Identification de l'ETM de référence et attendu du lycée et de l'université

Dans ce chapitre il s'agit de donner une réponse à la QR1 :

QR 1
Quelles sont les continuités et les ruptures de la transition L-U en France quant aux suites définies par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$? Plus particulièrement, que peut-on dire des trois sous-activités mathématiques de contrôle (sémiotique, instrumental, discursif) et des paradigmes de l'Analyse [A1] et [A2] dans les ETM de référence ; et quelles sont les caractéristiques pour les successions de l'activité et du travail mathématique dans les ETM attendus de chaque institution ?

L'objectif de cette question est de caractériser les ETM de référence concernant les suites définies par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ en identifiant des ruptures et des continuités et aussi de décrire l'activité mathématique attendue à partir des sous-activités (de reconnaissance, de traitement et d'organisation). Nous accorderons un regard particulier sur des occasions des sous-activité de contrôle (sémiotique, discursif et instrumental) et leur éventuel encouragement avec une dialectique entre les paradigmes de l'analyse [A1] et [A2] ainsi que l'analyse du travail selon les dimensions et plans verticaux de l'ETM. Nous essaierons aussi de caractériser l'ETM attendu à la transition L-U en identifiant les successions de l'activité et le travail mathématique à développer.

Pour atteindre cet objectif, nous nous centrerons davantage sur l'analyse des tâches (notion centrale pour les deux théories) et le contexte dans lequel ces tâches sont proposées. Cela nous permettra d'identifier les ruptures et les continuités de cette transition. De cette façon, nous analyserons le programme de la classe de Terminale Scientifique de lycée et le programme du premier semestre (S1) de la première classe de mathématique de l'université (premier niveau d'analyse). Ensuite, nous analyserons les documents référents utilisés en première année de l'université par les étudiants - cours et feuilles de travaux dirigés (TD) ainsi que des tâches de trois manuels de la classe de Terminale Scientifique (deuxième niveau d'analyse). Nous finaliserons par des exemples de tâches d'évaluation qui interviennent dans les deux niveaux d'enseignement en analysant les successions de l'activité et le travail mathématique attendu (troisième niveau d'analyse).

6.1 Étude de programmes à la transition L-U

Dans cette partie nous analyserons les documents officiels correspondant à chaque niveau d'enseignement. En ce qui concerne l'université, il s'agira du le programme de première année de licence (L1) utilisé à l'Université de Paris et, dans le cas de Lycée, du programme d'enseignement de l'année 2018 (MEN, 2011) pour la classe de Terminale Scientifique (TS), document fourni par le ministère de l'éducation nationale.

Pour réaliser cette analyse, nous présenterons chaque programme en cherchant à connaître le contexte dans lequel l'étude des suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$ est abordé. Nous repèrerons les connaissances à traiter de façon explicite, le temps accordé pour les thèmes à traiter et les attendus explicités de l'institution concernant le travail de l'étudiant ou de l'élève pendant le développement du cours.

6.1.1 Programme de première année de l'université

Le programme que nous analysons correspond à celui du premier semestre de la première année (S1-L1). Ce programme a été conçu pour différentes filières (ou mentions) de licence prenant le cours. Ces filières sont : mathématiques, MIASH[53], Informatique, Physique, CPEI[54], Chimie et STEP[55]. Pour des raisons d'accessibilité des données nous nous intéressons davantage à la filière CPEI.

[53] Licence mathématiques et informatique appliquées aux sciences humaines et sociales.

[54] Cycle préparatoire eux écoles d'ingénieurs.

[55] Sciences de la terre, de l'environnement et des planètes.

Le programme[56] a pour titre « Algèbre et analyse élémentaire I » (code MM1) ce qui permet de comprendre que deux domaines mathématiques seront objets d'étude. L'évaluation du cours a lieu en contrôle continu avec un examen final. L'objectif général, annoncé par le programme, est : *Utiliser les nombres complexes dans différents contextes. Maîtriser les notions de base associées aux fonctions, s'initier aux rudiments et à l'Algèbre linéaire. En Licence Mathématiques : commencer le raisonnement d'Analyse*[57]. Concernant le temps des cours, le programme préconise 3 heures de cours magistral et 4,5 heures de travaux dirigés (TD) par semaine (ou 6 heures de cours magistraux et TD). Il s'agit de 12 semaines de cours au total, et la distribution du temps par thème traité dépend de la filière concernée. Dans le cas de la CPEI, avant de traiter le sujet de suites, le programme accorde 3 semaines pour l'étude de fonctions (fonctions réelles d'une variable réelle, parité, périodicité, fonctions usuelles, composé de fonctions, limites, asymptotes, dérivabilité, dérivées secondes, convexité, concavité, tracé de courbes représentatives) ; 3 semaines pour l'étude de nombres complexes (rappel de la classe de Terminale du lycée, racines d'un nombre complexe, formules d'Euler et de Moivre, formule du binôme et applications à la géométrie) ; 3 semaines pour une introduction à l'algèbre linéaire (résolution de systèmes linéaires, définitions et opérations en $\mathbb{R}^n$, sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$) ; et enfin, 3 semaines pour l'étude de propriétés de $\mathbb{R}$ et de suites numériques.

Contenus mathématiques en Analyse : propriétés de $\mathbb{R}$ et de suites

L'objectif du programme déclaré pour ce thème est : *Apprendre les raisonnements fins en analyse. On prendra du temps pour les démonstrations en cours qui seront retravaillées en TD sous forme d'exercices.* Pour la mention de CPEI, le programme souligne que, suivant le temps disponible, le thème « ensembles et applications » (correspondant à l'UE de *Raisonnements mathématiques*) pourrait être abordé. Des quatre thèmes traités dans ce cours, celui-ci est le seul où le programme ne fait pas référence à un objectif « pragmatique » (la théorie qui soutient les propriétés est traitée dans les cours ultérieurs) puisqu'il préconise l'apprentissage des raisonnements fins avec une importance particulière aux démonstrations. Dans ce thème, les contenus se résument en :

---

[56] Voir annexe 3.2, page 349.

[57] Mais, ici, ce que les étudiants doivent comprendre du raisonnement d'Analyse n'est pas très explicite.

- Nombres réels : propriétés d'ordre, corps, valeur absolue, intervalles, majorant et minorant ; définitions et théorèmes de la borne supérieure et inférieure (admis). Partie entière. Voisinages. Densité de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{Q}\backslash\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- Suites : définition de la limite finie d'une suite de nombres réels ou complexes. Limite $\pm\infty$ dans le cas réel. Limite : Unicité, opérations, inégalités, théorème de gendarmes. Suites bornées, monotones, adjacentes. Théorème de la limite monotone. