Espace topologique, espace normé et espace métrique

Dans un espace métrique X , on dit qu'un sous-ensemble A est dense dans un autre sous-ensemble B si $B \subset \overline{A}$. Ceci veut tout simplement dire que tout point de B est à distance nulle de A (et peut donc être approché autant que souhaité par un point de A). C'est une notion d'approchabilité. En général, le principal intérêt de la notion de densité est le raisonnement par prolongement. C'est à dire, on montre une propriété d'abord pour un ensemble "simple" en quelque sorte (dénombrable ou bien composé d'éléments particulièrement agréables à manipuler par exemple) puis on la prolonge à un ensemble moins sympathique à l'aide d'un théorème de prolongement (voir [6] pour plus de détails).

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et E un espace de Banach séparable. Dans le cadre de l'analyse multivoque, il est connu que pour une multi-application mesurable $\Gamma : I \rightrightarrows E$, si l'ensemble des sélections intégrables de Γ , S_Γ^1 est non vide, alors il est dense dans son enveloppe convexe fermée $\overline{\text{co}}S_\Gamma^1$ pour la topologie $\sigma(L_E^1, L_{E'}^\infty)$. Ce résultat a été obtenu par plusieurs auteurs dans la dimension finie ([13], [23]) et aussi dans le cas général ([5], [22] et [20]). Dans [10], l'auteur a montré que S_Γ^1 est dense dans $\overline{\text{co}}S_\Gamma^1$ pour la norme $\|f\|_{max} = \max_{t', t'' \in I} \left\| \int_{t'}^{t''} f(s) ds \right\|_E$, et dans la dimension quelconque. Ce théorème de densité fait l'objet principal de ce mémoire, nous donnons une preuve d'une manière très détaillée au cours du deuxième chapitre.

Comme application à ce résultat, dans [10], l'auteur a établi un résultat de relaxation pour une inclusion différentielle du premier ordre, Considérant l'inclusion

$$(\mathcal{I}) \begin{cases} \dot{x}(t) \in F(t, x(t)), & p.p.t \in I \\ x(0) = a, \end{cases}$$

où $F : I \times E \rightrightarrows E$ est une multi-application, et $a \in E$, puis considérant sa forme relaxée

$$(\mathcal{II}) \begin{cases} \dot{x}(t) \in \overline{\text{co}}F(t, x(t)), & p.p.t \in I \\ x(0) = a, \end{cases}$$

où $\overline{\text{co}}$ est l'enveloppe convexe fermée, l'auteur a pu montrer que sous certaines conditions l'ensemble S_I des solutions de $(\mathcal{I})$ est dense dans S_{II} des solutions de $(\mathcal{II})$, pour la topologie de la convergence uniforme sur l'intervalle I . L'étude détaillée de ce résultat de relaxation fait l'objet du troisième chapitre de ce mémoire.

Notons des résultats de relaxation similaires ont été établis en dimension finie (voir exemple [11]). où le second membre F est supposé à valeurs compactes, et où les preuves se basent sur la dimension finie contrairement à [10].

Dans ce chapitre, nous précisons nos notations et rappelons certaines définitions, propositions et théorèmes dont on aura besoin tout au long de ce mémoire.

1.1 Notations générales

On note

- $I = [0, T]$ un intervalle de l'ensemble des réels $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{R}^d$ l'ensemble des vecteurs de dimension d , à coordonnées réelles.
- X un ensemble non vide.
- (X, θ) un espace topologique.
- (X, d) un espace métrique.
- $B_X(y, r)$ la boule ouverte de X de centre y et de rayon r .
- $\overline{B}_X(y, r)$ la boule fermée de X de centre y et de rayon r .
- (X, Σ) un espace mesurable.
- (X, Σ, μ) un espace mesuré.

Soit X un espace topologique. On note

- $\mathcal{B}(X)$ la tribu Borélienne sur X .
- $\mathcal{P}_{cl}(X)$ l'ensemble des parties fermées de X .

Soit E un espace de Banach et $\|\cdot\|$ la norme de E . On note par

- $C(I, E)$ l'espace de Banach de toutes les applications continues définies sur I à valeurs dans E , muni de la norme $\|f(\cdot)\| = \sup_{t \in I} \|f(t)\|_E$ issue de la distance de la convergence uniforme d_u définie par $d_u(f, g) = \max_{t \in I} \|f(t) - g(t)\|_E$
- $L_E^1(I)$ l'espace de Banach de toutes les applications intégrables au sens de Bochner définies sur I à valeurs dans E , muni de la norme usuelle $\|f(\cdot)\| = \int_I \|f(s)\|_E ds$ et de la norme $\|f(\cdot)\|_{max} = \max_{t', t'' \in I} \left\| \int_{t'}^{t''} f(s) ds \right\|_E$.
- $AC^{1,1}(I, E)$ l'espace des applications absolument continues définies sur I à valeurs dans E , dérivable presque partout avec $f' \in L_E^1(I)$
- $co(A)$ l'enveloppe convexe de A ($A \subset E$).
- $\overline{co}(A)$ l'enveloppe convexe fermée de A .
- $\mathbb{I}_A$ ou χ_A la fonction caractéristique d'une partie A d'un ensemble donné, définie par

$$\mathbb{I}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A; \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

1.2 Espace topologique, espace normé et espace métrique

Définition 1.2.1. Soit X un ensemble non vide. Soit θ une famille de parties de X ($\theta \subset \mathcal{P}(X)$). On dit que θ est une topologie sur X si et seulement si

1. $\emptyset \in \theta, X \in \theta$.
2. $\forall (A_i)_{i \in I} \subset \theta \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \theta$. (stabilité par union quelconque)

3. $\forall (A_i)_{i=1, \dots, n} \subset \theta \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n A_i \in \theta$ (stabilité par intersection finie).

