1. RAPPELS

1.1 Egalité d'approximation et notation de LANDAU

1.1.1 Notation

- Si $lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{g(t)} = 0$ on note $f(t) = o(g(t))$ quand $t \to 0$.
- Si $\frac{f(t)}{g(t)}$ est borné au voisinage de zéro on note $f(t) = O(g(t))$.

Ces deux notations sont appelées des "**notation de LANDAU**".

1.1.2 Egalité d'approximation

- $\log(1 + x) = x + o(x^2)$ $(x \to 0)$
- $\exp x = 1 + x + o(x^2)$ $(x \to 0)$

1.2 Fonctions convexes

1.2.1 Définitions

Définition 1.1. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite convexe si pour tout $x, y \in I$, pour tous $\lambda \in [0, 1]$, on a : $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$.*

1.2.2 Propriété de convexité

Proposition 1.2. *Supposons quef est deux fois dérivable . f est convexe si et seulement si $f'' \geq 0$.*

1.3 Inégalité de Jensen(discrète)

Théorème 1.3. *Soient $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et $x_k \in \mathbb{R}, k = 1, \ldots, n$ et $\alpha_k, k = 1, \ldots n$ des réels positifs alors*

$$\Phi\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k}\right) \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \Phi(x_k)}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k}. \tag{1.1}$$

1.4 Inégalité de la moyenne arithmetico-géométrique (MA-MG)

Théorème 1.4. *Soient $x_k, p_k; k = 1, \ldots, n$ des réels positifs avec $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$ alors*

$$\prod_{k=1}^{n} {x_k}^{p_k} \leq \sum_{k=1}^{n} p_k x_k \tag{1.2}$$

et on a une égalité si et seulement si $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

1.5 Inégalité de Chebyshev

Théorème 1.5. *Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions croissantes et $p_k \geq 0$ $k = 1, \ldots, n$ et satisfaisant à $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$ et $x_1 \leq x_2 \ldots\ldots \leq x_n$. On a :*

$$(\sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k))(\sum_{k=1}^{n} p_k g(x_k)) \leq (\sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k) g(x_k)). \tag{1.3}$$

1.6 Inégalité de Jensen (version intégrale)

Théorème 1.6. *Soit*(Ω, A, μ) *un espace mesuré tel que* $\mu(\Omega) = 1$ *et* f *une fonction réelle* μ *intégrable et* Φ *une fonction convexe sur* $\mathbb{R}$ *alors*

$$\phi\left(\int_{\Omega} f(x)d\mu(x)\right) \leq \int_{\Omega} \phi(f(x))d\mu(x). \tag{1.4}$$

2. THEOREMES DE BASES

2.1 La Moyenne géométrique comme limite

Théorème 2.1. *Soient p_k et x_k, $k = 1, \ldots, n$ des nombres réels positfs qui satisfont à $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$ alors*

$$\lim_{t\to 0}(\sum_{k=1}^{n} p_k x_k^t)^{\frac{1}{t}} = \prod_{k=1}^{n} {x_k}^{p_k}. \tag{2.1}$$

Preuve. L'égalité d'approximation du logarithme et de l'exponentielle vont nous aider à calculer cette limite, on a :

$$\begin{aligned}
\log(\sum_{k=1}^{n} p_k x_k^t)^{\frac{1}{t}} &= \frac{1}{t}\log(\sum_{k=1}^{n} p_k \exp(t\log x_k)) \\
&= \frac{1}{t}\log(\sum_{k=1}^{n} p_k(1 + t\log x_k + o(t^2))), (t \to 0) \\
&= \frac{1}{t}\log(1 + t\sum_{k=1}^{n} p_k \log x_k + o(t^2)), (t \to 0) \\
&= \sum_{k=1}^{n} p_k \log x_k + o(t), (t \to 0).
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
(\sum_{k=1}^{n} p_k x_k^t)^{\frac{1}{t}} &= exp(\sum_{k=1}^{n} \log {x_k}^{p_k})e^{o(t)} \\
&= \prod_{k=1}^{n} {x_k}^{p_k} e^{o(t)}.
\end{aligned}$$

Par passage à la limite on a

$\lim_{t\to 0}(\sum_{k=1}^{n} p_k x_k^t)^{\frac{1}{t}} = \prod_{k=1}^{n} {x_k}^{p_k}$ car $\lim_{t\to 0} e^{o(t)} = 1.$ □

