Inégalités fonctionnelles et isopérimétrie pour des modèles continus cas d'égalités et phénomènes de rigidité.

Chapitre 1

Introduction générale dans le cadre continu

Ce chapitre introductif présente les éléments de base de notre thèse. Nous mettons l'accent sur les inégalités géométriques de type isopérimétrique et les inégalités fonctionnelles telles que les inégalités de Sobolev, Sobolev logarithmique et trou spectral. Ces inégalités fonctionnelles et géométriques sont présentées d'abord dans leur cadre naturel qui est celui des variétés riemanniennes. Ces inégalités ont été étendues, par Bakry et Émery, dans un cadre plus abstrait qui fait appel à des opérateurs de diffusions. En particulier, nous nous intéressons à l'obtention de ces inégalités avec des constantes optimales. L'accent est mis sur la rigidité et la stabilité de ces inégalités. Notons que les travaux récents, menés notamment par l'école italienne, dus à la notion de minoration de courbure de Ricci sur des espaces métriques mesurés ont abouti à l'établissement de ces inégalités avec constantes optimales dans ce cadre plus général.

1.1 Éléments de géométrie riemannienne

Cette section présente très succinctement quelques éléments de géométrie riemannienne en lien avec les thèmes de la thèse, notamment la notion la courbure de Ricci. Pour une présentation plus complète, nous renvoyons le lecteur à des ouvrages de références tels que [Cha] ou [G-H-L]. Nous supposons connus un bon nombre de préliminaires géométriques.

En premier lieu, nous redonnons la définition de l'opérateur de Laplace–Beltrami et les éléments de base de théorie spectrale pour pouvoir présenter les résultats que nous énoncerons par la suite.

Soit (M, g) une variété riemannienne (sans bord) n dimensionnelle complète et connexe munie de sa métrique riemannienne $g = (g_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$. Le produit scalaire induit par g sera noté $\cdot$. Soit $(x^1, \ldots, x^n)$ un système de coordonnées locales. On note $d\mathrm{vol} = \sqrt{\det g}\,dx^1 \ldots dx^n$ le volume riemannien. On note $\nabla = \nabla_g$ la connection de Levi–Civita, telle que $(\nabla u)_i = \sum_{1\leq j\leq n} g_{ij}\partial_{x_j} u$. Autrement dit, pour tout champ de vecteurs X, on a $X(u) = \nabla u \cdot X$. La divergence d'un champ de vecteur F est définie, en coordonnées locales, par $\mathrm{div}(F) = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{1\leq i\leq n} \partial_i(\sqrt{\det g} F_i)$. L'opérateur de Laplace–Beltrami est définit par $\Delta = \Delta_g = \mathrm{div}\nabla_g$, et s'écrit ainsi $\Delta = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{1\leq i,j\leq n} \partial_i(g_{ij}\sqrt{\det g}\,\partial_j)$. La hessienne d'une fonction lisse f est la forme bilinéaire symétrique définie pour tout champ de vecteurs X et Y par $\mathrm{Hess}(f)(X, Y) = \nabla_X \nabla f \cdot Y$. C'est un fait classique que l'opérateur de Laplace–Beltrami est obtenu en prenant la trace de la hessienne.

Par le théorème de la divergence il s'ensuit, pour toutes fonctions u et $v \in C_c^\infty(M, \mathbb{R})$, la formule d'intégration par parties suivante :

$$\int_M u\Delta v d\mathrm{vol} = \int_M \Delta u\, v d\mathrm{vol} = -\int_M \nabla u \cdot \nabla v d\mathrm{vol}.$$

Ceci est la formule de Green, qui sera fondamentale dans notre étude. Plus généralement, si $(M,g,\mu) = (M,g,e^{-\psi}d\mu)$ est une variété à poids, (avec ψ régulière), on définit l'opérateur $L = \mathrm{div}_\mu \nabla$, avec $\mathrm{div}_\mu F = e^{\psi}\mathrm{div}(e^{-\psi}F)$. On a alors $L = \Delta_g - \nabla\psi\cdot\nabla$, et pour toutes fonctions u et v $C_c^\infty(M,\mathbb{R})$

$$\int_M uLvd\mu = \int_M Luvd\mu = -\int_M \nabla u\cdot\nabla vd\mu.$$

L'opérateur $-\Delta$ est auto-adjoint et semi défini positif sur $C_c^\infty \subset L^2(M)$. Soit W_1 l'espace des fonctions f dans $L^2(M)$ et telles que leurs gradients au sens des distributions ∇f soient également dans $L^2(M)$. $W^1(M)$ est muni d'une structure d'espace de Hilbert par le produit scalaire suivant :

$$\langle u,v\rangle_{W^1} = \int_M uv d\mathrm{vol} + \int_M \nabla u\cdot\nabla v d\mathrm{vol}.$$

Si $W_0^1(M)$ désigne l'adhérence de $C_c^\infty(M)$ dans $W_1(M)$, on définit

$$W_0^2(M) = \{f\in W_0^1(M),\ \Delta f\in L^2(M)\},$$

où Δf est compris au sens des distributions. Alors par la formule de Green :

$$\forall u\in W_0^1(M),\ v\in W_0^2(M),\ \int_M u\Delta v d\mathrm{vol} = -\int_M \nabla u\cdot\nabla v d\mathrm{vol}.$$

Si la variété est complète, on peut étendre le laplacien en un opérateur auto-adjoint et semi-défini positif sur $L^2(M)$. Dans toute la suite, la notation Δ désignera cette extension. Notons que la formule de Green reste alors valable. De plus, par la théorie spectrale des opérateurs auto-adjoints, le spectre du laplacien $\sigma(-\Delta)$ est un sous ensemble de $\mathbb{R}^+$. Lorsque la variété est compacte ou pour des mesures à poids $d\mu = e^{-\psi}d\mathrm{vol}$ telles que $\mu(M)$ est finie, le spectre est discret et $\sigma(-L) = (\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\ldots)$ avec $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 > 0$, et pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\lambda_k \le \lambda_{k+1}$.

Une notion fondamentale en géométrie riemannienne qui sera centrale dans la suite de l'exposé est celle de courbure. Nous allons (très) succinctement donner la définition de courbure de Ricci. Grossièrement, la courbure de Ricci reflète la distorsion du volume le long d'une géodésique. Intuitivement cette distorsion est un grossissement en courbure positive ou un rétrécissement en courbure négative. Sans rentrer dans une définition générale qui utilise la notion de tenseur riemannien (voir [G-H-L], chapitre 1) nous la définissons à partir des champs de Jacobi.

Soit γ une géodésique de M. Soit γ_s une perturbation de γ au voisinage de 0 et $J(t) = \frac{d}{ds}_{|0}\gamma_s(t) \in T_{\gamma(t)}M$. $J(t)$ est appelé champ de Jacobi. Alors il existe une famille d'applications linéaires $R(t)$: $T_{\gamma(t)}M \mapsto T_{\gamma(t)}M$, indexées sur $t\in[0,1]$ telle que pour tout champ de Jacobi $t\mapsto J(t)$ le long de γ, on a l'équation différentielle $J''(t)+R(t)J(t) = 0$, où $J''(t)$ désigne la dérivée seconde covariante le long de γ. Soit maintenant $B_t = (e_1(t),\ldots,e_n(t))$ un repère orthonormal mobile le long de γ. Si on note encore $J(t)$ la matrice colonne représentant le vecteur $J(t)$ dans B_t, il existe pour tout une matrice de taille n, également notée $R(t)$, telle que l'on a l'équation différentielle $J''(t)+R(t)J(t) = 0$. Alors $R(t)$ est une matrice symétrique et $R(t)\gamma(t) = 0$. De plus, la quantité $tr(R(t))$ ne dépend que du point $x = \gamma(t)$ et du vecteur $v = \gamma(t)$. En particulier elle est indépendante du repère choisi. On peut ainsi définir :

Définition 1.1.1. *Soit $x = \gamma(t)$ et $v = \gamma'(t)$. La quantité $tr(R(t))$, notée $Ric_x(v,v)$, est appelée courbure de Ricci (en x et en v).*

On peut montrer que, pour un certain $x\in M$ fixé, l'application $v\mapsto Ric_g(v,v)(x)$ est une forme quadratique sur l'espace tangent T_xM. On peut donc prolonger celle-ci en une forme bilinéaire symétrique sur $T_xM\times T_xM$, également notée Ric_g (au point x).

Avant de poursuivre, donnons des exemples simples, ceux de $\mathbb{R}^n$ et les sphères euclidiennes $\mathbb{S}^n$.

La métrique $(g_{ij})_{1\le i,j\le n}$ est simplement donnée par la matrice identité. Le laplacien sur $\mathbb{R}^n$ est le laplacien usuel donné par $\sum_{i=1}^n \partial_i^2$. Notons que la formule de Green est la formule d'intégration par parties usuelle. Dans $\mathbb{R}^n$, la matrice ci dessus $R(t)=0$ donc l'espace euclidien est de courbure nulle.

Sur les sphères euclidiennes, la métrique est donnée par $g_{ij}=\delta_{ij}-x^ix^j$. Alors $\det(g_{ij})_{1\le i,j\le n}=\frac{c_n}{\sqrt{(1-|x|^2)}}$, où c_n est une constante de normalisation, et l'opérateur de Laplace–Beltrami s'écrit

$$\Delta=\sum_{1\le i,j\le n}(\delta_{ij}-x^ix^j)\partial_{ij}-n\sum_{i=1}^n x^i\partial_i,$$

qui prend également la forme suivante $\Delta=\sum_{1\le i<j\le n}(x^j\partial_i-x^i\partial_j)^2$.

La matrice de courbure vaut $R=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_{n-1}\end{pmatrix}$ et ainsi la courbure de Ricci est constante et égale à $n-1$.

Sous des conditions de minoration de la courbure de Ricci, de nombreuses inégalités fonctionnelles et géométriques sont connues. Le but des sections qui suivent est de présenter ces inégalités, dont les applications sont au carrefour de l'analyse, de la géométrie et la théorie des probabilités.

1.2 Isopérimétrie

Le problème isopérimétrique a une longue histoire et peut être posé dans des espaces très généraux. En effet, on a seulement besoin d'une mesure pour définir le "volume" et d'une distance pour définir le "bord" d'un ensemble. Sur un espace métrique (E,d,μ), on considère le contenu de Minkowski

$$\mu^+(A)=\liminf_{r\to 0}\frac{\mu(A_r)-\mu(A)}{r},$$

où $A_r=\{y\in E, d(x,A)\le r\}$, avec $d(x,A)=\inf\{d(x,y),\ y\in A\}$. Ceci constituera notre définition du bord d'un ensemble. Définissons le profil isopérimétrique de l'espace de la façon suivante :

$$\mathscr{I}_{(E,d,\mu)}(v)=\inf\{\mu^+(A), A\subset E, \mu(A)=v\}.$$

Le problème isopérimétrique consiste à trouver le profil isopérimétrique ainsi que les ensembles atteignant l'infimum à mesure fixée. C'est en général un problème très difficile ; il est complètement résolu dans peu d'espaces. Un catalogue récent de ces espaces sont décrits dans [E-M], appendice H. Tous ces espaces sont lisses et possèdent une forte symétrie - ou ce sont des perturbations de tels espaces. Notons que le problème isopérimétrique est résolu dans les espaces à courbure de Ricci constante : l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, les sphères euclidiennes $\mathbb{S}^n$ et les espaces hyperboliques $\mathbb{H}_n$ munis de leurs volumes riemanniens. Les deux derniers cas ont été établis par Schmidt [Sch].

1.2.1 Isopérimétrie euclidienne

Le problème isopérimétrique sur le plan euclidien est un problème concret et vieux de plusieurs millénaires. La légende raconte qu'il était déjà connu - ou du moins pressenti - par la reine Didon à Carthage. Les ensembles minimisant la longueur à aire fixée sont des disques. Plus généralement, dans $\mathbb{R}^n$, les ensembles minimisant la surface à volume fixé sont des boules euclidiennes. Ce n'est que vers la fin du XIXe siècle que le problème est résolu de manière rigoureuse par Brunn, Minkowski puis Lusternik [Lus] grâce à l'inégalité suivante de Brunn–Minkowski–Lusternik. On note vol_n la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.

Théorème 1.2.1. *Soit A et B deux ensembles mesurables de $\mathbb{R}^n$. Si $A+B:=\{x+y,\ x\in A,\ y\in B\}$ désigne la somme de Minkowski, alors* $\mathrm{vol}_n(A+B)^{1/n}\ge \mathrm{vol}_n(A)^{1/n}+\mathrm{vol}_n(B)^{1/n}$.

En remarquant qu'il y a égalité dans le cas où A et B sont des boules euclidiennes centrées en un même point, cela implique l'inégalité isopérimétrique euclidienne, que l'on énonce classiquement sous la forme suivante :

Théorème 1.2.2. *Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ et A^* la boule centrée de même volume que A. Alors*

$$\frac{\mathrm{vol}_n^+(A)}{\mathrm{vol}(A)_n^{1-1/n}} \geq \frac{\mathrm{vol}_n^+(A^*)}{\mathrm{vol}_n(A^*)^{1-1/n}} = n\omega_n^{1/n}.$$

Le profil isopérimétrique euclidien satisfait donc $\mathscr{I}_E(v) = n\omega_n^{1/n} v^{1-1/n}$.

