L’analyse *a priori* du scénario

Dans ce chapitre, nous expliquons plus en détails l’ordre dans lequel les contenus mathématiques émergent dans la séquence ainsi que la gestion prévue en classe. Nous précisons également quelles sont les activités attendues des élèves pour les différentes tâches proposées dans notre séquence. Nous ajoutons au fur et à mesure de notre description du scénario les aspects qui différencient notre séquence à la fois des scénarios potentiels étudiés dans les manuels scolaires (chapitre VII) et des scénarios étudiés dans notre étude de terrain (chapitre VIII).

1 Méthodologie

Notre scénario se découpe en deux phases : l’activité d’introduction dans laquelle toutes les notions théoriques sur les équations des droites et des plans dans l’espace émergent et les exercices. Pour chacune de ces phases d’enseignement, nous proposons une description plus détaillée de notre scénario. Celle-ci suivra la chronologie indiquée dans le chapitre X. Il s’agit de préciser comment nous avons intégré les choix effectués au sein du scénario et pourquoi celui-ci développe la conceptualisation visée (cf. chapitre IX).

Étant donné que notre questionnement s’insère dans le cadre de la Théorie de l’Activité, dont nous avons présenté les fondements au chapitre VI, nous analysons chaque tâche proposée en termes d’activités attendues des élèves afin de caractériser les apprentissages visés pour le chapitre de géométrie analytique dans l’espace.

Nous nous limitons dans ce chapitre aux tâches sélectionnées dans notre scénario. Nous ne présentons donc pas l’analyse *a priori* de toutes les tâches se trouvant dans notre séquence d’enseignement. De plus, nous pouvons regrouper certaines tâches envisagées en fonction des activités qu’elles peuvent potentiellement engendrer chez les élèves. De ce fait, nous choisissons de ne pas présenter toutes les analyses au sein de ce chapitre. Le lecteur désireux d’en voir davantage peut se rendre à l’annexe F. Les solutions possibles pour les tâches de l’activité d’introduction et des exercices sélectionnés sont données dans l’annexe G.

2 L'activité d'introduction

La première partie de notre séquence consiste à faire émerger presque toutes les notions théoriques préconisées par le programme scolaire à partir de l'activité d'introduction. Comme nous l'avons expliqué dans le chapitre IX, notre objectif est de favoriser chez les élèves l'intégration des nouvelles connaissances à celles qu'ils ont déjà. C'est pourquoi cette activité d'introduction met en jeu des connaissances de géométries synthétique, vectorielle et analytique plane. De ce fait, certaines extensions des notions du plan à l'espace peuvent apparaître. Nous voulons fournir aux élèves un moyen de contrôle pour éviter que ces extensions n'amènent des conceptions erronées. Le levier choisi est l'interprétation géométrique des objets. Or, celle-ci ne semble pas actuellement développée dans l'enseignement secondaire. C'est pourquoi nous proposons de l'introduire à partir d'objets déjà étudiés par les élèves. L'objectif de la première tâche introductive est donc d'amener un travail sur les deux aspects (la reconnaissance et la description) de l'interprétation géométrique des droites dans le plan. Nous pouvons ensuite nous appuyer sur ce travail pour faire émerger les notions de droites et de plans dans l'espace.

Nous rappelons les énoncés de chacune des tâches introductives et nous présentons ensuite leur analyse *a priori*.

Tâche d'introduction 1

Recherchez graphiquement l'ensemble des solutions des systèmes suivants dans $\mathbb{R}^2$.

$$(S_1)\begin{cases} x+5=2x+3 \\ 4y+4=0 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} 2x+3y=2 \\ 4y+4=0 \end{cases}$$

$$(S_3)\begin{cases} 2y+5x=1 \\ 3x=1-3y \end{cases} \qquad (S_4)\begin{cases} 2x+3y=6 \\ 4x+6y=8 \end{cases}$$

Analyse a priori

La question est fermée. La méthode est imposée puisqu'il est demandé de résoudre graphiquement les systèmes donnés. Il s'agit d'associer à chaque équation la droite du plan décrite, de représenter ces droites dans un repère orthonormé et de chercher l'intersection des deux droites, si elle existe. L'objectif de cet exercice est de travailler les deux aspects de l'interprétation géométrique des objets à partir des connaissances anciennes des élèves sur les droites dans le plan.

Domaine de travail

Cadre de la géométrie analytique.

Registres d'écriture

Registre algébrique, registre graphique, registre ensembliste, registre de la langue naturelle.

Points de vue

Point de vue paramétrique, point de vue cartésien.

Connaissances mises en jeu

- □ Connaissances anciennes : droites dans le plan, repère orthonormé du plan.
- □ Connaissances nouvelles : ensembles.

Adaptations à réaliser

L'énoncé est donné dans la langue naturelle. Les équations sont toutes données dans le point de vue cartésien. Pour chaque système, l'*organisation du raisonnement* se découpe en plusieurs étapes. Il s'agit, tout d'abord, de reconnaître l'objet géométrique associé à chaque équation du système. Pour ce faire, l'objet géométrique est décrit comme un ensemble de points satisfaisant tous cette équation (*conversion de registres*). Quelques points de l'ensemble sont donnés (*mise en jeu de connaissances nouvelles*). Les points sont ensuite placés dans un repère orthonormé et les deux droites sont tracées (*mise en jeu de connaissances anciennes*, *conversion de registres*). Finalement, il reste à déterminer sur le dessin, s'il existe, le point d'intersection des deux droites (*mise en jeu de connaissances anciennes*). L'ensemble des solutions du système est ainsi déterminé (*conversion de registres*). Les deux aspects de l'interprétation géométrique sont alors exploités afin d'associer les droites aux équations et aux ensembles les décrivant (*mise en jeu de connaissances nouvelles*).

Il est prévu que les élèves prennent connaissance de cette première tâche introductive en toute autonomie. Puisque notre étude des programmes (cf. chapitre IV) a mis en évidence que la résolution graphique n'est que peu exploitée dans l'enseignement secondaire, une discussion collective s'engage avec l'enseignant sur ce qu'est ou non une équation, ce que signifie résoudre algébriquement et graphiquement un système d'équations et ce que signifie décrire un objet géométrique par une équation. Nous faisons le pari que cette étape est cruciale pour amener les élèves à bien distinguer « résoudre une équation » et « décrire par une équation ». Ces étapes sont généralement absentes des manuels scolaires et des cours étudiés. L'interprétation géométrique des objets dans le plan est alors introduite pour résoudre ces tâches.

Pour chaque système, il est prévu que les élèves travaillent individuellement ou entre pairs. L'enseignant intervient le moins possible lors de ces phases de recherche. Une correction collective suit chacune de ces phases. Lors de cette correction, l'enseignant en profite pour rappeler des notions importantes de géométrie analytique telles que les vecteurs directeurs et normaux et les positions relatives de deux droites. Nous avons montré dans la partie 1 que la distinction entre les vecteurs directeurs et normaux n'est pas facile pour les étudiants. Il nous semble donc important de nous assurer que les élèves distinguent ces deux notions puisqu'elles sont exploitées dans toute notre séquence. Il est également prévu que l'enseignant généralise le travail effectué sur les ensembles de points pour aborder la définition ensembliste d'une droite dans le plan. Nous faisons le pari que cela permet de donner du sens à la forme générale des équations cartésiennes de droites dans le plan.