Corollaire 2.2. *Soient a et b des réels positifs et $\theta \in [0,1]$, alors on a :*

$$\lim_{p \to +\infty} (\theta a^{\frac{1}{p}} + (1-\theta) b^{\frac{1}{p}})^p = a^\theta b^{1-\theta}. \tag{2.2}$$

Preuve. Posons $t = \frac{1}{p}, p \to +\infty, t \to 0$

$\lim_{t \to 0} (\theta a^t + (1-\theta) b^t)^{\frac{1}{t}} = a^\theta b^{(1-\theta)}$

d'après le théorème(2.1) en prenant $p_1 = \theta, p_2 = 1-\theta, x_1 = a, x_2 = b$. □

Plus loin cette limite nous montrera facilement l'inégalité **MA-MG**.

2.2 Majoration de la moyenne géométrique

Théorème 2.3. *Soient $p_k, k = 1, \ldots, n$ des poids positifs de masse totale $\sum_{k=1}^n p_k = 1$ et $x_k, k = 1, \ldots, n$ des réels positifs, alors on a la majoration :*

$$\prod_{k=1}^n {x_k}^{p_k} \leq (\sum_{k=1}^n p_k x_k^t)^{\frac{1}{t}}, \text{ pour tout } t > 0. \tag{2.3}$$

Preuve. Il y a deux méthodes pour montrer cette inégalité :

1. Posons $M_t = \{\sum_{k=1}^n p_k {x_k}^t\}^{\frac{1}{t}}$, en écrivant $x_k^t p_k = p_k^{\frac{1}{2}} p_k^{\frac{1}{2}} x_k^t$ on a d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz $M_t^t = \sum_{k=1}^n p_k x_k^t \leq (\sum_{k=1}^n p_k)^{\frac{1}{2}} (\sum_{k=1}^n p_k x_k^{2t})^{\frac{1}{2t}}$,

$$M_t^t \leq \left(\sum_{k=1}^n p_k x_k^{2t} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$M_t^t \leq M_{2t}^t, \text{pour tout } t > 0. \tag{2.4}$$

Pour completer la solution de notre problème, il suffit d'itérer et on trouve que pour tout $t > 0$

$$M_{\frac{t}{2^j}} \leq M_{\frac{t}{2^{j-1}}} \leq \ldots \leq M_{\frac{t}{2}} \leq M_t.$$

En prenant les deux extrémités on a :

$$M_{\frac{t}{2^j}} \leq M_t \text{ pour tout } j \in \mathbb{N}. \tag{2.5}$$

Or $\lim\limits_{j\to+\infty} M_{\frac{t}{2^j}} = \lim\limits_{t\to+\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} p_k x_k^{\frac{t}{2^j}}\right)^{\frac{2^j}{t}}$

posons $u = \frac{t}{2^j}, j \to +\infty, u \to 0$ alors

$\lim\limits_{j\to+\infty} M_{\frac{t}{2^j}} = \lim\limits_{u\to 0} M_u = \prod\limits_{k=1}^{n} {x_k}^{p_k} = M_0$, d'après le théorème (2.1).

Par passage à la limite dans la relation(2.5), on a

$$M_0 = \prod_{k=1}^{n} {x_k}^{p_k} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} p_k {x_k}^t\right)^{\frac{1}{t}}, \text{pour tout } t > 0.$$

2. En utilisant l'inégalité MA-MG.

Prenons $a_k = {x_k}^t$ dans le théoréme (1.4)

$$\begin{aligned} \left(\prod_{k=1}^{n} {x_k}^{p_k}\right)^t &\leq \sum_{k=1}^{n} p_k x_k^t \\ \prod_{k=1}^{n} {x_k}^{p_k} &\leq (\sum_{k=1}^{n} x_k^t)^{\frac{1}{t}}, \text{pour tout } t > 0. \end{aligned}$$

□

2.3 Inégalité de la moyenne

Théorème 2.4. *Soient $p_k, k = 1, \ldots, n$ des poids de masse totale $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$. Pour tous réels positifs $x_k, k = 1, \ldots, n$, l'application $t \longmapsto M_t$ est croissante sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire pour tous $s < t$, on a :*

$$(\sum_{k=1}^{n} p_k x_k^s)^{\frac{1}{s}} \leq (\sum_{k=1}^{n} p_k x_k^t)^{\frac{1}{t}} \tag{2.6}$$

et on a une égalité si et seulement si $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Preuve. 1. La situation fondamentale $0 < s < t$.