Outre son intérêt historique, l'inégalité isopérimétrique euclidienne est équivalente, par la formule de la co-aire, à une classe d'inégalité fonctionnelle importante, celle de Sobolev L^1. Elle s'énonce sous la forme suivante :

$$\forall f \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n), \quad \left(\int_{\mathbb{R}^n} f^{\frac{n}{n-1}} dx \right)^{\frac{n-1}{n}} \leq \frac{1}{n\omega_n^{1/n}} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f| dx.$$

Nous renvoyons à [Ma'] pour une présentation complète des inégalités de Sobolev euclidiennes. Notons qu'en appliquant cette dernière inégalité à f^α, pour $\alpha > 1$, on atteint les inégalités de Sobolev avec exposants p sous la forme suivante

$$\forall f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n), \ \|f\|_{\frac{np}{n-p}} \leq C_{n,p} \|\nabla f\|_p, \tag{1.1}$$

avec toutefois des constantes $C_{n,p}$ sous optimales.

Une question naturelle, à laquelle nous nous intéresserons sur d'autres espaces par la suite, va être de considérer la stabilité des inégalités isopérimétrique. C'est-à-dire, si un ensemble est de mesure de bord presque minimale, à quel point est-il "proche" un ensemble extrémal ? Notons que cette question n'a semble-t-il été considérée que récemment. Les travaux de l'école italienne ont abouti à une version optimale du déficit de l'inégalité isopérimétrique euclidienne. Pour énoncer le résultat, on définit l'asymétrie de Fraenkel d'un ensemble mesurable $A \subset \mathbb{R}^n$ par

$$\lambda(A) = \min \left\{ \frac{d(A, x + A^*)}{r^n}, \ x \in \mathbb{R}^n \right\}$$

où r est le rayon de la boule A^*, c'est-à-dire $\left(\frac{\mathrm{vol}(A)}{\omega_n}\right)^{1/n}$ et $d(E,F) = \mathrm{vol}(E \Delta F)$ est la mesure de la différence symétrique. Alors, Figalli, Maggi et Pratelli [F-M-G] démontrent le résultat suivant, optimal en la dépendance en δ :

Théorème 1.2.3. *Soit $\delta(A) = \frac{\mathrm{vol}_n^+(A) - \mathrm{vol}_n^+(A^*)}{\mathrm{vol}_n^+(A^*)}$. Alors il existe une constante $C = C(n)$ telle que*

$$\lambda(A) \leq C(n)\sqrt{\delta(A)}.$$

Dans la suite, nous ne nous intéresserons pas d'avantage dans ce travail à l'isopérimétrie euclidienne. Parmi les espaces où le problème isopérimétrique est complètement résolu, nous nous concentrerons sur les sphères euclidiennes $(\mathbb{S}^n, \sigma_n)$ et l'espace gaussien $(\mathbb{R}^n, \gamma_n)$.

1.2.2 Isopérimétrie sphérique

Soit $\mathbb{S}^n$ la sphère euclidienne de dimension n. Le problème isopérimétrique sur les sphères a été résolu par Lévy au début des années 20 [Lev] puis Schmidt de manière rigoureuse dans les années 40 par des techniques de symétrisations [Sch]. Les ensembles extrémaux sont des boules géodésiques, c'est-à-dire une intersection de la sphère n dimensionnelle avec un demi-espace de l'espace euclidien ambiant. Notons qu'à la limite où la mesure des ensembles tend vers 0, le théorème suivant implique le théorème isopérimétrique euclidien.

Théorème 1.2.4. *Soit $A \subset \mathbb{S}^n$. Alors $\sigma_n^+(A) \geq \sigma_n^+(C)$ où C désigne une calotte sphérique satisfaisant $\sigma(C) = \sigma(A)$.*

En fait, le résultat démontré est le suivant : $\forall r > 0$, $\sigma_n(A) = \sigma_n(C_r) \Rightarrow \sigma_n(A_r) \geq \sigma_n(C_r)$. La connaissance des ensembles extrémaux permet alors de déterminer explicitement le profil isopérimétrique. Si $a \in [-1,1]$, et $C = \{x \in \mathbb{S}^n, x_1 \leq a\}$, alors

$$\frac{\mathrm{vol}_n(C)}{\mathrm{vol}_n(\mathbb{S}^n)} = \frac{\mathrm{vol}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})}{\mathrm{vol}_n(\mathbb{S}^n)} \int_{-1}^{a} (1-t^2)^{\frac{n-2}{2}} dt = \int_{-1}^{a} h_n(t) dt = H_n(a).$$

De plus son contenu de Minkowski vaut alors $h_n(a)$, de sorte que le profil isopérimétrique sphérique satisfait $\mathscr{I}_{\sigma_n}(v) = h_n(H_n^{-1}(v))$. On peut dans certains régimes donner des estimations plus explicites en terme de fonctions usuelles. Lorsque v tend vers 0, $\mathscr{I}_{\sigma_n}(v) \sim a_n v^{\frac{n-1}{n}}$ (comme pour le profil isopérimétrique euclidien). Notons également que pour $v = 1/2$, $H_n^{-1}(1/2) = 0$ et ainsi $\mathscr{I}_{\sigma_n}(1/2) = h_n(0) = \frac{\mathrm{vol}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})}{\mathrm{vol}_n(\mathbb{S}^n)}$.

Ce théorème implique que presque toute la sphère est recouverte par l'élargissement d'un ensemble de demi-mesure de rayon de l'ordre de $O(n^{-1/2})$. En effet, si $\sigma(A) = 1/2$,

$$\sigma_n(A_r) \geq \sigma_n(C_r) \geq 1 - 2e^{-nr^2/2}.$$

Les constantes ci-dessus sont optimales ; notons que par des arguments simples, on peut démontrer l'existence de constantes positives c_1, c_2 plus faibles telles que $\sigma_n(C_r) \geq 1 - c_1 e^{-c_2 nr^2}$. De manière fonctionnelle, ceci implique de la concentration sous-gaussienne pour des fonctions lipschitziennes sur la sphère via la proposition suivante, démontrée par Lévy.

Proposition 1.2.5. *Soit $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$ L-lipschitzienne et $\mathrm{med}(f)$ sa médiane. Alors*

$$\sigma_n(|f - \mathrm{med}(f)| \geq r) \leq 2e^{-\frac{nr^2}{2L^2}}.$$

Cette dernière proposition a des conséquences très importantes et est à l'origine du phénomène de concentration de la mesure. Le résultat sur la sphère a également comme conséquence d'impliquer la résolution du problème isopérimétrique sur l'espace gaussien. C'est l'objet de la sous-section suivante.

1.2.3 Isopérimétrie gaussienne

Soit $\Pi_{N+1,n}$ la projection canonique de $\mathbb{R}^N$ sur $\mathbb{R}^n$, avec $N \geq n$. Alors, si $\sigma_{N,1}$ désigne la mesure de surface sur la sphère N dimensionnelle de courbure égale à 1 (i.e. de rayon $\sqrt{N-1}$), on a pour tout ensemble borélien $A \subset \mathbb{R}^n$, $\lim_{N\to\infty} \sigma_{N,1}(\Pi_{N+1,n}^{-1}(A \cap \mathbb{S}_N^1)) = \gamma_n(A)$. Cette observation, attribuée (faussement semble-t-il) à Poincaré stipule que l'espace gaussien peut être "vu" comme une limite de sphères N dimensionnelles de rayon $\sqrt{N}$.

Au milieu des années 70, en utilisant le résultat de Lévy et cette observation, Sudakov et Tsirelson [Su-Ts], et Borell [Bor1] de manière indépendante, résolvent le problème isopérimétrique dans l'espace Gaussien $(\mathbb{R}^n, \gamma_n)$ et démontrent que les ensembles extrémaux sont des demi-espaces.

Théorème 1.2.6. *Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ et H un demi-espace tel que $\gamma_n(A) = \gamma_n(H)$. Alors*

$$\gamma_n^+(A) \geq \gamma_n^+(H) = \varphi(\Phi^{-1}(\gamma_n(A))).$$

Le profil isopérimétrique gaussien $\mathscr{I}_\gamma$ vaut donc $\mathscr{I}_\gamma(v) = \varphi \circ \Phi^{-1}(v)$. Une propriété remarquable est qu'il ne dépend pas de la dimension, contrairement à ceux de l'espace euclidien et des sphères euclidiennes. Notons qu'une formulation équivalente est donnée sur les élargissements : $\forall r > 0$, $\gamma_n(A) = \gamma_n(H) \Rightarrow \gamma_n(A_r) \geq \gamma_n(H_r)$. En effet cette inégalité se réécrit

$$\gamma_n(A_r) \geq \Phi(\Phi^{-1}(\gamma_n(A)) + r),$$

qui s'obtient en intégrant l'inégalité $\gamma_n^+(A) \geq \gamma_n^+(H)$. De même que sur les sphères, ce théorème entraîne de nombreux résultats importants de concentration par le fait que si $\gamma_n(H) \geq 1/2$, $\gamma_n(H_r) \geq \Phi(r) \geq 1 - e^{-r^2/2}$. Ainsi, de façon analogue à la sphère, les fonctions lipschitziennes sur l'espace gaussien ont des déviations sous-gaussiennes par rapport à leurs moyennes.

De manière indépendante, par des techniques de symétrisation, Ehrhard [Ehr] au milieu des années 80 donne une autre preuve du théorème d'isopérimétrie gaussienne via l'inégalité suivante, analogue à celle de Brunn–Minkowski pour l'espace euclidien :

$$\forall A, B \subset \mathbb{R}^n,\ \forall \alpha + \beta = 1,\ \Phi^{-1}(\gamma_n(\alpha A + \beta B)) \geq \alpha \Phi^{-1}(\gamma_n(A)) + \beta \Phi^{-1}(\gamma_n(B)).$$

Notons que sa forme générale (i.e. sans hypothèses spécifiques sur les ensembles) est due à Borell au début des années 2000 [Bor3].

Au début des années 90, dans un travail remarquable [Bob2], Bobkov montre que l'isopérimétrie gaussienne est équivalente à une inégalité fonctionnelle, dite de Bobkov, suivante

$$\mathscr{I}_\gamma\left(\int_{\mathbb{R}^n} f\, d\gamma_n\right) \leq \int_{\mathbb{R}^n} \sqrt{\mathscr{I}_\gamma^2(f) + |\nabla f|^2}\, d\gamma \tag{1.2}$$

pour tout fonction $f : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ (localement) lipschitzienne. L'argument de Bobkov consiste à prouver cette inégalité sur l'espace à deux points $\{0,1\}$ muni de $\mu = \frac{1}{2}(\delta_0 + \delta_1)$, c'est-à-dire établir, pour tout $a, b \in (0,1)^2$,

$$\mathscr{I}_\gamma\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left(\sqrt{\mathscr{I}_\gamma^2(a) + \frac{|b-a|^2}{4}} + \sqrt{\mathscr{I}_\gamma^2(b) + \frac{|b-a|^2}{4}}\right),$$

puis obtenir l'inégalité sur le cube discret $\{0,1\}^n$ par tensorisation avant d'en déduire l'inégalité pour l'espace gaussien par un argument utilisant le théorème de la limite centrale. Pour vérifier que cette inégalité est bien équivalente à l'inégalité de Bobkov, on applique cette inégalité pour une suite de fonctions f_ε approchant $\mathbf{1_A}$ (classiquement f_ε vaut 1 sur A, est linéaire sur $A^\varepsilon \backslash A$ et nulle en dehors de A^ε). Alors cela implique quand $\varepsilon \to 0$ l'inégalité $I_\gamma(\gamma(A)) \leq \gamma^+(A)$.

Réciproquement, la version ensembliste implique la version fonctionnelle. En effet, si l'on définit l'épigraphe d'une fonction $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par

$$A_g = \{(x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1},\ x_{n+1} \leq g(x)\},$$

alors

$$\gamma^+(A_g) = \int_{\mathbb{R}^n} \sqrt{1 + |\nabla g|^2}(x) \varphi_{n+1}(x, g(x))dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_1(g(x))\sqrt{1 + |\nabla g|^2}(x) d\gamma_n(x).$$

De plus, par composition des dérivations, si $g = \Phi^{-1} \circ f$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_1(g(x))\sqrt{1 + |\nabla g|^2}(x) d\gamma_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \sqrt{\mathscr{I}_\gamma^2(f) + |\nabla f|^2}\, d\gamma_n(x).$$

Le terme de droite de l'inéquation (1.2) correspond donc à la mesure de bord de l'épigraphe de $\Phi^{-1} \circ f$. De plus, par théorème de Fubini,

$$\int_{\mathbb{R}^n} g\, d\gamma = \gamma_{n+1}(A_g),$$

et ainsi l'isopérimétrie gaussienne $n+1$ dimensionnelle $\mathscr{I}_\gamma(\gamma_{n+1}(A_g)) \leq \gamma^+(A_g)$ implique bien l'inégalité de Bobkov.

S'il est immédiat de vérifier que les demi-espaces sont des ensembles extrémaux, il est plus délicat de démontrer que ce sont les seuls. Ce n'est qu'à la fin des années 90 que Carlen et Kierce[C-K] en font la démonstration complète, sans hypothèses de régularité sur le bord des ensembles. Cette caractérisation s'appuie sur une preuve due à Bakry et Ledoux sur la forme fonctionnelle de Bobkov. En fait, la définition de mesure de bord utilisée par les auteurs fait suite à une définition due à De Giorgi [DG], mais qui coïncide en général avec le contenu de Minkowski. Nous reviendrons sur ce point dans le chapitre 3.

