Généralités sur les chaînes d'algèbres

Sommaire

Dans ce Chapitre, nous présentons le cadre théorique commun aux objets étudiés par la suite dans cette thèse, à savoir les chaînes ascendantes d'algèbres et de groupes. Ce Chapitre a pour but de rappeler certaines définitions et d'exposer des résultats standards, qui seront ensuite utilisés dans les Chapitres suivants. Il ne contient pas de résultats nouveaux.

Nous rappelons dans la Section I.1 la définition que nous utiliserons de chaînes d'algèbres (ou de groupes), et de présentations par générateurs et relations d'une chaîne d'algèbres. Nous donnons ensuite la définition de présentation locale, de présentation stationnaire et de présentation stationnaire retardée pour une chaîne d'algèbres. Plusieurs exemples de telles chaînes sont présentés. Nous rappelons ensuite ce que sont les règles de branchement d'une algèbre par rapport à une sous-algèbre, et étudions les connections entre les règles de branchement pour une chaîne d'algèbres et les sous-algèbres commutatives maximales. Certaines parties de cette Section s'appuient sur des définitions inspirées de [100], et sur certains résultats présents dans [86].

Dans la Section I.2, nous présentons des définitions et résultats standards sur les diagrammes de Bratteli et leurs produits, ainsi que leurs connections avec la théorie des représentations des chaînes d'algèbres. Nous traitons en détail le cas du graphe de Young (le diagramme de Bratteli de la chaîne des groupes symétriques) et de ses puissances. Ces résultats seront explicitement utilisés dans le Chapitre II, car les puissances du graphe de Young s'avèreront être les diagrammes de Bratteli associés aux chaînes des algèbres de Hecke cyclotomiques. Nous dessinons, comme exemples, les débuts des diagrammes de Bratteli pour les chaînes des groupes symétriques et des groupes alternés, ainsi que le début du carré du graphe de Young.

La Section I.3 concerne les chaînes de groupes. Nous rappelons le principe de l'algorithme de Coxeter–Todd, qui a été donné dans [22], pour un groupe G et un sous-groupe H, et expliquons comment obtenir, à partir du résultat de l'algorithme, une forme normale pour les éléments du groupe G. Nous illustrons l'utilité de l'algorithme dans le cas de la chaîne des groupes symétriques ; nous expliquons en détail sa réalisation, ainsi que son utilisation pour prouver la présentation standard du groupe symétrique et pour obtenir une forme normale.

Nous travaillerons dans ce Chapitre sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$.
Nous notons $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers positifs ou nuls, et $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers.
Pour un espace vectoriel (complexe) V, notons $End(V)$ l'algèbre des endomorphismes de V.
Nous notons $Mat(n)$, $n \geq 0$, l'algèbre des matrices carrées de taille n avec des entrées complexes.

I.1 Chaînes d'algèbres

I.1.1 Définitions

Nous donnons la définition d'une chaîne ascendante d'algèbres. Comme les chaînes considérées seront toujours ascendantes, nous omettrons très souvent par la suite de le préciser, et parlerons simplement de *chaînes d'algèbres*.

Définition I.1. *Une chaîne (ascendante) d'algèbres est la donnée de :*

(a) *un ensemble d'algèbres* $(\mathfrak{A}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *;*

(b) *pour tout* $i \in \mathbb{N}$*, un morphisme injectif de* $\mathfrak{A}_i$ *vers* $\mathfrak{A}_{i+1}$*.*

On note la chaîne

$$\mathfrak{A}_0 \subset \mathfrak{A}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{A}_n \subset \dots \ . \tag{I.1.1}$$

Les chaînes d'algèbres étudiées dans cette thèse vérifieront que $\mathfrak{A}_0 = \mathbb{C}$ (en particulier, dans ce cas, les algèbres $\mathfrak{A}_i$, $i \in \mathbb{N}$, sont unitales). Dans la suite, nous supposerons donc que cette condition est vérifiée.

Le point (b) de la définition équivaut à dire que $\mathfrak{A}_i$ est isomorphe à une sous-algèbre de $\mathfrak{A}_{i+1}$. L'isomorphisme n'est, en général, pas unique ; la spécification de l'isomorphisme, pour tout $i \in \mathbb{N}$, fait partie de la définition.

Une chaîne (ascendante) de groupes :

$$G_0 \subset G_1 \subset \cdots \subset G_n \subset \ldots \tag{I.1.2}$$

est définie de manière similaire. Les chaînes de groupes étudiés dans cette thèse vérifieront toutes que $G_0 = \{e\}$, le groupe réduit à l'élément neutre. Dans la suite de cette Section, nous donnons les définitions pour les chaînes d'algèbres ; les définitions sont similaires dans le cas des chaînes de groupes. L'étude de la chaîne de groupes (I.1.2) peut être remplacée par l'étude de la chaîne des algèbres de groupes

$$\mathbb{C} \subset \mathbb{C}G_1 \subset \cdots \subset \mathbb{C}G_n \subset \ldots \tag{I.1.3}$$

(Rappelons que l'algèbre $\mathbb{C}G$ d'un groupe G est formée par l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de G à coefficients complexes ; la loi de multiplication dans $\mathbb{C}G$ provient de la loi de multiplication de G étendue par linéarité.)

Présentations par générateurs et relations d'une chaîne d'algèbres. Soit $\mathfrak{F}$ l'algèbre libre (sur $\mathbb{C}$) engendrée par des éléments $a_1, \ldots, a_k$ (une base de $\mathfrak{F}$ est constituée par les mots en $a_1, \ldots, a_k$, et la multiplication dans $\mathfrak{F}$ provient de la concaténation des mots étendues par linéarité). Soit R un ensemble d'éléments de $\mathfrak{F}$. Par définition, on dit qu'une algèbre $\mathfrak{A}$ est engendrée par les éléments $a_1, \ldots, a_k$ avec l'ensemble de relations définissantes R lorsque $\mathfrak{A}$ est isomorphe au quotient de $\mathfrak{F}$ par l'idéal engendré par les éléments de R. Nous dirons souvent que $\mathfrak{A}$ est l'algèbre engendrée par les éléments $a_1, \ldots, a_k$ avec les relations définissantes :

$$r = 0 \quad \text{pour } r \in R\ .$$

La donnée des éléments $a_1, \ldots, a_k$ et de l'ensemble R est appelée une présentation par générateurs et relations (ou, par abus de langage, une présentation) de l'algèbre $\mathfrak{A}$.

Définition I.2. *Soient un ensemble d'éléments $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, et une chaîne d'ensembles*

$$\varnothing \subset R_1 \subset \cdots \subset R_n \subset \ldots, \tag{I.1.4}$$

telle que, pour tout $i \in \mathbb{N}$, l'ensemble R_i est un ensemble formé par des combinaisons linéaires (à coefficient complexes) de mots en les éléments $x_1, \ldots, x_i$.

La donnée de l'ensemble $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ et de la chaîne (I.1.4) est une présentation (par générateurs et relations) de la chaîne d'algèbres

$$\mathbb{C} \subset \mathfrak{A}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{A}_n \subset \ldots$$

lorsque les conditions suivantes sont vérifiées :

(a) *pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{A}_i$ est isomorphe à l'algèbre engendrée par $x_1, \ldots, x_i$ avec l'ensemble de relations définissantes R_i ;*

(b) *pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{A}_i$ est isomorphe à la sous-algèbre de $\mathfrak{A}_{i+1}$ engendrée par $x_1, \ldots, x_i$.*

Remarques. **(i)** A priori, la notation pour les générateurs $x_1, \ldots, x_i$ devrait être différente selon que ces éléments sont considérés comme des éléments de l'algèbre $\mathfrak{A}_i$, ou de l'algèbre $\mathfrak{A}_{i+1}$, ou de l'algèbre $\mathfrak{A}_{i+2}$, etc. La notation dans la définition ci-dessus ne prête pas à confusion, et est donc justifiée, seulement lorsque la condition (b) de la définition est vérifiée.

(ii) Dans cette remarque, nous donnons un exemple montrant que, en général, la condition (b) de la définition ci-dessus n'est pas automatiquement vérifiée. Soit A_1 l'algèbre engendrée par un élément $\tilde{x}$ avec la relation définissante

$$\tilde{x}^4 = 1 \ ,$$

et soit A_2 l'algèbre engendrée par deux éléments x, y avec les relations définissantes

$$x^4 = 1 \ , \quad yxy^3 = 1 \quad \text{et} \quad y^4 = 1 \ .$$

Il est facile de vérifier que l'appplication $\tilde{x} \mapsto y$ définit un morphisme injectif de A_1 dans A_2. Donc, $\mathbb{C} \subset A_1 \subset A_2$ est le début d'une chaîne d'algèbres.

Par contre, les relations définissantes de l'algèbre A_2 impliquent que $yx = y^{-3}$ et ensuite, en multipliant par la gauche par y^3, que $x = 1$. Ainsi, dans cet exemple, l'algèbre A_1 n'est pas isomorphe à la sous-algèbre de A_2 engendrée par l'élément x.

(iii) On peut considérer le cas où l'on ne rajoute pas qu'un seul générateur à chaque étage de la chaîne, mais un nombre arbitraire de générateurs. C'est-à-dire que l'on considère une chaîne d'ensembles :

$$\varnothing \subset X_1 \subset \cdots \subset X_n \subset \ldots,$$

et une chaîne d'ensembles

$$\varnothing \subset R_1 \subset \cdots \subset R_n \subset \ldots$$

telle que, pour tout $i \in \mathbb{N}$, l'ensemble R_i est un ensemble formé par des combinaisons linéaires de mots en les éléments de X_i. La donnée des deux chaînes ci-dessus est une présentation par générateurs et relations de la chaîne d'algèbres

$$\mathbb{C} \subset \mathfrak{A}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{A}_n \subset \ldots$$

lorsque les conditions suivantes sont vérifiées :

(a) pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{A}_i$ est isomorphe à l'algèbre engendrée par les éléments de X_i avec l'ensemble de relations définissantes R_i ;

(b) pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{A}_i$ est isomorphe à la sous-algèbre de $\mathfrak{A}_{i+1}$ engendrée par les éléments de X_i.

La situation de la définition I.2 correspond au cas où $X_i = \{x_1, \ldots, x_i\}$, $i \in \mathbb{N}$. Il est facile d'adapter les définitions ci-dessous à la situation plus générale présentée dans cette remarque.

I.1.2 Présentations locales et stationnaires

Soit une chaîne d'algèbres

$$\mathfrak{A}_0 = \mathbb{C} \subset \mathfrak{A}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{A}_n \subset \ldots \tag{I.1.5}$$

Nous noterons symboliquement par $\{R\}$ une chaîne de relations, comme dans (I.1.4), pour la chaîne (I.1.5).

Définition I.3. *Une présentation par générateurs et relations, $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ et $\{R\}$, de la chaîne d'algèbres (I.1.5) est locale lorsqu'il existe un entier non-négatif k_0 tel que, pour tout $i = 1, 2, \ldots,$ on ait :*

$$x_i x_{i+k} = x_{i+k} x_i \qquad \text{pour tout } k \text{ tel que } k > k_0 .$$

Prenons pour k_0 le plus petit entier non-négatif vérifiant la propriété ci-dessus. On dit que la présentation est locale de profondeur k_0.

Par exemple, toute présentation d'une chaîne d'algèbres commutatives est locale de profondeur 0.

Définition I.4. *Une présentation par générateurs et relations, $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ et $\{R\}$, de la chaîne d'algèbres (I.1.5) est stationnaire lorsque pour tout $p, q \in \mathbb{N}$:*

l'ensemble R_p, dans lequel on effectue les remplacements $x_1 \mapsto x_{1+q}$, $\ldots$, $x_p \mapsto x_{p+q}$, coïncide avec l'ensemble $R_{p+q}\backslash R_q$ (en d'autres mots, les relations concernant les générateurs $x_1, \ldots, x_p$ ont la même forme que les relations concernant les générateurs $x_{1+q}, \ldots, x_{p+q}$).

Nous distinguons la notion de présentation stationnaire de la notion plus forte (voir Remarque **(i)** ci-dessous) de chaîne stationnaire.