En appliquant le théorème(1.3) à la fonction convexe $\phi : x \longmapsto x^p$, $p > 1$, on a

$$\left(\sum_{k=1}^{n} p_k y_k\right)^p \leq \sum_{k=1}^{n} p_k {y_k}^p.$$

En particulier si nous posons $y_k = x_k^s$ et $p = \frac{t}{s} > 1$, on a

$$\left(\sum_{k=1}^{n} p_k x_k^s\right)^{\frac{t}{s}} \leq \sum_{k=1}^{n} p_k {x_k}^t;$$
$$\left(\sum_{k=1}^{n} p_k {x_k}^s\right)^{\frac{1}{s}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} p_k {x_k}^t\right)^{\frac{1}{t}}, \text{ pour tout } 0 < s < t.$$

Comme l'application $x \longmapsto x^p, p > 1$ est strictement convexe on a une égalité si et seulement si $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

2. Pour $s < t < 0$.

$s < t < 0$ donc $0 < -t < -s$; d'après l'inégalité précédente, on a :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} p_k {y_k}^{-t}\right)^{-\frac{1}{t}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} p_k {y_k}^{-s}\right)^{-\frac{1}{s}} \text{ avec } y_k \neq 0; k = 1, \ldots, n; \text{posons } y_k^{-1} = x_k$$
$$\text{donc } \left(\sum_{k=1}^{n} p_k {x_k}^t\right)^{-\frac{1}{t}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} p_k {x_k}^s\right)^{-\frac{1}{s}}.$$

On en déduit que $\left(\sum_{k=1}^{n} p_k {x_k}^s\right)^{\frac{1}{s}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} p_k {x_k}^t\right)^{\frac{1}{t}}$, pour tout $s < t < 0$.

S'il existe un y_k tel que $y_k = 0$ c'est trivial.

Avec un raisonnement analogue au précédent, on a le cas d'égalité si et seulement si $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

3. Pour $s = 0 < t$.

On a le résultat d'après le théorème (2.3) et on a le cas d'égalité si et seulement si $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

4. Pour $s < t = 0$.

D'après (2.4), on a $M_s \leq M_{2s}$ pour tout $s > 0$.

Comme $s < 0$, $-s > 0$ et $-s < -2s$.

Prenons $x_k = y_k^{-1}; y_k \neq 0; k = 1, \ldots, n$, on a :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} p_k {y_k}^{-s}\right)^{-\frac{1}{s}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} p_k {y_k}^{-2s}\right)^{-\frac{1}{2s}}$$

$$\text{donc } \left(\sum_{k=1}^{n} p_k {x_k}^{s}\right)^{-\frac{1}{s}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} p_k {x_k}^{2s}\right)^{-\frac{1}{2s}}$$

$$\text{alors } \left(\sum_{k=1}^{n} p_k {x_k}^{2s}\right)^{\frac{1}{2s}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} p_k {x_k}^{s}\right)^{\frac{1}{s}}$$

c'est-à-dire $M_{2s} \leq M_s$ pour tout $s < 0,$ en itérant on obtient :

$$M_{2s} \leq M_s \leq M_{\frac{s}{2}} \leq \ldots \leq M_{\frac{s}{2^j}}.$$

$$M_s \leq M_{\frac{s}{2^j}}.$$

Par un raisonnement analogue à celui de la relation (2.3), on a :

$$M_s \leq M_0, \text{c'est- à -dire } \left(\sum_{k=1}^{n} p_k {x_k}^{s}\right)^{\frac{1}{s}} \leq \prod_{k=1}^{n} {x_k}^{p_k}, \text{ pour tout } s < 0.$$

5. Pour $s < 0 < t$.

En combinant l'inégalité du théorème (2.3) et l'inégalité précédente on a :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} p_k {x_k}^{s}\right)^{\frac{1}{s}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} p_k {x_k}^{t}\right)^{\frac{1}{t}}, \text{pour tout } s < 0 < t.$$

On a aussi le cas d'égalité si et seulement si $x_1 = \ldots = x_n$ avec un raisonnement analogue aux précédents.