Plus tard, Mossel et Neeman ont travaillé cette preuve pour donner une version quantitative de l'isopérimétrie gaussienne dans [M-N1]. Nous reviendrons en détails sur cette preuve dans le chapitre suivant. Notons qu'à la suite de ces travaux, Eldan [Eld], puis Barchiesi, Brancolini et Julin [B-B-J] ont obtenu par des arguments différents la version quantitative optimale (sauf dans le cas unidimensionnel) que nous énonçons sous une forme moins précise.

Théorème 1.2.7. *Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ tel que $\gamma_n^+(A) = \mathcal{I}_\gamma(\gamma_n(A)) + \delta$. Alors il existe un demi-espace H tel que $\gamma_n(A) = \gamma_n(H)$ et une constante positive C telle que*

$$\gamma_n(A\Delta H) \leq C(\gamma_n(A))\sqrt{\delta}.$$

S'il est difficile, voire impossible de caractériser les ensembles extrémaux sur un espace général, il est en revanche possible d'estimer son profil isopérimétrique. Ce simple fait a des conséquences importantes en ce qui concerne la concentration et les inégalités fonctionnelles.

1.2.4 Théorèmes de comparaison

Les deux problèmes isopérimétriques sur la sphère et sur l'espace gaussien admettent les deux généralisations suivantes. Gromov [Grm] obtient un résultat de comparaison du profil isopérimétrique d'une variété riemannienne de courbure de Ricci minorée par r par rapport à celui de la sphère. Le théorème de comparaison de Lévy–Gromov s'énonce ainsi :

Théorème 1.2.8. *Soit V une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 2$ dont la courbure de Ricci est uniformément minorée par r. Soit $d\mu = \frac{dvol}{vol(V)}$ la mesure normalisée. Alors le profil isopérimétrique vérifie $\mathcal{I}_\mu \geq \mathcal{I}_{\sigma_{r,n}}$ où $\sigma_{r,n}$ est la mesure normalisée sur la sphère n dimensionnelle de courbure de Ricci constante égale r.*

Une version pour l'espace gaussien de ce résultat a été établie par Bakry et Ledoux [B-L1]. L'énoncé ci-dessous est une version partielle, dans le cas des variétés riemanniennes, du théorème de Bakry–Ledoux qui s'énonce dans un cadre plus général décrit plus bas.

Théorème 1.2.9. *Soit (M, g, μ) une variété riemannienne à poids telle que $\mathrm{Ric}_g + \mathrm{Hess}\psi \geq \kappa$ où $\mu = e^{-\psi}\mathrm{dvol}$. Alors le profil isopérimétrique vérifie $\mathcal{I}_{(M,g,\mu)} \geq \sqrt{\kappa}\mathcal{I}_{(\mathbb{R}^n,\gamma)} = \mathcal{I}_{(\mathbb{R}^n\gamma_\kappa)}$ où γ_κ est la mesure gaussienne dans $\mathbb{R}^n$ de variance $\frac{1}{\kappa}\mathrm{Id}$.*

Ces théorèmes montrent que les espaces de références (sphères euclidiennes et espace gaussien) sont ceux qui minimisent la surface à volume fixé. De manière plus importante, ces théorèmes de comparaisons impliquent des inégalités de concentration sous-gaussienne sur des espaces plus généraux. Le théorème de Lévy–Gromov est en effet à l'origine du phénomène de concentration de la mesure mis en avant par Vitali Milman. Les applications de ce phénomène sont nombreuses notamment pour les études locales des espaces de Banach mais aussi dans de nombreux autres domaines en probabilités et statistiques.

Plus généralement, pour ce qui est d'une caractérisation récente et complète des théorèmes de comparaison des profils isopérimétriques, nous renvoyons à l'article d'Emanuel Milman [Mil1]. L'auteur y démontre des théorèmes de comparaisons dans le cas des variétés riemanniennes avec ou sans poids, avec minorations de courbure quelconque (y compris négatives), avec de plus des conditions sur le diamètre des variétés.

En particulier, ces travaux en lien avec le théorème du diamètre de Myers cité dans la section suivante permet de démontrer de la rigidité dans le théorème de comparaison de Lévy–Gromov, à savoir que les seules variétés riemanniennes telles qu'il existe $v \in (0,1)$ satisfaisant $\mathscr{I}_{(\mathbb{S}^n,g)}(v) = \mathscr{I}_{(M,g)}(v)$ sont les sphères elles-mêmes à transformations isopérimétriques près. Ce phénomène de rigidité remonte à Bayle [Bay] qui l'a démontré par des arguments différents. Dans le cas du théorème de comparaison de Bakry–Ledoux, un théorème de rigidité a été prouvé par Morgan [Mor]. Nous y reviendrons plus tard dans la thèse.

Très récemment, Cavalletti et Mondino [C-M1] ont démontré l'analogue du théorème de comparaison de Lévy–Gromov sur des espaces métriques mesurés (avec condition de non branchements de géodésiques) satisfaisant une condition de courbure dimension $CD^\star(\kappa,N)$, $N < \infty$ appropriée. L'énoncé de cette condition nécessite des préliminaires techniques dont nous ne parlons pas. Nous renvoyons à la section 6 pour une définition de condition de courbure dimension dans le cadre plus classique des variétés riemanniennes.

L'argument principal des auteurs est de démontrer un théorème de localisation analogue à celui démontré par Kannan, Lovasz et Simonovits [K-L-S] dans le cas de l'espace euclidien. Un énoncé analogue a d'abord été établi récemment dans le cas des variétés par Klartag [Kla]. Cette technique de localisation permet alors de se ramener sur un espace unidimensionnel sur lequel les résultats sont déjà connus. En particulier, le résultat de Milman permet d'établir de plus dans ce cadre général un phénomène de rigidité analogue au cas des variétés via un argument sur le diamètre. Les cas d'égalités sont des suspensions sphériques - nous renvoyons à [C-M1] pour la définition précise. Le résultat principal de [C-M1] est le suivant :

Théorème 1.2.10. *Soit (E,d,μ) un espace métrique mesuré satisfaisant $CD^\star(\kappa,N)$ avec $N \in \mathbb{N}$. Alors $\mathscr{I}_{(E,d,\mu)} \geq \mathscr{I}_{(\mathbb{S}^N_\kappa,g,\sigma_{\kappa,N})}$. De plus s'il existe $v \in (0,1)$ tel que $\mathscr{I}_{X,d,\mathfrak{m}}(v) = \mathscr{I}_{(\mathbb{S}^N_\kappa,g,\sigma_{\kappa,N})}(v)$ alors $(X,d,\mathfrak{m})$ est une suspension sphérique.*

Notons que l'extension du théorème de Bakry–Ledoux dans ce cadre général d'espace métriques mesurés avec une condition de courbure positive est encore un problème ouvert.

1.3 Autres inégalités géométriques

Sous la condition de courbure minorée, plusieurs implications géométriques sont connues dans le cadre riemannien. Parmi les plus théorèmes les plus célèbres, le théorème de Bonnet–Myers affirme qu'une variété riemannienne de courbure minorée par $\kappa > 0$ est compacte. De plus son diamètre est majoré par celui de la sphère de même courbure κ.

Théorème 1.3.1. *Soit M une variété riemannienne de dimension $n \geq 2$ et de courbure de Ricci minorée par κ. Alors son diamètre est fini et est majorée par celui de la sphère euclidienne n dimensionnelle de courbure constante κ, c'est-à-dire $\pi\sqrt{\frac{n-1}{\kappa}}$.*

Citons également le théorème de comparaison de Bishop–Gromov sur la croissante des boules.

Théorème 1.3.2. *Soit M une variété riemannienne de dimension $n \geq 2$ et de courbure de Ricci minorée par κ. Soit $p \in M$. Alors*

$$r \mapsto \frac{B_d(p,r)}{r^n}$$

est décroissante.

Une combinaison de ces résultats entraîne qu'une variété riemannienne n-dimensionnelle de courbure minorée par κ est de volume majoré par celui de la boule euclidienne n-dimensionnelle dont la courbure du bord est κ. Il est naturel de s'intéresser à la rigidité de ces théorèmes. Le théorème de Topogonov–Cheng affirme qu'à transformation isométrique près, le diamètre maximal est atteint seulement sur les sphères. Il en est ainsi de même pour le volume.

Ces inégalités géométriques mettent en lien courbure et dimension. Ces deux notions sont liées à travers des inégalités fonctionnelles célèbres et intéressantes que nous présentons dans la section suivante.

1.4 Lichnerowicz et inégalités fonctionnelles

Dans cette section nous présentons les inégalités de trou spectral, Sobolev et Sobolev logarithmique dans le cadre de variétés riemanniennes à courbure minorée.

1.4.1 Cas des variétés sans poids

Soit (M,g,vol) une variété riemannienne n-dimensionnelle avec Δ l'opérateur de Laplace–Beltrami. L'opérateur de Laplace–Beltrami permet de considérer l'équation de la chaleur associée $\partial_t u = \Delta u$.

Courbure et dimension sont liées par la minoration de Lichnerowicz qui stipule que si la courbure de Ricci est uniformément minorée par $\kappa > 0$ et si λ_1 désigne la première valeur propre non nulle de l'opérateur Δ, alors $\lambda_1 \geq \frac{n\kappa}{n-1}$. Les prémices riemanniennes se trouvent dans la formule de Bochner suivante :

$$\frac{1}{2}\Delta(|\nabla f|^2) - \nabla\Delta f \cdot \nabla f = \mathrm{Ric}_g(\nabla f, \nabla f) + \|\mathrm{Hess}(f)\|_{HS}^2.$$

De plus, rappelons que l'opérateur de Laplace–Beltrami en une fonction f est obtenu en prenant la trace de la hessienne de f. Ainsi, l'inégalité de Schwarz implique alors $\|\mathrm{Hess}(f)\|_{HS}^2 \geq \frac{1}{n}(\Delta f)^2$. Montrons pourquoi cela implique aisément l'inégalité de Lichnerowicz. La formule de Green implique

$$\int_M \left(\frac{1}{2}\Delta(|\nabla f|^2) - \nabla\Delta f \cdot \nabla f\right) d\mathrm{vol} = \int_M (\Delta f)^2 d\mathrm{vol},$$

et ainsi, comme $\mathrm{Ric}_g \geq \kappa g$,

$$\int_M (\Delta f)^2 d\mathrm{vol} \geq \kappa \int_M |\nabla f|^2 d\mathrm{vol} + \frac{1}{n}\int_M (\Delta f)^2 d\mathrm{vol} = \kappa \int_M f(-\Delta f) d\mathrm{vol} + \frac{1}{n}\int_M (\Delta f)^2 d\mathrm{vol}.$$

Appliquons l'inégalité précédente à une fonction propre f associée à λ_1 normalisée de façon à ce que $\int_M f^2 d\mathrm{vol} = 1$. On obtient alors $\lambda_1^2 \geq \kappa\lambda_1 + \frac{1}{n}\lambda_1^2$, et ainsi $\lambda_1 \geq \frac{n\kappa}{n-1}$. Rappelons que $-\Delta$ se prolonge en un opérateur symétrique positif sur $L^2(M)$. En décomposant de manière spectrale, la minoration $\lambda_1 \geq \frac{\kappa n}{n-1}$ implique l'inégalité suivante :

Théorème 1.4.1. *Pour toute fonction $f \in H^2(M)$,*

$$\mathrm{Var}_\mu(f) = \int_M f^2 d\mu - \left(\int_M f d\mu\right)^2 \leq \frac{n-1}{n\kappa}\int_M |\nabla f|^2 d\mu,$$

où $H^2(M) = \{f : M \to \mathbb{R},\ \int_M f^2 d\mu + \int_M |\nabla f|^2 d\mu < +\infty\}$.

Cette inégalité est appelée inégalité de trou spectral, pour les raisons invoquées ci-dessus. Elle est également communément appelée inégalité de Poincaré. En effet, elle a été d'abord été démontrée par Poincaré sur un convexe borné de $\mathbb{R}^n$ (avec une constante non optimale), c'est-à-dire

$$\int_K f dx = 0 \quad \Longrightarrow \quad \int_K f^2 dx \leq C_K \int_K |\nabla f|^2 dx.$$

Notons que dans ce cadre, la constante optimale dans cette inégalité a été obtenu par Payne et Weinberger et vaut $\frac{\pi^2}{\mathrm{diam}^2(K)}$ [Pa-We].

En analyse des équations aux dérivées partielles, sur une variété M les espaces de Sobolev $W^{n,p}(M)$, définis par Sobolev dans les années 30, sont des espaces qui sont naturellement considérés. Dans $\mathbb{R}^n$, les inégalités de Sobolev (1.1) vues plus haut assurent le plongement $W^{n,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{p^\star}(\mathbb{R}^n)$. De façon générale, les inégalités de Sobolev s'écrivent, pour des variétés compactes n dimensionnelles,

$$\left(\int_M |f|^{p^\star} d\mu\right)^{p/p^\star} \leq A(p)\int_M |\nabla f|^p d\mu + B(p)\int_M |f|^p d\mu$$

avec $p^\star > p$ et $A(p), B(p) > 0$. Ces inégalités de Sobolev ont été largement étudiées. Il a été démontré par Sobolev qu'une telle inégalité est possible si et seulement si $p^\star \leq \frac{pn}{n-p}$. Une question naturelle a été celle de la recherche des constantes optimales $A(p)$ et $B(p)$. Sur les sphères euclidiennes $\mathbb{S}^n$, $n \geq 1$, la détermination des ces constantes ainsi que des fonctions extrémales a d'abord été établie par Aubin [Aub] et Talenti [Tlt]. En utilisant des techniques de symétrisations, ainsi que le théorème de comparaison isopérimétrique de Lévy–Gromov, Ilias [Ili] a étendu les inégalités de Sobolev sur les variétés riemanniennes n dimensionnelles dont la courbure de Ricci est minorée par une constante strictement positive. Le résultat obtenu, optimal par rapport aux constantes, est le suivant.

