f}) = \frac{\langle A\hat{f}, A\hat{f} \rangle_q}{\langle \hat{f}, \hat{f} \rangle_f} = \frac{\langle A^\dagger A\hat{f}, \hat{f} \rangle_q}{\langle \hat{f}, \hat{f} \rangle_f} \quad (4.79)$$

On peut donc optimiser le gain en cherchant la plus grande valeur propre de $A^\dagger A$. On a donc un nouveau problème aux vecteurs et valeurs propres

$$A^\dagger A f_i = \lambda_i^2 f_i. \quad (4.80)$$

Compte tenu du caractère auto-adjoint de $A^\dagger A$, ses valeurs propres sont des réels positifs et l'ensemble des f_i forme une base orthonormale.

On définit la réponse optimale non pas comme étant $q_i = A f_i$, mais comme étant

$$q_i = \lambda_i^{-1} A f_i, \quad (4.81)$$

de cette façon l'ensemble des q_i forme une base orthonormale ($\langle q_i, q_j \rangle_q = \delta_{i,j}$).

4.8.2 Choix des produits scalaires

Les produits scalaires (4.77) et (4.78) sont à déterminer en considérant les équations de Navier-Stokes.

\hat{f} est en effet relié aux termes non-linéaires des équations du mouvement des perturbations. Pour Ω_f , on considère un ensemble correspondant à tout le domaine de calcul et prenant en compte toutes les équations où un terme non-linéaire est présent. En régime compressible, cela signifie prendre en compte toutes les équations, ce qui implique $Q_f = \mathbf{I}$.

Pour le choix de la matrice du produit scalaire de la réponse dans (4.77), Beneddine et al. [13] montrent que la réponse correspond à la transformée de Fourier de la vitesse (obtenue

avec des données instationnaires de l'écoulement) si

$$\|\hat{u}\|^2 = \int_{\Omega_q} \hat{q} Q_q \hat{q} d\omega \quad (4.82)$$

Pour une approche laminaire, compressible et 2D, la matrice Q_q doit ainsi avoir la forme locale suivante :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\bar{u}}{\bar{\rho}} & \frac{1}{\bar{\rho}} & 0 & 0 \\ -\frac{\bar{v}}{\bar{\rho}} & 0 & \frac{1}{\bar{\rho}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.83)$$

L'utilisation de ce produit scalaire revient à maximiser l'énergie cinétique des perturbations. A noter que nous avons également essayé de maximiser l'énergie totale, mais cela n'a pas changé de façon importante nos résultats. Les résultats associées ne sont pas abordés dans la suite. A noter aussi que l'on peut également optimiser sur différents Ω_q car certains phénomènes peuvent être locaux.

Lien avec la transformée de Fourier proposé par Beneddine et al. [13]

Le lien avec la transformée de Fourier se fait en décomposant \hat{f} sur la base des forçages optimaux. $\hat{f} = \sum_{j \geq 1} \langle f_j, \hat{f} \rangle_f f_j$. On applique alors le résolvant à \hat{f} ,

$$\hat{u} = Q_q A \sum_{j \geq 1} \langle f_j, \hat{f} \rangle_f f_j. \quad (4.84)$$

Compte tenu de la relation entre les forçage optimaux et la réponse, cette équation se réécrit

$$\hat{u} = \sum_{j \geq 1} \langle f_j, \hat{f} \rangle_f (\omega) \lambda_j(\omega) u_j \quad (4.85)$$

Si on a en plus que $\langle f_1, \hat{f} \rangle_f (\omega) \lambda_1(\omega) \gg \langle f_j, \hat{f} \rangle_f (\omega) \lambda_j(\omega)$ pour tout $j > 1$, alors la relation précédente se simplifie en

$$\hat{u} \simeq \langle f_1, \hat{f} \rangle_f (\omega) \lambda_1(\omega) u_1. \quad (4.86)$$

Comme le facteur $\langle f_1, \hat{f} \rangle_f \lambda_1(\omega)$ ne dépend que de la pulsation, la transformée de Fourier et la réponse optimale ont la même forme.

La valeur de \hat{f} est inconnue. En supposant que les $\langle f_j, \hat{f} \rangle$ ont tous le même ordre de grandeur, on peut simplifier l'hypothèse précédente en $\lambda_1 \gg \lambda_j$ pour tout $j > 1$.

Un argument pour dire que tous les $\langle f_j, \hat{f} \rangle$ sont proches peut être trouvé dans l'article de Farrell et al.[41]. Les auteurs ont montré que dans le cas d'une transition laminaire turbulent, un forçage continu complètement aléatoire peut reproduire la transition aussi bien

que le forçage optimal si le nombre de Reynolds est assez grand. Le forçage étant totalement aléatoire, on peut supposer que le forçage moyen est équi-réparti entre les différents vecteurs propres f_i et que, en moyenne, $\langle f_j, \hat{f} \rangle = \langle f_i, \hat{f} \rangle$ pour tout (i, j) .

