

Intégration par rapport à l'intégrale positive de Daniell

Dédicaces

Je dédie cet humble travail d'abord :

A Mon Père Mamoudou DIALLO et A Ma Mère Mariama DIALLO ;

A Mes cousins aux parcelles Assainies

Aux personnes qui me sont chères.

A Monsieur et Madame NDIAYE de Kédougou ainsi que toute la famille NDIAYE

A ma Défunte Soeur Safiatou DIALLO ainsi à tous mes frères et Soeurs

A notre regretté ami et oncle Omar DIALLO qui nous avais quitté durant l'année , paix a

son âme et que la terre lui soit légère

REMERCIEMENTS

Au tout puissant Allah de m'avoir donner la chance de terminer mes recherche.

Je tiens à remercier toute personne ayant participé, de prêt ou de loin à la réalisation de ce travail.

Je suis extrêmement reconnaissant envers M.Gabriel Birame NDIAYE,Professeur à l'Université Cheikh Anta Diop de Dakar,et le professeur Souleye KANE responsable du Master de mathématiques Appliquées pour avoir accepté de diriger mes recherches. Je les remercie également pour la disponibilité sans réserve dont ils ont fait preuve à mon égard, les nombreuses discussions que j'ai eues avec eux ainsi que les précieuses et judicieuses aides

Je tiens aussi à remercier les nombreux collègues qui ont partagé mon quotidien, en l'occurrence mes camarades de promotion

Je remercie particulièrement les membres du jury d'avoir accepté d'évaluer ce travail.

Merci à tous les membres de l'équipe de mathématiques appliquées .

Pour finir ,j'ai une pensée toute particulière pour mes proches , mes amis(es) et mes parents qui n'ont jamais cessé de me fournir l'essentiel. Merci à jamais de m'avoir poussé à dépasser mes limites.

RÉSUMÉ

Les multimesures ont été l'objet d'une étude par Pallu de la Barrière, Godet Thobie, A. Costé, D. S. Thiam, K. Siggini.

L'intégration par rapport à une multimesure compacte a été faite par D. S. Thiam.

La séquentielle compacité d'une multimesure est une notion nouvelle qui est pour les multimesures l'équivalent de σ -finie pour les mesures scalaires : sachant intégrer par rapport à une multimesure compacte (finie), comment le faire par rapport à une multimesure séquentiellement compacte (σ -finie). On obtient les théorèmes de convergences monotones et dominée pour une multimesure à valeurs convexes fermées bornées, ainsi que le prolongement d'une multimesure définie sur un clan au σ -clan engendré. On obtient également une caractérisation de l'ensemble des fonctions intégrables. G. Dia [1] a étudié l'intégration par rapport à une multimesure fermée bornée mais sans obtenir les théorèmes de convergences en dehors du cas compact. M. Thiam s'est intéressé aux multimesures à valeurs dans un semi-groupe. Pallu de la Barrière [3] a étudié l'intégration par rapport à une multimesure compacte en utilisant les semi-variations exhaustives. Cette exhaustivité est liée à la possibilité de définir un espace d'intégration où le théorème de la convergence dominée est valable, c'est à dire en partie l'objet de cette communication.

Table des matières

1	Introduction générale	5
2	Introduction à la théorie de Multimesures	6
2.1	Notation	6
2.2	Définition et Propriétés	6
2.2.1	Multimesure faible et forte	7
3	Intégrale Positive de Daniell	9
3.1	Définition	9
3.2	Intégrale positive de Daniell	9
3.2.1	Intégrale supérieure positive I^* de Daniell	11
3.2.2	les Propriétés de $H^\vee$ et I^*	11
3.2.3	Intégrale inférieure positive I_* de Daniell	15
3.2.4	les Propriétés de Prolongement de I_*	17
3.2.5	Quasi-intégrabilité de l'intégrale positive de Daniell	17
3.3	Étude des propriétés éventuelles par rapport à I_+ et $L_+^1(I_+)$	18
3.4	les théorèmes de convergences monotones et dominées au sens de l'ordre	19
4	conclusion	25

Introduction générale

Les multimesures ont été l'objet d'une étude par PALLU DE LA BARRIERE [1], GODET-THOBIE [1], A. COSTE [1], D. S. THIAM [1], K. SIGGINI [1].

L'intégration par rapport à une multimesure à valeurs faiblement compactes positives a été faite par D. S. THIAM [1].

La séquentielle compacité positive d'une multimesure est une notion nouvelle, qui est pour les multimesures, l'équivalent de σ -finie pour les mesures scalaires :

sachant intégrer par rapport à une multimesure à valeurs faiblement compactes positives (finie), comment le faire par rapport à une multimesure séquentiellement compacte positive (σ -finie).

Nous obtenons les théorèmes de convergences monotones et dominée pour une multimesure à valeurs convexes fermées,

ainsi que le prolongement d'une multimesure définie sur un clan au δ -clan engendré.

Nous obtenons également une caractérisation de l'ensemble des fonctions intégrables. G. DIA [1] a étudié l'intégration par rapport à une multimesure fermée bornée,

mais sans obtenir les théorèmes de convergences en dehors du cas compact.

M. THIAM s'est intéressé aux multimesures à valeurs dans un semi-groupe.

PALLU DE LA BARRIERE [3] étudie l'intégration par rapport à une multimesure à valeurs faiblement compactes, en utilisant les semi variations exhaustives.

Cette exhaustivité est liée à la possibilité de définir un espace d'intégration où le théorème de la convergence dominée est valable, c'est à dire en partie l'objet du mémoire.

Nous remercions le professeur SAKHIR THIAM qui nous a indiqué la notion de séquentielle compacité positive d'une multimesure.

Ces multimesures sont de facto prolongeables, ce qui permet à la semi-variation associée d'être automatiquement exhaustive, et donc d'intégrer par rapport à une telle multimesure.

Nous retrouvons des résultats que D. S. THIAM a obtenu dans le cas compact.

Introduction à la théorie de Multimesures

Sommaire

2.1	Notation	6
2.2	Définition et Propriétés	6

2.1 Notation

On considère E un espace topologique localement convexe séparé non complet, E' son dual topologique.