Les activités attendues de la part des élèves sur cette première tâche introductive consistent à effectuer plusieurs conversions entre les registres algébrique, ensembliste et graphique afin de développer les deux aspects de l'interprétation géométrique dans le plan. Il est important de se rendre compte que les élèves ne sont pas habitués à devoir reconnaître les objets à partir des équations et à décrire les objets par des ensembles de points. Il ne s'agit donc plus pour les élèves de résoudre algébriquement des systèmes mais bien de mettre en place un questionnement sur les objets décrits ou à décrire. La nature du travail attendu des élèves est très différente de ce qu'ils ont déjà dû effectuer en géométrie analytique. Nous faisons l'hypothèse que ce questionnement peut être plus facilement mis en place chez les élèves grâce au discours de l'enseignant lors des corrections collectives. En particulier, de nombreuses occasions de proximités principalement horizontales avec les connaissances que les élèves ont déjà peuvent être tentées par l'enseignant en classe. En effet, des rapprochements entre ce que les élèves connaissent des droites dans le plan et le travail proposé ici peuvent, selon nous, favoriser l'intégration de l'interprétation géométrique des objets dans l'arsenal dont ils disposent.

La deuxième tâche introductive est ensuite proposée aux élèves.

Tâche d'introduction 2

En vous inspirant de ce qui a été fait au point 1, trouvez l'ensemble des solutions des systèmes suivants dans $\mathbb{R}^3$.

$$(S_1)\begin{cases} x+5=2x+3 \\ 4z-3=2z+1 \\ y=0 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} x+5=2x+3 \\ 4y+4=0 \end{cases}$$

$$(S_3)\begin{cases} x=y \\ y=z \end{cases} \qquad (S_4)\begin{cases} x=\dfrac{y}{2}=z-2 \\ z=2 \end{cases}$$

$$(S_5)\begin{cases} \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-5}{2}=\dfrac{z+2}{4} \\ 2x+3y+4z=5 \end{cases} \qquad (S_6)\begin{cases} 2x+3y+4z=5 \\ 6x+9y+12z=8 \end{cases}$$

Analyse a priori

La question est fermée. Un travail similaire à celui effectué dans la première tâche introductive est à réaliser. La méthode est donc imposée. Les deux aspects de l’interprétation géométrique sont ici aussi abordés. Il s’agit de reconnaître l’objet géométrique associé à ces équations. Pour ce faire, un travail sur les ensembles de points vérifiant ces équations est amené. L’objectif de cette tâche est d’introduire les équations de droites et de plans dans l’espace ainsi que leurs positions relatives à partir d’un questionnement sur les objets géométriques décrits.

Domaines de travail

Cadre de la géométrie analytique, cadre de la géométrie synthétique, cadre de la géométrie vectorielle.

Registres d’écriture

Registre algébrique, registre graphique, registre ensembliste, registre de la langue naturelle.

Points de vue

Point de vue paramétrique, point de vue cartésien.

Connaissances mises en jeu

- □ Connaissances anciennes : caractérisation d’une droite, caractérisation d’un plan, repère orthonormé de l’espace, vecteurs colinéaires, vecteurs coplanaires, opérations sur les vecteurs, résolution de systèmes, calcul de déterminants.
- □ Connaissances nouvelles : équations vectorielles, paramétriques et cartésiennes de droites dans l’espace, équations vectorielles, paramétriques et cartésiennes de plans, positions relatives des objets entre eux.

Adaptations à réaliser

L’énoncé est donné en langue naturelle. Toutes les équations sont données dans le point de vue cartésien. L’*organisation du raisonnement* se découpe en plusieurs étapes. Pour chaque système, il s’agit de reconnaître l’objet géométrique associé à chaque équation du système. Pour ce faire, l’objet géométrique est décrit comme un ensemble de points satisfaisant tous cette équation (*conversion de registres*). Quelques points de l’ensemble sont donnés (*mise en jeu de connaissances nouvelles*). Les points sont ensuite placés dans un repère orthonormé (*mise en jeu de connaissances anciennes*, *conversion de registres*). Les objets sont déterminés à partir des connaissances anciennes de géométrie synthétique (*mise en jeu de connaissances anciennes*, *changement de cadres*). Les équations paramétriques des objets dans le cadre de la géométrie vectorielle émergent lors de cette étape (*mise en jeu de connaissances nouvelles*). Il faut donc décrire les objets dessinés (*conversion de registres*). Puis, les équations sont traduites en termes de composantes afin d’obtenir les équations paramétriques des objets dans le cadre de la géométrie analytique (*changement de cadres*). Les paramètres sont éliminés pour obtenir les équations cartésiennes des objets (*mise en jeu de connaissances nouvelles*). Des *changements de points de vue* sont alors effectués. Finalement, les éventuels points d’intersection sont déterminés et justifiés par des propriétés de géométrie synthétique (*mise en jeu de connaissances anciennes*, *changement de cadres*). L'ensemble des solutions du système est écrit (*conversion de registres*). L'interprétation géométrique est ainsi exploitée afin de faire émerger les différentes descriptions des objets dans l'espace (*mise en jeu de connaissances nouvelles*).

Les nouvelles notions de géométrie analytique dans l'espace sont introduites au fur et à mesure de la correction collective. De plus, l'ordre dans lequel les systèmes sont résolus est important notamment car ce qui a été établi pour un système est exploité dans les suivants. Les connaissances anciennes et nouvelles sont mobilisées tout au long de la correction. La réalisation de cette tâche requiert aussi des adaptations variées des connaissances comme le montre notre analyse *a priori*. Nous voulons développer une certaine flexibilité chez les élèves entre les cadres géométriques, les registres et les points de vue paramétrique et cartésien. Or, nous avons déjà dit qu'elle ne se développe pas automatiquement chez les élèves (cf. chapitre II). C'est pourquoi les traitements internes à réaliser ne sont pas laissés à la charge des élèves à ce moment de l'enseignement. La résolution de la deuxième tâche introductive se déroule sous la forme de discussions collectives. L'enseignant y joue un rôle important. Il guide la réflexion des élèves et insiste sur les différentes adaptations des connaissances à réaliser. Il raccroche également les connaissances nouvelles et le travail qui vient d'être réalisé aux connaissances anciennes et au travail déjà réalisé dans le plan. Il met ainsi en évidence les différentes ruptures et continuités lors de l'extension des notions du plan à l'espace. Les leviers choisis (interprétation géométrique, interventions) sont donc bien en jeu dans la gestion prévue de notre scénario.

Lorsqu'une nouvelle notion émerge, l'enseignant réalise un bilan du travail effectué et du résultat obtenu dans le cas particulier de l'exercice. Il les généralise ensuite sous la forme d'un cours magistral. Des feuilles sont distribuées aux élèves pour cette généralisation. De la sorte, la résolution des différents systèmes est entrecoupée de moments d'exposition des connaissances. Cela participe, selon nous, à la dynamique cours/exercices. Ce mode de travail est très différent de ce que nous avons pu observer dans les scénarios étudiés.