Quelques remarques :

Remarque 1 : -Si $t = -1$; M_{-1} est appelé **moyenne harmonique**

$$M_{-1} = M_{-1}[x; p] = \frac{1}{\frac{p_1}{x_1} + \frac{p_2}{x_2} + \ldots + \frac{p_n}{x_n}}$$

avec $x = (x_1, \dots, x_n), p = (p_1, \dots, p_n)$. On peut aussi majorer cette moyenne harmonique par la moyenne géométrique. Dans l'inégalité MA-MG du théorème (1.4) en prenant $y_k = x_k^{-1}, k = 1, 2, \dots, n$ avec $x_k \neq 0$, on a

$$\prod_{k=1}^{n} {x_k}^{-p_k} \leq \sum_{k=1}^{n} p_k {x_k}^{-1}$$

$$\text{d'où } : \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{p_k}{x_k}} \leq \prod_{k=1}^{n} {x_k}^{p_k}.$$

C'est l'inégalité de la moyenne harmonico-géométrique. On a aussi à partir de cette inégalité une inégalité MH-MG-MA, qui est :

$$\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{p_k}{x_k}} \leq \prod_{k=1}^{n} {x_k}^{p_k} \leq \sum_{k=1}^{n} p_k x_k, \text{ d'après MA-MG.}$$

Et

$$\frac{1}{\prod_{k=1}^{n} {x_k}^{p_k}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{p_k}{x_k},$$

$$\text{c'est-à-dire } \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{p_k}{x_k}} \leq \sum_{k=1}^{n} p_k x_k \text{ (MA-MH).}$$

-Aux extrémités :

$\underline{t = +\infty}$

$$\text{On a } \lim_{t \to +\infty} M_t = \lim_{t \to +\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} p_k {x_k}^t \right)^{\frac{1}{t}} = \max(x_k; k = 1, \dots, n).$$

En effet soit $x_j = \max_{1 \leq k \leq n}(x_k)$.

Donc $M_t = x_j \left\{ p_1 (\frac{x_1}{x_j})^t + \ldots + p_{j-1} (\frac{x_{j-1}}{x_j})^t + p_j + p_{j+1} (\frac{x_{j+1}}{x_j})^t + \ldots + p_n (\frac{x_n}{x_j})^t \right\}^{\frac{1}{t}}$.

Posons $h_k = \frac{x_k}{x_j}$;$k \neq j, h_k > 1$.

$M_t = x_j \left\{ p_1 h_1^t + \ldots + p_{j-1} h_{j-1}^t + p_j + p_{j+1} h_{j+1}^t + \ldots + p_n h_j^t \right\}^{\frac{1}{t}}$.

De plus $\lim_{t\to+\infty} h_k^t = (\dfrac{x_k}{x_j})^t = 0$ car $0 < \frac{x_k}{x_j} < 1$ pour tout $k \neq j, k = 1, \ldots, n$

$\log M_t = \log x_j + \frac{1}{t}\log(p_1 h_1^t + p_2 h_2^t + \ldots + p_{j-1}h_{j-1}^t + p_j + p_{j+1}h_{j+1}^t + \ldots + p_n h_n^t)$.

En passant à la limite on a :

$\lim_{t\to+\infty} \log M_t = \log x_j$ alors $\lim_{t\to+\infty} M_t = \max(x_k); k = 1, \ldots, n$

$M_{+\infty} = \max(x_k); k = 1, \ldots, n$.

$\underline{t = -\infty}$

$$\lim_{t\to-\infty} M_t = \min(x_k; k = 1, \ldots, n)$$

En effet, soit $x_j = \min_{1\leq k\leq n} x_k$.

On a $M_t = x_j \left(p_1(\frac{x_1}{x_j})^t + \ldots + p_{j-1}(\frac{x_{j-1}}{x_j})^t + p_j + (\frac{x_{j+1}}{x_j})^t + \ldots + p_n(\frac{x_n}{x_j})^t\right)^{\frac{1}{t}}$.

Posons $u = -t, t \to -\infty, u \to +\infty$.

On a $M_t = x_j \left\{p_1(\frac{x_1}{x_j})^u + \ldots + p_{j-1}(\frac{x_{j-1}}{x_j})^u + p_j + p_{j+1}(\frac{x_{j+1}}{x_j})^u + \ldots + p_n(\frac{x_n}{x_j})^u\right\}^{\frac{1}{u}}$.

Avec un raisonnement analogue que le précédent on a,

$\lim_{t\to-\infty} M_t = x_j = \min(x_k; k = 1, \ldots, n)$.