Le crochet de dualité $\langle E, E' \rangle$ est $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Pour $A \subset E$, et $y \in E'$,

$$\delta^*(y/A) := \sup\{\langle x, y \rangle : x \in A\}.$$

On considère les monoïdes suivants : $(cc(E), +)$ l'ensemble des convexes faiblement compacts de E , $(cfb(E), \dot{+})$ celui des convexes fermes bornes non vides, et $(cf(E), \dot{+})$ celui des convexes fermes non vides. Si $A, B \in cf(E)$,

$$A \dot{+} B = Adh(A + B) = \text{Adhérence}(A + B).$$

Nous désignons par $\bar{C}_O(A)$, l'enveloppe convexe fermée de l'ensemble A . La structure uniforme dans ces monoïdes est celle de Hausdorff [1], et la relation d'ordre l'inclusion. Si O est une famille de parties convexes fermées de E on a :

$$\inf\{A : A \in O\} = \cap\{A : A \in O\}, \quad \text{et}$$

$$\sup\{A : A \in O\} = \bar{C}_O \cup \{A : A \in O\}.$$

Ω est un clan de parties d'un ensemble non vide T . Si $f \in \bar{R}^T$ est une fonction de T dans $\bar{R}$, on pose

$$f^+ = \sup(f, 0), \quad \text{et} \quad f^- = \sup(-f, 0).$$

2.2 Définition et Propriétés

Définition 2.2.1. On considère Ω un clan de parties de T .

Soit $M : \Omega \longrightarrow cf(E)$ une multiapplication,

on dira que M est séquentiellement compacte (*s-compacte*), s'il existe une suite croissante

$(T_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de Ω , telle que

$$\cup_{n \geq 1} T_n = T, \text{ et } M(T_n) \in cc(E) \text{ pour tout } n.$$

(a) M est additive ie si $A, B \in \Omega$ avec $A \cap B = \emptyset$, alors

$$M(A \cup B) = M(A) + M(B).$$

(b) Que M est monotone ie $0 \in M(A)$ pour tout $A \in \Omega$.

(c) Que M vérifie l'une des conditions suivantes :

- (i) si $A_n \in \Omega$ et $A_n \downarrow \emptyset$ (ie A_n décroît vers l'ensemble vide), alors pour tout y de E'
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta^*(y/M(A_n)) = 0$.
- (ii) si $A_n \in \Omega$ et $A_n \downarrow \emptyset$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} M(A_n) = 0$ pour la structure uniforme de $cf(E)$.

2.2.1 Multimesure faible et forte

M est une multimesure faible si $A \rightarrow \delta^*(y/M(A))$ est une mesure scalaire.

Si M est une multimesure faible à valeurs dans $cfb(E)$ alors M vérifie (i) ;

M est une multimesure forte, si pour toute partition (A_n) dans Ω d'une partie $A \in \Omega$ on a :

$$M(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} [M(A_1) + \dots + M(A_n)] \text{ dans } cf(E),$$

voir D. S. THIAM [1] page 92. GODET-THOBIE [1] page 56,
 les désignent par multimesures normales.

Ce que D. S. THIAM [1] désigne par multimesure stricte est appelé par A. COSTE [1] page II-3, multimesure forte.

NB : La notion de multimesure faible est une notion très générale qui apparaît dans COSTE-PALLU DE LA BARRIÈRE [1] ;

cette notion couvre l'essentiel des situations existantes.

Une multimesure normale à valeurs $cfb(E)$ est une multimesure stricte, la réciproque n'est pas vraie d'après A. COSTE [1] page III-4.

Cependant si les multimesures sont à valeurs faiblement compactes, toutes ces notions de multimesures coïncident d'après le théorème 1.2 pages 93 D. S. THIAM [1].

Le fait qu'une multimesure stricte soit normale est basée sur le lemme de KLUVANEK valable pour E elcs complet :

Nous rappelons le lemme 2-1 page 95 D. S. THIAM [1], qui est une légère généralisation du lemme de KLUVANEK pour E elcs complet :

Soit $(F_n)_{n \geq 1}$ une suite de faiblement fermés telle que pour toute suite $(x_n)_n$ avec $x_n \in F_n$ la série $\sum x_n$ est convergente dans E.

Alors on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i \geq n} F_i = \{0\},$$

au sens de la structure uniforme de HAUSDORFF de $f(E)$.

Dans tout ce travail nous désignerons par multimesure forte une multimesure normale au sens de GODET-THOBIE ou multimesure forte au sens de D. S. THIAM.

Si M est une multimesure forte à valeurs dans $cfb_+(E)$ alors M vérifie (ii).

$$\text{Soit } \Lambda = \{A \in \Omega, M(A) \in cc_+(E)\},$$

Λ est un clan non vide.

Soient $H(\Lambda)$ l'ensemble des fonctions en escaliers basées sur Λ ,

$H_+(\Lambda) = \{f \in H(\Lambda), f \geq 0\}$. $(H, +, \leq)$ est un espace de RIESZ .

La restriction de M à Λ est une multimesure monotone cf théorème 1-1

page 90 D.S. THIAM [1].

Soit

$$I : H_+ \longrightarrow cc(E), h = \sum a_i 1_{A_i}, I(h) = \sum a_i M(A_i), \text{ avec}$$

$$1_{A_i}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A_i \text{ et} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'après la proposition 2-1 D. S. THIAM [1] page 97 I est une intégrale positive de DANIELL secondaire ie :

$$\begin{cases} 0 \in I(h) \text{ si } h \in H_+(\Lambda), \\ I \text{ est additive et si } (h_n) \downarrow 0 \text{ dans } H_+(\Lambda) \text{ alors} \\ I(h_n) \downarrow 0 \text{ dans } cc(E) \end{cases}$$

. De plus I est homogène.

Intégrale Positive de Daniell

Sommaire

3.1	Définition	9
3.2	Intégrale positive de Daniell	9
3.3	Étude des propriétés éventuelles par rapport à I_+ et $L_+^1(I_+)$. .	18
3.4	les théorèmes de convergences monotones et dominées au sens de l'ordre	19

3.1 Définition

On définit donc l'intégrale positive de Daniell I par :

$$I : \begin{cases} H_+(\Lambda) \rightarrow cc_+(E) \\ h \rightarrow I(h) = \sum_{i \geq n} a_i M(A_i) \end{cases}$$

avec $h = \sum_{i \geq n} a_i 1_{A_i}$

$$1_{A_i}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A_i \text{ et} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3.2 Intégrale positive de Daniell

Définition 3.2.1. On désigne par $H^\vee$ les fonctions f de $\bar{R}^T$, telle qu'il existe une suite croissante (h_n) de H_+ , avec $f = \sup_n h_n$. On pose

$$I^\vee : H^\vee \longrightarrow cf(E)_+,$$

$$I^\vee(f) = \sup_n I(h_n) \text{ avec } h_n \uparrow f, h_n \in H_+.$$

$I^\vee$ est une application d'après la proposition

On a ci dessous quelques exemples de multimesures s-compactes.