En ce qui concerne la progression des contenus, les équations des droites et des plans sont bien étudiées avant les positions relatives des objets entre eux. En effet, les systèmes S_1, S_2, S_3 et S_4 introduisent les différentes équations, le système S_5 aborde les positions relatives d'une droite et d'un plan et le système S_6 amène les positions relatives de deux plans. Les positions de deux droites ont été rappelées dans le plan lors de la première tâche d'introduction. Les conditions de parallélisme et d'orthogonalité sont étendues à l'espace dans les exercices. En ce qui concerne les équations, le questionnement initial part des équations cartésiennes des droites et des plans. La description de ces objets amène à écrire une équation vectorielle et puis une équation paramétrique des droites et des plans. La progression est donc bien celle choisie. Afin de montrer que l'objet décrit par les équations cartésiennes dans l'énoncé et les équations paramétriques obtenues est le même, l'articulation des points de vue dans les deux sens est effectuée. Cette progression est très différente de celle proposée dans les manuels scolaires et les cours étudiés. De plus, nous articulons les points de vue dans les deux sens ce qui n'est généralement pas proposé dans ces scénarios.

Lors des phases de discussions collectives, les activités attendues des élèves sont l'organisation du raisonnement au vu du travail réalisé dans la première tâche introductive, mobiliser leurs connaissances anciennes pour justifier quels sont les objets manipulés et quelles sont leurs positions relatives et effectuer des conversions entre les registres algébrique et graphique. Les conversions avec le registre ensembliste ne sont pas des adaptations que les élèves ont à faire seuls puisqu'ils ne manipulent pas souvent les notions et notations ensemblistes. Il est évident que l'adaptation « A7 - manque de connaissances nouvelles » est présente dans cette tâche puisque notre objectif est d'introduire les nouvelles notions au fur et à mesure de sa réalisation. Lors des moments de cours, les activités attendues des élèves sont une mise en relation entre ce qu'ils ont effectué dans l'activité d'introduction (contextualisé) et les résultats du cours (décontextualisé).

Pour être conforme aux programmes de l'enseignement secondaire pour le chapitre de géométrie analytique dans l'espace, les équations cartésiennes de plans sous forme de déterminants et le calcul de différentes distances entre des objets de l'espace sont ajoutés à notre scénario. Toutefois, nous avons montré dans notre étude de terrain que les enseignants n'abordent pas forcément au sein de ce chapitre les matrices et les déterminants. Ceux qui introduisent ce point de matière ont vu ces notions dans un cours annexe ou dans un chapitre précédent. Nous avons donc discuté avec l'enseignant qui s'occupe de la classe dans laquelle nous expérimentons notre séquence. Ces prérequis n'auront pas été vus par les élèves au moment de notre expérimentation mais seront abordés plus tard dans l'année. C'est pourquoi les équations cartésiennes de plans sous forme de déterminants, initialement prévues dans notre scénario, ont été retirées. À l'annexe H se trouve le scénario envisagé pour cette notion. En ce qui concerne les distances, celles-ci n'émergent pas de notre activité d'introduction mais nous prévoyons de les aborder à la fin de notre séquence. En effet, nous estimons que les équations de droites et de plans dans l'espace doivent être disponibles chez les élèves pour résoudre les tâches liées au calcul de la distance entre un point et un plan et entre un point et une droite. Pour cette étape du scénario, les élèves ont à mobiliser des connaissances anciennes telles que la distance entre deux points du plan et les projections orthogonales, mais aussi des connaissances en cours d'acquisition telles que les équations de droites et de plans dans l'espace. Les élèves doivent également organiser leur raisonnement afin de trouver une stratégie permettant de déterminer la distance entre un point et un plan ou entre un point et une droite dans l'espace. Cela amène à réaliser des conversions entre les registres de la langue naturelle, du dessin et algébrique. Le travail attendu des élèves pour la notion de distance dans notre scénario n'est jamais proposé dans les scénarios étudiés.

Avant de commencer la résolution des exercices, un bilan est proposé par l'enseignant (cf. annexe I, page 661). Nous avons choisi de présenter ce bilan sous la forme d'un tableau comme illustré dans le tableau XI.1. Celui-ci peut aider les élèves à décrire les objets géométriques par des équations selon le point de vue considéré et à reconnaître les objets géométriques décrits par ces équations. Le fait de mettre en avant les informations nécessaires à la description des objets peut être utile pour les élèves notamment par exemple pour les changements de points de vue. Lors de ce bilan, l'enseignant revient sur ce qui a été fait dans l'activité d'introduction pour passer d'un point de vue à un autre et insiste aussi sur l'intérêt d'interpréter géométriquement les équations ou les ensembles manipulés.

	Droite dans $\mathbb{R}^3$	Plan dans $\mathbb{R}^3$
Équations paramétriques	Pour la décrire, on a besoin : Une EP est de la forme :	Pour le décrire, on a besoin : Une EP est de la forme :
Équations cartésiennes	Pour la décrire, on a besoin : Un SEC est de la forme :	Pour le décrire, on a besoin : Une EC est de la forme :

TABLE XI.1 – Bilan de l'activité d'introduction.

Les séances suivantes sont des séances d'exercices dont nous présentons certaines analyses *a priori* au point suivant.

3 Les exercices proposés

Lorsque les exercices commencent, toutes les notions théoriques ont été vues sauf le calcul de distances. Suite à l'activité d'introduction, les élèves ont déjà manipulé des équations de droites et de plans, étudié les positions relatives des objets et interprété géométriquement les objets. Des jeux entre les cadres géométriques, des conversions entre les registres et des changements de points de vue ont déjà été réalisés par les élèves à ce stade de l'enseignement. Les exercices ont pour objectif de mettre en œuvre les nouvelles connaissances et de développer une certaine flexibilité pour les traitements internes ainsi que l'interprétation géométrique chez les élèves pour ces notions.

Notre séquence contient 27 exercices. Plusieurs d'entre eux mettent en jeu les mêmes adaptations des connaissances. C'est pourquoi nous ne présentons pas l'ensemble des analyses *a priori* dans cette partie. Elles sont données dans l'annexe F. Nous en avons sélectionnés quelques uns afin de donner une idée claire au lecteur des activités attendues des élèves. Cette sélection a été faite en fonction des variables didactiques en jeu. Nous fournissons l'énoncé, l'analyse *a priori* et des éléments sur la gestion prévue en classe pour chacune des tâches sélectionnées.

Exercice 2

Déterminez un système d'équations cartésiennes de la droite d passant par le point $A(2,-1,3)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{v}(0,-1,2)$.

Analyse *a priori* de l'exercice 2

La question est fermée. La méthode n'est pas imposée.

Domaine de travail

Cadre de la géométrie analytique.

Registres d'écriture

Registre algébrique, registre de la langue naturelle.

Point de vue

Point de vue cartésien.

Connaissances mises en jeu

□ Connaissances nouvelles : équations cartésiennes de droites particulières dans l'espace.

Adaptations à réaliser

L'énoncé est donné en langue naturelle. La forme générale d'un système d'équations cartésiennes de droites dans le cas où certaines composantes du vecteur directeur sont nulles a été étudiée en classe (*mise en jeu de connaissances nouvelles*). Le système est donné dans le registre algébrique (*conversion de registres*) en appliquant le résultat général dans ce cas particulier.