Définition 1.2.2. Soit θ une topologie sur X . Alors (X, θ) est appelé un espace topologique. On appelle ensemble ouvert de X tout ensemble appartenant à θ , c'est-à-dire

$$A \text{ est ouvert dans } X \Leftrightarrow A \in \theta.$$

Définition 1.2.3. Soit (X, θ) un espace topologique et $B \subset X$. On dit que B est fermé dans X si et seulement si son complémentaire C_X^B est ouvert.

Définition 1.2.4. Soient (X_1, θ_1) et (X_2, θ_2) deux espaces topologiques et soit

$$X = X_1 \times X_2 = \{(x_1, x_2) / x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\}.$$

1. On appelle ouvert premier tout ensemble

$$O = \{O_1 \times O_2 / O_1 \in \theta_1, O_2 \in \theta_2\}.$$

2. On appelle ouvert de X tout union d'ouverts premier, i.e.

$$\theta = \{\cup_k (O_1^k \times O_2^k) / O_1^k \in \theta_1, O_2^k \in \theta_2\}$$

est une topologie sur X appelée la topologie produit de $\theta_1 \times \theta_2$ et le couple (X, θ) est appelée l'espace topologique produit de (X_1, θ_1) et (X_2, θ_2) .

Définition 1.2.5. Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$ et soit

$$\begin{aligned} \varphi : E &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto \varphi(x) \end{aligned}$$

on dit que φ est une norme sur E si et seulement si

1. Pour tout $x \in E$, on a $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$.

2. Pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $\varphi(\lambda x) = |\lambda| \varphi(x)$.

3. Pour tout $x, y \in E$, on a $\varphi(x + y) \leq \varphi(x) + \varphi(y)$.

Définition 1.2.6. Soit X un ensemble non vide quelconque. On appelle distance sur X une application $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ qui à $(x, y) \in X \times X$ fait correspondre le nombre réel fini positif $d(x, y)$ appelé distance de x à y , et satisfaisant aux trois conditions suivantes

- (i) $\forall x, y \in X, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- (ii) $\forall x, y \in X, d(x, y) = d(y, x)$ (relation de symétrie),
- (iii) $\forall x, y, z \in X, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire).

Définition 1.2.7. On appelle espace métrique le couple (X, d) formé d'un ensemble X et une distance d définie sur X .

Définition 1.2.8. Soit (X, d) un espace métrique, soient $x_0 \in X$ et $r > 0$. On appelle boule de centre x_0 et de rayon r , notée $B_X(x_0, r)$ l'ensemble

$$\{x \in X / d(x_0, x) < r\}$$

Définition 1.2.9. Soient (X, d_X) un espace métrique, et A une partie non vide de X . La distance d'un point $x \in X$ à l'ensemble A est donnée par

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d_X(x, a).$$

Définition 1.2.10. (L'adhérence). Soient (X, d_X) un espace métrique, et A une partie non vide de X . On appelle adhérence de A et on note $\bar{A}$, le sous-ensemble de X défini par

$$\bar{A} = \{x \in X, d(x, A) = 0\}$$

Corollaire 1.2.11. Soient A une partie non vide d'un espace métrique (X, d_X) et $x \in X$. Alors

$$x \in \bar{A} \Leftrightarrow d(x, A) = 0$$

Définition 1.2.12. Soit (E, d_X) un espace métrique et soit $(x_n)_n \subset E$. On dit que $(x_n)_n$ est de Cauchy si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall p, q \in \mathbb{N}; \quad p > q \geq n_0 \Rightarrow d_X(x_p, x_q) < \varepsilon$$

Définition 1.2.13. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de l'espace métrique (X, d_X) , Soit $x \in X$. On dit que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $x \in X$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \Rightarrow d_X(x_n, x) < \varepsilon$$

Définition 1.2.14. *Un espace métrique (X, d_X) est dit complet lorsque toute suite de Cauchy d'éléments de X est convergente dans X .*

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. Pour tout $x, y \in E$, on pose $d(x, y) = \|x - y\|$.

On vérifie facilement que d est une distance sur E , appelée distance associée à la norme.

La topologie correspondante sera appelée topologie normique.