Exemple 3.2.1. Soit $\beta(R^n)$ la tribu borélienne de R^n et λ une mesure σ -finie sur $\beta(R^n)$. On considère :

$M : \beta(R^n) \longrightarrow cf(R)$, définie par,

$$M(A) = \begin{cases} [0, \lambda(A)], & \text{si } \lambda(A) < +\infty, \text{ et} \\ [0, +\infty[, & \text{sinon.} \end{cases}$$

M est une multimesure monotone s -compacte.

L'additivité provient de la propriété de décomposition de RIESZ, cf PERRISINI [1] page 8, ou D. S. THIAM [1] page 173.

Exemple 3.2.2. Soit Ω le clan engendré par les compacts d'un espace topologique localement compact métrisable séparable.

Soit $M : \Omega \rightarrow cc(E)$ une multimesure monotone. Alors M est s -compacte.

Exemple 3.2.3. Soient $T = \mathbb{R}^n$, $E = L^1(\mathbb{R}^n, dx)$ et Ω le clan engendré par les compacts de $\mathbb{R}^n$. Pour $A \in \Omega$, posons

$$N(A) = \{f \in E, 0 \leq f \leq 1_A\}.$$

N est une multimesure car,

$$\delta^*(y/N(A)) = \int 1_A f^+ dx, \forall f \in L^\infty(dx).$$

De plus N est monotone et s -compacte. On a $N(A) \in cc(E)$, d'après M. VALADIER [1].

Les propriétés de $H^\vee$ et $I^\vee$ se résument dans la proposition 3.2.1.

Propriété 3.2.1. (1) $H^\vee$ contient H_+ , est stable par addition et est réticulé.

(2) $I^\vee$ est croissante et prolonge I .

(3) $I^\vee$ est additive ie $I^\vee(f + g) = I^\vee(f) \dot{+} I^\vee(g)$.

(4) Si (f_n) est une suite croissante de $H^\vee$, alors

$$\sup_n (f_n) \in H^\vee, \text{ et } I^\vee(\sup_n f_n) = \sup_n I^\vee(f_n).$$

preuve

On a bien $H_+ \subset H^\vee$ et $I^\vee$ prolonge I ; soient $f, g \in H^\vee$ et soient $(h_n), (g_n)$ deux suites croissantes de H_+ , telles que

$$f = \sup_n h_n, \text{ et } g = \sup_n g_n.$$

On a :

$$\sup(h_n, g_n) \in H_+, \inf(h_n, g_n) \in H_+,$$

de plus

$$\sup(h_n, g_n) \uparrow \sup(f, g) \text{ et } \inf(h_n, g_n) \uparrow \inf(f, g),$$

donc $H^\vee$ est réticulé.

$$(h_n + g_n) \uparrow f + g \text{ ie } f + g \in H^\vee.$$

$$I^\vee(f + g) = \sup_n I(h_n + g_n) = \sup_n [I(h_n + g_n)] = \sup_n I(h_n) \dot{+} \sup_n I(g_n),$$

on a la dernière égalité car : pour tout p, m de $\mathbb{N}^*$ il existe n de $\mathbb{N}^*$ tel que

$$h_m + g_p \leq h_n + g_n$$

donc

$$I(h_m) + I(g_p) \subset \sup_n I(h_n + g_n) \subset \sup_n I(h_n) + \sup_n I(g_n).$$

Soient (h_n^p) une suite de H_+ telle que $(h_n^p) \uparrow f_p$, posons

$$h_n = \sup\{h_n^p, p = 1, \dots, n\} \in H_+,$$

on a

$$(h_n^p) \leq h_n \leq f_n, \forall p \leq n.$$

ie

$$f_p = \sup_n (h_n^p) \leq \sup_n h_n \leq \sup_n f_n,$$

ie

$$\sup_n f_n = \sup_n h_n \in H^\vee$$

et

$$I^\vee(\sup_n f_n) = \sup_n I(h_n)$$

or

$$I(h_n) \subset I^\vee(f_n) \subset I^\vee(\sup_n f_n)$$

donc

$$\sup_n I(h_n) = I^\vee(\sup_n f_n) = \sup_n I^\vee(f_n).$$

□

3.2.1 Intégrale supérieure positive I^* de Daniell

Définition 3.2.2. On appelle intégrale supérieure I^* l'application,

$$I^* : \bar{R}_+^T \longrightarrow cf(E), \text{ définie par}$$

$$\begin{cases} I^*(f) = \inf\{I^\vee(\psi), \psi \in H^\vee(\Lambda), \psi \geq f\}, \text{ si } \{\psi \in H^\vee, \psi \geq f\} \neq \emptyset, \text{ et} \\ I^*(f) = E \text{ sinon.} \end{cases}$$

La borne inférieure est prise dans $cf(E)$ ie l'intersection.

$$I^*(f) = \bigcap \{I^\vee(\psi), \psi \in H^\vee(\Lambda), \psi \geq f\},$$

3.2.2 les Propriétés de $H^\vee$ et I^*

Propriété 3.2.2. Soient $f \in \bar{R}_+^T$, $f_n = f1_{I_n} \uparrow f$.

S'il existe $\psi \in H^\vee$ telle que $\psi \geq f$ on a :

$$\sup_n I^*(f_n) = I^*(f),$$

il existe $g_n \uparrow f$, avec $g_n \leq f_n$, $g_n \leq \psi_n$, $\psi_n \in H_+$, $\psi_n \uparrow \psi$, tel que

$$I^*(g_n) \in cc_+(E), \text{ et } \sup_n I^*(g_n) = I^*(f).$$

preuve :

Soit $f \leq \psi$, il existe $(h_p) \uparrow \psi$, $h_p \in H_+$. Posons

$$\psi_n = h_n 1_{T_n} \in H_+,$$

on a

$$\psi_n \uparrow \psi, f_n = f 1_{T_n} \leq f$$

, d'où

Propriété 3.2.3. (1) I^* est croissante et prolonge $I^\vee$.