Définition I.5. *Une chaîne (I.1.5), munie d'une certaine présentation par générateurs et relations, $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ et $\{R\}$, est stationnaire lorsque pour tout $p, q \in \mathbb{N}$:*

l'algèbre $\mathfrak{A}_p$ est isomorphe à la sous-algèbre de $\mathfrak{A}_{p+q}$ engendrée par $x_{1+q}, \ldots, x_{p+q}$.

On dit que la présentation munit la chaîne d'algèbres d'une structure de chaîne stationnaire.

Remarques. (i) Supposons qu'une présentation, $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ et $\{R\}$, munit une chaîne d'algèbres d'une structure de chaîne stationnaire. Ceci implique que, pour tout $p, q \in \mathbb{N}$, les relations définissantes concernant les générateurs $x_1, \ldots, x_p$ sont vérifiées lorsqu'on effectue les remplacements $x_1 \mapsto x_{1+q}$, $\ldots$, $x_p \mapsto x_{p+q}$. Inversement, les relations définissantes concernant les générateurs $x_{1+q}, \ldots, x_{p+q}$ sont vérifiées lorsqu'on effectue les remplacements $x_{1+q} \mapsto x_1$, $\ldots$, $x_{p+q} \mapsto x_p$. Ainsi, il est facile de voir que, quitte à rajouter des relations définissantes qui ne modifient pas les structures d'algèbres, il est possible d'obtenir une présentation stationnaire (en gardant les mêmes générateurs).

(ii) La réciproque de la remarque précédente n'est pas vraie en général. En effet, une présentation stationnaire ne munit pas forcément la chaîne d'une structure de chaîne stationnaire. Par exemple, prenons l'algèbre A_1 engendrée par un élément $\tilde{x}$ avec la relation définissante

$$\tilde{x}^4 = 1 \ .$$

Soit l'algèbre A_2 engendrée par des éléments x et y avec les relations définissantes

$$x^4 = 1, \quad y^4 = 1, \quad xy^2x^3 = y \ .$$

On peut vérifier que l'algèbre A_1 est isomorphe à la sous-algèbre de A_2 engendrée par x. Mais, bien que la relation concernant seulement le générateur x et la relation concernant seulement le générateur y soient les mêmes, il n'est pas vraie que la sous-algèbre de A_2 engendrée par y est isomorphe à A_1. En effet, nous avons, dans l'algèbre A_2, $y^2 = xy^4x^{-1} = 1$.

Les notions de stationnarité peuvent être affaiblies quelque peu, pour prendre en compte la situation où la stationnarité n'est effective qu'à partir d'un certain niveau de la chaîne.

Définition I.6. *Une présentation par générateurs et relations, $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ et $\{R\}$, de la chaîne d'algèbres (I.1.5) est stationnaire retardée lorsque il existe un entier non-négatif r tel que, pour tout $p, q \in \mathbb{N}$, on ait :*
l'ensemble $R_{r+p}\backslash R_r$, dans lequel on effectue les remplacements $x_{r+1} \mapsto x_{r+1+q}$, ..., $x_{r+p} \mapsto x_{r+p+q}$, coïncide avec l'ensemble $R_{r+p+q}\backslash R_{r+q}$ (en d'autres mots, les relations concernant les générateurs $x_{r+1}, \dots, x_{r+p}$ ont la même forme que les relations concernant les générateurs $x_{r+1+q}, \dots, x_{r+p+q}$).

Prenons pour r le plus petit entier non-négatif vérifiant la propriété ci-dessus. On dit que la présentation est stationnaire retardée de retard r.

Définition I.7. *Une chaîne (I.1.5), munie d'une certaine présentation par générateurs et relations, $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ et $\{R\}$, est stationnaire retardée lorsque il existe un entier non-négatif r tel que, pour tout $p, q \in \mathbb{N}$, on ait :*
les sous-algèbres de $\mathfrak{A}_{r+p+q}$ engendrées respectivement par $x_{r+1}, \dots, x_{r+p}$, et par $x_{r+1+q}, \dots, x_{r+p+q}$, sont isomorphes.

Prenons pour r le plus petit entier non-négatif vérifiant la propriété ci-dessus. On dit que la présentation munit la chaîne d'algèbres d'une structure de chaîne stationnaire retardée de retard r.

La notion de stationnarité retardée avec un retard égal à 0 correspond simplement à la notion de stationnarité. Les deux remarques suivant la Définition I.5 se généralisent tout de suite à la notion de stationnarité retardée.

Exemples. **(a)** Le groupe de Coxeter de type A, A_n [1], (*i.e.* le groupe symétrique S_{n+1}) est engendré par les éléments $s_1, \dots, s_n$ avec les relations définissantes :

$$\begin{aligned} &s_i^2 = 1 && \text{pour } i = 1, \dots, n, \\ &s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1} && \text{pour } i = 1, \dots, n-1, \\ &s_i s_j = s_j s_i && \text{pour } i, j = 1, \dots, n \text{ tels que } |i-j| > 1. \end{aligned} \tag{I.1.6}$$

Il est connu que le sous-groupe de A_n engendré par $s_1, \dots, s_{n-1}$ est isomorphe à A_{n-1} [2] (nous en donnons une preuve s'appuyant sur l'algorithme de Coxeter–Todd à la fin de ce Chapitre). Ainsi, on obtient une présentation de la chaîne des groupes symétriques. Cette présentation est stationnaire et locale de profondeur 1. De plus, il s'avère que la chaîne des groupes symétriques, munie de cette présentation, est stationnaire (voir également fin du Chapitre).

(b) L'algèbre de Hecke de type A, H_n, est une déformation, à un paramètre q, de l'algèbre du groupe de Coxeter de type A. L'algèbre H_n est engendrée par les éléments $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ avec les relations

1. La notation A_n est souvent utilisée pour le sous-groupe alterné du groupe symétrique ; dans cette thèse, pour la cohérence avec le dernier Chapitre, nous noterons toujours par A_n^+ le sous-groupe alterné.

2. L'isomorphisme entre le groupe engendré par les éléments $s_1, \dots, s_n$ avec les relations définissantes (I.1.6) et le groupe des permutations d'un ensemble à $n+1$ éléments est donné par $s_i \mapsto (i, i+1)$, où $(i, i+1)$ est la transposition de i et $i+1$; on peut voir ainsi que le plongement de A_{n-1} dans A_n (*i.e.* de S_n dans S_{n+1}) défini dans cet exemple coïncide avec celui évoqué dans le paragraphe **2.** de l'Introduction générale.

définissantes :

$$\begin{aligned}
&\sigma_i^2 = (q-q^{-1})\sigma_i + 1 && \text{pour } i = 1,\dots,n,\\
&\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} && \text{pour } i = 1,\dots,n-1,\\
&\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i && \text{pour } i,j = 1,\dots,n \text{ tels que } |i-j|>1.
\end{aligned} \tag{I.1.7}$$

La sous-algèbre de H_n engendrée par les éléments $\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1}$ est isomorphe à H_{n-1} (voir exemple ci-dessous pour $m=1$). Ainsi, on obtient une présentation de la chaîne des algèbres de Hecke de type A. Cette présentation est stationnaire et locale de profondeur 1. De plus, il s'avère que la chaîne des des algèbres de Hecke de type A, munie de cette présentation, est stationnaire.

(c) Les algèbres de Hecke cyclotomiques, $H(m,1,n)$, sont des déformations des algèbres des groupes de réflexions complexes de type $G(m,1,n)$. Pour $m=1$, l'algèbre $H(1,1,n)$ est l'algèbre de Hecke de type A, H_{n-1}, et pour $m=2$, l'algèbre $H(2,1,n)$ est l'algèbre de Hecke de type B. L'algèbre $H(m,1,n)$ est engendrée par les éléments $\tau,\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1}$ avec les relations définissantes :

$$\begin{aligned}
&(\tau-v_1)\dots(\tau-v_m) = 0\ ,\\
&\sigma_i^2 = (q-q^{-1})\sigma_i + 1 && \text{pour } i = 1,\dots,n-1,\\
&\tau\sigma_1\tau\sigma_1 = \sigma_1\tau\sigma_1\tau\ ,\\
&\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} && \text{pour } i = 1,\dots,n-2,\\
&\tau\sigma_i = \sigma_i\tau && \text{pour } i>1,\\
&\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i && \text{pour } i,j = 1,\dots,n-1 \text{ tels que } |i-j|>1.
\end{aligned} \tag{I.1.8}$$

Les paramètres $q,v_1,\dots,v_m$ sont les paramètres de déformation. La chaîne des algèbres $H(m,1,n)$ est le principal objet d'étude des deux Chapitres suivants. La sous-algèbre de $H(m,1,n)$ engendrée par les éléments $\tau,\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1}$ est isomorphe à l'algèbre $H(m,1,n-1)$ (une démonstration de ce résultat connu est présente dans le Chapitre III). Ainsi, on obtient une présentation de la chaîne des algèbres de Hecke cyclotomiques. Cette présentation est locale de profondeur 1 et stationnaire retardée de retard 1. De plus, il s'avère que la chaîne des des algèbres de Hecke cyclotomiques, munie de cette présentation, est stationnaire retardée de retard 1 (voir également Chapitre III).

(d) Soit $\mathfrak{sl}_n$ l'algèbre de Lie de type A_{n-1} : c'est l'algèbre de Lie des matrices carrées de taille n et de trace nulle. L'algèbre universelle enveloppante $U(\mathfrak{sl}_n)$ est engendrée par les éléments e_i,h_i,f_i, $i=1,\dots,n-1$ avec les relations définissantes

$$\begin{aligned}
&[e_i,f_j] = \delta_{ij}h_i,\quad h_ih_j = h_jh_i && \text{pour } i,j = 1,\dots,n-1,\\
&[h_i,e_j] = \begin{cases} 2e_j & \text{si } i=j,\\ -e_j & \text{si } |i-j|=1,\\ 0 & \text{si } |i-j|>1,\end{cases} && \text{and}[h_i,f_j] = \begin{cases} -2f_j & \text{si } i=j,\\ f_j & \text{si } |i-j|=1,\\ 0 & \text{si } |i-j|>1,\end{cases}\\
&e_i^2e_j - 2e_ie_je_i + e_je_i^2 = 0 && \text{si } |i-j|=1,\\
&f_i^2f_j - 2f_if_jf_i + f_jf_i^2 = 0 && \text{si } |i-j|=1,\\
&[e_i,e_j] = 0,\quad [f_i,f_j] = 0 && \text{si } |i-j|>1,
\end{aligned} \tag{I.1.9}$$

où δ_{ij} est le delta de Kronecker, et $[a, b]$ représente le commutateur de deux éléments, $[a, b] := ab - ba$. Grâce au théorème de Poincaré–Birkhoff–Witt, on peut montrer que la sous-algèbre de $U(\mathfrak{sl}_n)$ engendrée par les éléments e_i, h_i, f_i, $i = 1, \dots, n-2$ est isomorphe à $U(\mathfrak{sl}_{n-1})$. Ainsi, on obtient une présentation de la chaîne des algèbres $U(\mathfrak{sl}_n)$. Cette présentation est stationnaire et locale de profondeur 1. De plus, il s'avère que la chaîne des algèbres $U(\mathfrak{sl}_n)$, munie de cette présentation, est stationnaire (ceci est encore une conséquence du théorème de Poincaré–Birkhoff–Witt). Notons que c'est un exemple de présentation d'une chaîne d'algèbres où l'on rajoute à chaque étage plusieurs générateurs.

I.1.3 Règles de branchement

Nous considérons dans cette Sous-Section les règles de branchement d'une algèbre semi-simple vers une sous-algèbre semi-simple. Nous reviendrons à la situation des chaînes d'algèbres dans la prochaine Sous-Section. Par commodité, nous allons nous restreindre aux algèbres semi-simples de dimension finie.

Nous rappelons une définition possible de la semi-simplicité d'une algèbre de dimension finie sur le corps $\mathbb{C}$.