L'exercice met en jeu la description d'une droite particulière de l'espace par une équation dans le point de vue cartésien. Il s'agit d'appliquer directement un résultat vu au cours. Cette tâche relève du niveau technique de mise en fonctionnement des connaissances. C'est pourquoi nous estimons que les élèves sont capables de résoudre cette tâche en autonomie. Un temps de recherche individuelle est donc prévu. Il est suivi d'une correction collective. Les activités attendues des élèves sont l'identification des informations données et la particularisation du résultat donné de façon adéquate. C'est l'occasion pour l'enseignant d'insister sur une erreur relativement fréquente consistant à reprendre la forme canonique des équations cartésiennes de droites et de diviser par zéro. Cet exercice est « classique » et peut se retrouver dans les manuels ou les scénarios des enseignants.

Exercice 3

Donnez un point et un vecteur directeur de chacune des droites suivantes :

① $1-x=\dfrac{3y-3}{2}=\dfrac{7+z}{5}$.

② $\dfrac{2x-3}{2}=\dfrac{y-4}{5}=3z+2$.

③ $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3k \\ z = 1 - 2k \end{cases}$ où $k \in \mathbb{R}$.

④ $\begin{cases} x = 1 \\ y - 3 = 0 \end{cases}$.

Analyse *a priori* de l'exercice 3

La question est fermée. La tâche se répète quatre fois. La méthode n'est pas imposée.

Domaine de travail

Cadre de la géométrie analytique.

Registres d'écriture

Registre algébrique, registre de la langue naturelle.

Points de vue

Point de vue cartésien, point de vue paramétrique.

Connaissances mises en jeu

- □ Connaissances anciennes : mises en évidence, fractions, équations du premier degré à une inconnue, composantes d'un vecteur.
- □ Connaissances nouvelles : équations cartésiennes de droites dans l'espace, équations cartésiennes de droites particulières dans l'espace, équations paramétriques de droites dans l'espace.

Adaptations à réaliser

L'énoncé est donné en langue naturelle. Pour les points ① et ②, il s'agit d'un système d'équations cartésiennes sous une forme non canonique (*reconnaissance des modalités d'application*). L'*organisation du raisonnement* est découpé en deux étapes. Dans un premier temps, la forme canonique d'un système d'équations cartésiennes doit être écrite (*mise en jeu de connaissances nouvelles*). Cela amène à effectuer des opérations algébriques telles que des mises en évidence et des manipulations de fractions (*mise en jeu de connaissances anciennes*, *conversion de registres*). Une fois la forme canonique écrite, un point et un vecteur directeur peuvent être facilement déterminés (*reconnaissance des modalités d'application*).

Au point ③, il s'agit de reconnaître un système d'équations paramétriques d'une droite (*reconnaissance des modalités d'application*). Un vecteur directeur et un point peuvent être déterminés (*mise en jeu de connaissances nouvelles*).

Un système d'équations cartésiennes d'une droite particulière est donnée au point ④ (*reconnaissance des modalités d'application*). La théorie vue permet de déterminer un point et un vecteur directeur immédiatement (*mise en jeu de connaissances nouvelles*).

L'exercice met en jeu les points de vue paramétrique et cartésien pour les droites dans l'espace. Aucun changement de points de vue n'est nécessaire. Il s'agit principalement de mobiliser des connaissances anciennes pour écrire les systèmes donnés sous la forme canonique et d'identifier les informations demandées à partir de n'importe quel point de vue. Ces tâches relèvent du niveau mobilisable de mise en fonctionnement des connaissances. Les élèves sont capables de les réaliser en autonomie. Un temps de recherche est prévu, lui-même suivi par une correction collective. Les activités attendues des élèves consistent en l'écriture d'une forme canonique des équations et l'identification adéquate des informations demandées dans les deux points de vue. C'est l'occasion pour l'enseignant d'insister sur la forme canonique des équations. En effet, une erreur qui peut être repérée chez les élèves consiste à déduire un vecteur directeur et un point d'une droite à partir d'un système d'équations sans l'avoir préalablement écrit sous forme canonique. Cet exercice est aussi « classique » et se retrouve dans les scénarios des enseignants P_1, P_3 et P_4.

Exercice 8

Donnez une équation paramétrique du plan α sachant qu'il passe par le point $P(3,4,5)$ et dont un vecteur normal est $(2,6,4)$.

Analyse *a priori* de l'exercice 8

La question est fermée. La méthode n'est pas imposée.

Domaine de travail

Cadre de la géométrie analytique.

Registres d'écriture

Registre algébrique, registre de la langue naturelle.

Points de vue

Point de vue paramétrique, point de vue cartésien.

Connaissances mises en jeu

- □ Connaissances nouvelles : équations paramétriques et cartésiennes de plans.

Adaptations à réaliser

L'énoncé est donné en langue naturelle. Pour écrire une équation paramétrique d'un plan, un point et deux vecteurs directeurs du plan sont nécessaires (*reconnaissance des modalités d'application*). L'*organisation du raisonnement* se découpe en deux étapes. La première étape consiste à écrire une équation cartésienne du plan (*mise en jeu de connaissances nouvelles*) puisqu'un point et un vecteur normal de ce plan sont donnés dans l'énoncé.

Puis, un *changement de points de vue* est effectué pour écrire une équation paramétrique du plan (*mise en jeu de connaissances nouvelles*).

L'exercice met en jeu beaucoup de connaissances nouvelles sur les plans. Les deux points de vue sont mobilisés et une articulation dans le sens cartésien/paramétrique est nécessaire. Cette tâche relève du niveau mobilisable de mise en fonctionnement des connaissances. L'articulation des points de vue ayant été travaillée dans l'activité d'introduction, les élèves travaillent en autonomie. Nous prévoyons donc un temps de recherche individuelle, suivi d'une correction collective. L'enseignant peut insister sur le travail réalisé dans l'activité d'introduction pour articuler les points de vue entre eux. Les activités attendues des élèves sont l'organisation du raisonnement en vue d'articuler les points de vue dans le sens cartésien/paramétrique. Cette articulation est peu abordée dans les scénarios étudiés.

Exercice 11

Déterminez une équation cartésienne du plan β comprenant le point $A(1,3,-2)$ parallèle à $d \equiv \frac{x+1}{3} = \frac{y}{3}+1 = \frac{1-z}{-3}$ et perpendiculaire au plan $\alpha \equiv 2x-3y+2z=1$.

Analyse *a priori* de l'exercice 11

La question est fermée. La méthode n'est pas imposée.

Domaines de travail

Cadre de la géométrie analytique, cadre de la géométrie vectorielle.

Registres d'écriture

Registre algébrique, registre de la langue naturelle.

Points de vue

Point de vue paramétrique, point de vue cartésien.

Connaissances mises en jeu

- □ Connaissances anciennes : parallélisme, orthogonalité, résolution de systèmes, produit scalaire.
- □ Connaissances en cours d'acquisition : équations cartésiennes de plans, équations cartésiennes de droites dans l'espace, vecteur normal.
- □ Connaissances nouvelles : positions relatives de deux plans, positions relatives d'une droite et d'un plan.