(2) I^* est sous additive ie

$$I^*(f + g) \subset I^*(f) + I^*(g).$$

preuve :

On a bien (1). De plus soient $f, g \in \bar{R}_+^T$, telles qu'il existe

$$\Phi, \Psi \in H^\vee, f \leq \Phi, g \leq \Psi$$

(sinon c'est évident) on a

$$I^*(f + g) \subset I^\vee(\Phi) + I^\vee(\Psi).$$

D'après la proposition ci-après il existe

$$f_n, \Phi_n, g_n, \Psi_n$$

telles que

$$f_n \leq \Phi_n, \Phi_n \in H_+.$$

On a

$$g_n \leq \Psi_n, \Psi_n \in H_+$$

et

$$\sup_n f_n = f, f_n \uparrow f, g_n \uparrow g \text{ et } \sup_n g_n = g.$$

Propriété 3.2.4. Si $A \in \Omega$ alors $1_A \in H^\vee$ et,

$$I^\vee(1_A) = M(A) = \sup_n M(A \cap T_n),$$

de plus

$$T \in H^\vee$$

et

$$I^\vee(1_T) = \sup_n M(T_n).$$

preuve

$1_{A \cap T_n} \uparrow 1_A$ et

$$1_{A \cap T_n} \in H_+,$$

donc on obtient

$$1_A \in H^\vee$$

et

$$I^\vee(1_A) = \sup_n I(1_{A \cap T_n}) = \sup_n M(A \cap T_n).$$

De plus on a

$$A_n = A - T_n \downarrow \emptyset$$

et

$$A_n \in \Omega, A = A_n \cup (A \cap T_n), A_n \cap (A \cap T_n) = \emptyset.$$

On en déduit

$$M(A) = M(A_n) + M(A \cap T_n) \subset M(A_n) + I^\vee(1_A).$$

En passant à la limite en utilisant (i) ou (ii), on a :

$$M(A) \subset I^\vee(1_A).$$

De plus

$$A \cap T_n \subset A,$$

on obtient alors que

$$M(A \cap T_n) \subset M(A),$$

ie

$$I^\vee(1_A) = \sup_n M(A \cap T_n) = M(A).$$

□

Propriété 3.2.5. Soit $f \in \bar{R}_+^T$, pour $y \in E'$;

$$\text{soient } I_y(h) = \delta^*(y/I(h)),$$

avec

$$h \in H_+$$

et

$$I_y(h) = I_y(h^+) - I_y(h^-)$$

si

$$h \in H, \text{ où } h^+ = \sup(h, 0)$$

et

$$h^- = \sup(-h, 0)$$

. On a,

$$I_y^*(f) = \delta^*(y/I^*(f)).$$

preuve

I_y est une intégrale de DANIELL d'après D.S. THIAM [1].

S'il n'existe pas de $\psi \in H^\vee$ tel que $\psi \geq f$ on a

$$I_y^*(f) = +\infty$$

et

$$I^*(f) = E,$$

ie

$$I_y^*(f) = \delta^*(y/I^*(f)).$$

On suppose qu'il existe

$$\psi \in H^\vee \text{ tel que } \psi \geq f,$$

d'après la proposition 3.2.2 il existe

$$(g_n) \uparrow f \quad g_n \in \bar{R}_+^T,$$

telle que

$$I^*(f) = \sup_n I^*(g_n)$$

et

$$I^*(g_n) \in cc_+(E)$$

$$\delta^*(y/I^*(f)) = \delta^*(y/\sup_n I^*(g_n)) = \sup_n \delta^*(y/I^*(g_n)).$$

Or d'après le lemme 2-1 D. S. THIAM [1],

$$\delta^*(y/I^*(g_n)) = I_y^*(g_n),$$

d'où

$$\delta^*(y/I^*(f)) = \sup_n I_y^*(g_n) = I_y^*(f). \quad \square$$

Théorème 3.2.1. Soit (f_n) , $n \geq 1$ une suite croissante de $\bar{R}_+^T$ on a

$$\sup_n I^*(f_n) = I^*(\sup_n f_n) \text{ dans } cf(E).$$

preuve :

$$\forall y \in E, \sup_n I_y^*(f_n) = I_y^*(\sup_n f_n)$$

ie,

$$\sup_n \delta^*(y/I^*(f_n)) = \delta^*(y/I^*(\sup_n f_n)),$$

$$\text{ie } \delta^*(y/\sup_n I^*(f_n)) = \delta^*(y/I^*(\sup_n f_n)),$$

d'où l'égalité cherchée. □

Propriété 3.2.6. Si (f_n) , $n \geq 1$ est une suite de $\bar{R}_+^T$ on a

$$I^*(\sum_{n \geq 1} f_n) \subset \sup_n (I^*(f_1) \dot{+} \dots \dot{+} I^*(f_n)).$$

preuve :

$$I^* \text{ étant sous additive, on a } I^*(f_1 \dot{+} \dots \dot{+} f_p) \subset I^*(f_1) \dot{+} \dots \dot{+} I^*(f_p) \subset \sup_n (I^*(f_1) \dot{+} \dots \dot{+} I^*(f_n))$$

On applique ensuite le théorème 3.2.1 à la suite $U_p = \sum_{n \geq 1} f_i$ on a le résultat. □

Propriété 3.2.7. : (lemme de Fatou.)

Soient (f_n) une suite de $\bar{R}_+^T$, on a

$$I^*(\liminf f_n) \subset \liminf I^*(f_n).$$

preuve :

Soit $g_n = \inf_{p \geq 0} f_{n+p}$, g_n est une suite croissante de $\bar{R}_+^T$. D'après le théorème 3.2.1

$$I^*(\sup_n g_n) = \sup_n I^*(g_n), \text{ or } g_n \leq f_{n+p},$$

donc

$$I^*(g_n) \subset \inf_{p \geq 0} I^*(f_{n+p}), \sup_n g_n = \liminf f_n. \quad \square$$

3.2.3 Intégrale inférieure positive I_* de Daniell

Nous allons définir d'abord $I^\wedge$

Définition 3.2.3. $I^\wedge$ désigne l'ensemble des fonctions f de $\bar{R}_+^T$ tel que il existe (h_n) une suite de H_+ avec

$$h_n \downarrow f,$$

$$I^\wedge : H^\wedge \longrightarrow cc_+(E), f = \inf_n h_n \longrightarrow I^\wedge(f) = \inf_n I(h_n).$$

$I^\wedge$ est une application d'après proposition 2

Propriété 3.2.8. $H^\wedge$ est stable par addition et est réticulé $I^\wedge$ est croissante additive et prolonge I .

Si (f_n) est une suite décroissante de $H^\wedge$ alors $\inf_n f_n \in H^\wedge$ et $I^\wedge(\inf_n f_n) = \inf_n I^\wedge(f_n)$.

preuve :

On a bien $H_+ \subset H^\wedge$ et $I^\wedge$ prolonge I .