Définition I.8. *Une algèbre $\mathfrak{A}$ de dimension finie, sur le corps $\mathbb{C}$, est semi-simple lorsque tout module sur $\mathfrak{A}$ (*i.e.* toute représentation de $\mathfrak{A}$) peut se décomposer en somme directe de modules simples (*i.e.* de représentations irréductibles).*

Pour comprendre la théorie des représentations d'une algèbre semi-simple de dimension finie sur $\mathbb{C}$, il suffit donc de considérer les représentations irréductibles. De plus, la structure de l'algèbre est encodée dans l'ensemble de ses représentations irréductibles. En effet, on a le théorème suivant, qui est un cas particulier du théorème d'Artin–Wedderburn,

Théorème I.9. *Soit $\mathfrak{A}$ une algèbre semi-simple de dimension finie sur le corps $\mathbb{C}$. On a l'isomorphisme d'algèbres*

$$\mathfrak{A} \cong \bigoplus_k End(V_k) \ , \tag{I.1.10}$$

où la somme directe porte sur les représentations irréductibles non-isomorphes deux à deux de $\mathfrak{A}$.

Une algèbre semi-simple de dimension finie est donc une algèbre multi-matricielle, c'est-à-dire une algèbre qui se décompose en une somme directe d'algèbres matricielles, voir [30]. D'après le théorème, tout élément $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{A}$ peut être vu, par l'isomorphisme (I.1.10), comme une matrice par blocs de taille $\sum_k dim(V_k)$; chaque bloc sur la diagonale correspond à un terme de la somme (I.1.10), et est l'image de $\mathfrak{a}$ dans la représentation irréductible correspondante ; les blocs hors de la diagonale sont nuls.

Soient A une algèbre semi-simple et B une sous-algèbre semi-simple de A. Toute représentation irréductible de A se décompose par rapport à B, c'est-à-dire se décompose en somme directe de représentations irréductibles de B. Ces décompositions sont appelées les règles de branchement pour la paire (A, B).

Définition I.10. *On dit que les règles de branchement pour la paire (A, B) sont simples (ou sans multiplicité) lorsque, dans la décomposition de toute représentation irréductible de A, chaque représentation irréductible de B apparait avec la multiplicité égale à 0 ou 1.*

Rappelons que le centralisateur de B dans A est l'ensemble des éléments de A qui commutent avec tous les éléments de B. C'est une sous-algèbre de A que nous notons $\mathcal{Z}_A(B)$. Il existe une caractérisation de la simplicité des règles de branchement pour la paire (A, B) en termes de $\mathcal{Z}_A(B)$.

Proposition I.11. *Soient une algèbre A semi-simple de dimension finie sur $\mathbb{C}$ et B une sous-algèbre semi-simple de A.*
Les règles de branchement pour la paire (A, B) sont simples si et seulement si le centralisateur $\mathcal{Z}_A(B)$ est commutatif.

Nous présentons une preuve de ce résultat connu, en utilisant le Lemme de Schur :

Lemme I.12. *Soient $\rho : A \to End(V)$ et $\rho' : A \to End(V')$ deux représentations irréductibles de l'algèbre A. Soit X un opérateur d'entrelacement entre ces deux représentations, c'est-à-dire tel que $\rho(a)X = X\rho'(a)$ pour tout $a \in A$. On a alors :*
- *Si ρ et ρ' sont non-isomorphes comme représentations de A, alors $X = 0$.*
- *si ρ et ρ' sont isomorphes, alors on les identifie et on a $X = \lambda \cdot \mathrm{Id}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$, où* Id *est l'endomorphisme identité de V.*

Preuve de la Proposition. Supposons que les règles de branchement de la paire (A, B) soient simples. Soit V une représentation irréductible de A de dimension n. Dans la représentation V, il existe une base telle que les éléments de B sont représentés par des matrices diagonales par blocs, de la forme :

$$\begin{pmatrix} (\dots) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & (\dots) \end{pmatrix} \qquad \text{(les 0 représentent des blocs nuls).} \tag{I.1.11}$$

Les blocs correspondent aux représentations irréductibles de B intervenant dans la décomposition de V. Par hypothèse, ces représentations sont non-isomorphes 2 à 2. D'après le lemme de Schur, les seuls éléments dans $End(V)$ qui commutent avec tous les éléments de la forme (I.1.11) sont les matrices diagonales, où les valeurs sur la diagonale sont constantes dans chaque bloc. Donc les éléments de $\mathcal{Z}_A(B)$ commutent entre eux dans toute représentation irréductible V de A. D'après l'isomorphisme (I.1.10), cela implique que le centralisateur $\mathcal{Z}_A(B)$ est commutatif.

Réciproquement, supposons que les règles de branchement de la paire (A, B) ne soient pas simples. Il existe donc une représentation irréductible V de A telle que, dans la décomposition de V par rapport à B, une représentation irréductible $\rho : B \to End(W)$ apparait avec la multiplicité au moins égale à 2. Dans la représentation V, en se restreignant à un sous-espace isomorphe à $W \oplus W$ (qui existe par hypothèse), il existe une base telle que tout élément x de B a pour image :

$$\begin{pmatrix} \rho(x) & 0 \\ 0 & \rho(x) \end{pmatrix}.$$

Par le lemme de Schur, dans cette base de $W \oplus W$, les éléments de A qui commutent avec toutes les images d'éléments de B sont de la forme :

$$\begin{pmatrix} \alpha \cdot \mathrm{Id} & \beta \cdot \mathrm{Id} \\ \gamma \cdot \mathrm{Id} & \delta \cdot \mathrm{Id} \end{pmatrix} \qquad \text{avec } \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}, \tag{I.1.12}$$

où Id est l'endomorphisme identité de W. Les éléments (I.1.12) forment une algèbre isomorphe à l'algèbre des matrices carrées de taille 2, qui est une algèbre non-commutative. Ainsi, $\mathcal{Z}_A(B)$ n'est pas commutatif. □

Exemple. La Proposition I.11 relie une information sur la théorie des représentations à un résultat structurel sur l'algèbre A et sa sous-algèbre B. Nous illustrons son utilité sur l'exemple de la chaîne des algèbres des groupes symétriques dans l'Appendice I.1.A à cette Section. Nous rappelons une preuve connue [86] du fait que le centralisateur $\mathcal{Z}_{\mathbb{C}S_n}(\mathbb{C}S_{n-1})$ est commutatif pour tout $n \geq 1$, ce qui implique la simplicité des règles de branchement pour la chaîne des groupes symétriques.

I.1.4 Sous-algèbre commutative maximale d'une chaîne d'algèbres

Sous-algèbre commutative maximale d'une algèbre. Considérons une algèbre semi-simple $\mathfrak{A}$ de dimension finie sur $\mathbb{C}$. Pour toute représentation irréductible V_k de $\mathfrak{A}$, notons p_k l'élément de $\mathfrak{A}$ qui est l'image de l'endomorphisme identité de V_k par l'isomorphisme (I.1.10) [3]. L'élément p_k appartient au centre de $\mathfrak{A}$ et l'opérateur de multiplication (à gauche ou à droite) par cet élément est un projecteur de $\mathfrak{A}$ sur sa sous-algèbre isomorphe à $End(V_k)$: $p_k\mathfrak{A} \cong End(V_k)$; ainsi, on a

$$\mathfrak{A} = \bigoplus_k p_k \mathfrak{A} \ ,$$

où la somme directe porte sur les représentations irréductibles non-isomorphes deux à deux de $\mathfrak{A}$.

Les éléments p_k forment un ensemble complet d'idempotents centraux orthogonaux deux à deux, c'est-à-dire qu'ils vérifient les relations $p_i p_j = \delta_{ij} p_i$ et $\sum\limits_k p_k = 1$. De plus, l'ensemble des éléments p_k, pour k parcourant l'ensemble des représentations irréductibles non-isomorphes deux à deux de $\mathfrak{A}$, forment une base du centre de $\mathfrak{A}$. Par la suite, nous allons très souvent identifier les sous-algèbres $p_k\mathfrak{A}$ avec les blocs $End(V_k)$, et pour la simplicité de l'exposé, nous omettrons la référence à l'isomorphisme (I.1.10).

Remarque. Les éléments p_k ne sont pas en général des idempotents primitifs. En effet, si la représentation irréductible V_k est de dimension supérieure ou égale à 2, alors l'élément p_k peut se décomposer en une somme d'idempotents orthogonaux deux à deux :

$$p_k = p_{k,1} + p_{k,2} + \cdots + p_{k,dim(V_k)} \quad \text{avec } p_{k,i_k} p_{k,j_k} = \delta_{i_k,j_k} p_{k,i_k} \text{ pour tout } i_k, j_k = 1, \ldots, dim(V_k).$$

3. Du point de vue "multi-matriciel", l'élément p_k est la matrice constituée de 0 partout sauf dans le bloc correspondant à la représentation V_k, où il contient la matrice identité de taille $dim(V_k)$. Ce point de vue permet de vérifier immédiatement les propriétés données ici des éléments p_k.

Il suffit de prendre pour les p_{k,i_k}, $i_k = 1, \ldots, dim(V_k)$, les idempotents associés aux vecteurs de base pour une base quelconque de V_k[4]. L'ensemble des p_{k,i_k}, k labellisant les représentations irréductibles de $\mathfrak{A}$ non-isomorphes deux à deux, et $i_k = 1, \ldots, dim(V_k)$, forment un ensemble complet d'idempotents primitifs orthogonaux deux à deux ; ils consituent une base d'une sous-algèbre commutative maximale de $\mathfrak{A}$. En particulier, on voit que le centre de $\mathfrak{A}$ (dont une base est formée par les éléments p_k) est une sous-algèbre commutative maximale de $\mathfrak{A}$ si et seulement si l'algèbre $\mathfrak{A}$ est commutative (car dans ce cas les représentations irréductibles sont de dimension 1). □

Fixons maintenant une base dans chaque représentation irréductible V_k, ce qui donne une base pour l'écriture multi-matricielle d'un élément de $\mathfrak{A}$ (notons que la forme des projecteurs p_i ne dépend pas du choix de cette base). L'ensemble des matrices diagonales dans cette base forment une sous-algèbre commutative maximale de $\mathfrak{A}$. On va noter une telle algèbre $\mathcal{D}_{\mathfrak{A}}$ (elle dépend des bases choisies).

Reprenons A et B comme dans la Proposition I.11 : A est une algèbre semi-simple de dimension finie sur $\mathbb{C}$ et B est une sous-algèbre semi-simple de A. Ecrivons

$$A = \bigoplus_{i=1}^{x_A} a_i A \cong \bigoplus_{i=1}^{x_A} End(W_i) \quad \text{et} \quad B = \bigoplus_{\alpha=1}^{x_B} b_\alpha B \cong \bigoplus_{\alpha=1}^{x_B} End(U_\alpha),$$

où les sommes directes portent sur l'ensemble des représentations irréductibles non-isomorphes deux à deux de A (respectivement, de B), et x_A (respectivement, x_B) est le cardinal de cet ensemble. L'élément a_i (respectivement, b_α) est le projecteur central associé à W_i (respectivement, à U_α), comme expliqué plus haut. Notons d_i la dimension de W_i et d_α la dimension de U_α.

Soit $\mu_{\alpha i}$ la multiplicité de U_α dans la décomposition de W_i en somme de représentations irréductibles de B. La donnée des nombres entiers positifs $\mu_{\alpha i}$ équivaut à connaitre les règles de branchement pour la paire (A, B). On a, par définition des nombres $\mu_{\alpha i}$,

$$d_i = \sum_\alpha \mu_{\alpha i} d_\alpha \ .$$

Notons $\mathcal{D}_B$ la sous-algèbre commutative maximale de B constituée, du point de vue multi-matriciel pour B, par les matrices diagonales dans une base quelconque. Fixons une base de A compatible avec la restriction par rapport à B ; c'est-à-dire, telle que chaque bloc $a_i A$ se décompose en sous-blocs lorsque l'on se restreint à B, ces sous-blocs correspondant aux représentations irréductibles de B (celles qui interviennent dans la décomposition de $a_i A$). Notons $\mathcal{D}_A$ la sous-algèbre commutative maximale de A constituée des matrices diagonales dans cette base.

Soit $\mathcal{Z}_A$ le centre de A, et soit $\langle \mathcal{D}_B \cup \mathcal{Z}_A \rangle$ la sous-algèbre de A engendrée par l'union des sous-algèbres $\mathcal{D}_B$ et $\mathcal{Z}_A$.

Lemme I.13. *Les sous-algèbres $\mathcal{D}_A$ et $\langle \mathcal{D}_B \cup \mathcal{Z}_A \rangle$ coïncident si et seulement si les règles de branchement pour la paire (A, B) sont simples.*

4. Du point de vue "multi-matriciel", l'élément p_{k,i_k}, $i_k \in \{1, \ldots, dim(V_k)\}$, est la matrice constituée de 0 partout sauf dans le bloc correspondant à la représentation V_k, où il contient la matrice diagonale de taille $dim(V_k)$ avec un 1 en i_k-ème position et des 0 partout ailleurs.

Preuve. Nous commençons par prouver les formules suivantes :

$$dim(\mathcal{D}_A) = \sum_{i=1}^{x_A} d_i = \sum_{i=1}^{x_A} \sum_{\alpha=1}^{x_B} \mu_{\alpha i} d_\alpha \ , \tag{I.1.13}$$

$$dim(\langle \mathcal{D}_B \cup \mathcal{Z}_A \rangle) = \sum_{i=1}^{x_A} dim(a_i \mathcal{D}_B) = \sum_{i=1}^{x_A} \sum_{\substack{\alpha \text{ tels que} \\ \mu_{\alpha i} \neq 0}} d_\alpha \ , \tag{I.1.14}$$

La formule (I.1.13) est immédiate.

En ce qui concerne (I.1.14), la première égalité vient de :

$$\langle \mathcal{D}_B \cup \mathcal{Z}_A \rangle = \bigoplus_{i=1}^{x_A} a_i \mathcal{D}_B \ ; \tag{I.1.15}$$

ceci est une conséquence directe du fait que les projecteurs a_i forment une base de $\mathcal{Z}_A$. La sous-algèbre $a_i \mathcal{D}_B$ est la projection de l'algèbre $\mathcal{D}_B$ dans le bloc $a_i A$.

Il reste à prouver la deuxième égalité de (I.1.14). Fixons $i \in \{1, \ldots, x_A\}$, et soit $\alpha \in \{1, \ldots, x_B\}$ tel que $\mu_{\alpha i} \neq 0$. Considérons les éléments de $a_i \mathcal{D}_B$ qui ont pour écriture multi-matricielle les matrices formées de 0 partout, sauf dans le sous-bloc de $a_i A$ de taille $\mu_{\alpha i} d_\alpha$ correspondant à la somme directe de $\mu_{\alpha i}$ copies de la représentation U_α. De plus, dans ce bloc, considérons les éléments qui ont la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} D & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & D \end{pmatrix}, \tag{I.1.16}$$

où $D \in b_\alpha \mathcal{D}_B$ est une matrice carrée diagonale de taille d_α, et il y a $\mu_{\alpha i}$ blocs D. Tout élément de $a_i \mathcal{D}_B$ est une combinaison linéaire d'éléments décrits ci-dessus, avec α parcourant $\{1, \ldots, x_B\}$ tout en vérifiant $\mu_{\alpha i} \neq 0$. De plus, il est immédiat que deux de ces éléments sont indépendants lorsqu'ils correspondent à deux α différents. En conclusion pour chaque α tel que $\mu_{\alpha i} \neq 0$, il y a une contribution à la dimension de $a_i \mathcal{D}_B$ égale à d_α. Ceci termine la preuve de la formule (I.1.14).

En comparant les formules (I.1.13) et (I.1.14), on voit que les dimensions de $\mathcal{D}_A$ et de $\langle \mathcal{D}_B \cup \mathcal{Z}_A \rangle$ sont égales si et seulement si les multiplicités $\mu_{\alpha i}$ sont égales à 0 ou 1. Comme de plus, $\langle \mathcal{D}_B \cup \mathcal{Z}_A \rangle$ est contenue dans $\mathcal{D}_A$, ces 2 algèbres coïncident si et seulement si les nombres $\mu_{\alpha i}$ appartiennent à l'ensemble $\{0, 1\}$. □

Retour au cas d'une chaîne d'algèbres. Soit la chaîne d'algèbres semi-simples de dimensions finies

$$\mathfrak{A}_0 := \mathbb{C} \subset \mathfrak{A}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{A}_n \subset \ldots \tag{I.1.17}$$

On dit que les règles de branchement de la chaîne sont simples si, pour tout $i \in \mathbb{N}$, les règles de branchement pour la paire $(\mathfrak{A}_{i+1}, \mathfrak{A}_i)$ sont simples. Le résultat suivant relie la simplicité des règles de branchement avec une information sur les algèbres commutatives maximales [86].

Proposition I.14. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Pour tout $k \geq 0$, la sous-algèbre engendrée par l'union des centres des $\mathfrak{A}_i$, $i = 0, \ldots, k$, est une sous-algèbre commutative maximale de $\mathfrak{A}_k$.*

(ii) *Les règles de branchement de la chaîne (I.1.17) sont simples.*

(iii) *Pour tout $k \geq 1$, la sous-algèbre engendrée par l'union des centres des $\mathfrak{A}_i$, $i = 0, \ldots, k$, coïncide avec la sous-algèbre engendrée par l'union des centralisateurs $\mathcal{Z}_{\mathfrak{A}_i}(\mathfrak{A}_{i-1})$, $i = 1, \ldots, k$.*

Preuve. Supposons que (i) est vérifiée. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'assertion dans (i) pour $k = n$ et pour $k = n+1$ implique, par le Lemme (I.1.15), que les règles de branchement pour la paire $(\mathfrak{A}_{n+1}, \mathfrak{A}_n)$ sont simples. Donc, les règles de branchement de la chaîne (I.1.17) sont simples.

Supposons maintenant que (ii) est vérifiée. Nous prouvons (i) par récurrence sur k. La base de récurrence, pour $k = 0$, est triviale car $\mathfrak{A}_0 = \mathbb{C}$ est commutative. Supposons que la sous-algèbre engendrée par l'union des centres des $\mathfrak{A}_i$, $i = 0, \ldots, k$, est une sous-algèbre commutative maximale de $\mathfrak{A}_k$. Alors, comme les règles de branchement pour la paire $(\mathfrak{A}_{k+1}, \mathfrak{A}_k)$ sont simples, on obtient par le Lemme I.1.15 que la sous-algèbre engendrée par l'union des centres des $\mathfrak{A}_i$, $i = 0, \ldots, k+1$, est une sous-algèbre commutative maximale de $\mathfrak{A}_{k+1}$.

L'équivalence entre (ii) et (iii) est une conséquence de l'équivalence entre (i) et (ii) et de la Proposition I.11. Tout d'abord (ii) implique (iii). En effet, Supposons que les règles de branchement de la chaîne (I.1.17) sont simples, et soit $k \geq 1$. D'après la Proposition I.11, la sous-algèbre engendrée par l'union des centralisateurs $\mathcal{Z}_{\mathfrak{A}_i}(\mathfrak{A}_{i-1})$, $i = 1, \ldots, k$ est commutative. De plus, elle contient, par définition, la sous-algèbre engendrée par l'union des centres des $\mathfrak{A}_i$, $i = 0, \ldots, k$, qui est une sous-algèbre commutative maximale d'après l'équivalence entre (i) et (ii). Donc, les deux sous-algèbres coïncident.

Enfin, (iii) implique (ii). En effet, si pour tout $k \geq 1$, la sous-algèbre engendrée par l'union des centres des $\mathfrak{A}_i$, $i = 0, \ldots, k$, coïncide avec la sous-algèbre engendrée par l'union des centralisateurs $\mathcal{Z}_{\mathfrak{A}_i}(\mathfrak{A}_{i-1})$, $i = 1, \ldots, k$, alors $\mathcal{Z}_{\mathfrak{A}_{k+1}}(\mathfrak{A}_k)$ est commutatif pour tout $k \in \mathbb{N}$. D'après la Proposition I.11, cela implique que les règles de branchement de la chaîne (I.1.17) sont simples. $\square$

Remarque. Dans la démonstration de la Proposition I.11, nous avons considéré le cas de 2 représentations irréductibles isomorphes de B intervenant dans la décomposition d'une représentation irréductible de A. Dans la terminologie de cette Sous-Section, cela correspond à l'existence d'un $\mu_{\alpha i} = 2$ pour certains α et i. Nous avons vu que cette situation implique la présence d'un terme isomorphe à $Mat(2)$ dans la décomposition en somme directe du centralisateur $\mathcal{Z}_A(B)$. Plus généralement, dans le cas d'un $\mu_{\alpha i} \neq 0$, le terme dans la somme directe est isomorphe à $Mat(\mu_{\alpha i})$. On obtient facilement

$$\mathcal{Z}_A(B) \cong \bigoplus_{i, \alpha \text{ tels que } \mu_{\alpha i} \neq 0} Mat(\mu_{\alpha i}).$$

On calcule en fonction des multiplicités la dimension suivante :

$$dim(\langle \mathcal{D}_B \cup \mathcal{Z}_A(B) \rangle) = \sum_{i=1}^{x_A} \sum_{\alpha=1}^{x_B} \mu_{\alpha i}^2 d_\alpha, \tag{I.1.18}$$

où $\langle \mathcal{D}_B \cup \mathcal{Z}_A(B) \rangle$ est la sous-algèbre de M engendrée par l'union de $\mathcal{D}_B$ et du centralisateur $\mathcal{Z}_A(B)$ de B dans A. En effet, on a

$$\langle \mathcal{D}_B \cup \mathcal{Z}_A(B) \rangle \cong \bigoplus_{i,\alpha \text{ tels que } \mu_{\alpha i} \neq 0} b_\alpha \mathcal{D}_B \otimes Mat(\mu_{\alpha i}). \tag{I.1.19}$$

C'est l'analogue ici de la somme directe (I.1.15) : pour chaque i et α tels que $\mu_{\alpha i} \neq 0$, $b_\alpha \mathcal{D}_B \bigotimes Mat(\mu_{\alpha i})$ est la sous-algèbre formée par les produits d'éléments de la forme (I.1.16) avec les éléments de la forme (les analogues pour $\mu_{\alpha i} > 2$ des éléments (I.1.12)) :

$$\begin{pmatrix} c_1^1 \cdot \mathrm{Id} & \dots & c_{\mu_{\alpha i}}^1 \cdot \mathrm{Id} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1^{\mu_{\alpha i}} \cdot \mathrm{Id} & \dots & c_{\mu_{\alpha i}}^{\mu_{\alpha i}} \cdot \mathrm{Id} \end{pmatrix} \qquad \text{avec } c_k^l \in \mathbb{C} \text{ pour } k,l \in \{1, \dots, \mu_{\alpha i}\}, \tag{I.1.20}$$

où Id est la matrice identité de taille d_α. Pour i et α tels que $\mu_{\alpha i} \neq 0$, la dimension de cette sous-algèbre est $\mu_{\alpha i}^2 d_\alpha$, ce qui donne la formule (I.1.18).

En utilisant (I.1.18) avec les formules (I.1.13) et (I.1.14), on obtient à nouveau l'équivalence entre les 3 assertions de la proposition précédente. En fait, on a les inclusions d'algèbres

$$\langle \mathcal{D}_B \cup \mathcal{Z}_A \rangle \subset \mathcal{D}_A \subset \langle \mathcal{D}_B \cup \mathcal{Z}_A(B) \rangle ,$$

ce qui implique les inégalités

$$\dim(\langle \mathcal{D}_B \cup \mathcal{Z}_A \rangle) \leq \dim(\mathcal{D}_A) \leq \dim(\langle \mathcal{D}_B \cup \mathcal{Z}_A(B) \rangle) .$$

De plus, si les règles de branchement de la paire (A, B) sont simples, il y a égalité entre les 3 termes, et si les règles de branchement de la paire (A, B) ne sont pas simples, les inégalités sont strictes.

Appendice I.1.A Centralisateurs pour la chaîne des groupes symétriques

Nous donnons ici une démonstration (voir [86]), indépendante de la théorie des représentations, de la commutativité du centralisateur de $\mathbb{C}S_{n-1}$ dans $\mathbb{C}S_n$, pour tout $n \geq 1$; ceci prouve, d'après la Proposition I.11, la simplicité des règles de branchement pour la paire (S_n, S_{n-1}), $n \geq 1$, et donc la simplicité du diagramme de Bratteli des groupes symétriques (voir Section suivante).