Définition 1.2.15. *Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet pour la distance issue de sa norme.*

Définition 1.2.16. *Soient A, B deux parties d'un espace métrique X .*

- *On dit que A est dense dans B si $B \subset \overline{A}$.*
- *On dit que A est partout dense dans X si $\overline{A} = X$.*

1.3 Ensembles convexes

Définition 1.3.1. *Soit E un espace vectoriel, $a, b \in E$.*

- *On appelle segment fermé d'extrémités a et b (ou tout simplement segment) que l'on note $[a, b]$, l'ensemble $\{\lambda a + (1 - \lambda)b \mid \lambda \in [0, 1]\}$.*
- *On appelle segment ouvert que l'on note $]a, b[$ l'ensemble $\{\lambda a + (1 - \lambda)b \mid \lambda \in]0, 1[\}$.*

De la même manière on définit les segments $]a, b]$ et $[a, b[$.

Définition 1.3.2. *Une partie A de l'espace vectoriel E est dite convexe si à chaque fois que deux points a, b appartiennent à A le segment $[a, b]$ est contenu dans A , i.e.,*

$$\lambda A + (1 - \lambda)A \subset A, \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

ou encore

$$\forall a, b \in A, \forall \lambda \in [0, 1], \lambda a + (1 - \lambda)b \in A.$$

On appelle simplexe de $\mathbb{R}^n$ le sous ensemble Δ_n , tel que

$$\Delta_n = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \lambda_i \geq 0, i = 1 \dots n, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1\}.$$

Définition 1.3.3. *Soit E un espace vectoriel et soient $x_1, x_2, \dots, x_n \in E$. On appelle combinaison convexe des éléments $x_1, x_2, \dots, x_n$ tout élément x qui s'écrit comme suit*

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \quad \text{tel que} \quad (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \Delta_n.$$

Proposition 1.3.4. *Soit E un espace vectoriel et soit $A \subset E$. Alors A est convexe si et seulement si n'importe quelle combinaison convexe des vecteurs de A est un vecteur de A .*

Définition 1.3.5. *Soit A un sous ensemble de l'espace vectoriel E . On appelle enveloppe convexe de A , qu'on note $co(A)$, l'intersection de tous les convexes de E contenant A . C'est en fait le plus petit convexe de E contenant A .*

Définition 1.3.6. *Si E est un espace vectoriel topologique, on appelle enveloppe convexe fermée de A , qu'on note $\overline{co}(A)$, le plus petit convexe fermé de E contenant A .*

Théorème 1.3.7. *(Théorème 1.4, [17], p. 14) Si $A \subset E$. Alors,*

$$\overline{co}(A) = \overline{co(\overline{A})}.$$

Démonstration. Soit $A \subset E$. L'ensemble $\overline{co(\overline{A})}$ est un fermé convexe (car $co(\overline{A})$ est convexe) contenant A . Mais $\overline{co}(A)$ est le plus petit convexe fermé contenant A .

Donc

$$\overline{co}(A) \subset \overline{co(\overline{A})}.$$

D'autre part, $co(A)$ est contenu dans tout ensemble convexe contenant A (car c'est le plus petit d'entre eux),

d'où

$$co(A) \subset \overline{co}(A).$$

Par conséquent,

$$\overline{co(A)} \subset \overline{co(\overline{A})} = \overline{co}(A).$$

On conclut que $\overline{co(A)} = \overline{co}(A)$. □

Théorème 1.3.8. *Si $A \subset E$. Alors,*

$$\overline{co}(A) = \overline{co(\overline{A})}.$$

Démonstration. Comme $A \subset \overline{A}$ alors $co(A) \subset co(\overline{A})$ (propriété), d'où

$$\overline{co(A)} \subset \overline{co(\overline{A})},$$

autrement dit, d'après le théorème précédent,

$$\overline{co}(A) \subset \overline{co(\overline{A})}. \tag{1.1}$$

D'autre part, par définition de l'enveloppe convexe fermée, nous avons

$$A \subset \overline{\text{co}}(A),$$

d'où

$$\overline{A} \subset \overline{\overline{\text{co}}(A)} = \overline{\text{co}}(A)$$

(car ce dernier est fermé).

Donc $\overline{\text{co}}(A)$ est un convexe fermé qui contient $\overline{A}$. Or, $\overline{\text{co}}(\overline{A})$ est le plus petit ensemble de ces ensembles, d'où

$$\overline{\text{co}}(\overline{A}) \subset \overline{\text{co}}(A). \quad (1.2)$$

Combinant (1.1) et (1.2) on conclut que $\overline{\text{co}}(\overline{A}) = \overline{\text{co}}(A)$. $\square$

Proposition 1.3.9. *Soient E un espace vectoriel, $A, B \subset E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.*

1. $\text{co}(\alpha A) = \alpha \text{co}(A)$.
 2. $\text{co}(A + B) = \text{co}(A) + \text{co}(B)$.
- Si E un espace vectoriel topologique, alors*
3. *Si A est un sous ensemble convexe de E alors $\overline{A}$ et $\overset{\circ}{A}$ le sont aussi.*
 4. $\overline{\text{co}}(\alpha A) = \alpha \overline{\text{co}}(A)$.

1.4 Distance de Hausdorff

Les définitions et résultats de cette section ont été pris de [2] et [17]. Dans la suite on considère un espace métrique (X, d) et $A, B, C \subset X$.