Soient $(f_n), g_n, f, g$ avec

$$f, g \in H^\wedge, g_n \downarrow g, f_n \downarrow f \text{ et } f_n, g_n \in H_+,$$

on a

$$f_n + g_n \downarrow f + g, f + g \in H^\wedge,$$

$$I^\wedge(f + g) = \inf_n I(f_n + g_n) = \inf_n [I(f_n) + I(g_n)] = \inf_n I(f_n) + \inf_n I(g_n),$$

comme pour la preuve de la proposition 3.2.1.

On a aussi

$$\sup(f_n, g_n) \downarrow \sup(f, g) \text{ et } \inf(f_n, g_n) \downarrow \inf(f, g).$$

Soit

$$h_n^p \downarrow f_p, h_n^p \in H_+,$$

posons

$$h_n = \inf\{h_n^p, p = 1, \dots, n\},$$

$$\text{on a } h_n \in H_+ \text{ et } f_n \leq h_n \leq h_n^p, p \leq n, n \geq 1.$$

On obtient,

$$\inf_n f_n \leq \inf_n h_n \leq \inf_p f_p,$$

$$\text{ie } \inf_n f_n = \inf_n h_n \in H^\wedge, I^\wedge(\inf_n f_n) = \inf_n I^\wedge(h_n).$$

$$\inf_n f_n \leq f_n \leq h_n$$

donne

$$I^\wedge(\inf_n f_n) \subset I^\wedge(f_n) \subset I^\wedge(h_n) = I(h_n)$$

d'où

$$I^\wedge(\inf_n f_n) = \inf_n I^\wedge(f_n).$$

□

Définition 3.2.4. On appelle intégrale inférieure I_* , l'application,

$$I_* : \bar{R}_+^T \longrightarrow cf(E),$$

$$I_*(f) = \sup\{I^\wedge(g), g \in H^\wedge, g \leq f\}, \text{ dans } cf(E).$$

$$\text{NB : } 0 \in \{g \in H^\wedge, g \leq f\}$$

3.2.4 les Propriétés de Prolongement de I_*

NB : On élargit $L_+^1(I)$ en acceptant que l'intégrale d'une fonction soit à valeurs $\text{cfb}(E)$, et ceci même pour une multimesure s -compacte à valeurs $\text{cc}_+(E)$.

Propriété 3.2.9. I_* est croissante et prolonge I .
 I_* est sur additive ie

$$I_*(f) \dot{+} I^*(g) \subset I_*(f + g).$$

preuve :

on a bien I_* est croissante et prolonge I .

Soient

$$f, g \in \bar{R}_+^T, \Phi, \Psi \in H^\wedge$$

avec

$$\Phi \leq f, \Psi \leq g,$$

on a

$$I^\wedge(\Phi) + I^\wedge(\Psi) = I^\wedge(\Phi + \Psi) \subset I_*(f + g), \text{ de plus}$$

$$\sup[\{I^\wedge(\Phi), \Phi \in H^\wedge, \Phi \leq f\} + \{I^\wedge(\Psi), \Psi \in H^\wedge, \Psi \leq g\}] =$$

$$\sup\{I^\wedge(\Phi), \Phi \in H^\wedge, \Phi \leq f\} \dot{+} \sup\{I^\wedge(\Psi), \Psi \in H^\wedge, \Psi \leq g\}, \text{ car}$$

ces ensembles sont filtrants croissants, on a

$$I_*(f) \dot{+} I_*(g) \subset I_*(f + g).$$

□

3.2.5 Quasi-intégrabilité de l'intégrale positive de Daniell

Définition 3.2.5. (1) $f \in \bar{R}_+^T$ est quasi-intégrable si $I^*(f) = I_*(f)$.

(2) f est intégrable si f est quasi intégrable et $I^*(f) \in \text{cfb}(E)$.

(3) On désigne par $L_+^1(I_+)$ l'ensemble des fonctions intégrables par rapport à l'intégrale positive de Daniell.

NB : On élargit $L_+^1(I_+)$ en acceptant que l'intégrale d'une fonction soit à valeurs $\text{cfb}(E)$, et ceci même pour une multimesure s -compacte à valeurs $\text{cc}_+(E)$.

3.3 Étude des propriétés éventuelles par rapport à I_+ et $L_+^1(I_+)$

Propriété 3.3.1. I_* est croissante et prolonge I .

I_* est sur additive ie

$$I_*(f) \dot{+} I^*(g) \subset I_*(f + g).$$

preuve :

on a bien I_* est croissante et prolonge I .

Soient

$$f, g \in \bar{R}_+^T, \Phi, \Psi \in H^\wedge$$

avec

$$\Phi \leq f, \Psi \leq g,$$

on a

$$\begin{aligned} I^\wedge(\Phi) + I^\wedge(\Psi) &= I^\wedge(\Phi + \Psi) \subset I_*(f + g), \text{ de plus} \\ \sup[\{I^\wedge(\Phi), \Phi \in H^\wedge, \Phi \leq f\} + \{I^\wedge(\Psi), \Psi \in H^\wedge, \Psi \leq g\}] &= \\ \sup\{I^\wedge(\Phi), \Phi \in H^\wedge, \Phi \leq f\} \dot{+} \sup\{I^\wedge(\Psi), \Psi \in H^\wedge, \Psi \leq g\}, &\text{ car} \end{aligned}$$

ces ensembles sont filtrants croissants, on a

$$I_*(f) \dot{+} I_*(g) \subset I_*(f + g).$$

□

Propriété 3.3.2. (1) Pour $f \in \bar{R}_+^T$, on a $I_*(f) \subset I^*(f)$.

(2) Les éléments de $H^\vee$ sont quasi-intégrables et $H^\wedge \subset L_+^1(I)$.

(3) $L_+^1(I)$ est stable par addition.

(4) L'application $\int(\cdot)I : L_+^1(I) \longrightarrow cf b(E)_+$, définie par :

$$f \longrightarrow \int f I = I^*(f) = I_*(f),$$

prolonge I et est croissante.