Théorème 1.4.2. *Soit M une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 2$ et de courbure de Ricci minorée par $\kappa > 0$. Alors, pour toute $f \in H^2(M)$, $\forall p \in (2, \frac{2n}{n-2}]$,*

$$\frac{n\kappa}{(n-1)(p-2)}\left(\left(\int_M |f|^p d\mu\right)^{2/p} - \int_M |f|^2 d\mu\right) \leq \int_M |\nabla f|^2 d\mu.$$

En particulier, pour l'exposant critique, $p^\star = \frac{2n}{n-2}$,

$$\left(\int_M |f|^{\frac{2n}{n-2}} d\mu\right)^{\frac{n-2}{n}} \leq \frac{n-1}{4n(n-2)\kappa}\int_M |\nabla f|^2 d\mu + \int_M |f|^2 d\mu.$$

Quelques années plus tard, Bakry redémontrera cette inégalité par des arguments nouveaux qui seront présentés plus bas. Il est plus surprenant de constater que ces inégalités de Sobolev ont des conséquences géométriques et sont liées avec le théorème de comparaison de Myers. En effet, Bakry et Ledoux ont établi qu'une telle inégalité de Sobolev implique une finitude du diamètre. Ayant d'abord obtenu une borne non optimale (du type $\pi\sqrt{\frac{n}{\kappa}}$), Bakry et Ledoux [B-L2] ont démontré que l'inégalité de Sobolev optimale implique le théorème de Myers. De plus, les auteurs montrent que si le diamètre est maximal, cela entraîne un cas d'égalité dans l'inégalité de Sobolev. Ceci n'étant possible que sur la sphère, il en résulte une nouvelle démonstration du théorème de rigidité de Topogonov et Cheng.

Lorsque $p = 2$, l'inégalité est interprétée comme l'inégalité de Sobolev logarithmique suivante.

Théorème 1.4.3. *Pour toute fonction $f \in L^2 \log L^2(M)$,*

$$\mathrm{Ent}_\mu(f^2) = \int_M f^2 \log f^2 d\mu - \left(\int_M f^2 d\mu\right)\log\left(\int_M f^2 d\mu\right) \leq \frac{n-1}{n\kappa}\int_M |\nabla f|^2 d\mu.$$

Il est à noter que cette inégalité est adimensionnelle. Elle peut être en effet déduite de l'inégalité de Sobolev précédente (avec exposant maximal $p^\star$) lorsque la dimension n tend vers l'infini. Comme on le verra, ce phénomène d'indépendance de la dimension est caractéristique du cas des variétés à poids $(M, g, e^{-\psi} d\mathrm{vol})$ avec une condition de minoration de la hessienne du potentiel ψ.

1.4.2 Cas de l'espace gaussien.

Soit donc une variété riemannienne à poids $(M, g, e^{-\psi} d\mathrm{vol})$, avec ψ non constant et $L = \Delta - \nabla\psi \cdot \nabla$ le Witten-Laplacien. L'équation associée $\partial_t u = Lu$ est l'équation de la chaleur usuelle avec un terme de dérive additionnel du premier ordre, plus connue sous le nom d'équation Fokker-Planck linéaire. De manière plus traditionnelle, en notant $p = ue^{-\psi}$, cette dernière équation se réécrit $\partial_t p = \Delta p + \nabla \cdot (p\nabla\psi)$.

Dans de tels espaces, les inégalités de Sobolev ne sont en général plus valides, au contraire de l'inégalité de trou spectral et de Sobolev logarithmique.

Un exemple crucial en probabilité est bien sûr l'espace gaussien $(\mathbb{R}^n, L, \gamma_n)$. Le lemme de Poincaré permet de déterminer les inégalités de trou spectral et de Sobolev logarithmique. En effet l'inégalité de trou spectral à une sphère N-dimensionnelle de rayon $\sqrt{N-1}$ (notée $\mathbb{S}_1^N$) s'écrit

$$\mathrm{Var}_\sigma(f) \leq \frac{N-1}{N}\int_{\mathbb{S}_1^N} |\nabla f|^2 d\sigma,$$

ce qui après passage à la limite en N, implique par lemme de Poincaré que, pour tout $n \geq 1$,

$$\mathrm{Var}_{\gamma_n}(f) \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 d\gamma_n.$$

De même, comme pour $p \to 2$, $\frac{\|f\|_p^2 - \|f\|_2^2}{p-2} \to \mathrm{Ent}_\mu(f)$, l'inégalité de Sobolev optimale appliquée à $\mathbb{S}_1$ implique l'inégalité de Sobolev logarithmique suivante :

$$\mathrm{Ent}_{\gamma_n}(f^2) \leq 2\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 d\mu.$$

Cette inégalité a d'abord été établie par Gross [Grs]. Toutes ces inégalités sont indépendantes de la dimension n, comme pour e problème isopérimétrique. Comme indiqué par le lemme de Poincaré, l'espace gaussien est intrinsèquement un objet de courbure 1 et de dimension infinie.

En ce qui concerne l'inégalité de trou spectral, on peut aussi plus simplement calculer le spectre de l'opérateur $L = \Delta - x \cdot \nabla$.

$L^2(\mathbb{R}^n, \gamma_n)$ est un espace hilbertien (pour le produit scalaire canonique) et de plus sa base hilbertienne est donnée par les polynômes de Hermite $(H_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$. De plus ces polynômes sont vecteurs propres de l'opérateur $-L$ associés aux valeurs propres $|\alpha|$. $-L$ a donc pour spectre $\mathbb{N}$. Ceci implique donc que l'inégalité de trou spectral optimal est

$$\mathrm{Var}_{\gamma_n}(f) \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 d\gamma_n,$$

avec de plus égalité si et seulement si f est à constante près l'une des fonctions coordonnées $x_i, \quad i \in \{1, \ldots, n\}$.

En ce qui concerne l'inégalité de Sobolev logarithmique, elle peut être déduite de manière analogue à l'espace euclidien de l'isopérimétrie par un argument utilisant la formule de la co-aire (cf [Le2]). De manière plus directe, Beckner a réalisé que l'inégalité de Sobolev logarithmique découle par un argument de limite de l'inégalité de Bobkov. Dans un cadre plus général, on verra une démonstration encore plus simple qui est due aux travaux de Bakry et Émery [B-E].

On a vu précédemment que le théorème de Myers sur une variété à courbure minorée implique une finitude du diamètre ce qui implique que les fonctions lipschitziennes définies sur une telle variété sont bornées. Lorsque l'on affaiblit la condition de courbure et que l'on considère des variétés à densités, ce résultat n'est bien sûr plus vrai, comme le montre l'exemple des fonctions linéaires sur l'espace gaussien. Cependant, de telles fonctions sont nécessairement très concentrées autour de leurs moyennes au sens où elles ont des inégalités de déviations sous-gaussienne. De façon plus générale, l'argument de Herbst affirme le fait suivant. Soit f une fonction 1-lipschitzienne. Alors

$$\mathrm{Ent}_\mu(f^2) \leq 2\int_E |\nabla f|^2 d\mu \Longrightarrow \mathbb{E}(e^{\lambda f}) \leq e^{\lambda^2/2}.$$

Ceci combiné à l'inégalité de Markov implique des inégalités de concentration sous-gaussienne. Ainsi, la seule connaissance d'une inégalité de Sobolev Logarithmique, condition plus faible qu'une inégalité isopérimétrique, implique de la concentration. Notons que c'est à partir de cette remarque que Bakry et Ledoux ont démontré que les inégalités de Sobolev dimensionnelles impliquent le théorème de Myers.

L'extension de ces inégalités à d'autres variétés est un cas intéressant. Dans l'article fondateur [B-E], les auteurs donnent une approche unifiée qui s'applique à la fois aux variétés sans poids et avec poids, permettant de plus d'atteindre les constantes optimales dans les deux cas. Les travaux de [B-E] permettent d'étendre ces résultats dans un cadre abstrait nettement plus général que ceux présentés plus haut.

Le paragraphe suivant est consacré à la présentation de la théorie, communément appelée théorie de Bakry–Émery, qui permet cette approche unifiée.

1.5 Théorie de Bakry–Émery

Cette section a pour but de présenter le modèle de notre travail. Nous référons le lecteur à l'ouvrage très complet [B-G-L1], ou pour une présentation plus succincte à [Le3]. Le critère courbure-dimension introduit par Bakry et Émery est un objet fondamental dans l'étude des inégalités fonctionnelles et géométriques modernes.

1.5.1 Semi-groupes

Soit $(E, \mathscr{A}, \mu)$ un espace probabilisé. Une famille $(P_t)_{t\geq 0}$ d'opérateurs agissant sur un domaine $\mathscr{D}$ de fonctions définies sur E est appelée semi-groupe si elle vérifie les deux propriétés suivantes : $P_0 = \mathrm{Id}$ et pour tout $s, t \geq 0$, $P_{t+s} = P_t \circ P_s$. Le semi-groupe est dit markovien si $(P_t)_{t\geq 0}$ pour tout $t \geq 0$, $P_t\mathbf{1} = \mathbf{1}$. Le générateur infinitésimal du semi-groupe L de $(P_t)_{t\geq 0}$ est défini par

$$\forall f \in \mathscr{D}_2(L),\, Lf := \lim_{t\to 0} \frac{P_t f - f}{t}$$

où le domaine de Dirichlet $\mathscr{D}_2(L) \subset \mathscr{D}$ est l'ensemble des fonctions f in $L^2(\mu)$ pour laquelle cette limite existe. Réciproquement, L et $\mathscr{D}_2(L)$ détermine complètement $(P_t)_{t\geq 0}$. Par définition et par propriété de semi-groupe, on a alors $\frac{\partial}{\partial t}P_t f = LP_t f$ avec $P_0 f = f$. On écrit alors de manière intuitive $P_t = e^{tL}$.

À un générateur L, est associée une forme bilinéaire symétrique positive, appelée opérateur carré du champ, et notée Γ par

$$\forall f, g \in \mathscr{D}(L)^2,\, \Gamma(f, g) = \frac{1}{2}\Big(L(fg) - fLg - gLf\Big).$$

Un semi-groupe $(P_t)_{t\geq 0}$ est dit markovien si $\forall t \geq 0$, $P_t\mathbf{1} = \mathbf{1}$. On supposera de plus que les mesures μ sont réversibles pour L et $(P_t)_{t\geq 0}$, i.e.

$$\forall f, g \in L^2(\mu),\, \int_E fLg\, d\mu = \int_E gLf\, d\mu,$$

et invariantes $(P_t)_{t\geq 0}$

$$\forall f \in L^1(\mu),\, \int_E P_t f\, d\mu = \int_E f\, d\mu.$$

Lorsque (E, μ, Γ) est un espace probabilisé, on a également la propriété d'ergodicité suivante :

$$\lim_{t\to\infty} P_t f = \int_E f\, d\mu.$$

Un semi-groupe possède, en général, un noyau de probabilité qui s'écrit $p_t(x, \cdot)$ où pour toute fonction $f \in L^1(E)$,

$$P_t f(x) = \int_E f(y) p_t(x, dy), \quad t \geq 0,\, x \in E.$$

$p_t(x, \cdot)$ est alors une mesure de probabilité. On dit que le noyau est à densité si l'on a la représentation suivante

$$P_t f(x) = \int_E f(y) p_t(x, y) d\mu(y), \quad t \geq 0,\, x \in E.$$

Dans la cas où L est l'opérateur de Laplace–Beltrami sur une variété, $(P_t)_{t\geq 0}$ est appelé semi-groupe de la chaleur et $p_t(x, y)$ est le noyau de la chaleur associée. L'exemple le plus classique est bien sûr donné par le noyau de la chaleur sur $\mathbb{R}^n$, qui prend la forme suivante :

$$P_t f(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy.$$

De façon générale, de nombreux résultats d'estimations sur le noyau de la chaleur existent dans la littérature.

1.5.2 Triplet de Markov

Soit L un opérateur de diffusion c'est-à-dire que pour tout $\psi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ avec $\psi(0) = 0$, et $f_1, \dots, f_k, \in \mathscr{D}$, on a :

$$L\psi(f_1,\dots,f_k) = \sum_{i=1}^{k} \partial_i \psi(f_1,\dots,f_k) Lf_i + \sum_{1\leq i,j\leq k} \partial_{ij}^2 \psi(f_1,\dots,f_k)\Gamma(f_i,f_j).$$

Une diffusion L engendre un semi-groupe $(P_t)_{t\geq 0}$ par $(P_t = e^{tL}))_{t\geq 0}$. L'opérateur de Laplace–Beltrami sur une variété riemannienne est un exemple pertinent de diffusion, auquel est associé le semi-groupe de la chaleur $(e^{t\Delta})_{t\geq 0}$.