Définition 1.4.1. *On appelle distance d'un point $x \in X$ à A , la quantité notée $d(x, A)$ et définie par*

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y).$$

Définition 1.4.2. *On appelle écart entre A et B la quantité notée $e(A, B)$ et définie par*

$$e(A, B) = \sup_{x \in A} d(x, B) = \sup_{x \in A} \left(\inf_{y \in B} d(x, y) \right).$$

Définition 1.4.3. *On appelle distance de Hausdorff entre A et B la quantité $\mathcal{H}(A, B)$ définie par*

$$\mathcal{H}(A, B) = \max \left(e(A, B), e(B, A) \right),$$

avec la convention

$$\sup \emptyset = 0 \text{ et } \inf \emptyset = +\infty.$$

Propriétés

1. $e(A, \emptyset) = +\infty$ si $A \neq \emptyset$
2. $e(\emptyset, B) = 0$
3. $e(A, B) = 0 \Leftrightarrow A \subset \overline{B}$
4. $\mathcal{H}(A, B) = 0 \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$
5. $e(A, C) \leq e(A, B) + e(B, C)$
6. $\mathcal{H}(A, C) \leq \mathcal{H}(A, B) + \mathcal{H}(B, C)$.

Soit $\mathcal{P}_f(X)$ l'ensemble des parties fermées de X . Alors $\mathcal{P}_f(X)$, muni de la distance de Hausdorff $\mathcal{H}$, est un espace métrique.

1.5 Quelques notions de mesurabilité

Les définitions et résultats de cette section ont été pris de [1] et [17].

Définition 1.5.1. (Tribu, espace mesurable) Soient X un ensemble non vide et Σ une famille de sous ensembles de X . Alors Σ est une tribu sur X si

1. $\emptyset \in \Sigma$.
2. $A \in \Sigma \Rightarrow X \setminus A \in \Sigma$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq 1), A_n \in \Sigma \Rightarrow \bigcup_n A_n \in \Sigma$

Le couple (X, Σ) est appelé espace mesurable, et les éléments de Σ sont appelés ensembles mesurables

Si la troisième relation est vraie pour les unions finies seulement, on dit que Σ est une algèbre sur X .

Proposition 1.5.2. (Tribu engendrée) Soit $\mathcal{A}$ une famille de parties de X . L'intersection de toutes les tribus contenant $\mathcal{A}$, est appelée tribu engendrée par $\mathcal{A}$, et est usuellement notée $\sigma(\mathcal{A})$.

$\sigma(\mathcal{A})$ est la plus petite tribu contenant $\mathcal{A}$ au sens d'une inclusion.

Proposition 1.5.3. (*Propriétés des tribus engendrées*) Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux familles de parties de X . Alors,

(a) $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \Rightarrow \sigma(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{B})$

(b) Pour toute tribu Σ sur X , $\mathcal{A} \subset \Sigma \Rightarrow \sigma(\mathcal{A}) \subset \Sigma$.

Définition 1.5.4. (*La tribu borélienne*) Soit (X, τ) un espace topologique. On appelle tribu borélienne la tribu engendrée par τ , on la note $\mathcal{B}(X)$.

Les éléments de la tribu borélienne sont appelés ensembles boréliens.

Définition 1.5.5. (*Fonction mesurable*) Soient (X_1, Σ_1) , (X_2, Σ_2) deux espaces mesurables et f une application définie sur X_1 à valeurs dans X_2 . On dit que f est (Σ_1, Σ_2) -mesurable si pour tout $A \in \Sigma_2$, $f^{-1}(A) \in \Sigma_1$.

Si X_2 est un espace topologique, une application $(\Sigma_1, \mathcal{B}(X_2))$ -mesurable est dite application Borélienne ou Σ_1 -mesurable.

Proposition 1.5.6. Soient X_1, X_2 deux espaces topologiques et $f : X_1 \rightarrow X_2$. Si f est continue alors $f : (X_1, \mathcal{B}(X_1)) \rightarrow (X_2, \mathcal{B}(X_2))$ est mesurable.

Proposition 1.5.7. Soient (X, Σ) un espace mesurable et $\{f_n\}_{n \geq 1}$ une suite d'applications mesurables définies sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si $\{f_n\}_{n \geq 1}$ converge simplement vers f alors f est mesurable.

Définition 1.5.8. Soit (X, Σ) un espace mesurable. Alors l'application $\mu : \Sigma \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est une mesure si

1. $\mu(\emptyset) = 0$;

2. $\mu(\bigcup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)$, pour toute suite dénombrable (A_n) d'éléments de Σ deux à deux disjoints.

- Le triplet (X, Σ, μ) est appelé espace mesuré.
- Si $\mu(A) \geq 0$, pour tout $A \in \Sigma$, on dit que μ est une mesure positive et on note $\mu \geq 0$, ou que l'espace (X, Σ, μ) est positif.
- Si $\mu(A) < \infty$, pour tout $A \in \Sigma$, on dit que μ est une mesure finie ou que l'espace (X, Σ, μ) est fini.
- Si X est un espace topologique, la mesure $\mu : \mathcal{B}(X) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est appelée mesure Borélienne.