(5) On a $\int(f + g)I = \int f I \dot{+} \int g I$, si $f, g \in L_+^1(I)$.

preuve :

S'il n'existe pas un élément de $H^\vee$ majorant f on a $I^*(f) = E$ et donc $I_*(f) \subset I^*(f)$. Sinon, soient $\Phi \in H^\wedge, \Psi \in H^\vee$, $\Phi \leq f \leq \Psi$ il existe h_n, g_n de H_+ telles que $h_n \uparrow \Psi$ et $g_n \downarrow \Phi$. On a

$$I(h_n) + I(h_n - g_n)^- = I(h_n - g_n)^+ + I(g_n).$$

On en déduit donc que,

$$I^\wedge(\Phi) = \inf_n I(g_n) \subset I(g_n) \subset I(h_n) + I(h_n - g_n)^-, \text{ d'où}$$

$$I^\vee(\Psi) + I(h_n - g_n)^- \supset I^\wedge(\Phi), I(h_n - g_n)^- \in cc_+(E),$$

et

$$I(h_n - g_n)^- \downarrow 0.$$

On en déduit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta^*(y/I(h_n - g_n)^-) = 0.$$

Or pour

$$y \in E', \delta^*(y/I^\vee(\Psi)) + \delta^*(y/I(h_n - g_n)^-) \geq \delta^*(y/I^\wedge(\Phi)),$$

donc

$$I^\vee(\Psi) \supset I^\wedge(\Phi).$$

On obtient,

$$I^\wedge(\Phi) \subset I^*(f), \text{ et } I_*(f) \subset I^*(f).$$

Soit $\Psi \in H^\vee$ on a,

$$\begin{aligned} I_*(\Psi) &= \sup\{I^\wedge(\Phi), \Phi \in H^\wedge, \Phi \leq \Psi\} \supset \\ &\sup\{I(h_n), h_n \uparrow \Psi, h_n \in H_+\} \supset I^\vee(\Psi) = I^*(\Psi). \end{aligned}$$

On obtient $I_*(\Psi) = I^*(\Psi)$.

Si $\Phi \in H^\wedge$, il existe $g_n \in H_+$, $g_n \downarrow \Phi$, tel que :

$$I_*(\Phi) = I^\wedge(\Phi) = \inf_n I(g_n) \supset \inf\{I^\vee(\Psi), \Psi \in H^\vee, \Psi \geq \Phi\} \supset I^*(\Phi).$$

Cela donne

$$I^*(\Phi) = I_*(\Phi) = I^\wedge(\Phi) \in cc_+(E) \subset cfb(E),$$

d'où $\Phi \in L_+^1(I)$.

Soient $f, g \in L_+^1(I)$, on a

$$I_*(f + g) = I^*(f + g) \subset I^*(f) \dot{+} I^*(g) = I_*(f) \dot{+} I_*(g) \subset I_*(f + g),$$

donc $I_*(f + g) = I^*(f + g) = \int f I \dot{+} \int g I \in cfb(E)$.

De plus I^* et I_* prolongent I , donc $\int(\cdot)I$ prolonge I . De plus si $f \leq g$, on a $I^*(f) \subset I^*(g)$, ie $\int f I \subset \int g I$. $\square$

3.4 les théorèmes de convergences monotones et dominées au sens de l'ordre

Théorème 3.4.1. Soit (f_n) une suite décroissante de $\bar{R}_+^T$, on suppose que $I_*(f_1) \in cfb(E)$, alors on a $I_*(\inf_n f_n) = \inf_n I_*(f_n)$.

Propriété 3.4.1. Pour tout $f \in \bar{R}_+^T$ telle que $I_*(f) \in \text{cfb}(E)$, on a pour tout $y \in E'$, $(I_y)_*(f) = \delta^*(y/I_*(f))$.

$$I_*(\inf_n f_n) \subset \inf_n I_*(f_n)$$

d'où

$$(i) : \delta^*(y/I_*(\inf_n f_n)) \leq \delta^*(y/\inf_n I_*(f_n)) \quad \forall y \in E'.$$

or $(I_y)_*(\inf_n f_n) = \inf_n (I_y)_*(f_n)$ La proposition 3.2.1 donne

$$(ii) : \delta^*(y/I_*(\inf_n f_n)) = \inf_n \delta^*(y/I_*(f_n)).$$

et avec (i) on a

$$\inf_n \delta^*(y/I_*(f_n)) \leq \delta^*(y/\inf_n I_*(f_n)),$$

or

$$\delta^*(y/\inf_n I_*(f_n)) \leq \inf_n \delta^*(y/I_*(f_n)),$$

on a alors

$$\inf_n \delta^*(y/I_*(f_n)) = \delta^*(y/\inf_n I_*(f_n)),$$

avec (ii) il vient,

$$\delta^*(y/I_*(\inf_n f_n)) = \delta^*(y/\inf_n I_*(f_n)), \quad \forall y \in E', \text{ ie } I_*(\inf_n f_n) = \inf_n I_*(f_n). \quad \square$$

preuve de la proposition I-1-13 :

Soit $\Phi \in H^\Lambda$, $(h_n) \in H_+$ on a pour tout $y \in E'$, $(I_y)^\Lambda(\Phi) = \inf_n I_y(h_n) = \inf_n \delta^*(y/I(h_n)) = \delta^*(y/\inf_n I(h_n))$ car $I(h_n)$ et $\inf_n I(h_n)$ sont dans $\text{CC}^+(E)$.

D'où :

$$(1) : (I_y)^\Lambda(\Phi) = \delta^*(y/I^\Lambda(\Phi)), \quad \Phi \in H^\Lambda, y \in E'.$$

$(I_y)_*(f) = \sup\{\delta^*(y/I^\Lambda(\Phi)), \Phi \in H^\Lambda, \Phi \leq f\}$ $\Phi \leq f$, $I^\Lambda(\Phi) \subset I_*(f)$ d'où $\delta^*(y/I^\Lambda(\Phi)) \leq \delta^*(y/I_*(f))$.

$$(2) : (I_y)_*(f) \leq \delta^*(y/I_*(f)).$$

Il reste à montrer (3) :

$$(3) : \delta^*(y/I_*(f)) \leq (I_y)_*(f)$$

La famille $\{I^\Lambda(\Phi), \Phi \in H^\Lambda, \Phi \leq f\}$ est filtrante croissante et son sup qui est $I_*(f) \in \text{cfb}_+(E)$; donc $\forall y \in E'$ il existe une suite croissante $I^\Lambda(\Phi_n)$ telle que

$$\delta^*(y/I_*(f)) = \delta^*(y/\sup_n I^\Lambda(\Phi_n)) = \sup_n \delta^*(y/I^\Lambda(\Phi_n)) \leq$$

$$\sup\{\delta^*(y/I^\Lambda(\Phi)), \Phi \leq f, \Phi \in H^\Lambda\} = (I_y)_*(f),$$

on en déduit (3). □

Théorème 3.4.2. (Convergence monotone)