Suivant Paul André Meyer, Bakry et Emery définissent les itérés $(\Gamma_n)_{n\geq 0}$ de l'opérateur "carré du champ" Γ (Γ_1 ci-dessous) en posant $\Gamma_0(f,g) = fg$ puis par récurrence :

$$\forall n \geq 1, \quad \Gamma_n(f,g) = \frac{1}{2}\Big(L(\Gamma_{n-1}(f,g)) - \Gamma_{n-1}(f,Lg) - \Gamma_{n-1}(g,Lf)\Big).$$

Posons pour alléger les notations $\Gamma_n(f) = \Gamma_n(f,f)$. La propriété de diffusion est à l'origine des formules de compositions suivantes.

$$\Gamma(u(f)) = u'(f)^2\Gamma(f), \qquad \Gamma_2(u(f)) = u'(f)^2\Gamma_2(f) + u'(f)u''(f)\Gamma(f,\Gamma(f)) + u''(f)^2\Gamma(f)^2.$$

Lorsque (M,g,vol) est une variété riemannienne et Δ est l'opérateur de Laplace–Beltrami, l'opérateur carré du champ $\Gamma(f)$ est égal à $|\nabla f|^2$, et la formule de Bochner prend la forme plus synthétique suivante :

$$\Gamma_2(f) = \mathrm{Ric}_g(\nabla f, \nabla f) + \|\mathrm{Hess}(f)\|_{HS}^2.$$

En conséquence, si la variété riemannienne est n-dimensionnelle avec une courbure de Ricci minorée par κ, la formule de Bochner associée à l'inégalité de Schwarz implique que :

$$\Gamma_2(f) \geq \kappa|\nabla f|^2 + \frac{1}{n}(\Delta f)^2 = \kappa\Gamma(f) + \frac{1}{n}(\Delta f)^2.$$

En fait, cette condition caractérise le fait d'être de courbure minorée par κ et de dimension majorée par n. En effet, appliquons cette dernière inégalité à une famille de fonctions f_α telles qu'en un $x_0 \in M$, $\nabla f_\alpha = v_0$ et $\mathrm{Hess} f_\alpha(x_0) = \alpha \mathrm{Id}_{\dim M}$. Alors d'après la formule de Bochner on obtient :

$$\Gamma_2(f_\alpha) = \mathrm{Ric}(v_0,v_0) + \dim(M)\alpha^2 \geq \kappa|v_0|^2 + \frac{(\dim(\mathrm{M})\alpha)^2}{n},$$

ce qui implique en faisant tendre α vers 0 que $\mathrm{Ric} \geq \kappa$ et faisant tendre α vers l'infini que $\dim(M) \leq n$. Ainsi énoncé, cette caractérisation est propice à une définition plus générale de *courbure-dimension*.

Définition 1.5.1. (E,μ,Γ) *satisfait le critère de courbure dimension* $CD(\kappa,n)$ *si et seulement si :*

$$\forall f \in \mathscr{D},\ \Gamma_2(f) \geq \kappa\Gamma(f) + \frac{1}{n}(Lf)^2.$$

Bien sûr, il est immédiat que $CD(\kappa,n) \Rightarrow CD(\kappa',n)$ pour $\kappa' \leq \kappa$ et $CD(\kappa,n) \Rightarrow CD(\kappa',m)$ pour $n \leq m$. Le critère de courbure dimension $CD(\kappa,n)$ est donc une condition de courbure minorée par κ et de dimension majorée par n.

Si $n \in \mathbb{N}$, les espaces modèles sont naturellement donnés par l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ si $\kappa = 0$, et par les sphères euclidiennes $\mathbb{S}^n$ de rayon $\sqrt{\frac{n-1}{\kappa}}$ si $\kappa > 0$. De plus la formule de Bochner prend la forme synthétique suivante $\Gamma_2(f) = \kappa\Gamma(f) + \|\mathrm{Hess}(f)\|_{HS}^2$.

Plus généralement, comme vu plus haut, on s'intéresse à des variétés riemanniennes à poids $d\mu = e^{-V}d\mathrm{vol}$. L'opérateur de diffusion associée est $L = \Delta - \nabla V \cdot \nabla$. Alors la remarque de Bakry et Émery est que le carré du champ itéré Γ_2 agit sur les fonctions de la forme suivante :

$$\Gamma_2(f) = (\nabla^2 V + \mathrm{Ric}_g)(\nabla f, \nabla f),$$

et ainsi la condition $CD(\kappa,\infty)$ $\Gamma_2 f \geq \kappa\Gamma f$ se réalise si $\nabla^2 V + \mathrm{Ric}_g \geq \kappa$ uniformément comme tenseurs symétriques. Ce tenseur est appelé *tenseur de Bakry-Emery*. Il traduit en définitive le rôle de courbure apporté par un potentiel strictement convexe.

L'espace modèle est donnée par l'espace gaussien $(\mathbb{R}^n,\gamma_n)$, qui vérifie $CD(1,\infty)$ puisque la hessienne de $x \mapsto \frac{|x|^2}{2}$ est la matrice identité. On voit ainsi que la définition de dimension ne coïncide pas nécessairement avec la dimension topologique. L'observation de Poincaré est particulièrement instructive à cet égard. Rappelons que l'espace gaussien peut être vu comme limite de sphères n-dimensionnelles de rayon $\sqrt{n-1}$, qui sont des espaces de classe $CD(1,n)$. Cela explique également pourquoi les inégalités fonctionnelles et géométriques sur l'espace gaussien sont adimensionnelles.

Le semi-groupe sous-jacent $(Q_t)_{t\geq 0}$ est appelé semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck. Il agit sur les fonctions du domaine de Dirichlet $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par

$$x \in \mathbb{R}^n \mapsto Q_t f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y)d\gamma(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)q_t(x,y)d\gamma(y),$$

avec q_t le noyau de Mehler associé. Notons que

$$q_t(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-e^{-2t}}}\exp\left(\frac{e^{-2t}|x|^2 - 2e^{-t}x\cdot y + e^{-2t}|y|^2}{2(1-e^{-2t})}\right).$$

Plus généralement, puisque $\mathbb{R}^n$ est plat, $(\mathbb{R}^n, \mu(dx) = e^{-V(x)}dx)$ satisfait $CD(\kappa,\infty)$ si et seulement si $\nabla^2 V \geq \kappa$, ce qui correspond à la classe des mesures log-concaves par rapport à la mesure gaussienne γ_κ.

Bien sûr, un des intérêts majeur du critère de courbure-dimension de Bakry-Emery est que l'on peut considérer des espaces plus généraux que des variétés. Néanmoins une contrainte est la donnée d'un opérateur de diffusion qui nécessite déjà une structure régulière.

Un deuxième intérêt majeur est l'efficacité de ce critère vis-à-vis des inégalités fonctionnelles et géométriques. Dans ce cadre, on dit que (E,μ,Γ) satisfait à une inégalité de trou spectral $SG(\kappa)$ si

$$\forall f \in \mathcal{D},\ \mathrm{Var}_\mu(f) \leq \frac{1}{\kappa}\int_E \Gamma(f)d\mu = \mathcal{E}(f,f). \tag{1.3}$$

De même, on dit que (E,μ,Γ) satisfait à une inégalité de Sobolev logarithmique $LS(\kappa)$ si

$$\forall f \in \mathcal{D},\ \kappa\,\mathrm{Ent}_\mu(f^2) \leq 2\,\mathcal{E}(f,f). \tag{1.4}$$

De même, on dit que (E,μ,Γ) satisfait à une inégalité de Sobolev (avec exposant critique) si

$$\forall f \in \mathcal{D},\ \left(\int_E |f|^{\frac{2n}{n-2}}d\mu\right)^{\frac{n-2}{n}} - \int_E |f|^2 d\mu \leq \frac{n-1}{4n(n-2)\kappa}\mathcal{E}(f,f). \tag{1.5}$$

Notons λ la meilleure (i.e. plus grande) constante dans l'inégalité de trou spectral et ρ la meilleure constante dans l'inégalité de Sobolev logarithmique. De façon générale, l'existence d'une inégalité de Sobolev logarithmique implique que l'inégalité de trou spectral est réalisée et de plus $\rho \leq \lambda$. En effet, en appliquant (1.4) à $1+\varepsilon f$ et en faisant tendre ε vers 0, cela implique à la limite (1.3) par le fait que $\mathrm{Ent}_\mu((1+\varepsilon f)^2) \sim_{\varepsilon\to 0} 2\varepsilon^2\mathrm{Var}_\mu f$.

1.6 Hypercontractivité

L'hypercontractivité est une notion fondamentale de notre thèse, dont nous nous servirons surtout dans la deuxième partie en lien avec des applications discrètes. Historiquement, le terme est apparu à la fin des années 60 en physique quantique. Il est classique de voir que les semi-groupes de diffusion sont contractifs, i.e. continus de L^p dans eux mêmes avec $\|P_t\|_{L^p\to L^p} \leq 1$. La propriété d'hypercontractivité est une propriété plus forte qui traduit la régularisation d'une fonction le long du semi-groupe. C'est-à-dire pour $q = f(p,t) \geq p$, $\|P_t\|_{L^p \to L^q} \leq 1$. La propriété d'hypercontractivité du semi-groupe d'Ornstein–Uhlenbeck remonte à Nelson, à la fin des années 60. Il s'énonce sous la forme suivante :

Théorème 1.6.1. *Soit $(Q_t)_{t\geq 0}$ le semi-groupe d'Ornstein–Uhlenbeck. Alors si $q(t) = 1+(p-1)e^{2t}$,*

$$\|Q_t\|_{L^p(\mathbb{R}^n,\gamma_n)\to L^q(\mathbb{R}^n,\gamma_n)} \leq 1.$$

Si de plus $q > q(t)$, Q_t n'est pas continu de $L^p(\mathbb{R}^n,\gamma_n)$ dans $L^q(\mathbb{R}^n,\gamma_n)$.

Peu de temps après, le lemme de Bonami sur le cube discret (nous reviendrons en détail sur ce lemme dans la deuxième partie) permet de retrouver ce résultat via le théorème de la limite centrale. Puis, par un argument remarquable, Gross a remarqué que la propriété d'hypercontractivité d'un semi-groupe est équivalente au fait que l'espace sous-jacent muni de la diffusion satisfait à une inégalité de Sobolev Logarithmique. On dira que $(P_t)_{t\geq 0}$ est hypercontractif avec constante ρ si $\|P_t\|_{L^p(E,\mu)\to L^q(E,\mu)} \leq 1$ pour $q(t) = 1+(p-1)e^{2\rho t}$. Nous rappelons l'argument de Gross.

Proposition 1.6.2. *$(P_t)_{t\geq 0}$ est hypercontractif avec constante ρ si et seulement si (E,μ,Γ) satisfait $LS(\rho)$.*

Démonstration. Soit $F : t \mapsto \|P_t f\|_{q(t)}$. Alors

$$\frac{d}{dt}(F(t)^{q(t)}) = q(t)F'(t)F(t)^{q(t)-1} + q'(t)\log F(t)F(t)^{q(t)}.$$

Mais

$$\frac{d}{dt}(F(t)^{q(t)}) = \frac{d}{dt}\int_E (P_tf)^{q(t)}d\mu = \int_E q'(t)(\log P_tf)(P_tf)^{q(t)} + q(t)LP_tf(P_tf)^{q(t)-1}d\mu,$$

et ainsi

$$q(t)F'(t)F(t)^{q(t)-1} = \frac{q'(t)}{q(t)}\mathrm{Ent}_\mu((P_tf)^{q(t)/2}) + q(t)\int_E LP_tf(P_tf)^{q(t)-1}d\mu$$

Or par réversibilité et invariance de L par rapport à μ, puis par composition

$$\int_E LP_tf(P_tf)^{q(t)-1}d\mu = -\int_E \Gamma(P_tf, P_tf^{q(t)-1})d\mu = -\int_E (q(t)-1)(P_tf)^{q(t)-2}\Gamma(P_tf)d\mu,$$

donc

$$\begin{aligned} q(t)^2F'(t)F(t)^{q(t)-1} &= q'(t)\mathrm{Ent}_\mu((P_tf)^{q(t)/2}) - q(t)^2\int_E (q(t)-1)(P_tf)^{q(t)-2}\Gamma(P_tf)d\mu \\ &= q'(t)\mathrm{Ent}_\mu((P_tf)^{q(t)/2}) - 4(q(t)-1)\int_E \Gamma(P_tf^{q(t)/2})d\mu. \end{aligned}$$

Ainsi si $q'(t) = \rho 2(q(t)-1)$, $F'(t) \leq 0$ en vertu de l'inégalité de Sobolev logarithmique. Or la condition $q'(t) = \rho 2(q(t)-1)$ s'énonce $q(t) = 1+(q(0)-1)e^{2\rho t}$.

□

1.7 Élements de calcul "Γ_2" et applications aux inégalités fonctionnelles et géométriques.

Dans [B-E], les auteurs démontrent que la condition $CD(\kappa,n)$, $n \in (0,\infty]$, sur un espace probabilisé implique la validité des inégalités fonctionnelles citées en introduction avec constantes optimales.

Dans cette section, nous nous concentrons essentiellement sur le cadre $CD(\kappa,\infty)$, où nous rappelons les preuves qui permettent d'obtenir les inégalités de trou spectral et de Sobolev logarithmiques avec constantes optimales. Pour ce qui est des espaces satisfaisant la condition $CD(\kappa,n)$, $n<\infty$, nous renvoyons le lecteur à [Bak1] en ce qui concerne les preuves des inégalités de Sobolev et Sobolev logarithmiques établies avec constantes optimales.