Proposition 1.5.9. Croissance et mesure d'une différence

Soit (X, Σ, μ) un espace mesuré. Soit $A, B \in \Sigma$ tels que $B \subset A$. Alors

$$\mu(B) \leq \mu(A).$$

Si, de plus $\mu(A) < +\infty$, alors $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$.

Définition 1.5.10. Soit X un espace topologique séparé et μ une mesure Borélienne. Alors μ est dite régulière si pour tout $A \in \mathcal{B}(X)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert C et un fermé G de X , tels que $G \subset A \subset C$ et $\mu(C \setminus G) \leq \varepsilon$.

Une mesure Borélienne finie et régulière est appelée mesure de Radon.

Définition 1.5.11. Soient (X, Σ, μ) un espace mesuré positif et A un sous ensemble de X . On dit que A est μ -négligeable ou négligeable, s'il existe $B \in \Sigma$ tel que $A \subset B$ et $\mu(B) = 0$.

• On dit qu'une propriété sur X est vraie μ -presque partout (μ -p.p.), si l'ensemble où elle n'est pas vérifiée est μ -négligeable.

Théorème 1.5.12. Soit (X, Σ, μ) un espace mesuré fini et E un espace de Banach séparable. Si $f : X \rightarrow E$ est mesurable, alors il existe une suite $\{f_n\}_{n \geq 1}$ d'applications simples telles que $f_n \rightarrow f$ μ -p.p., et pour μ -presque tout $x \in E$, $\|f_n(x)\| \leq \|f(x)\|$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

• La tribu μ -complétée de Σ notée Σ_μ est la tribu engendrée par Σ et les ensembles μ -négligeables, c'est à dire

$$\Sigma_\mu = \{A \cup Z; A \in \Sigma \text{ et } Z \text{ ensemble } \mu\text{-négligeable}\}.$$

• La tribu Σ est dite complète si $\Sigma = \Sigma_\mu$, c'est à dire, si tout ensemble μ -négligeable appartient à Σ .

Soit l'ensemble de parties de $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ suivant

$$\mathcal{A} = \{]a, b[; a, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}\}$$

(c'est l'ensemble des intervalles ouverts). La tribu $\sigma(\mathcal{A})$ s'appelle la tribu des Boréliens et se note $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Définition 1.5.13. (Tribu de Lebesgue). La tribu de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ notée $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ est la tribu complétée de la tribu Borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ pour la mesure de Lebesgue.

Théorème 1.5.14. (Mesure de Lebesgue). Il existe une mesure λ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ vérifiant

$$1. \text{ pour tout intervalle }]a, b[, \lambda(]a, b[) = b - a$$

$$2. \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R}, \lambda(\{y : y - x \in A\}) = \lambda(A).$$

Cette mesure λ s'appelle la mesure de Lebesgue.

Proposition 1.5.15. (*[9](Castaing), Proposition VII-4, p. 198*) Soit (T, Σ, μ) un espace mesuré positif σ -fini, et μ -complet, E un espace de Banach séparable et soit $f : T \rightarrow E$ une application mesurable de T dans E . Alors, il existe une suite $(T_n)_n$ de sous-ensembles mesurables de T , deux à deux disjoints telle que :

$$\mu(T \setminus \bigcup_n T_n) = 0, \quad \overline{f(T_n)} \text{ est compact dans } E \quad \forall n.$$

Intégrale de Bochner

Il s'agit de l'intégrale d'une application à valeurs dans un Banach. Dans toute cette section, E est un espace de Banach séparable que l'on munit de sa tribu borélienne et un espace mesuré (T, Σ, μ) .

Les notions de cette section ont été prise de [16].

Définition 1.6.1. Soit $A \subset X$. La fonction indicatrice (caractéristique) de A est la fonction

$$\mathbb{1}_A : X \rightarrow \{0, 1\}$$

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Définition 1.6.2. Soit (X, Σ) un espace mesurable et M un espace métrique. Alors une fonction $g : X \rightarrow M$ est dite fortement mesurable ou Bochner mesurable si g est $(\Sigma, \mathcal{B}(M))$ -mesurable et $g(X)$ est séparable.

Définition 1.6.3. (Fonction simple). Soient (X, Σ) un espace mesurable, E un espace de Banach et $f : X \rightarrow E$. On dit que f est une application simple si elle mesurable et prend un nombre fini de valeurs.

Cette notion est la généralisation d'une fonction en escalier (on dit "en escalier" lorsque on départ d'un réel). Toute fonction simple peut s'écrire sous la forme

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{E_i}(x) y_i,$$

où les $E_i = f^{-1}(y_i)$, $i \in \{1, \dots, n\}$, sont des éléments deux à deux disjoints de Σ et les y_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, sont des éléments distincts de E .

Cette formule est appelée la représentation canonique de f .

Lorsque $f = \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{E_i} y_i$ est une fonction simple, on définit l'intégrale de Bochner de f comme suit

$$\int_T f d\mu = \sum_{i=1}^n \mu(E_i) y_i.$$

Définition 1.6.4. Une application mesurable $f : T \rightarrow E$ est dite intégrable au sens de Bochner, s'il existe une suite d'applications simples $(f_n)_n$ telle que

- $f_n \rightarrow f$ μ p.p,
- $\forall n$, $\|f_n - f\|_{E(\cdot)}$ est intégrable au sens de Lebesgue et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_T \|f_n - f\|_E(t) d\mu = 0.$$

avec

$$\begin{aligned} \|f\| : T &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \|f\|(t) = \|f(t)\|_E. \end{aligned}$$

Et on pose

$$\int_T f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_T f_n d\mu.$$

Dans ce cas $\int_A f d\mu$ est défini pour tout $A \in \Sigma$ par $\int_A f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\mu$.