Remarque 2

On a $M_t = (\sum_{k=1}^n p_k {x_k}^t)^{\frac{1}{t}} \leq (\sum_{k=1}^n p_k {x_j}^t)^{\frac{1}{t}} = x_j = M_{+\infty}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, avec

$x_j = \max(x_k), k = 1, \ldots, n$.

De plus $(\sum_{k=1}^n p_k {x_j}^t)^{\frac{1}{t}} \leq (\sum_{k=1}^n p_k {x_l}^t)^{\frac{1}{t}} = x_l = M_{-\infty}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$x_j = \min(x_k), k = 1, \ldots, n$, on a : $M_{-\infty} \leq M_t \leq M_{+\infty}$.

Nous avons aussi deux inégalités élémentaires :

$p_k x_k^t \leq M_t^t \leq M_{+\infty}^t$ et $x_k \leq \lim_{t\to\infty} inf M_t \leq \lim_{t\to\infty} sup M_t \leq M_\infty$, pour tout $k = 1, \ldots, n$

et $t > 0$.

Remarque 3

En prenant $t = 1$, dans le théorème (2.3), on a

$M_t = (\sum_{k=1}^{n} p_k {x_k}^s)^{\frac{1}{s}} \leq \sum_{k=1}^{n} p_k x_k$, pour tout $s \leq 1$

par passage à la limite on a

$$\lim_{s \to 0} \left(\sum_{k=1}^{n} p_k {x_k}^s \right)^{\frac{1}{s}} \leq \sum_{k=1}^{n} p_k x_k$$
$$\text{donc } \prod_{k=1}^{n} {x_k}^{p_k} \leq \sum_{k=1}^{n} p_k x_k$$

d'après le théorème (2.1) . C'est l'inégalite **MA-MG**.

□

Corollaire 2.5. *(Version intégrale)*

Soient $D \subset \mathbb{R}, f : D \to [0; \infty[$ *et* $\omega : D \to [0; \infty)$ *un poids et* $s, t \in]-\infty; 0[\cup]0; \infty[$ *avec* $\int_D \omega(x)dx = 1$ *et* $\omega(x) > 0$ *pour tout* $x \in D$ *et* $s < t$. *Nous définissons par* $M_t = M_t[f; \omega] = (\int_D f(x)^t \omega(x)dx)^{\frac{1}{t}}$ *la moyenne de f.*

Alors :

$$a) \lim_{t \to 0} M_t[f; \omega] = exp \int_D \log f(x)\omega(x)dx. \tag{2.7}$$

$$b) \left(\int_D f(x)^s \omega(x)dx \right)^{\frac{1}{s}} \leq \left(\int_D f(x)^t \omega(x)dx \right)^{\frac{1}{t}}. \tag{2.8}$$

Preuve. a) Comme dans le cas discrèt M_0 réquiert un cas spécial, on a :

$$\begin{aligned} \log M_t[f; \omega] &= \frac{1}{t} \log \int_D exp(t \log f(x))\omega(x)dx \\ &= \frac{1}{t} \log \int_D (1 + t \log f(x) + o(t^2))\omega(x)dx, (t \to 0) \\ &= \frac{1}{t} \log \left(t \int_D \log f(x)\omega(x)dx + o(t^2) \right), (t \to 0) \\ &= \int_D \log f(x)\omega(x)dx + o(t), (t \to 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{donc } \lim_{t\to 0}\log M_t[f;\omega] &= \lim_{t\to 0}\int_D (\log f(x))\omega(x)dx + o(t)\\ \text{d'où } \lim_{t\to 0} M_t[f;\omega] &= \exp(\int_D \log f(x)\omega(x)dx)\\ &\equiv M_0[f;\omega].\end{aligned}$$

D'où $\lim_{t\to 0} M_t[f;\omega] = \lim_{t\to 0}(\int_D f(x)^t\omega(x)dx) = exp\int_D \log f(x)\omega(x)dx.$

b)

1. La situation fondamentale $0 < s < t$, posons $p = \frac{t}{s} > 1$. On a $\left(\int_D f(x)^s\omega(x)dx\right)^p = \left(\int_D f(x)^s d\mu(x)\right)^p$ avec $d\mu(x) = \omega(x)dx$; comme $x \longmapsto x^p$, $p > 1$, est une fonction convexe, on peut appliquer l'inégalité de Jensen version intégrale (théorème(1.6)) c'est-à-dire