Adaptations à réaliser

L'énoncé est donné en langue naturelle. Il s'agit de trouver une équation cartésienne d'un plan connaissant sa position relative par rapport à deux objets décrits dans le point de vue cartésien. Un point et un vecteur normal du plan β doivent être déterminés (*reconnaissance des modalités d'application*). L'*organisation du raisonnement* se fait en plusieurs étapes. Il faut traduire le parallélisme de la droite et du plan β en termes de vecteurs (*mise en jeu de connaissances nouvelles*, *conversion de registres*). Cela amène à identifier un vecteur directeur de la droite à partir du point de vue cartésien (*reconnaissance des modalités d'application*). Un vecteur directeur du plan β est colinéaire à ce vecteur directeur de la droite (*existence de choix*, *changement de cadres*). Il faut traduire la perpendicularité des deux plans en termes de vecteurs (*mise en jeu de connaissances nouvelles*, *conversion de registres*). Cela amène à identifier un vecteur normal du plan α (*reconnaissance des modalités d'application*). Un vecteur directeur du plan β est colinéaire à ce vecteur normal du plan (*existence de choix*, *changement de cadres*). Un point et deux vecteurs directeurs du plan β sont alors déterminés. Pour avoir une équation cartésienne du plan β, plusieurs méthodes sont possibles (*existence de choix*). Il est possible d'écrire une équation paramétrique du plan β (*mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition*) et d'effectuer un *changement de points de vue* en éliminant les deux paramètres (*mise en jeu de connaissances anciennes*). Il est possible aussi de déterminer un vecteur normal du plan β en traduisant l'orthogonalité entre un vecteur normal (a,b,c) et les deux vecteurs directeurs trouvés (*mise en jeu de connaissances anciennes*). Un système de deux équations à trois inconnues peut alors être résolu (*mise en jeu de connaissances anciennes*). La résolution du système amène à effectuer un *choix* pour une valeur des inconnues et ainsi déterminer un vecteur normal au plan. Une équation cartésienne avec un terme indépendant générique peut être donnée (*mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition*). Le point permet de trouver la valeur du terme indépendant (*changement de points de vue au sens de Robert*).

De nombreuses connaissances anciennes, en cours d'acquisition et nouvelles sont mobilisées dans cet exercice. De plus, plusieurs adaptations de ces connaissances sont nécessaires. Comme celles-ci et ne sont pas indiquées dans l'énoncé, cette tâche relève donc du niveau disponible de mise en fonctionnement des connaissances. Une conversion entre le registre de la langue naturelle, dans lequel l'énoncé est donné, et entre le registre algébrique, dans lequel la résolution s'effectue, apparait. Une articulation des points de vue dans le sens paramétrique/cartésien est réalisée quelle que soit la méthode choisie. Une recherche individuelle est aussi prévue ici pour que les élèves travaillent en toute autonomie ces traitements internes. Au terme de celle-ci, les activités attendues des élèves sont l'organisation du raisonnement, la conversion entre les registres cités et l'articulation des points de vue dans le sens paramétrique/cartésien. Lors de la correction collective, l'enseignant peut revenir sur le travail réalisé dans l'activité d'introduction en ce qui concerne l'articulation des points de vue. Il peut aussi faire des dessins pour aider les élèves qui n'ont pas pu effectuer la conversion entre le registre de la langue naturelle et le registre algébrique. Ce type de tâches est peu présent dans les scénarios étudiés (sauf P_4 qui propose cette tâche).

Exercice 12

Quel objet géométrique est représenté par l'ensemble $\{(x_1,x_2,x_3) \mid (x_1,x_2,x_3)$ est un vecteur orthogonal à $(-1,3,0)\}$?

Analyse *a priori* de l'exercice 12

La question est ouverte. La méthode n'est pas imposée.

Domaines de travail

Cadre de la géométrie analytique, cadre de la géométrie vectorielle.

Registres d'écriture

Registre algébrique, registre de la langue naturelle, registre ensembliste.

Point de vue

Point de vue cartésien.

Connaissances mises en jeu

- Connaissances anciennes : orthogonalité, produit scalaire.
- Connaissances en cours d'acquisition : les notions ensemblistes.
- Connaissances nouvelles : équations cartésiennes de plans.

Adaptations à réaliser

L'énoncé est donné en langue naturelle. Il s'agit de reconnaître un objet décrit par un ensemble. L'*organisation du raisonnement* est découpée en deux étapes. La première étape consiste à traduire l'orthogonalité de deux vecteurs en un produit scalaire nul (*mise en jeu de connaissances anciennes de géométrie vectorielle*, *conversion de registres*). Les notations ensemblistes sont utilisées tout au long de la résolution de la tâche (*mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition*). Puis, il reste à identifier une équation cartésienne d'un plan (*mise en jeu de connaissances nouvelles*, *changement de cadres*). La description du plan se fait dans le registre de la langue naturelle (*conversion de registres*).

Des conversions entre le registre de la langue naturelle et le registre algébrique, mais aussi entre le registre ensembliste et le registre de la langue naturelle sont à réaliser au sein de cet exercice. Le premier aspect de l'interprétation géométrique des ensembles de points et des équations y est en jeu. Au vu du travail réalisé dans l'activité d'introduction, cette tâche relève du niveau mobilisable de mise en fonctionnement des connaissances. Les élèves ont la possibilité de la résoudre en toute autonomie. Une correction collective s'ensuit pendant laquelle l'enseignant peut insister sur la caractérisation d'un plan comme un ensemble de vecteurs vue en toute généralité en classe. La particularisation de ce résultat peut donc être mise en avant. De plus, l'enseignant peut appuyer que les triplets représentent des vecteurs et non des points. Cette confusion étant une erreur fréquente repérée chez les élèves. Les activités attendues des élèves sont la mobilisation des connaissances nouvelles, les conversions entre les registres algébrique, de la langue naturelle et ensembliste. La reconnaissance des objets est aussi attendue des élèves. Ce type de tâche n'est présent dans aucun des scénarios analysés.

Exercice 18

Soit le système

$$\begin{cases} 2x+y+z=3 \\ 3x+2y-5z=2. \end{cases}$$

Décrivez géométriquement l'ensemble des solutions de ce système. Expliquez votre démarche. Déterminez ensuite algébriquement quel est cet ensemble de solutions.

Analyse *a priori* de l'exercice 18

La question est découpée en deux parties. Pour la première partie, il s'agit de résoudre le système en cherchant les objets décrits par les deux équations du système et de déterminer leur position relative. Le premier aspect de l'interprétation géométrique est en jeu pour les équations. Pour la deuxième partie, le système doit être résolu algébriquement. Le premier aspect de l'intepértation géométrique est ici aussi en jeu mais cette fois pour les ensembles. La méthode est donc imposée dans ces deux parties.

Domaines de travail

Cadre de la géométrie analytique, cadre de la géométrie synthétique, cadre de la géométrie vectorielle.

Registres d'écriture

Registre algébrique, registre de la langue naturelle, registre ensembliste.

Points de vue

Point de vue paramétrique, point de vue cartésien.

Connaissances mises en jeu

- Connaissances anciennes : résolution de systèmes, vecteurs colinéaires, parallélisme, orthogonalité.
- Connaissances en cours d'acquisition : équations cartésiennes de plans, équations paramétriques de droites dans l'espace, notions ensemblistes.
- Connaissances nouvelles : positions relatives de deux plans.