Théorème 1.6.5. Une application mesurable $f : T \rightarrow E$ est intégrable au sens de Bochner si et seulement si $\int_T \|f\| d\mu < \infty$.

Propriétés

Corollaire 1.6.6. Si $f : T \rightarrow E$ est une application intégrable au sens de Bochner et $A \in \Sigma$, Alors

$$\left\| \int_A f(t) d\mu \right\|_E \leq \int_A \|f(t)\|_E d\mu.$$

Corollaire 1.6.7. Si $f, g : T \rightarrow E$ sont deux applications intégrables au sens de Bochner telles que pour tout $A \in \Sigma$, $\int_A f d\mu = \int_A g d\mu$, alors

$$f(t) = g(t) \quad \text{pour } \mu - \text{presque tout } t \in T.$$

Proposition 1.6.8. ([17], Lemme 1.1) *Nous avons les caractérisations suivantes :*

- f est Bochner mesurable ;
- il existe une suite de fonctions simples définies sur T à valeurs dans E , convergeant simplement vers f ;
- il existe une suite de fonctions dénombrable-ment Σ -étagées définies sur T à valeurs dans E , convergeant uniformément sur T vers f .

On note $L_E^1(T)$ l'ensemble des applications mesurables $f : T \rightarrow E$ intégrables au sens de Bochner.

Si on note $\mathcal{N}$ l'ensemble des fonctions mesurables $f : T \rightarrow E$ telles que $f(x) = 0$ μ -p.p sur T , l'espace des classes d'équivalence $L_E^1(T) \setminus \mathcal{N}$ est noté par $L_E^1(T)$, c'est un espace de Banach muni de la norme $\|f\|_1 = \|f\|_{L^1(T,E)} = \int_T \|f(t)\|_E d\mu$.

Dans l'espace $L_E^1(T)$ on considère la norme "faible"

$$\|f\|_{max} = \max_{0 \leq t' \leq t'' \leq 1} \left\| \int_{t'}^{t''} f(s) ds \right\|. \quad (1.3)$$

Cette norme est équivalente à la norme ([7])

$$\| \|f\| \| = \max_{0 \leq t \leq T} \left\| \int_0^t f(s) ds \right\|. \quad (1.4)$$

En effet, pour tout $t \in [0, T]$, et en prenant $t' = 0$ et $t'' = t$,

$$\left\| \int_0^t f(s) ds \right\| \leq \max_{0 \leq t' \leq t'' \leq T} \left\| \int_{t'}^{t''} f(s) ds \right\| = \|f\|_{\omega}.$$

D'où,

$$\| \|f\| \| \leq \|f\|_{\omega}. \quad (1.5)$$

D'autre part, pour tout $a, b \in [0, T]$, $a \leq b$,

$$\begin{aligned} \left\| \int_{t'}^{t''} f(s) ds \right\| &= \left\| \int_0^{t''} f(s) ds - \int_0^{t'} f(s) ds \right\| \\ &\leq \left\| \int_0^{t''} f(s) ds \right\| + \left\| \int_0^{t'} f(s) ds \right\| \\ &\leq 2 \| \|f\| \|. \end{aligned}$$

D'où,

$$\|f\|_\omega \leq 2\|f\|. \quad (1.6)$$

De (1.5) et (1.6), on déduit que $\|\cdot\|_\omega$ et $\|\cdot\|$ sont équivalentes.

1.7 Applications continues et absolument continues

Pour plus de détails concernant les notions et les résultats énoncés dans cette section, voir [2], [12], [4] et [24].

Définition 1.7.1. Soient X et Y deux espaces topologiques et $F : X \rightarrow Y$ une application. Alors f est continue si pour tout $x_0 \in X$ et tout voisinage V de $f(x_0)$ dans Y , il existe un voisinage U de x_0 dans X , tel que $f(U) \subset V$. Ou encore, si pour tout ouvert (resp fermé) V de Y , $f^{-1}(V)$ est un ouvert (resp fermé) de X .

Définition 1.7.2. Une application f définie sur T à valeur dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est dite absolument continue si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\zeta > 0$ tel que pour toute famille finie d'intervalles ouverts deux à deux disjoints de T ; $(]a_i, b_i[)_{i \in \{1, \dots, n\}}$, nous avons

$$\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) \leq \zeta \implies \sum_{i=1}^n \|f(b_i) - f(a_i)\| \leq \varepsilon.$$

Définition 1.7.3. Soit E un espace de Banach. On définit

$$AC^{1,1}(T, E) = \{f : T \rightarrow E : f \text{ est absolument continue, dérivable presque partout avec } f' \in L_E^1(T)\}.$$

Proposition 1.7.4. Soient E un espace de Banach et $f : T \rightarrow E$. S'il existe une application $g \in L_E^1(T)$ telle que

$$f(t) = f(0) + \int_0^t g(s) ds, \quad \forall t \in T.$$

Alors, $f \in AC^{1,1}(T, E)$ et $\dot{f}(t) = g(t)$ p.p sur T .