$\left(\int_D f(x)^s\omega(x)dx\right)^{\frac{t}{s}} = \left(\int_D f(x)^s d\mu(x)\right)^p \leq \int_D f(x)^t d\mu(x) = \int_D f(x)^t\omega(x)dx$

alors $\left(\int_D f(x)^s\omega(x)dx\right)^{\frac{1}{s}} \leq \left(\int_D f(x)^t\omega(x)dx\right)^{\frac{1}{t}}$,

$$\text{donc } M_s[f;\omega] \leq M_t[f;\omega], \text{pour tout } 0 < s < t. \tag{2.9}$$

2. **Le cas** : $s = 0 < t$

$(\int_D f(x)^t\omega(x)dx)^{\frac{1}{t}} \leq (\int_D f(x)^{2t}\omega(x)dx)^{\frac{1}{2t}}(\int_D \omega(x)dx)^{\frac{1}{2t}}$, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Donc $(\int_D f(x)^t\omega(x)dx)^{\frac{1}{t}} \leq (\int_D f(x)^{2t}\omega(x)dx)^{\frac{1}{2t}}$, car $(\int_D \omega(x)dx)^{\frac{1}{2t}} = 1$

$$\text{D'où } M_t[f;\omega] \leq M_{2t}[f;\omega], \text{pour tout } t > 0. \tag{2.10}$$

En itérant on a

$M_{\frac{t}{2^j}}[f;\omega] \leq M_{\frac{t}{2^{j-1}}}[f;\omega] \leq \ldots \leq M_{\frac{t}{2}}[f;\omega] \leq M_t[f;\omega]$. En prenant les deux extremités, on a $M_{\frac{t}{2^j}}[f;\omega] \leq M_t[f;\omega]$. On a $\lim_{j\to+\infty} M_{\frac{t}{2^j}}[f,\omega] = \lim_{j\to+\infty}(\int_D f(x)^{\frac{t}{2^j}}t\omega(x)dx)^{\frac{2^j}{t}}$.

Posons $u = \frac{t}{2^j}, j \to +\infty, u \to o$. C'est-à-dire $\lim_{j\to+\infty} M_{\frac{t}{2^j}}[f;\omega] = \lim_{u\to 0} M_u[f;\omega] = M_0$.

Par passage à la limite dans l'inégalité précédent on obtient :

$$M_o[f;\omega] \leq M_t[f;\omega] \text{ , pour tout } t > 0. \tag{2.11}$$

3.**cas** :$s < t < 0$

$0 < -t < -s$ donc $0 < -t < -s$, on a d'après la relation (2.9) $M_{-t}[g;\omega] \leq M_{-s}[g;\omega]$

où $g : D \to [0,\infty)$. Posons $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ où $f : D \to (0,\infty)$. Alors

$$\left(\int_D \frac{1}{f(x)^{-t}}\omega(x)dx\right)^{-\frac{1}{t}} \leq \left(\int_D \frac{1}{f(x)^{-s}}\omega(x)dx\right)^{-\frac{1}{s}}$$

$$\left(\int_D \frac{1}{f(x)^{-s}}\omega(x)dx\right)^{\frac{1}{s}} \leq \left(\int_D \frac{1}{f(x)^{-t}}\omega(x)dx\right)^{\frac{1}{t}}$$

$$\left(\int_D f(x)^s\omega(x)dx\right)^{\frac{1}{s}} \leq \left(\int_D f(x)^t\omega(x)dx\right)^{\frac{1}{t}}.$$

Si $f = 0$ c'est trivial, donc

$$M_s[f;\omega] \leq M_t[f;\omega], \text{pour tout } s < t < 0. \tag{2.12}$$

4.**cas** : $t < 0$

On a $M_t[f,\omega] < M_{2t}[f,\omega]$, pour tout $0 < t$, on a d'après la relation (2.12) $M_s[f,\omega] \leq M_t[f;\omega]$, pour tout $s < t < 0$.

Prenons $s = 2t$ donc $M_{2t}[f;\omega] \leq M_t[f;\omega]$, pour tout $t < 0$.