Tout d'abord, rappelons ce qu'est l'écriture cyclique d'une permutation. Le cycle $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ de S_n, avec $i_1, i_2, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ différents deux à deux, est la permutation de S_n qui envoie i_1 à i_2, i_2 à i_3 et ainsi de suite jusqu'à i_{k-1} à i_k, qui envoie i_k à i_1 et qui envoie tout $j \notin \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ à lui-même. Un cycle est invariant par permutation cyclique des éléments qui le composent.

L'ensemble $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ est appelé le support du cycle $(i_1, i_2, \dots, i_k)$. Deux cycles dont les supports ne s'intersectent pas commutent. L'inverse d'un cycle est un cycle de même support, mais les éléments du support sont ordonnés à l'inverse du cycle original :

$$(i_1, i_2, \dots, i_k)^{-1} = (i_k, \dots, i_2, i_1) .$$

L'action par conjugaison d'un élément de S_n sur un cycle est la suivante :

$$\pi(i_1, i_2, \ldots, i_k)\pi^{-1} = (\pi(i_1), \pi(i_2), \ldots, \pi(i_k)) \quad \text{pour tout } \pi \in S_n.$$

Notons en particulier que le cycle $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ est conjugué à son inverse par la permutation qui envoie i_1 à i_k, i_2 à i_{k-1} et ainsi de suite.

Toute permutation peut s'écrire comme produit de cycles à supports disjoints deux à deux. L'inverse d'une permutation est le produit des inverses des cycles qui la composent.

Proposition I.15. *Pour tout $n \geq 1$, le centralisateur $\mathcal{Z}_{\mathbb{C}S_n}(\mathbb{C}S_{n-1})$ de $\mathbb{C}S_{n-1}$ dans $\mathbb{C}S_n$ est commutatif.*

Preuve. Soit π une permutation de S_n. Il est possible (voir ci-dessus) d'écrire π et π^{-1}, avec l'écriture cyclique, de la manière suivante

$$\begin{aligned} \pi \quad &= (a_1, a_2, \ldots, a_i) \ldots (\ldots) \ldots (n, b_1, \ldots, b_j) \\ \pi^{-1} &= (a_i, \ldots, a_2, a_1) \ldots (\ldots) \ldots (n, b_j, \ldots, b_1). \end{aligned}$$

On vérifie aisément avec l'écriture ci-dessus que π^{-1} est conjugué à π, par la permutation qui envoie : $a_1 \mapsto a_i$, $a_2 \mapsto a_{i-1}$, $\ldots$, $n \mapsto n$, $b_1 \mapsto b_j$, $b_2 \mapsto b_{j-1}$ et etc. Ainsi, π et π^{-1} sont conjuguées par un élément de S_{n-1}.

Soit $f = \sum_{\pi \in S_n} f_\pi \cdot \pi$ un élément du centralisateur de $\mathbb{C}S_{n-1}$ dans $\mathbb{C}S_n$, où $f_\pi \in \mathbb{C}$. Pour $\pi_0 \in S_n$ quelconque, il existe $\sigma_{\pi_0} \in S_{n-1}$ telle que $\sigma_{\pi_0}\pi_0\sigma_{\pi_0}^{-1} = \pi_0^{-1}$. De plus, comme f est dans le centralisateur de $\mathbb{C}[S_{n-1}]$, on a

$$\sigma_{\pi_0} f \sigma_{\pi_0}^{-1} = f,$$

d'une part, et d'autre part

$$\sigma_{\pi_0} f \sigma_{\pi_0}^{-1} = \sum_{\pi \neq \pi_0} f_\pi \cdot \sigma_{\pi_0} \pi \sigma_{\pi_0}^{-1} \quad + f_{\pi_0} \cdot \pi_0^{-1}.$$

En identifiant les coefficients devant π_0^{-1} obtenus dans les deux cas, il vient que $f_{\pi_0} = f_{\pi_0^{-1}}$, et ceci pour tout $\pi_0 \in S_n$. Donc, tout élément f du centralisateur de $\mathbb{C}S_{n-1}$ dans $\mathbb{C}S_n$ est une combinaison linéaire d'éléments de la forme $(\pi + \pi^{-1})$ avec $\pi \in S_n$.

Soit S l'antiautomorphisme de $\mathbb{C}S_n$ défini sur les éléments de base par $S(\pi) = \pi^{-1}$ pour tout $\pi \in S_n$, et étendu par linéarité. D'après l'analyse ci-dessus, nous avons que $S(f) = f$ pour tout élément f du centralisateur de $\mathbb{C}S_{n-1}$ dans $\mathbb{C}S_n$.

Donc, pour tout $f, f' \in \mathcal{Z}_{\mathbb{C}S_n}(\mathbb{C}S_{n-1})$, nous avons

$$f \cdot f' = S(f \cdot f') = S(f') \cdot S(f) = f' \cdot f.$$

Ainsi, le centralisateur de $\mathbb{C}S_{n-1}$ dans $\mathbb{C}S_n$ est commutatif. □

I.2 Diagrammes de Bratteli

Dans cette Section, nous rappelons plusieurs faits sur les diagrammes de Bratteli (voir, e.g., [30]) et leurs produits gradués. Nous expliquons les connections avec la théorie des représentations des chaînes d'algèbres. Ensuite, nous rappelons l'information, dont on aura besoin dans les autres chapitres, sur les dimensions des sommets des puissances du graphe de Young.

I.2.1 Définition

Un diagramme de Bratteli est un graphe gradué ; cela signifie qu'il existe une fonction, appelée *degré*, de l'ensemble des sommets à l'ensemble des entiers non-négatifs. Il y a un seul sommet de degré 0 qui est noté $\varnothing$. Les arêtes du graphe ne peuvent connecter que deux sommets voisins ("voisins" signifie que la valeur absolue de la différence de leurs degrés est égale à 1). Quand on dessine un diagramme de Bratteli, il est pratique de placer au niveau a tous les sommets de degré a (le niveau a correspond à la valeur de l'ordonnée $(-a)$). Ensuite, un sommet du niveau a a des arêtes "entrantes" du niveau $a-1$ et des arêtes "sortantes" vers le niveau $a+1$. La dimension du sommet x est le nombre de chemins qui descendent du sommet $\varnothing$ vers x.

En théorie des représentations, on associe un diagramme de Bratteli à une chaîne ascendante

$$\mathcal{A}_0 = \mathbb{C} \subset \mathcal{A}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{A}_n \subset \ldots \tag{I.2.1}$$

d'algèbre associatives : les sommets de degré k correspondent aux représentations (selon les circonstances, indécomposables, irréductibles *etc.*) de l'algèbre $\mathcal{A}_k$, et les arêtes du diagramme de Bratteli retracent les règles de branchement des paires $(\mathcal{A}_{k+1}, \mathcal{A}_k)$, $k \in \mathbb{N}$; plus précisément, il y a $\mu_{\alpha i}$ arêtes entre le sommet correspondant à la représentation U_α de $\mathcal{A}_k$ et le sommet correspondant à la représentation V_i de $\mathcal{A}_{k+1}$, lorsque U_α intervient avec la multiplicité $\mu_{\alpha i}$ dans la décomposition de V_i.

Dans cette situation, la dimension d'un sommet est simplement égale à la dimension de la représentation correspondante.

De la même manière, un diagramme de Bratteli est associé à une chaîne ascendante de groupes

$$G_0 = \{e\} \subset G_1 \subset \cdots \subset G_n \subset \ldots \tag{I.2.2}$$

La simplicité des règles de branchement pour la chaîne d'algèbres (I.2.1) (respectivement, pour la chaîne de groupes (I.2.2)) correspond au fait que, dans le diagramme de Bratteli associé à la chaîne, il n'y a jamais plus d'une arête reliant deux sommets voisins. Cela motive la définition suivante

Définition I.16. *Un diagramme de Bratteli est simple lorsque le nombre d'arêtes entre deux sommets voisins est toujours égal à 0 ou 1.*

Exemples. **(a)** Dans l'Appendice I.2.A, nous rappelons les définitions d'une partition et de son diagramme de Young associé, et nous donnons le début du diagramme de Bratteli pour la chaîne des groupes symétriques. Il correspond au diagramme de Hasse de l'ensemble partiellement ordonné des partitions. En effet, les représentations irréductibles du groupe symétrique S_n sont labellisées par les partitions de taille n, et les règles de branchement retranscrivent la notion d'inclusion d'une partition de taille $n-1$ dans une partition de taille n. La graduation du diagramme de Bratteli est donnée ici par la taille des partitions. Ce diagramme de Bratteli est simple.

(b) Dans l'Appendice I.2.B, nous donnons le début du diagramme de Bratteli pour la chaîne des groupes alternés. Rappelons que le groupe alterné est un sous-groupe d'ordre 2 de S_n, défini comme le noyau de la signature[5]. Nous notons $\overline{\lambda}$ la partition conjuguée à la partition λ (nous rappelons la définition dans l'Appendice I.2.B).

Les sommets du diagramme de Bratteli de la chaîne des groupes alternés sont les suivants. Pour les partitions λ vérifiant $\lambda \neq \overline{\lambda}$, un sommet du graphe correspond à la classe d'équivalence de λ par la conjugaison ; appelons-le le sommet $[\lambda]$. Pour les partitions λ auto-conjuguées, c'est-à-dire vérifiant $\lambda = \overline{\lambda}$, deux sommets du graphe correspondent à λ ; appelons-les $[\lambda]$ et $[\lambda]'$. Il n'y a pas d'autres sommets.

La graduation est donnée par la taille des partitions. En ce qui concerne les arêtes, soient μ une partition de taille n et λ une partition de taille $n+1$, telles que μ soit une sous-partition de λ ou de $\overline{\lambda}$. Il y a 4 cas à considérer :

– Si μ et λ ne sont ni l'une ni l'autre auto-conjuguées, alors une arête relie les sommets $[\mu]$ et $[\lambda]$.
– Si μ est auto-conjuguée et λ ne l'est pas, alors une arête relie les sommets $[\mu]$ et $[\lambda]$, et une arête relie les sommets $[\mu]'$ et $[\lambda]$.
– Si μ n'est pas auto-conjuguée et λ l'est, alors une arête relie les sommets $[\mu]$ et $[\lambda]$, et une arête relie les sommets $[\mu]$ et $[\lambda]'$.
– Si μ et λ sont auto-conjuguées, alors une arête relie les sommets $[\mu]$ et $[\lambda]$, et une arête relie les sommets $[\mu]'$ et $[\lambda]'$.

Il n'y a pas d'autres arêtes.

Remarque. Le procédé permettant d'obtenir le diagramme de Bratteli de la chaîne des groupes alternés à partir du diagramme de Bratteli de la chaîne des groupes symétriques est un exemple d'un procédé général. Considérons un diagramme de Bratteli et une involution sur l'ensemble des sommets de ce diagramme respectant la graduation. Alors, on peut répéter la même construction que dans l'exemple **(b)** ci-dessus, avec l'involution jouant le rôle de la conjugaison des partitions. Cette construction apparait naturellement en théorie des représentations lorsque l'on considère une chaîne de groupes possédant une sous-chaîne de sous-groupes d'indice 2. C'est donc le cas, par exemple, pour les groupes alternés des groupes de Coxeter, dont l'exemple **(b)** ci-dessus est un cas particulier.

I.2.2 Produits de diagrammes de Bratteli

Soient $\mathfrak{G}^{(1)}$ et $\mathfrak{G}^{(2)}$ deux diagrammes de Bratteli. Les sommets du produit $\mathfrak{G}^{(1)} \times \mathfrak{G}^{(2)}$ sont par définition les couples (x, y) où x est un sommet de $\mathfrak{G}^{(1)}$ et y est un sommet de $\mathfrak{G}^{(2)}$. Le degré de (x, y) est la somme du degré de x et du degré de y. Le sommet tout en haut de $\mathfrak{G}^{(1)} \times \mathfrak{G}^{(2)}$, qui est encore noté $\varnothing$, est $(\varnothing, \varnothing)$. Si il existe une arête entre x et x' dans $\mathfrak{G}^{(1)}$, on dessine une arête entre (x, y) et (x', y) pour tout y ; nous dirons que ces arêtes sont de type 1. Si il existe une arête entre y et y' dans $\mathfrak{G}^{(2)}$, on dessine une arête entre (x, y) et (x, y') pour tout x ; nous dirons que ces arêtes sont de type 2. Par définition, ce sont toutes les arêtes : toute arête est soit de type 1, soit de type 2.