Si (f_n) est une suite croissante de $L_+^1(I)$ telle que $\sup_n \int f_n I \in \text{cfb}(E)$ alors,

$$\sup_n f_n \in L_+^1(I), \text{ et } \int \sup_n f_n I = \sup_n \int f_n I.$$

preuve :

D'après le théorème 3.2.1 on a

$$I^*(\sup_n f_n) = \sup_n I^*(f_n), \text{ d'où}$$

$$\sup_n I_*(f_n) \subset I_*(\sup_n f_n) \subset I^*(\sup_n f_n) = \sup_n I^*(f_n) = \sup_n I_*(f_n).$$

On a donc

$$I_*(\sup_n f_n) = I^*(\sup_n f_n) = \sup_n \int f_n I \in \text{cfb}(E). \quad \square$$

Propriété 3.4.2. Lemme de FATOU :

Soit (f_n) , $n \geq 1$, une suite de $\bar{R}_+^T$ telle que

$$I_*(\sup_n f_n) \in \text{cfb}(E)$$

alors on a :

$$I_*(\lim f_n) \supset \lim I_*(f_n).$$

preuve :

Soit $g_n = \sup_{p \geq 0} f_{n+p}$, (g_n) est une suite décroissante positive.

On a

$$I_*(g_1) = I_*(\sup_n f_n) \in \text{cfb}(E)$$

par hypothèse. D'après le théorème 3.4.1 on a

$$I_*(\inf_n g_n) = \inf_n I_*(g_n) \supset \inf_n \sup_{p \geq 0} I_*(f_{n+p}).$$

□

Théorème 3.4.3. convergence monotone :

Soit (f_n) une suite décroissante de $L_+^1(I)$ on a $\inf_n \int f_n I \in L_+^1(I)$ et

$$\int \inf_n f_n I = \inf_n \int f_n I.$$

preuve :

D'après le théorème 3.4.1 on a $I_*(\inf_n f_n) = \inf_n I_*(f_n) = \inf_n I^*(f_n)$.

Nous avons $I_*(\inf_n f_n) \subset I^*(\inf_n f_n) \subset \inf_n I^*(f_n) = I_*(\inf_n f_n)$,

donc $I_*(\inf_n f_n) = I^*(\inf_n f_n) = \inf_n \int f_n I \subset \int f_n I \in \text{cfb}(E).$ □

Théorème 3.4.4. *convergence dominée :*

Soit (f_n) une suite de $L_+^1(I)$ telle qu'il existe $g \in \bar{R}_+^T$, avec $I^*(g) \in \text{cfb}(E)$, et $f_n \leq g$ pour $n \geq 1$.

Si (f_n) converge simplement vers f on a :

$$f \in L_+^1(I), \text{ et } \int fI = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n I \text{ au sens de l'ordre.}$$

preuve :

On a $0 \leq f_n \leq g$ et $f_n \in L_+^1(I)$. D'après le lemme de FATOU proposition 3.2.7

on a $I^*(\liminf f_n) \subset \liminf I^*(f_n)$. On obtient alors,

$I_*(\liminf f_n) \subset I^*(\liminf f_n) \subset \liminf I^*(f_n) = \liminf I_*(f_n)$ d'où

$$(i) : I_*(\liminf f_n) \subset I^*(\liminf f_n) \subset \liminf \int f_n I ,$$

de plus $\sup f_n \leq g$ donc $I_*(\sup f_n) \in \text{cfb}(E)$. d'après le lemme de FATOU proposition 3.4.2 on

a $I_*(\overline{\liminf f_n}) \supset \overline{\liminf I_*(f_n)}$ et avec (i) on obtient :

$$I_*(\liminf f_n) \subset I^*(\liminf f_n) \subset \liminf \int f_n I \subset \overline{\liminf \int f_n I} \subset I_*(\overline{\liminf f_n}).$$

Or $(\overline{\liminf f_n}) = \liminf f_n = f$ donc,

$$I_*(f) = I^*(f) = \liminf \int f_n I \subset \overline{\liminf \int f_n I} \subset I^*(g) \in \text{cfb}(E). \square$$

Théorème 3.4.5. $L_+^1(I) = \cap_{y \in E'} L_+^1(I_y)$ et si $f \in L_+^1(I)$ on a :

$$\delta^*(y / \int fI) = \int f \delta^*(y / I(.)), \forall y \in E'.$$

preuve :

Si $f \in L_+^1(I)$ on a $I_*(f) = I^*(f) \in \text{cfb}_+(E)$ d'où

$$I_y^*(f) = (I_y)_*(f) = \delta^*(y / I^*(f)) = \delta^*(y / \int fI) \in R, \forall y \in E',$$

$$\text{ie } f \in \cap_{y \in E'} L_+^1(I_y) \text{ et } \delta^*(y / \int fI) = \int f I_y.$$

$$\text{Soit } f \in \cap_{y \in E'} L_+^1(I_y)(I_y), \text{ on a } (I_y)_*(f) = I_y^*(f) \in R.$$

On en déduit que $I_y(f) = \delta^*(y / I^*(f)) \in R, \forall y \in E'$.

On obtient alors $I^*(f) \in \text{cfb}(E)$ et $I_*(f) \in \text{cfb}(E)$. □

Propriété 3.4.3. (1) $L_+^1(I)$ est réticulé.

[2] Si $f, g \in L_+^1(I)$ alors $|f-g| \in L_+^1(I)$.

(3) Si $f, g \in L_+^1(I)$ et $g \leq f$ alors $(f-g) \in L_+^1(I)$.

(4) $L_+^1(I)$ est un cône convexe et $\int(\cdot)I$ est positivement homogène.

preuve :

Soient $f, g \in L_+^1(I)$ on a d'après le théorème 3.4.5 : $f, g \in L_+^1(I_y)$ pour tout $y \in E'$ donc $\inf(f, g), \sup(f, g) \in \bigcap_{y \in E'} L_+^1(I_y) = L_+^1(I)$ d'où le résultat. Il reste à montrer que l'intégrale est positivement homogène.

$$\delta^*(y/I^*(\alpha f)) = (I_y)^*(\alpha f) = \alpha(I_y)^*(f) = \alpha\delta^*(y/I^*(f)) = \delta^*(y/\alpha I^*(f)), \forall \alpha > 0,$$

d'où $I^*(\alpha f) = \alpha I^*(f)$.