Proposition 1.7.5. Soit $\varphi : T \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction absolument continue, et $E = \{t \in T : \varphi(t) = 0\}$. Alors $\text{mes}(\{t \in T : \dot{\varphi}(t) \neq 0\}) = 0$, i.e., $\dot{\varphi}(t) = 0$ p.p sur E .

Théorème 1.7.6. ([18], Théorème 6.5, p.29) Si f est une fonction Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}^d$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ tel que pour tout sous-ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$ avec

$$\mu(E) \leq \delta$$

on a

$$\int_E \|f\| \leq \varepsilon.$$

Cette dernière condition est connue sous le nom d'absolue continuité de l'intégrale d'une fonction par rapport à la mesure de Lebesgue.

1.8 Multi-applications et sélections

Les définitions de cette section ont été prises de [2].

Définition 1.8.1. Soient X, Y deux ensembles non vides. On appelle multi-application F définie sur X à valeurs dans Y toute application qui à chaque élément $x \in X$ associe un sous-ensemble $F(x)$ de Y , et on note $F : X \rightrightarrows Y$ ou $F : Y \rightarrow \mathcal{P}(Y)$.

- On appelle domaine (effectif) de la multi-application F qu'on note $\text{dom}(F)$, le sous-ensemble de X défini par

$$\text{dom}(F) = \{x \in X; F(x) \neq \emptyset\}.$$

- On appelle graphe de F , qu'on note $\text{gph}(F)$, le sous-ensemble de $X \times Y$ défini par

$$\text{gph}(F) = \{(x, y) \in X \times Y; y \in F(x)\}.$$

- On appelle image de F , qu'on note $\text{Im}(F)$, le sous ensemble de Y défini par

$$\text{Im}(F) = \{y \in Y; \exists x \in X, y \in F(x)\}.$$

- Si $A \subset X$, on appelle image de A par F qu'on note $F(A)$ le sous-ensemble de Y défini par $F(A) = \bigcup_{x \in A} F(x)$, et on peut écrire

$$F(A) = \{y \in Y; \exists x \in A, y \in F(x)\}.$$

- On définit la multi-application inverse $F^{-1} : Y \rightrightarrows X$ définie par

$$x \in F^{-1}(y) \Leftrightarrow y \in F(x).$$

- Pour tout $V \subset Y$, on appelle image réciproque large de F , le sous-ensemble défini par

$$F^{-1}(V) = \{x \in X; F(x) \cap V \neq \emptyset\}.$$

Définition 1.8.2. Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. On appelle sélection de F toute application $f : \text{dom}(F) \rightarrow Y$ vérifiant

$$f(x) \in F(x), \forall x \in \text{dom}(F).$$

1.9 Mesurabilité des multi-applications

Les notions de cette section ont été prise de [2] et [17].

Définition 1.9.1. Soient (T, Σ) un espace mesurable, Y un espace topologique et $F : T \rightrightarrows Y$ une multi-application.

1. On dit que F est Σ -mesurable ou mesurable, si pour tout ouvert V de Y

$$F^{-1}(V) = \{t \in T : F(t) \cap V \neq \emptyset\} \in \Sigma.$$

2. On dit que F est fortement mesurable, si pour tout fermé W de Y

$$F^{-1}(W) = \{t \in T : F(t) \cap W \neq \emptyset\} \in \Sigma.$$

Proposition 1.9.2. Si $F : T \rightrightarrows Y$ est fortement mesurable, alors F est mesurable.

Proposition 1.9.3. Soient (T, Σ) un espace mesurable, Y un espace métrique séparable et soit $F : T \rightrightarrows Y$ une multi-application. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) F est Σ -mesurable.

(ii) Pour chaque $y \in Y$, la fonction $d_y : T \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $d_y(t) = d(y, F(t))$ est Σ -mesurable.

Théorème 1.9.4. Soient (T, Σ) un espace mesurable et E un espace de Banach séparable et soient $F : T \times E \rightrightarrows E$ une multi-application "mesurable" et $u : T \rightarrow E$ une application Σ -mesurable. Alors, la multi-application $t \mapsto F(t, u(t))$ est mesurable.

Définition 1.9.5. Soient (T, Σ) un espace mesurable, Y et E deux espaces métriques et soit $f : T \times Y \rightarrow E$ une application.

On dit que f est de Carathéodory si elle est mesurable par rapport à t et continue par rapport à y , c'est à dire pour tout $x \in X$ fixé l'application

$$\begin{aligned} f_y : T &\rightarrow E \\ t &\mapsto f_y(t) = f(t, y) \end{aligned}$$

est Σ -mesurable, et pour tout $t \in T$ fixé l'application

$$\begin{aligned} f_t : Y &\rightarrow E \\ y &\mapsto f_t(y) = f(t, y) \end{aligned}$$

est continue.

On dit aussi que f est séparément mesurable, séparément continue.