En itérant, on définit le produit d'un nombre arbitraire m de diagrammes de Bratteli.

5. La signature est l'unique homomorphisme de S_n vers $\{-1, 1\}$ qui envoie s_i à -1 pour tout $i = 1, \ldots, n-1$, où les éléments s_i sont les générateurs dans la présentation (I.1.6) de S_n.

Dimensions des sommets du produit. Soit $\mathfrak{G}$ un diagramme de Bratteli. Notons $\mathfrak{P}(\mathfrak{G})$ l'ensemble des chemins qui commencent au sommet tout en haut de $\mathfrak{G}$, et qui descendent. Pour $p \in \mathfrak{P}(\mathfrak{G})$, notons $\mathcal{E}(p)$ la collection des arêtes de p, et $\mathrm{end}(p)$ le sommet final de p ; si $z = \mathrm{end}(p)$, alors $\deg(z)$ est égal à la longueur de p, le cardinal de $\mathcal{E}(p)$. L'ensemble $\mathcal{E}(p)$ est naturellement ordonné : les arêtes du chemin se suivent l'une après l'autre.

Soit (x, y) un sommet de $\mathfrak{G}^{(1)} \times \mathfrak{G}^{(2)}$. Soit p un élément de $\mathfrak{P}(\mathfrak{G}^{(1)} \times \mathfrak{G}^{(2)})$ avec $\mathrm{end}(p) = (x, y)$. L'ensemble $\mathcal{E}(p)$ est l'union disjointe de deux sous-ensembles, $\mathcal{E}_1(p)$ et $\mathcal{E}_2(p)$, où $\mathcal{E}_1(p)$ (respectivement, $\mathcal{E}_2(p)$) est le sous-ensemble de $\mathcal{E}(p)$ consistant en les arêtes de type 1 (respectivement, de type 2). Chaque arête de $\mathcal{E}_1(p)$ définit naturellement une arête de $\mathfrak{G}^{(1)}$ et l'ensemble des arêtes ainsi défini forme un chemin p_1 dans le graphe $\mathfrak{G}^{(1)}$, descendant du sommet $\varnothing$ de $\mathfrak{G}^{(1)}$ vers x, $p_1 \in \mathfrak{P}(\mathfrak{G}^{(1)})$; de la même façon, chaque arête dans $\mathcal{E}_2(p)$ définit naturellement une arête dans le graphe $\mathfrak{G}^{(2)}$, et l'ensemble des arêtes ainsi défini forme un chemin p_2 dans le graphe $\mathfrak{G}^{(2)}$, descendant du sommet $\varnothing$ de $\mathfrak{G}^{(2)}$ vers y, $p_2 \in \mathfrak{P}(\mathfrak{G}^{(2)})$. Nous avons ainsi une application de $\mathfrak{P}(\mathfrak{G}^{(1)} \times \mathfrak{G}^{(2)})$ vers le produit $\mathfrak{P}(\mathfrak{G}^{(1)}) \times \mathfrak{P}(\mathfrak{G}^{(2)})$, définie par

$$\pi : p \mapsto (p_1, p_2) \ . \tag{I.2.3}$$

On ne peut pas reconstruire uniquement le chemin p connaissant les chemins p_1 et p_2. Soit a le degré de x et b le degré de y. Tout ordre $\succ$ sur l'union $\mathcal{E}(p_1) \cup \mathcal{E}(p_2)$ qui est compatible avec les ordres naturels sur $\mathcal{E}_1(p)$ et $\mathcal{E}_2(p)$ (dans le sens que si une étape γ est après une étape γ' dans $\mathcal{E}_1(p)$ ou $\mathcal{E}_2(p)$, alors γ est après γ' par rapport à l'ordre $\succ$) détermine un chemin de $\mathfrak{P}(\mathfrak{G}^{(1)} \times \mathfrak{G}^{(2)})$ En d'autres mots, dans la séquence de $a + b$ arêtes d'un chemin de longueur $a + b$ de $\mathfrak{P}(\mathfrak{G}^{(1)} \times \mathfrak{G}^{(2)})$, on peut assigner le type 1 à un sous-ensemble arbitrairement choisi de a arêtes, et donc le cardinal de la préimage de l'élément (p_1, p_2) par rapport à l'application π, donnée par (I.2.3), est $\begin{pmatrix} a+b \\ b \end{pmatrix}$; ce cardinal dépend seulement des sommets finaux x et y des chemins p_1 et p_2, donc nous avons

$$\dim\big((x, y)\big) = \begin{pmatrix} a+b \\ b \end{pmatrix} \dim(x) \dim(y) \ . \tag{I.2.4}$$

Pour un diagramme de Bratteli $\mathfrak{G}$, définissons $D(\mathfrak{G})_a$ par

$$D(\mathfrak{G})_a := \sum_{x \,:\, \deg(x)=a} \big(\dim(x)\big)^2 \ . \tag{I.2.5}$$

Quand le diagramme de Bratteli est associé à une chaîne ascendante d'algèbres associatives semi-simples de dimension finie, comme (I.2.1), et les sommets correspondent aux représentations irréductibles, le nombre $D(\mathfrak{G})_a$ est la dimension de l'algèbre $\mathcal{A}_a$.

Par (I.2.4), nous avons pour le produit

$$\begin{aligned} D(\mathfrak{G}^{(1)} \times \mathfrak{G}^{(2)})_c &= \sum_{\substack{a,b\,:\,a+b=c \\ x\,:\,deg(x)=a \\ y\,:\,deg(y)=b}} \dim\big((x,y)\big)^2 = \sum_{\substack{a,b\,:\,a+b=c \\ x\,:\,deg(x)=a \\ y\,:\,deg(y)=b}} \begin{pmatrix} a+b \\ b \end{pmatrix}^2 \big(\dim(x)\big)^2 \big(\dim(y)\big)^2 \\ &= \sum_{a=0}^{c} \begin{pmatrix} c \\ a \end{pmatrix}^2 D(\mathfrak{G}^{(1)})_a \ \ D(\mathfrak{G}^{(2)})_{c-a} \ . \end{aligned} \tag{I.2.6}$$

I.2.3 Puissances du graphe de Young

Comme nous le verrons dans le Chapitre suivant, Section II.3 (respectivement, la Section II.6), les sommets du diagramme de Bratteli de la chaîne (par rapport à n) des algèbres $H(m,1,n)$ (respectivement, des groupes $G(m,1,n)$) correspondent naturellement aux m-partitions (voir Chapitre suivant pour la définition des m-partitions, m-tableaux, etc) ; le niveau a consiste en toutes les m-partitions de taille a ; les arêtes sortantes du niveau a correspondent à l'inclusion des m-partitions de taille a dans les m-partitions de taille $a+1$. Ainsi, le diagramme de Bratteli pour $H(m,1,n)$ (ou $G(m,1,n)$) est la m-ème puissance du graphe de Young.

1. Dimensions. Nous aurons besoin de connaître les dimensions des sommets des puissances du graphe de Young. Nous rappelons la définition de la *longueur de crochet*, et la formule pour les dimensions des sommets du graphe de Young. Pour une case α d'un diagramme de Young, le crochet de α est un ensemble de cases, qui contient α et les cases qui sont placées soit au-dessous de α dans la même colonne, soit à la droite de α dans la même ligne. La longueur h_α du crochet de α est le nombre de cases dans le crochet de α. La dimension d'une représentation (d'un groupe symétrique) correspondant à une partition λ de n est donnée par la formule des crochets,

$$\dim(V_\lambda) = \frac{n!}{\prod\limits_{\alpha\in\lambda} h_\alpha} \ , \tag{I.2.7}$$

où le produit $\prod\limits_{\alpha\in\lambda} h_\alpha$ signifie le produit de la longueur de crochet de toutes les cases α du diagramme de Young de forme λ.

Considérons une m-partition $\lambda^{(m)} := (\lambda_1,\dots,\lambda_m)$ telle que $|\lambda^{(m)}| = n$ (nous rappelons que $|\lambda^{(m)}| = |\lambda_1| + \cdots + |\lambda_m|$). Anticipons le Chapitre suivant, et notons $V_{\lambda^{(m)}}$ la représentation irréductible de $H(m,1,n)$ associée à $\lambda^{(m)}$. Par la généralisation de (I.2.4) au produit de m diagrammes de Bratteli, la dimension de $V_{\lambda^{(m)}}$ est

$$\dim(V_{\lambda^{(m)}}) = \frac{n!}{|\lambda_1|!\dots|\lambda_m|!}\,\frac{|\lambda_1|!}{\prod\limits_{\alpha\in\lambda_1} h_\alpha}\cdots\frac{|\lambda_m|!}{\prod\limits_{\alpha\in\lambda_m} h_\alpha} = \frac{n!}{\prod\limits_{i=1}^{m}\prod\limits_{\alpha\in\lambda_i} h_\alpha} \ , \tag{I.2.8}$$

Lemme I.17. *Nous avons*

$$\sum_{\lambda^{(m)}} (\dim(V_{\lambda^{(m)}}))^2 = n!m^n \ , \tag{I.2.9}$$

où la somme porte sur toutes les m-partitions $\lambda^{(m)} = (\lambda_1,\dots,\lambda_m)$ telles que $|\lambda^{(m)}| = n$.

Preuve. Pour $m=1$, nous savons que les représentations V_λ où λ est une partition de n sont toutes les représentations irréductibles du groupe symétrique S_n, et donc :

$$\sum_\lambda (\dim(V_\lambda))^2 = \sum_\lambda \left(\frac{n!}{\prod\limits_{\alpha\in\lambda} h_\alpha}\right)^2 = n! \ . \tag{I.2.10}$$

La preuve de (I.2.9) est par récurrence sur m. Nous avons :

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda^{(m)}:|\lambda^{(m)}|=n}(\dim(V_{\lambda^{(m)}}))^2 &= \sum_{j=0}^{n}\left(\tfrac{n!}{(n-j)!j!}\right)^2 \sum_{\lambda^{(1)}:|\lambda^{(1)}|=j}\left(\dim(V_{\lambda^{(1)}})\right)^2 \sum_{\lambda^{(m-1)}:|\lambda^{(m-1)}|=n-j}\left(\dim(V_{\lambda^{(m-1)}})\right)^2\\
&= \sum_{j=0}^{n}\left(\left(\tfrac{n!}{(n-j)!j!}\right)^2\cdot j!\cdot(n-j)!\cdot(m-1)^{n-j}\right)\\
&= n!\cdot\sum_{j=0}^{n}\tfrac{n!}{(n-j)!j!}(m-1)^{n-j} = n!\,m^n\ ;\end{aligned}$$

ici $\lambda^{(1)}$ est une partition usuelle et $\lambda^{(m-1)}$ est une $(m-1)$-partition. Dans la première égalité, nous avons utilisé (I.2.6) ; dans la seconde égalité, nous avons utilisé (I.2.10) et l'hypothèse de récurrence ; nous avons simplifié le résultat dans la troisième égalité, et utilisé le théorème binomial dans la quatrième. □

Remarque. La m-ème puissance du graphe de Young est un *poset* m-différentiel (la terminologie poset vient de "partially ordered set", et signifie donc un ensemble partiellement ordonné) ; la formule (I.2.9) est vérifiée pour un poset m-différentiel quelconque (voir [98] pour les définitions et les détails).

2. m-tableaux standards et dimensions. Il est bien connu que la dimension d'une représentation du groupe symétrique correspondant à une certaine partition λ est égale à la dimension du sommet correspondant du graphe de Young, et est égale au nombre de tableaux standards de forme λ. Il est immédiat de généraliser ces égalités au cas cyclotomiques : la dimension d'une représentation du groupe $G(m,1,n)$ correspondant à un certain m-diagramme de Young $\lambda^{(m)}$ est égale à la dimension du sommet correspondant dans la m-ème puissance du graphe de Young, et est égale au nombre de m-tableaux standards de forme $\lambda^{(m)}$.