L'idée générale est d'utiliser une interpolation le long du semi-groupe. Les auteurs démontrent l'équivalence entre le critère $CD(\kappa,\infty)$ et une sorte de commutation entre l'opérateur Γ et le semi-groupe $(P_t)_{t\geq 0}$ sous la forme du lemme suivant.

Lemme 1.7.1. *Sous la condition $CD(\kappa,\infty)$ on a $\forall t\geq 0$, $\Gamma(P_tf)\leq e^{-2\kappa t}P_t(\Gamma(f))$.*

Démonstration. L'idée est de considérer $\varphi(s)=P_s\Gamma(P_{t-s}f)$, $s\in[0,t]$. Alors $\varphi'(s)=LP_s(\Gamma(P_{t-s}f))+P_s(\frac{d}{ds}\Gamma(P_{t-s}f))$. Puisque $\Gamma(f,g)$ est une forme bilinéaire et $\frac{d}{ds}P_s=LP_s$, $\frac{d}{ds}\Gamma(P_{t-s}f)=-2\Gamma(P_{t-s}f,LP_{t-s}f)$. Ainsi $\varphi'(s)=P_s(L(\Gamma(P_{t-s}f))-2\Gamma(P_{t-s}f,LP_{t-s}f))=P_s(2\Gamma_2(P_{t-s}f)))$ et ainsi

$$\forall s\in[0,t],\ \varphi'(s)-2\kappa\varphi(s)\geq 0$$

d'où $\varphi(t)\leq e^{2\kappa t}\varphi(0)$ ce qui conclut.

□

Notons que pour le semi-groupe de la chaleur sur $\mathbb{R}^n$ ou pour le semi-groupe d'Ornstein–Uhlenbeck, il y a commutation exacte sous la forme suivante $\nabla P_tf=P_t\nabla f$, et $\nabla Q_tf=e^{-t}Q_t\nabla f$, qui découle directement de l'expression explicite des semi-groupes.

Dans le cas des diffusions sur une variété riemannienne, la condition de commutation $|\nabla P_tf|^2\leq e^{-2\kappa t}P_t|\nabla f|^2$ admet la version plus forte - par l'inégalité de Jensen - suivante $|\nabla P_tf|\leq e^{-\kappa t}P_t|\nabla f|$. Dans le cas des diffusions sur un triplet de Markov abstrait, Bakry a démontré de manière analogue que la condition $\Gamma_2\geq\Gamma$ implique $P_t\sqrt{\Gamma(f)}\leq e^{-\kappa t}\sqrt{\Gamma(P_tf)}$. (cf [B-G-L1]). Comme il y a égalité en t, en dérivant cette inégalité en t - cf le lemme suivant, on constate que la version infinitésimale implique un auto renforcement de la condition $\Gamma_2-\kappa\Gamma\geq 0$ sous la forme suivante :

$$\Gamma(\Gamma_2-\kappa\Gamma)\geq\frac{1}{4}\Gamma(\Gamma). \tag{1.6}$$

De façon plus générale, la propriété de diffusion d'un semi-groupe donne les formules de dérivations (en temps) suivantes :

Lemme 1.7.2. *Soit ψ une fonction assez régulière (C^2 suffit) sur un ouvert $\mathcal{O}\subset\mathbb{R}^2$, $f\in\mathcal{D}$ et $t>0$ fixé, tel que $\forall u\in[0,t]$, $(P_uf,\Gamma P_uf)\subset\mathcal{O}$. Alors, en notant $f_{t-s}=P_{t-s}f$,*

$$\frac{d}{ds}P_s(\psi(f_{t-s},\Gamma(f_{t-s}f))=P_sK,$$

où l'on note

$$K=2\partial_2\psi\Gamma_2(f_{t-s})+\partial_{11}\psi\Gamma(f_{t-s})+2\partial_1\partial_2\psi\Gamma(f_{t-s},\Gamma(f_{t-s}))+\partial_{22}\psi\Gamma(\Gamma(f_{t-s})).$$

Démonstration. Par définition du semi-groupe,

$$\frac{d}{ds}P_s(\psi(f_{t-s},\Gamma(f_{t-s}f))=P_s\Big(L\psi(f_{t-s},\Gamma(f_{t-s}f)+\frac{d}{ds}\psi(f_{t-s},\Gamma(f_{t-s}))\Big).$$

Par la propriété de diffusion, on a de plus

$$L\psi(f_1,\ldots,f_k)=\sum_{i=1}^{k}\partial_i\psi(f_1,\ldots,f_k)Lf_i+\sum_{1\leq i,j\leq k}\partial_{ij}^2\psi(f_1,\ldots,f_k)\Gamma(f_i,f_j)$$

et ainsi

$$\begin{aligned} L\psi(f_{t-s},\Gamma(f_{t-s})) &= \partial_1\psi(f_{t-s},\Gamma(f_{t-s})Lf_{t-s} + \partial_2\psi(f_{t-s},\Gamma(f_{t-s})L\Gamma(f_{t-s}) \\ &+ \partial_{11}\psi(f_{t-s},\Gamma(f_{t-s}))\Gamma(f_{t-s}) + 2\partial_1\partial_2\psi(f_{t-s},\Gamma(f_{t-s}))\Gamma(f_{t-s},\Gamma(f_{t-s})) \\ &+ \partial_{22}\psi(f_{t-s},\Gamma(f_{t-s}))\Gamma(\Gamma(f_{t-s})). \end{aligned}$$

Puisque

$$\frac{d}{ds}\psi(f_{t-s},\Gamma(f_{t-s})) = -\partial_1\psi(f_{t-s},\Gamma(f_{t-s}f)Lf_{t-s} - 2\partial_2\psi(f_{t-s},\Gamma(f_{t-s}f)\Gamma(f_{t-s},L\Gamma f_{t-s}),$$

cela conclut le lemme en utilisant la définition de Γ_2.

□

Les corollaires suivants découlent aisément du lemme précédent. Ils sont cependant fondamentaux car ils impliquent des inégalités fonctionnelles citées en introduction.

Corollaire 1.7.3. *$\frac{d}{ds}P_s(f_{t-s}^2) = 2P_s(\Gamma(f_{t-s}))$, et $\frac{d^2}{ds^2}P_s(f_{t-s}^2) = 4P_s(\Gamma_2(f_{t-s}))$.*

Ce corollaire permet de démontrer l'inégalité de trou spectral. Notons que par définition des itérés du carré du champ, on a en fait pour tout $n \geq 1$, $\frac{d}{ds}P_s(\Gamma_{n-1}(f_{t-s})) = 2P_s(\Gamma_n(f_{t-s}))$.

Corollaire 1.7.4. *$\frac{d}{ds}P_s(f_{t-s}\log f_{t-s}) = 2P_s(f_{t-s}\Gamma(\log f_{t-s}))$, et $\frac{d^2}{ds^2}P_s((f_{t-s}\log f_{t-s}) = 4P_s(f_{t-s}\Gamma_2(\log f_{t-s}))$.*

Ce corollaire, comme nous le verrons plus bas, permet de démontrer des inégalités de Sobolev logarithmiques. Nous donnons un dernier corollaire qui met en jeu une forme inverse de l'isopérimétrie gaussienne.

Corollaire 1.7.5.

$$\frac{d}{ds}P_s(\mathscr{I}_\gamma(f_{t-s})) = P_s(\mathscr{I}_\gamma(f_{t-s})^{-1}\Gamma(f_{t-s})), = P_s(\mathscr{I}_\gamma(f_{t-s})\Gamma(\Phi^{-1}(f_{t-s}))).$$

1.7.1 Preuve des inégalités fonctionnelles dans le cas d'un générateur de diffusion infini-dimensionnel

Commençons par le cas le plus simple, la démonstration de l'inégalité de Poincaré. Par ergodicité, puis théorème fondamental de l'analyse, la variance se développe le long du semi-groupe de la chaleur de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}_\mu(f) &= \int_{\mathbb{R}^n}(P_tf)^2d\mu - \left(\int_E f\,d\mu\right)^2 = -\int_0^\infty \frac{d}{ds}\int_E (P_sf)^2d\mu\,ds \\ &= -2\int_0^\infty\int_E P_sf\,L(P_sf)d\mu\,ds = 2\int_0^\infty\int_E \Gamma(P_sf)d\mu\,ds. \end{aligned}$$

Dans le cas où $\kappa > 0$, l'inégalité de Poincaré suit alors facilement : en effet en utilisant le lemme 1.7.1 qui permet d'échanger semi-groupe et opérateur Γ, comme μ est invariante pour $(P_t)_{t\geq 0}$,

$$2\int_0^\infty\int_E \Gamma(P_sf)d\mu\,ds \leq 2\int_0^\infty e^{-2\kappa s}\int_E P_s\Gamma(f)d\mu\,ds = 2\int_0^\infty e^{-2\kappa s}ds\int_E \Gamma(f)d\mu,$$

ce qui donne, l'inégalité de Poincaré avec constante κ.

En fait, cette inégalité est locale, au sens où l'on démontre de même que ponctuellement :

$$C(\kappa,t)\Gamma(P_tf) \leq P_tf^2 - (P_tf)^2 \leq D(\kappa,t)P_t(\Gamma(f)),$$

où $C(\kappa,t)=\int_0^t e^{2\kappa u}du$ et $D(\kappa,t)=\int_0^t e^{-2\kappa u}du$. On écrit en effet :

$$P_t f^2-(P_t f)^2=\int_0^t \frac{d}{ds}P_s((P_{t-s}f)^2)ds=2\int_0^t P_s(\Gamma P_{t-s}f)ds.$$

Par la propriété de commutation on a $e^{2\kappa s}\Gamma(P_s(P_{t-s}f))\leq P_s(\Gamma P_{t-s}f)\leq e^{-2\kappa(t-s)}P_sP_{t-s}(\Gamma f)$. Par propriété de semi-groupe, il s'ensuit :

$$e^{2\kappa s}\Gamma(P_t f)\leq P_s(\Gamma P_{t-s}f)\leq e^{-2\kappa(t-s)}P_t(\Gamma(f)),$$

ce qui conclut l'assertion.

Le même raisonnement peut être ainsi appliqué pour atteindre l'inégalité de Sobolev logarithmique.

Proposition 1.7.6. *Soit (E,μ,Γ) un espace de probabilité satisfaisant $CD(\kappa,\infty)$, avec $\kappa\in\mathbb{R}$. Alors, sous la condition $CD(\kappa,\infty)$,*

$$C(\kappa,t)\frac{\Gamma(P_t f)}{P_t f}\leq P_t(f\log f)-P_t f\log P_t f\leq D(\kappa,t)P_t\Big(\frac{\Gamma(f)}{f}\Big),$$

avec encore $C(\kappa,t)=\int_0^t e^{2\kappa s}ds$ et $D(\kappa,t)=\int_0^t e^{-2\kappa s}ds$. En particulier, si $\kappa>0$, (E,μ,Γ) satisfait $LS(\kappa)$.

Démonstration. La preuve est très similaire à celle vue plus haut pour établir l'inégalité de Poincaré. D'après le corollaire et le fait que $\Gamma(\log g)=\frac{\Gamma(g)}{g^2}$

$$P_t(f\log f)-P_t f\log P_t f=\int_0^t \frac{d}{ds}P_s(P_{t-s}f\log P_{t-s}f)ds=\int_0^t P_s\Big(\frac{\Gamma(P_{t-s}f)}{P_{t-s}f}\Big)ds,$$

Or par le corollaire 1.7.4, $F:s\mapsto e^{-2\kappa s}P_s(P_{t-s}f\,\Gamma(\log P_{t-s}f))$ est croissante car

$$F'(s)=2e^{-2\kappa s}P_s(P_{t-s}f(\Gamma_2-\kappa\Gamma)(\log P_{t-s}f)).$$

Ainsi, utilisant la propriété de commutation dans les deux sens,

$$e^{2\kappa(t-s)}\frac{\Gamma(P_t f)}{P_t f}=e^{2\kappa(t-s)}\frac{\Gamma(P_s(P_{t-s}f))}{P_s(P_{t-s}f)}\leq P_s\Big(\frac{\Gamma(P_{t-s}f)}{P_{t-s}f}\Big)\leq e^{-2\kappa t}P_t\Big(\frac{\Gamma(f)}{f}\Big).$$

Le résultat suit par intégration. De nouveau, si $\kappa>0$, en faisant tendre $t\to\infty$, par ergodicité l'inégalité de droite appliqué à f^2 entraîne l'inégalité de Sobolev logarithmique $LS(\kappa)$ car

$$\frac{\Gamma(f^2)}{f^2}=4\Gamma(f).$$

□

Si les inégalités de trou spectral et de Sobolev logarithmiques sont antérieures aux travaux de Bakry–Émery, ce n'est pas le cas des formes inverses. Ces inégalités sont intéressantes. En effet, la forme inverse de l'inégalité de Poincaré implique que pour toute fonction bornée par 1, $P_t f$ est $1/\sqrt{C(\kappa,t)}$-Lipschitz au sens où $\Gamma(P_t f)\leq 1/C(\kappa,t)$. Cette propriété a été mise en lumière par Ledoux, qui l'a utilisée pour donner une nouvelle démonstration d'une inégalité de Buser [Le1] sur la minoration de la constante de trou spectral. Cette nouvelle preuve s'appuie sur le lemme suivant, dont nous nous resservirons par la suite :

Lemme 1.7.7. *Soit (E,μ,Γ) satisfaisant $CD(0,\infty)$. Alors*

$$\forall f\in L^1(E),\ \|f-P_t f\|_1\leq\sqrt{t}\,\|\sqrt{\Gamma(f)}\|_1. \tag{1.7}$$

Démonstration. Par dualité des espaces L^p, $p \in [1,\infty]$, prenons $g \in L^\infty(E)$ telle que $\|g\|_\infty \le 1$. Par le théorème fondamental de l'analyse et de nouveau l'inégalité de Cauchy–Schwarz,

$$\begin{aligned}
\int_E (f - P_t f) g \, d\mu &= -\int_E g \int_0^t \frac{d}{ds} P_s f \, ds \, d\mu = -\int_0^t \int_E g L P_s f \, d\mu \, ds \\
&= -\int_0^t \int_E P_s g L f \, d\mu \, ds = \int_0^t \int_E \Gamma(P_s g, f) d\mu \, ds \\
&\le \int_0^t \int_E \Gamma(P_s g)^{1/2} d\mu \int_E \Gamma(f)^{1/2} d\mu \, ds \le \int_0^t \frac{ds}{2\sqrt{s}} \int_E \Gamma(f)^{1/2} d\mu,
\end{aligned}$$

ce qui conclut puisque $\|f - P_t f\|_1 = \sup_{\|g\|_\infty = 1} \int_E (f - P_t f) g \, d\mu$.