En itérant on a

$M_t[f;\omega] \leq M_{\frac{t}{2}}[f;\omega] \leq \ldots \leq M_{\frac{t}{2^{j-1}}}[f;\omega] \leq M_{\frac{t}{2^j}}[f;\omega]$, en prenant les deux extrémités, on a $M_t[f;\omega] \leq M_{\frac{t}{2^j}}[f;\omega]$; par passage à la limite on a

$$M_t[f;\omega] \leq M_0[f;\omega], \text{pour tout } t < 0. \tag{2.13}$$

5.**cas** $s < 0 < t$

En combinant les relations (2.11) et (2.13), on le résultat .

□

2.4 *Majoration terme à terme de Carleman*

Théorème 2.6. *Soient $a_k, k = 1, \ldots, n$ des nombres réels positifs. Alors*

$$(a_1 a_2 \ldots a_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{e}{2n^2} \sum_{k=1}^{n} (2k-1) a_k, \textit{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \tag{2.14}$$

Preuve. Pour estimer le terme $(a_1 a_2 \ldots a_n)^{\frac{1}{n}}$ on considère la fonction

$f : [0; +\infty) \to \mathbb{R}$ où $f(x) = a_k$, pour tout $x \in]k-1; k]$ et $1 \leq k < +\infty$.

On a :

$$\begin{aligned}
(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}} &= \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \log x_k\right) \\
&= \exp \int_0^1 \log f(ny) dy \\
&= \exp \int_0^1 [\log y f(ny) - \log y] dy \\
&= \exp \int_0^1 \log y f(ny) dy \exp \int_0^1 - \log y dy.
\end{aligned}$$

Or $exp - \int_0^1 \log y dy = e$ donc

$(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}} = eexp \int_0^1 \log y f(ny) dy \leq e \int_0^1 y f(ny) dy$ d'après l'inégalité de Jensen car la fonction $x \longmapsto exp(x)$ est convexe et

$$\begin{aligned}
\int_0^1 y f(ny) dy &= \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} y a_k dy \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_k \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} y dy \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2n^2} (k^2 - (k-1)^2) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{(2k-1) a_k}{2n^2}
\end{aligned}$$

donc

$$(a_1 a_2 \ldots a_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{e}{2n^2} \sum_{k=1}^{n} (2k-1) a_k.$$

$\square$

2.5 Inégalité de Carleman

Corollaire 2.7. *Soient $a_k, k = 1, \dots$ des réels positifs alors*

$$\sum_{j=1}^{+\infty} (a_1 \dots a_j)^{\frac{1}{j}} \leq e \sum_{j=1}^{+\infty} a_j. \tag{2.15}$$

Preuve. On a d'après la relation précédente

$$(a_1 a_2 \dots a_k)^{\frac{1}{k}} \leq \frac{e}{2k^2} \sum_{j=1}^{k} (2j-1) a_j$$

$$\sum_{k=1}^{n} (a_1 a_2 \dots a_k)^{\frac{1}{k}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{e}{2k^2} \sum_{j=1}^{k} (2j-1) a_j$$

or

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{e}{2k^2} \sum_{j=1}^{k} (2j-1) a_j &= \sum_{j=1}^{n} (2j-1) a_j \sum_{k=j}^{n} \frac{1}{k^2} \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} (2j-1) a_j \sum_{k=j}^{n} \left(\frac{1}{k - \frac{1}{2}} - \frac{1}{k + \frac{1}{2}} \right) \end{aligned}$$

car

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k - \frac{1}{2}} - \frac{1}{k + \frac{1}{2}}$$

et

$$\sum_{k=1}^{n} (a_1 a_2 \dots a_k)^{\frac{1}{k}} \leq \frac{e}{2} \sum_{j=1}^{n} (2j-1) a_j \sum_{k=j}^{n} \left(\frac{1}{k - \frac{1}{2}} - \frac{1}{k + \frac{1}{2}} \right).$$

Par passage à la limite , on a :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{+\infty} (a_1 a_2 \dots a_j)^{\frac{1}{j}} &\leq \frac{e}{2} \sum_{j=1}^{+\infty} (2j-1) a_j \sum_{k=j}^{+\infty} \left(\frac{1}{k - \frac{1}{2}} - \frac{1}{k + \frac{1}{2}} \right) \\ &= \frac{e}{2} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{2(2j-1) a_j}{2j-1} \\ &= e \sum_{j=1}^{+\infty} a_j. \end{aligned}$$

D'où

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_1 a_2 \ldots a_k)^{\frac{1}{k}} \leq e \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

$\square$

Cette relation est toujours vérifiée même si les séries divergent car les termes généraux sont positifs.