Adaptations à réaliser

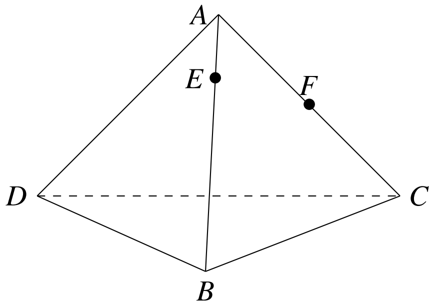
L'énoncé est donné en langue naturelle. Pour décrire géométriquement les solutions du système, le même questionnement que dans l'activité d'introduction sur les équations est posé. Chaque équation du système décrit un plan dans le point de vue cartésien (*reconnaissance des modalités d'application*). Les vecteurs normaux sont identifiés (*mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition*). Une étude de la colinéarité des vecteurs amène un *changement de cadres*. Ils sont non colinéaires (*mise en jeu de connaissances anciennes*). Les deux plans sont sécants (*mise en jeu de connaissances nouvelles*, *changement de cadres*). L'intersection est alors une droite (*mise en jeu de connaissances anciennes*).

La résolution algébrique du système *met en jeu des connaissances anciennes*. L'ensemble des solutions doit être écrit (*conversion de registres*). Il s'agit de reconnaître la droite à partir du point de vue paramétrique (*conversion de registres*, *mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition*).

Dans cet exercice, l'interprétation géométrique est travaillée. En effet, la reconnaissance des objets doit se faire à partir des équations pour les plans et d'un ensemble pour la droite. Le fait d'imposer cet ordre entre les deux parties de l'exercice peut amener à travailler également le deuxième aspect de l'interprétation géométrique. La première partie de l'exercice nous amène à dire qu'il s'agit d'une droite et la deuxième partie nous amène à la décrire par un ensemble de points et éventuellement par une équation. Il est donc possible de développer les deux aspects de l'interprétation géométrique des objets sur ce type de tâche. De plus, l'ordre choisi permet aussi de vérifier et valider les résultats des calculs algébriques si ceux-ci sont nécessaires. Dans le cas contraire, ce questionnement sur les objets décrits par des équations permet d'éviter de se lancer dans des calculs inutiles. Des connaissances anciennes, en cours d'acquisition et nouvelles de différents cadres géométriques sont mobilisées. Plusieurs adaptations des connaissances sont à réaliser : des conversions entre les registres algébrique et de la langue naturelle, entre les registres algébrique et ensembliste et entre les registres ensembliste et de la langue naturelle ; des jeux de cadres entre la géométrie analytique, la géométrie vectorielle et la géométrie synthétique. L'organisation du raisonnement est en partie indiquée et relativement proche de celle mise en œuvre lors de l'activité d'introduction. La tâche relève donc du niveau mobilisable de mise en fonctionnement des connaissances. Les élèves peuvent être capables de la résoudre en toute autonomie lors d'une recherche individuelle ou entre pairs. Une correction collective suit cette phase. L'enseignant peut insister sur les avantages de la démarche imposée par l'énoncé, notamment pour la validation des calculs algébriques. Bien que la résolution algébrique des systèmes soit une tâche qui est proposée dans les scénarios étudiés, aucun d'entre eux ne demande explicitement d'étudier le système avant de se lancer dans les calculs.

Exercice 22

Soit le tétraèdre $ABCD$ suivant.



① Déterminez synthétiquement le point de percée de la droite passant par les points E et F dans le plan BCD.

② Considérons un repère orthonormé $(D, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Les coordonnées des points A, B et C sont respectivement $(0,2,2)$, $(2,3,0)$ et $(0,4,0)$. Les points E et F sont définis comme étant $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Déterminez analytiquement le point de percée de la droite passant par les points E et F dans le plan BCD.

Analyse *a priori* de l'exercice 22

La question se découpe en deux sous-questions. Elles sont toutes les deux fermées. La méthode est imposée dans les deux cas : synthétiquement pour le premier et analytiquement pour le deuxième. Les objectifs de cette question sont de rappeler la démarche dans le cadre de la géométrie synthétique et de rendre possible une comparaison entre les démarches de la géométrie synthétique et celles de la géométrie analytique.

Domaines de travail

Cadre de la géométrie analytique, cadre de la géométrie synthétique, cadre de la géométrie vectorielle.

Registres d'écriture

Registre algébrique, registre du dessin, registre ensembliste, registre de la langue naturelle.

Point de vue

Point de vue paramétrique.

Connaissances mises en jeu

- Connaissances anciennes : points de percée, résolution de systèmes, tétraèdre, caractérisation d'une droite, caractérisation d'un plan, composantes d'un vecteur.
- Connaissances en cours d'acquisition : équations paramétriques de droites dans l'espace, équations cartésiennes de plans.

Adaptations à réaliser

L'énoncé est donné en langue naturelle. Un dessin du tétraèdre est fourni. La question ① demande d'appliquer la méthode pour trouver le point de percée d'une droite dans une face d'un solide vue dans le cadre de la géométrie synthétique (*reconnaissance des modalités d'application*, *mise en jeu de connaissances anciennes*). Pour cela, l'*organisation du raisonnement* se fait en plusieurs étapes. Il s'agit de déterminer un plan auxiliaire contenant la droite EF et sécant avec le plan BCD (*existence d'un choix forcé*). L'étape suivante consiste à déterminer la droite d'intersection de ces deux plans et enfin le point d'intersection entre cette droite et la droite EF. Une construction sur le dessin est réalisée.

La question ② nécessite une *organisation du raisonnement* en plusieurs étapes. Il s'agit de résoudre algébriquement un système composé d'une équation de la droite EF et d'une équation du plan BCD (*reconnaissance des modalités d'application*, *conversion de registres*). Puisque les coordonnées des points B, C et D sont données, il est possible d'écrire une équation paramétrique du plan BCD (*mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition*). Cela entraîne de choisir un point et deux vecteurs directeurs du plan (*existence de

> *choix*). On est dans le cadre de la géométrie vectorielle. Il reste à calculer les composantes des vecteurs pour avoir une équation paramétrique dans le cadre de la géométrie analytique (*mise en jeu de connaissances anciennes*, *changement de cadres*). Les deux égalités vectorielles fournies dans l'énoncé doivent être développées (*mise en jeu de connaissances anciennes*, *changement de cadres*) pour déterminer les coordonnées des points E et F. Une équation paramétrique de la droite EF peut dès lors être trouvée (*mise en jeu de connaissances anciennes et en cours d'acquisition*). Il reste à résoudre le système contenant ces deux équations (*mise en jeu de connaissances anciennes*). L'ensemble des solutions du système décrit le point de percée recherché (*conversion de registres*).