Avec l'aide du Lemme I.17, nous vérifions d'ores et déjà que la somme des carrés des dimensions des représentations qui seront construites dans la Sous-Section II.4.3 (respectivement, dans la Sous-Section II.6.5) est égale à la dimension de $H(m,1,n)$ (respectivement, au cardinal du groupe $G(m,1,n)$) :

$$\sum_{\lambda^{(m)}}(\dim(V_{\lambda^{(m)}}))^2 = \dim(H(m,1,n)) = |G(m,1,n)|\ . \tag{I.2.11}$$

Appendice I.2.A Diagramme de Bratteli pour la chaîne des groupe symétriques

Rappelons qu'une partition est un multiplet : $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_k)$, avec $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ des entiers strictement positifs tels que $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_k$. La taille d'une partition λ est notée $|\lambda|$, et est par définition $|\lambda| := \lambda_1 + \cdots + \lambda_k$.

Nous représentons une partition par son diagramme de Young (appelé aussi diagramme de Ferrers) : Le diagramme de Young associé à une partition $(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_k)$ est un ensemble de cases constitué de k lignes, telles que la i-ème ligne contienne λ_i cases ; par convention, les lignes sont numérotées de haut en bas, et sont alignées sur la gauche (ci-dessous, et dans l'Appendice suivant, nous avons placé des points à la place des cases). Nous dirons que le diagramme de Young associé à une partition λ est *de forme* λ.

Par exemple, les 5 sommets du 5-ème étage du diagramme de Bratteli ci-dessous correspondent, de gauche à droite, aux 5 partitions de taille 4 suivantes :

$$(4)\,,\quad (3,1)\,,\quad (2,2)\,,\quad (2,1,1)\ \text{ et }\ (1,1,1,1)\ .$$

Nous avons tracé ci-dessous le début du diagramme de Bratteli de la chaîne des groupes symétriques (les 8 premiers niveaux), voir exemple **(a)** de la Section I.2. Nous indiquons à côté de chaque sommet sa dimension.

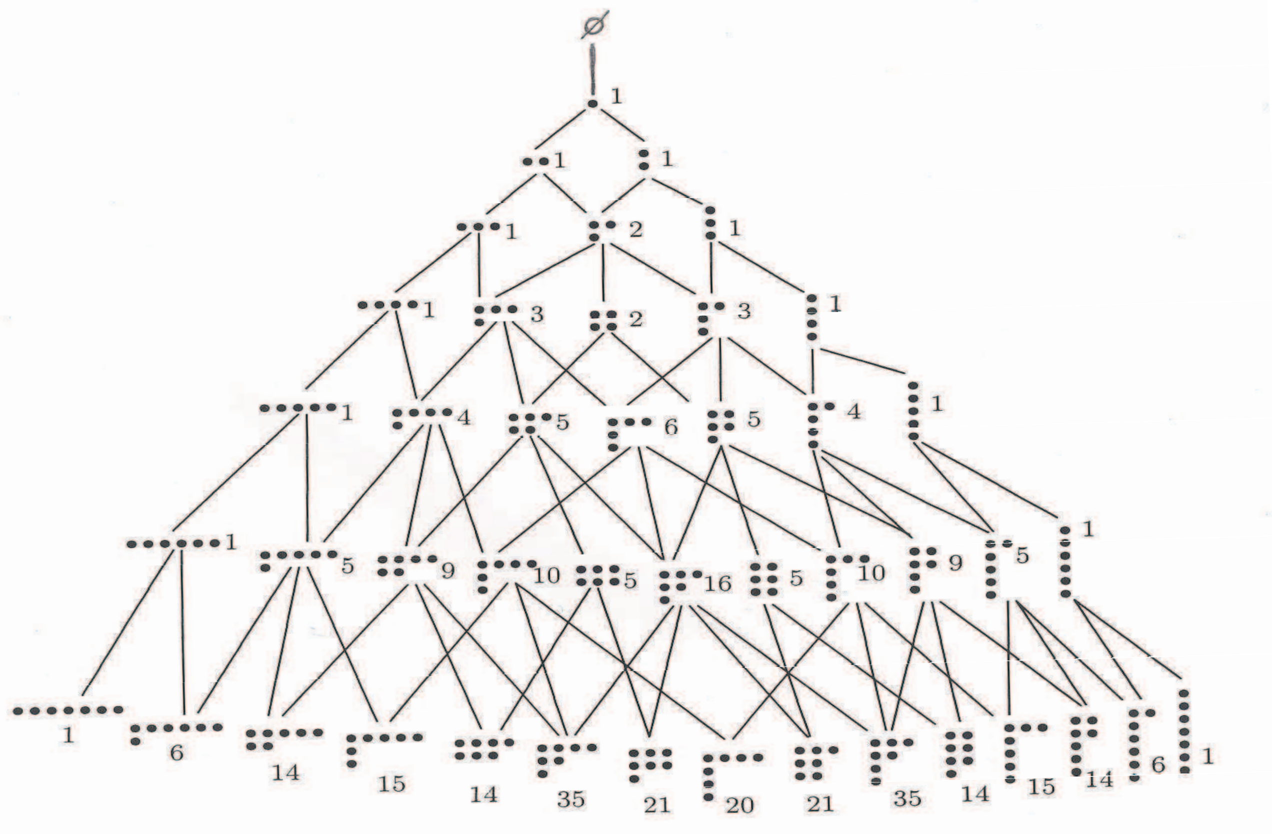
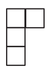
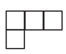
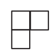


Fig. I.1. *Diagramme de Bratteli (huit premiers niveaux) pour la chaîne des groupes symétriques.*

Appendice I.2.B Diagramme de Bratteli pour la chaîne des groupes alternés

Rappelons la notion de partitions conjuguées : la conjugaison d'une partition λ correspond à la réflexion de son diagramme de Young par rapport à la diagonale partant du coin en haut à gauche. Par exemple,  et  sont deux partitions conjuguées l'une à l'autre ; la partition  est auto-conjuguée.

Dans le cas d'une partition auto-conjuguée, deux sommets du graphe correspondent à cette partition ; ci-dessous, le premier sommet est noté par le diagramme de Young de la partition, et le deuxième par le diagramme de Young avec un $'$.

Nous traçons les diagrammes de Young de la même façon que dans l'Appendice précédent. Nous avons tracé ci-dessous le début du diagramme de Bratteli de la chaîne des groupes alternés (les 9 premiers niveaux), voir l'exemple **(b)** de la Section I.2. Nous indiquons à côté de chaque sommet sa dimension.

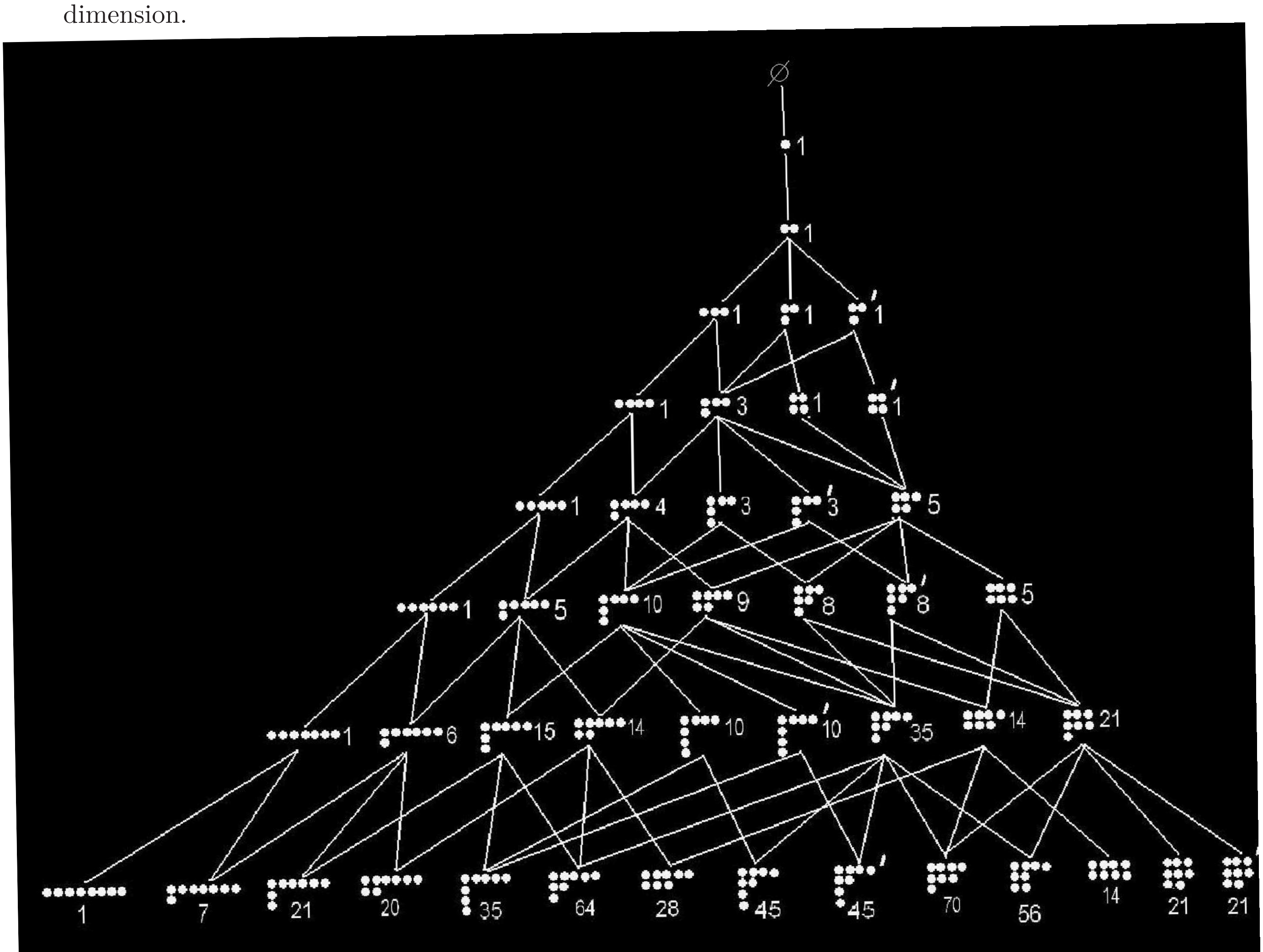


Fig. I.2. *Diagramme de Bratteli (neuf premiers niveaux) pour la chaîne des groupes alternés.*

Appendice I.2.C Carré du graphe de Young

Ci-dessous, le début du diagramme de Bratteli pour la chaîne d'algèbres $H(2, 1, n)$, le carré du graphe de Young, est dessiné.

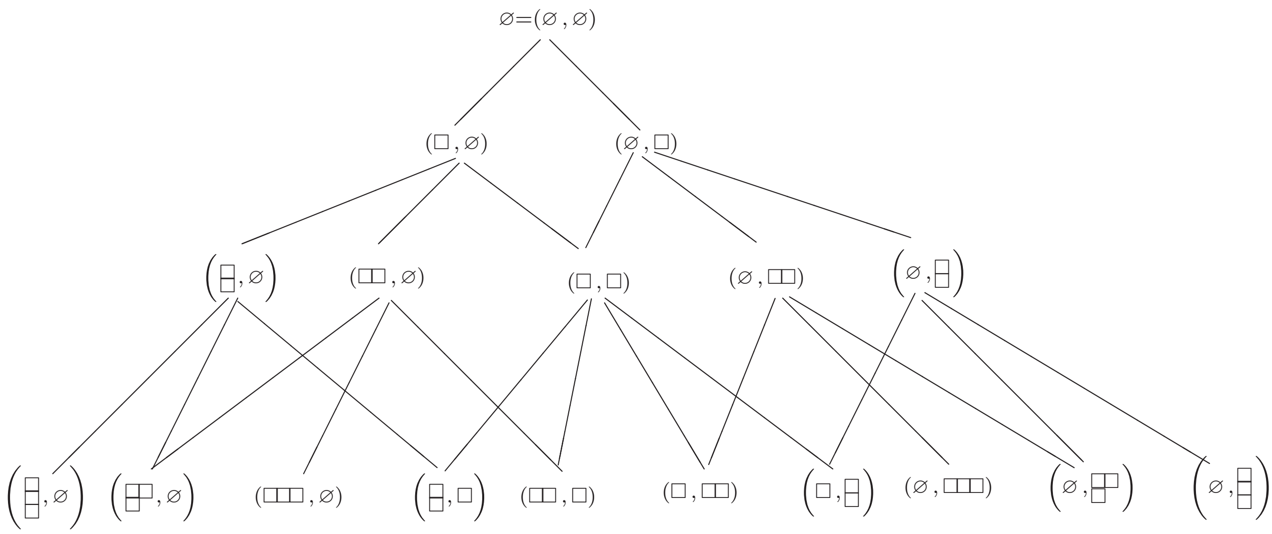


Fig. I.3. *Diagramme de Bratteli (quatre premiers niveaux) pour* $H(m, 1, n)$ *avec* $m = 2$.