4.9 Calcul de la Jacobienne

Comme on peut le voir, ces trois analyses reposent sur la Jacobienne du résidu des équations RANS ou de Navier-Stokes selon le type d'analyse. Ici, la Jacobienne est calculée à l'aide des résidus déjà discrétisés.

On considère une grille de calcul en 2D de taille (n_i, n_j) et un nombre de variable n_v . Le résidu et \bar{q} sont donc donnés sous la forme de vecteurs de $n_i n_j n_v$ composantes. La Jacobienne est donc une matrice de taille $(n_i n_j n_v)^2$. On calcule alors la Jacobienne par différence finie en perturbant chaque composante de \bar{q} individuellement et en regardant son influence sur le résidu. Ainsi, pour la ligne l de la Jacobienne, qui correspond à une perturbation de la l^{eme} composante de \bar{q} ,

$$J e_l = \frac{1}{\varepsilon} [R(\bar{q} + \varepsilon e_l) - R(\bar{q})] \quad (4.87)$$

où e_l est un vecteur de taille $n_i n_j n_v$ dont la seule composante non nulle est la l^{eme} . On constate qu'un nombre $n_i n_j n_v$ de calculs de résidu est a priori nécessaire pour déterminer la Jacobienne. En réalité, le résidu est calculé avec le code elsA qui discrétise les variations spatiales selon certains schémas numériques. Lors de cette discrétisation, seules certains points autour de celui considéré sont impactés par la perturbation, les points impactés par le stencil (voir Figure 4.1). On peut donc limiter le nombre de calculs de résidu en pavant intelligemment le domaine de calcul. Le pavage utilisé est celui proposé dans sa thèse par Beneddine [12] et qui peut être vu dans la figure 4.2.

Enfin le ε choisi pour la ligne l est défini comme suit :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (|\bar{q}_l| + 1) \quad (4.88)$$

si $|\bar{q}_l| > 10 \cdot \varepsilon_0$,

$$\varepsilon = |\bar{q}_l| / 10 \quad (4.89)$$

sinon.

Ceci permet d'éviter les erreurs d'arrondi dans le cas où les valeurs considérées sont trop petites ou trop grandes. ε_0 est fixé pour l'ensemble des calculs de résidus et vaudra ici 10^{-7} . Ce choix est justifié par Mettot [83].

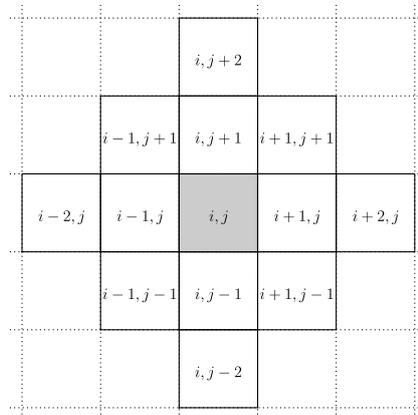


FIGURE 4.1 Forme du stencil utilisé dans elsA pour calculer la Jacobienne. (Image issue de Beneddine [12])

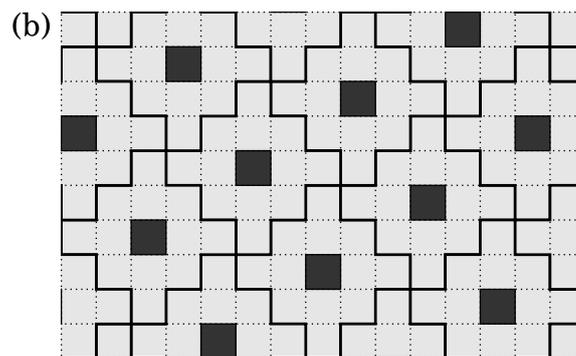


FIGURE 4.2 Stratégie d'utilisation du stencil utilisée pour calculer la Jacobienne. Les lignes noires délimitent le stencil pour un point d'application de la perturbation sur les carrés noirs. (Image issue de Beneddine [12])

4.10 Méthode pour trouver les valeurs et les vecteurs propres

Les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices nécessaires pour effectuer les analyses de stabilité globale et le problème adjoint sont trouvés grâce à une méthode de Krylov avec une stratégie de "shift-and-invert". Ceci est effectué à l'aide du code open source ARPACK (Lehoucq et al., 1998). Pour mener à bien cette stratégie, il faut résoudre un système linéaire. On utilise une méthode direct LU avec le logiciel MUMPS (voir <http://graal.ens-lyon.fr/MUMPS/>). Ce solveur est parallèle, ce qui rend la résolution du problème potentiellement rapide. En revanche, l'étape de factorisation LU nécessite beaucoup de mémoire. La conséquence est que pour des systèmes trop importants, les analyses ne peuvent pas être effectuées avec cette stratégie. C'est pour cette raison que nous allons nous intéresser seulement à des cas 2D.