Cet exercice a pour objectif de mettre en parallèle les démarches et les outils propres à la géométrie synthétique et à la géométrie analytique. Ce point est souligné par les programmes actuels. Bien que ce type de tâches soit présent dans le manuel *CQFD*, aucun des enseignants ne le propose en classe. La première partie de la question ne met en jeu que des connaissances anciennes. Toutefois, il se peut que ces connaissances ne soient pas disponibles chez les élèves. Cela peut s'expliquer par le fait qu'au moins un an sépare l'enseignement des points de percée et notre expérimentation. L'enseignant peut donc guider les élèves à reconstruire la démarche à suivre dans le cadre de la géométrie synthétique. Une fois celle-ci rappelée, les élèves peuvent construire en toute autonomie le point de percée demandé. Une correction collective suit cette phase de travail. L'enseignant peut insister sur la démarche employée et les connaissances de géométrie synthétique mises en jeu pour cette partie de la question. Les activités attendues des élèves sont alors la mobilisation de leurs connaissances en géométrie synthétique, la particularisation de la démarche générale à l'exercice et la construction dans le registre du dessin du point de percée.

La deuxième partie de la question met en jeu des connaissances anciennes et en cours d'acquisition sur les droites et les plans dans l'espace. Plusieurs adaptations sont nécessaires tels que des changements de cadres géométriques et des introductions d'étapes intermédiaires (recherche des coordonnées des points E et F). La démarche à appliquer dans le plan n'est pas donnée dans l'énoncé. Cependant, il est possible de s'appuyer sur le travail réalisé lors de la première sous-question pour en établir une. Les élèves peuvent donc résoudre cette tâche en autonomie même si elle relève d'un niveau disponible de mise en fonctionnement des connaissances. Lors de la correction collective de cette sous-question, l'enseignant peut insister sur la démarche suivie et les connaissances du cadre de la géométrie analytique utilisées. Il peut aussi faire un bilan de l'exercice en mettant en évidence les avantages et les inconvénients des démarches propres aux cadres de la géométrie synthétique et de la géométrie analytique. Les activités attendues des élèves sont l'organisation du raisonnement dans le cadre de la géométrie analytique et les jeux entre les cadres géométriques. Nous pensons qu'il est difficile pour les élèves de comparer d'eux-mêmes les deux cadres géométriques vu qu'ils n'ont jamais été mis en parallèle dans l'enseignement.

Exercice 23

Une épreuve de sélection est organisée dans le cadre d'un jeu télévisé. Les candidats doivent répondre à trois questionnaires, côtés sur 20, mais avec des pondérations différentes. Le premier questionnaire porte sur l'histoire des sciences et des techniques (pondération 2), le deuxième sur la géographie de l'Europe (pondération 1) et le dernier comprend des questions de culture générale (pondération 2). Un candidat est sélectionné s'il a obtenu au moins 50 points sur 100. Les notes possibles des candidats dans chacune des matières sont représentées par les variables x (histoire des sciences et techniques), y (géographie) et z (culture générale). Un point $P(x,y,z)$ est associé à chaque candidat.

① Dans quelle partie de l'espace sont situés les points P ? Représentez-la.

② Dans quelle partie de l'espace sont situés les points associés aux candidats ayant obtenu 50 points ? Représentez-la.

③ Est-il possible de trouver un candidat qui a eu 50 points à l'examen en ayant eu une note de 0 en histoire des sciences et des techniques ? Même question s'il a eu 0 en géographie, puis 0 en culture générale.

④ Est-il possible de trouver un candidat qui a réussi l'examen avec une note strictement supérieure à 50 mais qui a eu une note de 0 en histoire des sciences et techniques ?

⑤ On veut qu'un candidat ayant eu 8 en histoire des sciences et des techniques, 12 en géographie de l'Europe et 9 en culture générale soit sélectionné. Quelles sont les valeurs des pondérations a, b et c que l'on doit choisir pour qu'il soit sélectionné ? Donnez, si possible, un exemple de pondération acceptée.

Cet exercice est fortement inspiré du manuel *CQFD* (2014 et 2019). Le problème est le même mais toutes les questions ont été modifiées afin que le travail à réaliser ne soit pas indiqué explicitement. Dans la version originale, le travail est très découpé et se limite le plus souvent à des applications immédiates des connaissances. Nous avons donc modifié les tâches pour qu'elles deviennent plus complexes et mettent en jeu des adaptations variées.

Analyse *a priori* de l'exercice 23

La question est découpée en cinq sous-questions. Elles sont toutes ouvertes. Aucune méthode n'est imposée.

Domaines de travail

Cadre de la géométrie analytique, cadre de la géométrie synthétique.

Registres d'écriture

Registre algébrique, registre de la langue naturelle, registre ensembliste, registre graphique.

Points de vue

Point de vue paramétrique, point de vue cartésien.

Connaissances mises en jeu

- □ Connaissances anciennes : repère orthonormé dans l'espace, propriétés géométriques du cube, section de plan, inéquations, résolution de systèmes.
- □ Connaissances en cours d'acquisition : équations cartésiennes de plans, équations paramétriques de droites dans l'espace.

Adaptations à réaliser

Pour la question ①, il s'agit de caractériser l'ensemble des notes que peut avoir chaque candidat. L'énoncé est donné en langue naturelle. Une *conversion de registres* a lieu afin de décrire chaque candidat par un triplet de notes allant toutes de 0 à 20. Il faut déterminer quel est l'objet décrit par cet ensemble de triplets. L'objet décrit est un cube de côté 20. Sa représentation se fait en utilisant des *connaissances anciennes* sur les repères de l'espace et la perspective cavalière (*conversion de registres*).

Le point ② amène une *organisation du raisonnement* en deux étapes. Dans un premier temps, il s'agit de comprendre que les pondérations données dans l'énoncé sont les coefficients devant les variables x, y et z (*conversion de registres*). Une équation cartésienne représentant l'ensemble des candidats ayant eu 50 points peut être écrite. Celle-ci décrit un plan (*mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition*). Dans un deuxième temps, la représentation de ce plan amène à réaliser la section du cube par ce plan (*utilisation de questions précédentes*). Plusieurs méthodes peuvent être utilisées (*existence de choix*). Trois points vérifiant cette équation peuvent être déterminés et placés dans un repère orthonormé (*conversion de registres*). S'ils sont non alignés, la section du cube par le plan défini par ces trois points peut se faire en *mettant en jeu des connaissances anciennes* vues dans le cadre de la géométrie synthétique (*changement de cadres*). La deuxième méthode utilise les *connaissances en cours d'acquisition*. Il s'agit de déterminer l'intersection du plan avec chaque face du cube. Une *étape intermédiaire* est alors introduite. Une équation cartésienne de chaque face du cube peut être donnée (*mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition*). Des systèmes de deux équations à trois inconnues doivent être résolus (*mise en jeu de connaissances anciennes*). Les ensembles des solutions de ces systèmes sont écrits (*conversion de registres*). Ces ensembles représentent les différentes droites délimitant la section du cube par le plan (*mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition*). Ces droites peuvent être représentées sur le graphique (*conversion de registres*).

Le point ③ revient à prendre l'équation cartésienne donnée au point ② et à remplacer la variable x par zéro (*utilisation de questions précédentes*, *conversion de registres*). Il s'agit d'utiliser la section du cube représentée au point ② et de déterminer quel segment de droite remplit ces conditions (*conversion de registres*, *utilisation de questions précédentes*). Un point de cette droite peut être déterminé à partir de l'équation étudiée ou de l'ensemble de points donné à la question ② (*conversion de registres*, *existence de choix*). L'*organisation du raisonnement* est similaire pour $y = 0$ et $z = 0$.