I.3 Algorithme de Coxeter–Todd

Nous présentons dans cette Section l'algorithme de Coxeter–Todd. Cette algorithme s'applique à une paire constituée d'un groupe, muni d'une présentation par générateurs et relations, et d'un sous-groupe engendré par un sous-ensemble des générateurs. Nous expliquons son utilisation dans le cadre d'une chaîne de groupes, et traitons en détail l'exemple de la chaîne des groupes symétriques. Nous utiliserons l'algorithme de Coxeter–Todd dans les Chapitres III et IV.

I.3.1 Principe de l'algorithme

Soit G un groupe fini avec une présentation donnée par des générateurs $g_1, \dots, g_m$ et un ensemble de relations définissantes $\mathcal{R}$. Soit I un sous-ensemble de $\{1, \dots, m\}$ et H le sous-groupe de G engendré par g_a, $a \in I$. L'algorithme de Coxeter–Todd pour la paire (G, H) construit l'ensemble des classes à gauche de H dans G, et l'action des générateurs sur cet ensemble [22]. Le résultat de l'algorithme de Coxeter–Todd est une figure dont les sommets sont labellisés par les classes à gauche, et des flèches représentent l'action des générateurs.

Rappelons que les classes à gauche de H dans G sont les classes d'équivalence par la relation d'équivalence suivante :

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad \text{il existe } h \in H \text{ tel que } x = yh.$$

La classe d'un élément $x \in G$ est notée xH, et nous avons, soit $xH = yH$ ($\Leftrightarrow x \sim y$), soit $xH \cap yH = \varnothing$.

L'ensemble des classes à gauche de H dans G est noté G/H ; le groupe G agit sur cet ensemble par multiplication à gauche : pour tout $x, y \in G$, l'élément x envoie la classe yH à la classe xyH. La classe notée H est la classe de l'élément neutre (elle est consituée par les éléments de H).

L'algorithme commence en plaçant la classe H ; seulement les générateurs g_a, $a \notin I$, peuvent agir non-trivialement sur cette classe et produire de nouveaux sommets. La première étape consiste donc à placer les classes $g_a H$, $a \notin I$, avec une flèche labellisée par g_a de H vers $g_a H$. Ensuite, nous analysons, en utilisant les relations de $\mathcal{R}$, l'action des générateurs sur les sommets, et dessinons de nouveaux sommets, ou identifions deux sommets existants. Plus précisément, à chaque sommet déjà existant, nous appliquons, pour chaque relation, la partie gauche de la relation, puis la partie droite, et identifions le résultat. Au cours de ce procédé, il peut être nécessaire de placer de nouveaux sommets. Ces nouveaux sommets devront ensuite aussi être étudiés de la même façon. L'algorithme est terminé lorsque nous connaissons l'action de chaque générateur sur chaque sommet.

L'algorithme de Coxeter–Todd pour (G, H) liste les classes à gauche de H dans G, et fournit ainsi une forme normale pour les éléments de G par rapport à H. L'algorithme implique une borne supérieure pour le cardinal de G. A savoir, soit $\tilde{H}$ le groupe abstrait avec des générateurs $\tilde{g}_a$, $a \in I$; les relations définissantes de $\tilde{H}$ reproduisent les relations de $\mathcal{R}$ qui concernent seulement les générateurs g_a, $a \in I$. En raison du morphisme surjectif naturel de $\tilde{H}$ vers H, $\tilde{g}_a \mapsto g_a$, $a \notin I$, le cardinal de G est inférieur ou égal au nombre de sommets de la figure, multiplié par le cardinal de $\tilde{H}$.

Pour une chaîne
$$\{e\} = G_0 \subset G_1 \subset \cdots \subset G_n \subset \ldots$$
de groupes, à partir du résultat de l'algorithme de Coxeter–Todd pour chaque paire (G_k, G_{k-1}), on peut construire récursivement une forme normale globale pour les éléments de tout G_n, en utilisant la forme normale de G_k par rapport à G_{k-1}, $k = 1, 2, \ldots, n$.

I.3.2 Exemple pour la chaine des groupes symétriques

Considérons la chaîne des groupes symétriques
$$\{e\} = S_0 \subset S_1 \subset \cdots \subset S_n \subset \ldots$$
Rappelons, (I.1.6), que le groupe S_n (que nous noterons souvent aussi A_{n-1}, car il est isomorphe au groupe de Coxeter de type A et de rang $n-1$) est engendré par des éléments $s_1, \ldots, s_{n-1}$ avec les relations définissantes
$$\begin{aligned} &s_i^2 = 1 && \text{pour } i = 1, \ldots, n-1, \\ &s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1} && \text{pour } i = 1, \ldots, n-2, \\ &s_i s_j = s_j s_i && \text{pour } i, j = 1, \ldots, n-1 \text{ tels que } |i-j| > 1. \end{aligned} \tag{I.3.1}$$
Nous allons utiliser l'algorithme de Coxeter–Todd pour montrer que la présentation ci-dessus est bien une présentation du groupe symétrique S_n, pour montrer que le sous-groupe engendré par $s_1, \ldots, s_{n-2}$ est isomorphe à S_{n-1}, et enfin pour construire une forme normale globale pour les éléments de S_n.

Nous raisonnons par récurrence. Il n'y a rien à prouver pour la base, $n = 1$, de la récurrence. Notons H_n le groupe engendré par les éléments $s_1, \ldots, s_{n-1}$ vérifiant les relations (I.3.1). Notons H le sous-groupe de H_n engendré par $s_1, \ldots, s_{n-2}$. Nous allons réaliser l'algorithme de Coxeter–Todd pour la paire (H_n, H). Dans la figure suivante, on a remplacé les paires de flèches ayant une orientation opposée (qui apparaissent car on considère des générateurs d'ordre 2) par des segments non-orientés.

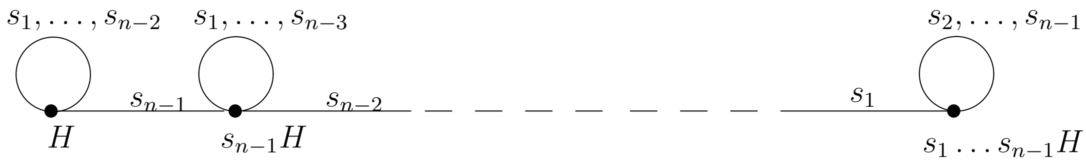


Fig. I.4. *Figure de Coxeter–Todd pour la paire* (H_n, H).

La première classe est H. Le seul générateur de H_n qui ne laisse pas H invariante est s_{n-1}, on place donc une nouvelle classe $s_{n-1}H$ (cf figure I.4). Ensuite, $s_1, \ldots, s_{n-3}$ commutent avec s_{n-1} et laissent la classe H invariante, donc ils laissent la classe $s_{n-1}H$ invariante également. Il y a ainsi une seule nouvelle classe qui est $s_{n-2}s_{n-1}H$. De même, les générateurs $s_1, \ldots, s_{n-4}$ laissent invariante cette classe, et de plus :

$$\begin{aligned} s_{n-1} \cdot s_{n-2}s_{n-1}H &= s_{n-2}s_{n-1}s_{n-2}H \\ &= s_{n-2}s_{n-1}H \end{aligned} .$$

On place donc une seule nouvelle classe, $s_{n-3}s_{n-2}s_{n-1}H$. Plus généralement, nous avons :

$$s_i \cdot s_k s_{k+1} \ldots s_{n-1}H = s_k s_{k+1} \ldots s_{n-1}H \qquad \text{pour } i < k-1,$$

et, pour $i \in \{k+1, \ldots, n-1\}$,

$$\begin{aligned} s_i \cdot s_k s_{k+1} \ldots s_{n-1}H &= s_k \ldots s_i s_{i-1} s_i \ldots s_{n-1}H \\ &= s_k \ldots s_{i-1} s_i s_{i-1} \ldots s_{n-1}H \\ &= s_k \ldots s_{i-1} s_i \ldots s_{n-1} s_{i-1}H \quad \text{car } s_{i-1} \text{ commute avec } s_{i+1}, \ldots, s_{n-1} \\ &= s_k \ldots s_{i-1} s_i \ldots s_{n-1}H \\ &= s_k \ldots s_{n-1}H \ . \end{aligned}$$

Donc, pour la classe $s_k s_{k+1} \ldots s_{n-1}H$, les seuls générateurs qui ne la laissent pas stable sont s_k, qui l'envoie à $s_{k+1} \ldots s_{n-1}H$, et s_{k-1} qui crée une nouvelle classe. Ainsi, on arrive jusqu'à la classe $s_1 s_2 \ldots s_{n-1}H$ et l'algorithme est terminé.

La borne supérieure pour le cardinal du groupe H_n ainsi obtenu est, en utilisant l'hypothèse de récurrence, $n \cdot |S_{n-1}| = n!$.

L'inégalité inverse provient du morphisme surjectif de H_n dans S_n suivant :

$$s_i \mapsto (i,\, i+1) \quad \text{pour } i = 1, \ldots, n-1,$$

où $(i,\, i+1)$ est la transposition qui échange i et $i+1$. Les groupes H_n et S_n ont donc le même cardinal, et ainsi le morphisme ci-dessus est un isomorphisme. De plus, le cardinal du groupe engendré par $s_1, \ldots, s_{n-2}$ est égal à $(n-1)!$, le cardinal de S_{n-1}, et donc on obtient que ce sous-groupe est isomorphe à S_{n-1}.

L'algorithme fournit une forme normale globale pour les éléments de S_n. Soient

$$R_k := \{1, s_{k-1}, s_{k-2}s_{k-1}, \ldots, s_1 s_2 \ldots s_{k-1}\} \quad \text{pour } k = 1, 2, \ldots, n \ (R_1 := \{1\}).$$

Tout élément de S_n appartient à l'une des classes de la figure I.4, et donc peut s'écrire de manière unique comme $u_n h$ où $u_n \in R_n$ et $h \in S_{n-1}$. Ainsi, par récurrence, on obtient :

Proposition I.18 *Soit $x \in S_n$. L'élément x s'écrit de façon unique comme $x = u_n u_{n-1} \cdot \ldots \cdot u_1$ où $u_k \in R_k$ pour tout $k = 1, \ldots, n$.*

Corollaire I.19 *La chaîne des groupes symétriques, munie de la présentation (I.3.1), est stationnaire.*

Preuve. Soient $p, q \in \mathbb{N}$. Le sous-groupe de S_{p+q+1} engendré par les éléments $s_{1+q}, \ldots, s_{p+q}$ est isomorphe à S_{p+1}. En effet, il suffit de compter le nombre d'éléments de S_{p+q+1} qui s'écrivent, selon la forme normale donnée par la Proposition I.18, seulement en termes de $s_{1+q}, \ldots, s_{p+q}$. On trouve qu'il y en a $p!$, ce qui est égal au cardinal de S_{p+1}. Ainsi, le morphisme surjectif qui envoie $s_1 \mapsto s_{1+q}$, ..., $s_p \mapsto s_{p+q}$ est l'isomorphisme requis. □

Remarque. Le résultat de l'algorithme de Coxeter–Todd pour la paire (S_k, S_{k-1}) est, pour tout k, similaire à la Fig. I.4 (seul le nombre de segments dans la Fig. I.4 change). C'est la propriété de stationnarité de la chaîne des groupes symétriques munie de la présentation (I.3.1) qui est responsable de ce phénomène. De façon générale, la stationnarité (ou la stationnarité retardée) d'une chaîne de groupes est très utile pour l'obtention d'une forme normale globale avec l'algorithme de Coxeter–Todd (voir les Chapitres III et IV pour d'autres exemples).