□

Pour ce qui est de la forme inverse de l'inégalité de Sobolev logarithmique, cela implique que $0 \le f \le 1$,

$$C(\kappa, t) \Gamma(\log P_t f) \le -\log(P_t f)$$

et ainsi $\phi = (-\log P_t f)^{1/2}$ est $\frac{1}{\sqrt{2C(\kappa,t)}}$-Lipschitz au sens où $\Gamma(\phi) \le \frac{1}{2C(\kappa,t)}$.

Cette propriété a été utilisé par Hino [Hin] pour prouver des inégalités de type Wang–Harnack. Plus tard Ledoux [Le5] a utilisé ce fait pour prouver un théorème d'Emanuel Milman sur l'équivalence entre isopérimétrie et concentration sous une hypothèse de minoration de courbure. Plus récemment, et nous y reviendrons dans le chapitre 3, ce fait a été utilisé par Mossel et Neeman pour prouver des estimations indépendantes de la dimension sur le déficit isopérimétrique gaussien [M-N1].

Citons une autre lemme, qui met en jeu la fonction isopérimétrique gaussienne, qui découle du corollaire 1.7.5. Comme pour l'inégalité de Sobolev logarithmique inverse, ce lemme a récemment été exploité par Bakry, Gentil et Ledoux pour prouver des inégalités de type Wang–Harnack [B-G-L2].

Lemme 1.7.8. $\Gamma(\Phi^{-1} \circ P_t f) \le \frac{e^{-2t}}{1-e^{-2t}} = k_t^2$.

Démonstration. La preuve suit les mêmes lignes que les précédentes. Par le corollaire 1.7.5,

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_\gamma^2(f_t) - (P_t(\mathcal{I}_\gamma f))^2 &= -\int_0^t \frac{d}{ds} \Big(P_s(\mathcal{I}_\gamma(f_{t-s})) \Big)^2 ds \\
&= 2 \int_0^t P_s(\mathcal{I}_\gamma(f_{t-s}) P_s(\mathcal{I}_\gamma(f_{t-s})^{-1} \Gamma(f_{t-s})) ds \\
&\ge 2 \int_0^t (P_s(\sqrt{\Gamma f_{t-s}}))^2 dt \ge 2\Gamma f_t \int_0^t e^{2s} ds,
\end{aligned}$$

où on utilise à la dernière ligne l'inégalité de Schwarz et la propriété de commutation entre $(P_t)_{t\ge 0}$ et $\sqrt{\Gamma}$. Cela implique que $\Gamma f_t \le \frac{\mathcal{I}_\gamma^2(f_t)}{e^{2t}-1}$, ce qui est équivalent à l'énoncé du lemme

$$\Gamma(\Phi^{-1}(f_t)) \le \frac{1}{e^{2t}-1} = k_t^2.$$

□

En utilisant l'estimation $\mathcal{I}_\gamma(x) \sim_{x\to 0} x\sqrt{-2\log x}$, cette inégalité peut être prouvée, à constante près, par le biais de l'inégalité de Sobolev logarithmique inverse. Toutefois l'estimation donnée par la fonction isopérimétrique permet d'obtenir des bornes optimales. En effet, sur l'espace gaussien, il y a égalité dans le lemme si $\Phi^{-1}(f)$ est linéaire.

1.7.2 Théorème de comparaison isopérimétrique de Bakry–Ledoux

Les calculs effectués plus haut ont été mis à profit par Bakry et Ledoux pour pouvoir démontrer un analogue du théorème de Lévy–Gromov [B-L1] de la forme fonctionnelle (1.2) de l'isopérimétrie gaussienne due à Bobkov. Remarquant que par ergodicité $\int_{\mathbb{R}^n} f\,d\gamma_n = \lim_{t\to\infty} Q_t f$, $f = Q_0 f$, Bakry et Ledoux considèrent la fonction

$$h : s \in [0,\infty) \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \sqrt{\mathscr{I}_\gamma^2(Q_s f) + |\nabla Q_s f|^2} d\gamma$$

et démontrent qu'elle est décroissante, ce qui implique bien l'inégalité de Bobkov (1.2).

En fait, dans la cadre abstrait d'un triplet de Markov (pris ci-dessous sous la condition $CD(\kappa,\infty)$), l'idée est de nouveau de dériver $F : s \mapsto P_s(\psi(f_{t-s}, \Gamma(f_{t-s}f))$, cette fois pour $\psi(x,y) = \sqrt{\mathscr{I}_\gamma^2(x) + \frac{1}{\kappa}y}$. Alors $\partial_2\psi(x,y) = \frac{1}{2\kappa\psi(x,y)}$ et

$$\partial_{11}\psi(x,y) = -\frac{(\mathscr{I}_\gamma'(x)\mathscr{I}_\gamma(x))^2 - (1+\mathscr{I}_\gamma^2(x))\psi^2(x,y)}{\psi^3(x,y)},$$

$$\partial_{12}\psi(x,y) = \frac{\mathscr{I}_\gamma'(x)\mathscr{I}_\gamma(x)}{\kappa\psi^3(x,y)},\ \partial_{22}\psi(x,y) = -\frac{1}{4\kappa\psi^3(x,y)}$$

(où l'on utilise l'équation $\mathscr{I}_\gamma''\mathscr{I}_\gamma = -1$). En utilisant le lemme 1.7.2, on notant $F'(s) = P_s K$, et après quelques manipulations algébriques, il vient :

$$\begin{aligned}\psi^3 K &= (\Gamma_2 f_{t-s} - \kappa\Gamma f_{t-s})\mathscr{I}_\gamma^2(f_{t-s}) - \mathscr{I}_\gamma(f_{t-s})\mathscr{I}_\gamma'(f_{t-s})\Gamma(f_{t-s},\Gamma(f_{t-s})) + \mathscr{I}_\gamma'(f_{t-s})^2\Gamma(f_{t-s})^2 \\ &+ \Gamma(f_{t-s})(\Gamma_2(f_{t-s}) - \kappa\Gamma(f_{t-s})) - \frac{1}{4}\Gamma(\Gamma(f_{t-s})).\end{aligned}$$

Ainsi comme le second terme est positif (par la propriété (1.6)),

$$F'(s) \geq P_s\bigg(\frac{(\Gamma_2 f_{t-s} - \kappa\Gamma f_{t-s})\mathscr{I}_\gamma^2(f_{t-s}) - \mathscr{I}_\gamma(f_{t-s})\mathscr{I}_\gamma'(f_{t-s})\Gamma(f_{t-s},\Gamma(f_{t-s})) + \mathscr{I}_\gamma'(f_{t-s})^2\Gamma(f_{t-s})^2}{\psi^3(f_{t-s},\Gamma(f_{t-s}))}\bigg).$$

En utilisant de nouveau la propriété (1.6), on voit que le numérateur, qui est une forme quadratique en $\mathscr{I}_\gamma(f_{t-s})$ et $\mathscr{I}_\gamma'(f_{t-s})$, est toujours positif. Ainsi F est bien croissante le long du semi-groupe.

Cela implique en particulier le théorème suivant, analogue de Lévy–Gromov dans un cadre abstrait. En effet, lorsque $\sqrt{\Gamma(f)}(x) = \limsup_{d(x,y)\to 0} \frac{f(y)-f(x)}{d(x,y)}$ (comme sur les variétés riemanniennes à poids où $\sqrt{\Gamma(f)} = |\nabla f|$), cela implique le théorème suivant, que est la version généralisée du théorème 1.2.9.

Théorème 1.7.9. *Soit (E,μ,Γ) un triplet markovien satisfaisant la condition $CD(\kappa,\infty)$. Alors*

$$\mu^+(A) \geq \mathscr{I}_{\gamma_\kappa}(\mu(A))$$

*où γ_κ est la mesure gaussienne dans $\mathbb{R}^n$ de variance κ^{-1}*Id.

Derrière ces calculs qui peuvent paraître quelque peu fastidieux, il y une intuition géométrique claire qui découle du cas gaussien. Rappelons que le membre de droite de l'inégalité de Bobkov correspond à la mesure de bord de l'ensemble $A = \{(x,x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1},\ x_{n+1} \leq \Phi^{-1}\circ f(x)\}$. Par la propriété d'ergodicité du semi-groupe, $\Phi^{-1}\circ Q_s f$ converge vers une demi-espace lorsque s tends vers l'infini ∞. De plus, le semi-groupe ayant des propriétés de régularisation, cette mesure de bord devrait décroître le long du semi-groupe. C'est en effet ce que révèlent les calculs effectués plus haut.

Sous la forme gaussienne, il y a ainsi égalité lorsque $\Phi^{-1}\circ f$ est linéaire (car alors l'épigraphe correspondant est un demi-espace). Suivant l'idée de Carlen et Kerce [C-K], on peut exprimer $F'(s)$ en terme de $\Phi^{-1}\circ f_{t-s}$. Par les formules

$$\Gamma(u(f)) = u'(f)^2\Gamma(f), \qquad \Gamma_2(u(f)) = u'(f)^2\Gamma_2(f) + u'(f)u''(f)\Gamma(f,\Gamma(f)) + u''(f)^2\Gamma(f)^2,$$

appliquées à $u = \Phi^{-1}$, puisque $(\Phi^{-1})' = \frac{1}{\mathcal{I}_\gamma}$ et $(\Phi^{-1})'' = -\frac{\mathcal{I}_\gamma'}{\mathcal{I}_\gamma^2}$ on a :

$$\psi^3(f_{t-s}, \Gamma(f_{t-s})) = \mathcal{I}_\gamma^3(f_{t-s})(1 + \Gamma(\Phi^{-1}(f_{t-s}))^{3/2}$$

et

$$\mathcal{I}_\gamma^2(f_{t-s})(\Gamma_2 - \kappa\Gamma)(f_{t-s}) - \mathcal{I}_\gamma(f_{t-s})\mathcal{I}_\gamma'(f_{t-s})\Gamma(f_{t-s}, \Gamma(f_{t-s})) + \mathcal{I}_\gamma'(f_{t-s})^2\Gamma(f_{t-s})^2 = \mathcal{I}_\gamma^4(f_{t-s})(\Gamma_2 - \kappa\Gamma)(\Phi^{-1} \circ f_{t-s}).$$

Ainsi,

$$F'(s) \geq P_s\left(\frac{\mathcal{I}_\gamma(f_{t-s})(\Gamma_2 - \kappa\Gamma)(\Phi^{-1} \circ f_{t-s})}{(1 + \Gamma(\Phi^{-1}(f_{t-s}))^{3/2}}\right).$$

L'avantage de cette forme est qu'elle fait apparaître le facteur $\Gamma_2 - \kappa\Gamma$ qui est déjà présent dans les inégalités de Poincaré et de Sobolev logarithmique. Cette forme est la plus adaptée pour caractériser les fonctions extrémales. Nous y reviendrons dans le chapitre 3, où nous prouvons le théorème de rigidité dû à Morgan dans le cadre des variétés riemanniennes à densités.

Revenant au cadre riemannien, Barthe et Maurey [B-M] ont démontré l'équivalence sur une variété riemannienne (M, g, μ) entre la comparaison du profil isopérimétrique $\mathcal{I}_M$ à celui de la gaussienne et une inégalité de Bobkov par des arguments utilisant le calcul stochastique. Plus précisément,

$$\forall A \subset M,\ \mu^+(A) \geq \sqrt{\kappa} I_\gamma(\mu(A))$$

et

$$\mathcal{I}_\gamma\left(\int_M f\, d\mu\right) \leq \int_M \sqrt{\mathcal{I}_\gamma^2(f) + \frac{1}{\kappa}|\nabla f|^2}d\mu$$

sont équivalentes pour toute fonction f localement Lipschitz. Nous nous resservirons de cette équivalence pour le cas des sphères n dimensionnelles de courbures constantes égales à 1 afin d'étudier le déficit isopérimétrique sur ces espaces.