Si $I^*(f) \in cfb(E)$, $I^*(\alpha f) = \alpha I^*(f)$, $\forall \alpha \geq 0$, et $I_*(\alpha f) \subset I^*(\alpha f) = \alpha I^*(f) \in cfb(E)$, donc $I_*(\alpha f) \in cfb(E)$. D'après proposition 3.4.1 on a :

$$\delta^*(y/I_*(\alpha f)) = (I_y)_*(\alpha f) = \alpha(I_y)_*(f) = \alpha\delta^*(y/I_*(f)) = \delta^*(y/\alpha I_*(f)).$$

On obtient $I_*(\alpha f) = \alpha I_*(f)$. Si $f \in L_+^1(I)$, $I^*(f) = I_*(f) \in cfb(E)$, donc

$$\alpha I^*(f) = \alpha I_*(f) \text{ ie } I^*(\alpha f) = I_*(\alpha f) = \alpha I^*(f) = \alpha \int f I \in cfb(E).$$

De plus d'après la proposition 3.3.2 on a : $L_+^1(I)$ est stable par addition. □

NB : Pour $1_A \in L_+^1(I)$ on pose $\bar{M}(A) = \int 1_A I$. Soient

$$\mathfrak{S}_M = \{A \subset T / 1_A \in L_+^1(I)\}, \bar{\Omega} = \{A \in \Omega, M(A) \in cfb(E)\},$$

et $\bar{M} : \mathfrak{S}_M \longrightarrow cfb(E)$, $\bar{M}(A) = \int 1_A I$.

Théorème 3.4.6. $\mathfrak{S}_M$ est un δ -clan contenant $\bar{\Omega}$.

$\bar{M}$ est une multimesure faible monotone s -compacte.

Si $\bar{\Omega} = \Omega$ ie M est à valeurs dans $cfb(E)$ alors : $\Omega \subset \mathfrak{S}_M$, $\bar{M}$ prolonge M et réciproquement.

$\mathfrak{S}_M$ est une tribu si et seulement si $I^*(1_T) = \sup_n M(T_n) \in cfb(E)_+$.

preuve :

Si $A, B \in \mathfrak{S}_M$, $1_{A \cup B} = \sup(1_A, 1_B) \in L_+^1(I)$,

$$1_{A-B} = 1_{A \cup B} - 1_B \in L_+^1(I).$$

Si $(A_n)_{n \geq 1}$ est une suite de $\mathfrak{S}_M$, $(\bigcap_{i=1}^n A_i)$ est une suite décroissante de $\mathfrak{S}_M$.

Avec le théorème de la convergence monotone on a $\bigcap_n A_n \in \mathfrak{S}_M$.

Si $A \in \Omega$, on a $1_A \in H^\vee$, et $I^\vee(1_A) = M(A)$, d'après la proposition 3.2.4. Donc si $A \in \bar{\Omega}$, alors $A \in \mathfrak{S}_M$ et $\bar{M}(A) = I^\vee(1_A) = M(A)$. Si $(A_n) \downarrow \emptyset, A_n \in \mathfrak{S}_M$ on a d'après le théorème 3.4.5 et le théorème de la convergence monotone,

$$\forall y \in E' \lim_{n \rightarrow +\infty} \delta^*(y / \int 1_{A_n} I) = 0,$$

donc $\bar{M}$ est une multimesure faible et $0 \in \bar{M}(A)$. Si $\mathfrak{S}_M$ est une tribu, pour tout $A \in \Omega$, on a $A = \bigcup_n (A \cap T_n) \in \mathfrak{S}_M$, ie $\Omega \subset \mathfrak{S}_M$, et $\bar{\Omega} = \Omega$, $T \in \mathfrak{S}_M$ et $I^\vee(1_T) \in cfb(E)$. Si $I^\vee(1_T) \in cfb(E)$, $\bigcup_{i=1}^n A_i$ est une suite croissante de $\mathfrak{S}_M$.

Le théorème de la convergence monotone donne alors :

$\bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathfrak{S}_M$ ie $\mathfrak{S}_M$ est une tribu. □

Propriété 3.4.4. Soient $M_1, M_2 : \Omega \rightarrow \text{cfb}(E)$ deux multimesures faibles s -compactes, monotones, on a : $M_1 = M_2$ si et seulement si $M_1(A) = M_2(A) \forall A \in \Lambda$.

preuve :

$M_1(A) = M_2(A) \forall A \in \Lambda$ est équivalent à $\bar{M}_1(A) = \bar{M}_2(A)$ or $\bar{M}_i$ restreint à Ω est M_i . $\square$

conclusion

Notre objectif dans ce travail était de développer une théorie de l'intégration positive de Daniell .

Cependant pour assurer par exemple la sous-additivité de $I^* : I^*(f_1 + f_2) \subset I^*(f_1) + I^*(f_2)$, il fallait supposer que $I^*(f_1) \in cc(E), I^*(f_2) \in cc(E)$. En effet , cette sous additivité est basée sur la propriété [3.2.9].

Les différentes notions de multimesures coïncident, si la multimesure M est à valeurs dans $CC(E)$: Voir théorème 3-2 page 93 D. S. THIAM [1].

Cela n'est plus le cas si M est à valeurs dans $cfb(E)$: voir A. COSTE [1] page III-3. C'est la même chose pour une mesure positive finie et une mesure positive à valeurs dans $\bar{R}$.

Bibliographie

.A. Costé [1] : thèse d'état Paris 6 , 1977

C. Castaing et M . Valadier [1] : convex analysis and measurable multifunctions, Springer-Verlag - 1977

Godet - Thobie : Thèse d'état Montpellier , 1975

Pallu De La Barrière :

[1] Quelques propriétés des multimesures , séminaire d'analyse convexe, Montpellier 1973 , exposé n° 11

[2] Multimesures à valeurs convexes fermées Actes du colloque l'intégration vectorielle et multivoque Caen (1975)-Exposé n°4

[3] L'intégration : un nouvel itinéraire d'initiation à l'analyse mathématique L'Ellipse 1997,Paris.

D.S.Thiam [1] : thèse d'état Paris 6 , 1976

M. Valadier [1] : On Strassen theorem- Séminaire d'analyse convexe

G. Dia [1] : Thèse de 3e cycle , université de Dakar , 1978

M. Thiam [1] : Thèse de 3e cycle , université de Dakar , 1979

K. Siggini [1] : Thèse de doctorat , Paris 6 , 1992