Le point ④ revient à déterminer une solution d'une inéquation (*conversion de registres*). Pour ce faire, deux méthodes peuvent être utilisées. Il est possible, au vu des conditions données, de trouver par essai-erreur une telle solution. La deuxième méthode consiste à déterminer s'il existe une région du cube qui vérifie les conditions données (*changement de points de vue au sens de Robert*). Pour cela, il faut se référer au graphique réalisé précédemment et aux différentes équations déjà écrites (*utilisation de questions précédentes*, *conversion de registres*). Un triplet vérifiant les deux conditions données peut alors être déterminé et il s'agit de montrer qu'il vérifie bien l'inéquation (*conversion de registres*, *existence de choix*).

La question ⑤ revient à étudier une inéquation où les inconnues sont a, b et c (*conversion de registres*). L'*organisation du raisonnement* se découpe en plusieurs étapes. Tout d'abord, une équation cartésienne de plan peut être écrite. Une représentation de ce plan est nécessaire et amène à déterminer la section du cube par ce plan (*utilisation de questions précédentes*, *conversion de registres*). Les deux mêmes méthodes que pour le point ② peuvent être utilisées. Une fois le plan tracé, il reste à déterminer l'ensemble des triplets vérifiant l'inéquation considérée. La même démarche que pour le point ④ peut être mise en œuvre. Enfin, un triplet de cet ensemble est choisi (*existence de choix*) en vérifiant bien qu'il satisfait l'inéquation étudiée (*conversion de registres*).

Cet exercice permet de travailler la dimension outil des notions en cours d'acquisition. Ainsi, il s'agit de résoudre un problème dans lequel ces notions n'apparaissent pas explicitement mais peuvent être utilisées lors de la résolution. De nombreuses adaptations sont nécessaires dont notamment des conversions entre les registres de la langue naturelle, algébrique, graphique et ensembliste. Des changements de cadres peuvent apparaitre entre la géométrie synthétique et la géométrie analytique. Ceux-ci peuvent permettre également de comparer les démarches et les outils utilisés dans les deux cadres. Cette tâche relève du niveau disponible de mise en fonctionnement des connaissances. Ce type d'exercice ne peut être laissé à l'entière charge des élèves. C'est pourquoi une discussion collective est prévue pour sa résolution. Nous pensons que cela peut aider les élèves à poser le problème dans le registre algébrique mais aussi dans leur organisation du raisonnement. L'enseignant peut insister sur le sens des calculs effectués à partir des équations en s'appuyant sur le graphique réalisé. L'enseignant peut également mettre en avant les avantages et les inconvénients des démarches propres aux deux cadres géométriques pour déterminer la section d'un cube par un plan. Nous pensons que cet exercice permet de ne pas perdre le côté visuel du problème et de ne pas limiter le travail des élèves à des calculs comme le suggère notre étude historique et épistémologique. Ainsi, la technique et le sens peuvent être tous les deux travaillés dans ce type d'exercices. Rappelons que nous avons trouvé quelques exercices dans les manuels scolaires permettant de travailler la dimension outil des notions mais ceux-ci ne sont généralement pas abordés dans les classes.

4 Bilan

Notre scénario est découpé en deux parties : l'activité d'introduction à partir de laquelle toutes les notions de géométrie analytique dans l'espace demandées par le programme scolaire émergent et les exercices portant sur l'ensemble de ces nouvelles notions.

L'activité d'introduction est découpée en deux questions. La première a pour objectif de travailler le premier aspect de l'interprétation géométrique. La reconnaissance des objets n'étant que peu travaillée dans l'enseignement secondaire, il s'agit de proposer à partir des connaissances que les élèves ont en géométrie analytique plane un questionnement sur les équations, les ensembles de points et les objets géométriques associés. La deuxième tâche amène à utiliser ce questionnement comme un levier pour introduire les nouvelles notions (sauf la distance). De la sorte, les notions du plan sont étendues à l'espace avec comme moyen de contrôle interne supposé efficace l'interprétation géométrique.

Dès le début de la séquence, des conversions entre les registres algébrique, ensembliste, graphique et de la langue naturelle sont à réaliser. La deuxième question propose aussi des jeux de cadres entre les géométries synthétique, vectorielle et analytique. Une double articulation entre les points de vue cartésien et paramétrique y est aussi travaillée. Ainsi, un travail important est proposé lors des moments de cours pour développer la flexibilité des élèves en termes de registres, de cadres et de points de vue. Comme elle ne se développe pas de façon automatique chez les élèves, l'enseignant joue un rôle important dans cette partie de la séquence. Il raccroche le travail à réaliser aux connaissances que les élèves ont déjà et à ce qu'ils ont déjà pu rencontrer afin que les nouvelles connaissances s'intègrent plus facilement dans le bagage mathématique des élèves. Nous pensons que ces occasions de proximités peuvent favoriser chez les élèves le développement de la flexibilité attendue pour ces notions. Toutefois, dans une visée piagétienne, la flexibilité ne peut vraiment se développer qu'à partir du moment où les élèves peuvent effectuer ces traitements internes en autonomie. Les exercices choisis dans la deuxième partie de notre scénario les mettent donc en jeu.

Nous avons illustré avec l'exercice 2 que des applications immédiates des connaissances sont proposées dans notre scénario. Des exercices nécessitant des adaptations variées des connaissances sont également envisagés comme nous l'avons montré pour les exercices 8 et 11. De plus, la reconnaissance des objets travaillée dans l'activité introductive est également exploitée dans certains exercices comme les exercices 12 et 18. Dans ceux-ci, la technique vient valider ce que le travail sur le sens a permis de déterminer. Ce type d'exercices met en jeu les deux aspects de l'interprétation géométrique qui doivent être développés par les élèves. Nous avons aussi mis en évidence que les mises en relation entre les connaissances des élèves sont importantes dans les tâches prescrites. C'est le cas par exemple des exercices de calculs de distances. D'autres exercices permettent de travailler la dimension outil des notions comme nous l'avons expliqué pour l'exercice 23. Les dimensions outil et objet des notions sont donc bien abordées. Finalement, des comparaisons entre les outils et les démarches utilisés en géométrie synthétique et en géométrie analytique sont possibles comme nous l'avons illustré dans l'exercice 22. Nos analyses *a priori* des tâches mettent donc bien en évidence la diversité, la quantité et la variété des adaptations des connaissances en jeu et la flexibilité qu'elles permettent de développer entre les registres, les cadres et les points de vue.

En conclusion, notre scénario semble bien posséder les caractéristiques que nous avons jugées nécessaires pour favoriser la conceptualisation de ces notions chez les élèves. De plus, il est conforme aux programmes actuels de l'enseignement secondaire belge francophone. Les choix effectués dans le chapitre IX ont bien été intégrés à la fois dans la progression des contenus et dans la gestion prévue en classe. Dans le chapitre suivant, nous présentons l'expérimentation du scénario envisagé dans le chapitre X.

Nous voulons tout d'abord savoir si elle est effectivement réalisable dans une classe de l'enseignement secondaire comme les enseignants interrogés semblent le penser. Nous voulons ensuite tester si les apprentissages visés par notre séquence ont été réalisés par les élèves.