1.8 Présentation des travaux de la première partie.

Le chapitre 2 présente la notion de stabilité au bruit gaussien, notion qui sera de nouveau rencontrée dans la deuxième partie de thèse. Nous présentons la preuve par semi-groupe du théorème de Borell [Bor2] sur la caractérisation des ensembles maximisant la stabilité au bruit gaussienne. Ce schéma de preuve, comme souligné par Ledoux [Le6], se généralise et permet de retrouver plusieurs inégalités intégrales, ainsi que des versions multidimensionnelles du théorème de Borell. Nous nous concentrons essentiellement sur la caractérisation des cas d'égalités grâce à ces preuves par semi-groupes de telles inégalités. Nous voyons notamment un phénomène de rigidité apparaître sur des variétés riemanniennes à densité. Nous concluons le chapitre par des remarques sur les sphères euclidiennes $\mathbb{S}^n$, $n \geq 1$. Ces remarques mettent en lumière des différences entre les objets de type $CD(\kappa, n)$, $n < \infty$, comme les variétés compactes n dimensionnelles munies de leurs mesures uniformes probabilisées et des objets de type $CD(\kappa, \infty)$.

Dans le chapitre 3, nous étudions des phénomènes de rigidité dans le cadre de variétés riemanniennes munies d'un opérateur de diffusion infini-dimensionnel (i.e. satisfisant une condtion $CD(\kappa, \infty)$ avec $\kappa > 0$). Nous étudions la caractérisation des cas d'égalités dans les inégalités fonctionnelles telles que l'inégalité de trou spectral ou Sobolev logarithmique. De tels hypothèses impliquent un "splitting" de la variété en produit d'une droite gaussienne et d'une autre variété. Ceci est l'analogue du théorème d'Obata pour les variétés riemanniennes compactes à courbures positivement minorées. De plus les cas d'égalités pour le trou spectral sont, comme pour l'espace gaussien, des vecteurs propres du générateur du semi-groupe d'Ornstein–Uhlenbeck associés à la valeur propre κ : c'est-à-dire les fonctions coordonnées. De même, les fonctions exponentielles sont les seules extrémales pour l'inégalité de Sobolev logarithmique (et donc également pour l'inégalité d'hypercontractivité par l'argument de Gross) ; ce résultat a été démontré au début des années 90 par Carlen [Car].

Théorème 1.8.1. *Soit $(M, g, e^{-\psi}d\mathrm{vol})$ une variété de classe $CD(\kappa, \infty)$, $\kappa > 0$. S'il existe une fonction non constante réalisant l'égalité dans l'inégalité de trou spectral ou de Sobolev logarithique, alors*

$$(M, g, e^{-\psi}d\mathrm{vol}) = (\mathbb{R}, |\cdot|, \gamma_\kappa) \times (M', g', e^{-\psi'}d\mathrm{vol}).$$

De plus, dans la direction gaussienne, dans le premier cas f est linéaire et dans le deuxième cas, f est exponentielle.

Les arguments que nous utilisons sont uniquement basés sur les preuves d'interpolations le long des semi-groupes : cette méthode a déjà été utilisé par Bentaleb [Ben2].

Pour ce qui est de la caractérisation des ensembles isopérimétriques dans le théorème de comparaison de Bakry–Ledoux (dans le cadre des variétés), le point de départ est le travail de Carlen et Kerce [C-K]. Les auteurs remarquent en effet que la détermination complète des cas d'égalités de l'inégalité isopérimétrique gaussienne découle de la preuve par semi-groupe de Bakry et Ledoux. Comme rappelé dans l'introduction, pour que A soit extrémal, il faut et il suffit que pour tout $t \geq 0$, $\mathrm{Hess}(\Phi^{-1} \circ Q_t \mathbf{1}_A) = 0$, autrement dit que $\Phi^{-1} \circ Q_t \mathbf{1}_A$ soit linéaire. Or Carlen et Kerce prouvent qu'un tel ensemble est nécessairement un demi-espace. Cette preuve a pour avantage de considérer des ensembles mesurables quelconques, sans hypothèses spécifiques sur la régularité de leurs bords. En effet, quelque soit A mesurable, $t > 0$, $x \mapsto Q_t \mathbf{1}_A(x)$ est de classe C^∞.
Une généralisation de leur argument permet d'étendre ce résultat dans le cadre des variétés riemanniennes à densités $(M, g, \mu = e^{-\psi}d\mathrm{vol})$ satisfaisant une condition $CD(\kappa, \infty)$, $\kappa > 0$. En efet, comme nous l'avons remarqué, l'argument de Carlen et Kerce implique plus généralement qu'un ensemble isopérimétrique A est tel que pour tout $t > 0$, $(\Gamma_2 - \Gamma)(\Phi^{-1} \circ P_t \mathbf{1}_A) = 0$. Dans des variétés riemanniennes, de tels ensembles existent toujours, et peuvent être supposé suffisamment réguliers pour que $\mu^+(A) = \lim_{t \to 0} \int_M |\nabla P_t \mathbf{1}_A| d\mu$. Ceci implique un théorème de rigidité dans le théorème de comparaison de Bakry–Ledoux.

Théorème 1.8.2. *Soit* (M, g, μ) *une variété riemannienne de classe* $CD(\kappa, \infty)$*. S'il existe* $v \in (0,1)$ *tel que* $\mathscr{I}_{(M,\mu)}(v) = \mathscr{I}_{(\mathbb{R},\gamma_\kappa)}(v)$ *alors* $(M, g, \mu) = (\mathbb{R}, |\cdot|, \gamma_\kappa) \times (M', g', \mu')$*. De plus, les ensembles extrémaux sont de la forme* $(-\infty, \Phi_\kappa^{-1}(v)) \times M'$*.*

Cet énoncé est analogue au phénomène de rigidité dans le théorème de comparaison de Lévy–Gromov, et a été déjà prouvé par Franck Morgan [Mor] par des arguments plus géométriques.

Dans un deuxième temps, nous étudions le déficit dans le problème isopérimétrique pour des espaces satisfaisant la condition $CD(1, \infty)$. À notre connaissance, dans ce cadre, il n'y a pas de résultat de stabilité pour le problème isopérimétrique ailleurs que sur l'espace gaussien. Le point de départ est le travail de Mossel et Neeman [M-N1] sur le déficit isopérimétrique gaussien à partir de la fonctionnelle de Bobkov. Les auteurs minorent la dérivée le long du semi-groupe d'Ornstein–Uhlenbeck pour obtenir des estimées indépendantes de la dimension sur le déficit isopérimétrique gaussien. Le résultat obtenu, exprimé sous la forme ensembliste, est le suivant.

Si $A \subset \mathbb{R}^n$ est tel que $\gamma_n^+(A) = \mathscr{I}_\gamma(\gamma_n(A)) + \delta$, il existe un demi-espace H de même mesure que A et une constante positive $C = C(\gamma_n(A))$ telle que $\gamma_n(A\Delta H) \leq C(\gamma_n(A))(\log \delta^{-1})^{-1/2}$.

Ce résultat, qui est sous-optimal en la dépendance en δ (qui est de l'ordre de $\sqrt{\delta}$), a pour principal avantage d'obtenir des estimations indépendantes de la dimension sur le déficit isopérimétrique. Ce résultat, amélioré par la suite comme rappelé en introduction, a été le premier reflétant le caractère indépendant de la dimension. Nous nous sommes attaché à généraliser le plus possible les arguments de [M-N1]. Comme on verra dans le chapitre 3, dans l'approche par semi-groupe de l'inégalité de Bobkov, beaucoup d'arguments employés par Mossel et Neeman sont valides pour des triplets de Markov généraux. Dans une certaine mesure, on peut étendre le schéma de preuve de [M-N1].

Rappelons que pour l'espace gaussien, les auteurs démontrent que $P_t \mathbf{1}_A$ est proche d'une fonction linéaire pour $t \in (c, c+1)$ avec $c > 0$ une constante numérique. En exploitant la condition $\gamma^+(A) < \infty$, les auteurs concluent par des arguments spectraux qui semblent spécifique au cas gaussien. Le principal apport est d'exploiter la condition $\|P_t f - f\|_1 \leq O(\sqrt{t})$ afin d'éviter ces arguments. La principale difficulté consiste à démontrer une borne sur la hessienne de $P_t f$ indépendante de la dimension. Dans le cas gaussien, il existe $\eta \geq 2$ et $C > 0$ telle que $\|\nabla^2 \Phi^{-1} P_t f\|_{HS}^2 \leq \frac{C|\log P_t f|}{t^\eta}$ (pour tout $t \geq 0$). Une inégalité similaire devrait être vraie sur les sphères euclidiennes n dimensionnelles de rayon $\sqrt{n-1}$ pour n assez grand. De même, une telle inégalité devrait être vrai au moins pour une sous classe de mesures log-concaves satisfaisant la condition $CD(1, \infty)$. Nous faisant donc cette hypothèse.

Hypothèse 1.8.3. *Supposons qu'il existe des constantes numériques indépendantes de la dimension* C, η *telles que, pour tout* $t \in (0,1)$*,*

$$\|\mathrm{Hess}(\Phi^{-1}(P_t f))\|_{HS}^2 \leq \frac{C \max\{|\log(P_t f)|, |\log(1 - P_t f)|\}}{t^\eta}. \quad (\mathscr{H})$$

Cette hypothèse entraîne les résultats suivants.

Théorème 1.8.4. *Soit* $(\mathbb{S}_1^n, \mu)$ *la sphère euclidienne de rayon* $\sqrt{n-1}$ *munie de sa mesure de probabilité uniforme* μ*. Si* $(\mathscr{H})$ *est vraie, soit* A *un ensemble tel que* $\mu^+(A) = \mathscr{I}_\gamma(\mu(A)) + \delta$*. Alors il existe une calotte sphérique* H *et une constante strictement positive* c *telle que :*

$$\mu(A\Delta H) \leq O(|\log \delta|^{-c}).$$

Comme on travaille sur la fonctionnelle de Bobkov, il n'y a pas d'espoir d'obtenir une caractérisation complète des ensembles extrémaux. Rappelons qu'il n'y a pas encore de preuve par semi-groupe de l'isopérimétrie sphérique. Toutefois, comme la fonction isopérimétrique $\mathscr{I}_{\{\mathbb{S}_1^n, g_1, \mu\}}$ converge en tout point vers la fonction isopérimétrique gaussienne $\mathscr{I}_\gamma$, ce théorème peut s'exprimer seulement en termes d'isopérimétrie sphérique. Tenter d'étudier la stabilité du problème isopérimétrique sphérique par cette approche fait donc sens. En particulier, en corollaire du théorème précédent, on obtient :

Corollaire 1.8.5. *Soit $(\mathbb{S}_1^n, \mu)$ la sphère euclidienne de rayon $\sqrt{n-1}$ munie de sa mesure de probabilité uniforme μ. Soit A un ensemble tel que $\mu^+(A) = \mathscr{I}_{\{\mathbb{S}_1^n, g_1, \mu\}}(\mu(A)) + \delta$. Alors il existe une calotte sphérique H et une constante strictement positive c telle que :*

$$\mu(A\Delta H) \leq O(|\log \delta_n|^{-c}),$$

où $\delta = \max(\delta, \frac{1}{n})$.

Un autre classe naturelle est celle des mesures log-concaves sur $\mathbb{R}^n$ satisfaisant la condition $CD(1,\infty)$. Un cas d'égalité implique par la remarque précédente qu'une marginale est gaussienne et que l'ensemble est un demi-espace dont l'othogonal est la direction gaussienne. Soit $(\mathbb{R}^n, \mu = e^{-V(x)}dx)$ un espace satisfaisant la condition $CD(1,\infty)$. De façon heuristique, si A est un sous-ensemble tel que $\mu^+(A) \approx I_\gamma(A)$, alors $A \approx H$, où H est un demi-espace, et de plus la mesure μ doit avoir une marginale "proche" de la mesure gaussienne. Cette formulation est volontairement très vague. Toutefois, le résultat obtenu sur le déficit doit être comme pour l'espace gaussien indépendant de la dimension n. Soit $(P_t)_{t\geq 0}$ dont le générateur est donné par $L = \Delta - \nabla V \cdot \nabla$.

Théorème 1.8.6. *Soit $(\mathbb{R}^n, d\mu(x) = e^{-V(x)}dx)$ satisfaisant $CD(1,\infty)$ avec de plus $\nabla^2 V \leq K$ où $K \geq 1$. Supposons que $(\mathscr{H})$ soit vraie. Alors si $A \subset \mathbb{R}^n$ est tel que $\mu^+(A) \leq \mathscr{I}_\gamma(\mu(A)) + \delta$, il existe $v_0 \in \mathbb{R}^n$ $x_0 \in \mathbb{R}$, $c > 0$ et un ensemble B de la forme $\{x \in \mathbb{R}^n, \nabla V(x) \cdot v_0 + x_0 \geq 0\}$, tel que $\mu(B) = \mu(A)$ et*

$$\mu(A\Delta B) \leq O_{\mu(A)}(|\log \delta|^{-c}).$$

Notons que dans cet énoncé, la comparaison ne se fait pas à des demi-espaces mais à des sous-ensembles dépendants du potentiel V coïncidant avec des demi-espaces lorsque V est un potentiel quadratique. Ceci est due à la forme d'une "inégalité de Poincaré" de second ordre pour des mesures log-concaves.