Proposition 1.9.6. Soient (T, Σ) un espace mesurable, Y un espace métrique séparable et E un espace métrique et soit $f : T \times Y \rightarrow E$ une "application" de Carathéodory. Alors f est mesurable.

Lemme 1.9.7. Soit (Y, Σ, μ) un espace mesuré avec $\mu \geq 0$, σ -finie et Σ est μ -complète. Soient E un espace métrique séparable et $F : Y \rightrightarrows E$ une multi-application à valeurs fermées, alors, les assertions suivantes sont équivalentes

- (a) F est Σ -mesurable.
- (b) $\text{gph}F \in \Sigma \otimes \mathcal{B}(E)$.
- (c) F est fortement mesurable.

Théorème 1.9.8. (Théorème d'existence de sélections mesurables). Soient (T, Σ) un espace mesurable, Y un espace métrique complet séparable et $F : T \rightrightarrows Y$ une multi-application mesurable à valeurs fermées non vides. Alors, F admet au moins une sélection mesurable.

Théorème 1.9.9. ([24]) Soit (T, Σ, μ) un espace mesuré positif avec Σ μ -complète et $\mu - \sigma$ finie. Soient E un espace de Banach séparable, $\Gamma : T \rightrightarrows E$ une multi-application mesurable à valeurs non vides fermées, $F : T \rightrightarrows E$ une application mesurable. Alors, la multi-application

$$\begin{aligned} H : T &\rightrightarrows E \\ t &\mapsto H(t) = \{x \in \Gamma(t); d(f(t), x) \leq d(f(t), \Gamma(t))\}. \end{aligned}$$

est à valeurs non vides, fermées et elle est mesurable.

1.10 Multi-applications Lipschitziennes

Définition 1.10.1. ([17]) Soient Y, E deux espaces normés et soit $F : Y \rightrightarrows E$ une multi-application. On dit que F est Lipschitzienne autour de $y \in Y$ s'il existe une constante positive l et un voisinage $U \subset D(F)$ de y tels que

$$\forall y_1, y_2 \in U, F(y_1) \subset F(y_2) + l \|y_1 - y_2\|_E \overline{B}_E$$

Dans ce cas on dit aussi que F est Lipschitzienne sur U .

Elle est Lipschitzienne s'il existe l positive tel que

$$\forall y_1, y_2 \in D(F), F(y_1) \subset F(y_2) + l \|y_1 - y_2\|_E \overline{B}_E$$

Proposition 1.10.2. ([17]) Soient Y, E deux espaces "de dimension finie" et soit $F : Y \rightrightarrows E$ une multi-application Lipschitzienne avec la constante de Lipschitz l . Alors la multi-application $y \mapsto \overline{co}(F(y))$ est Lipschitzienne avec la même constante l .

Théorème 1.10.3. (Représentation de Castaing**).** Soient (T, Σ) un espace mesurable, (X, d) un espace métrique séparable complet. Soit $F : T \rightrightarrows X$ une multi-application mesurable à valeurs fermées.

Alors, F est Σ -mesurable si et seulement si $\text{dom}(F) \in \Sigma$ et il existe une suite $(f_n)_n$ d'applications Σ -mesurable ($f_n : \text{dom}(F) \rightarrow X$) telle que pour chaque $t \in \text{dom}(F)$ on ait $F(t) = \overline{(f_n(t))_n}$.

On dit que $(f_n)_n$ est une représentation de Castaing de F .

CHAPITRE 2

UN THÉORÈME DE DENSITÉ

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace de Banach séparable (de dimension quelconque), et $\Gamma : I \rightrightarrows E$ une multi-application mesurable. Il est connu que "si l'ensemble des sélections intégrables de Γ , S_Γ^1 , est non vide alors il est dense dans son enveloppe convexe fermée $\overline{\text{co}}S_\Gamma^1$ pour la topologie $\sigma(L_E^1, L_{E'}^\infty)$ " (voir les travaux [5], [13], [20], [22] et [23]). Dans [10], le résultat principal affirme que sous certaines conditions, S_Γ^1 est dense dans $\overline{\text{co}}S_\Gamma^1$ pour une certaine norme. L'objectif de ce chapitre est de détailler tous les arguments relatifs et ce résultat.

Nous commençons d'abord par deux lemmes donnés dans [10], et allons détailler la preuve de l'un des deux.

2.1 Lemmes préparatoires

Lemme 2.1.1. (*[10], Lemma 1.1, p. 3*) Soit J un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ mesurable et borné, soit $(b_i)_i \subset L_E^1(J)$ et $(\lambda_i)_i \subset \mathcal{L}_{\mathbb{R}_+}^1(J)$, $i = 1, 2, \dots, n$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i(s) = 1, \forall s \in J$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partition mesurable $\{M_i\}_{i=1}^n$ de J telle que

$$\sup_{[t', t''] \subset \mathbb{R}} \left\| \int_{J \cap [t', t'']} \left[\sum_{i=1}^n \lambda_i(s) b_i(s) - \sum_{i=1}^n \chi_{M_i}(s) b_i(s) \right] ds \right\|_E < \varepsilon. \quad (2.1)$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$.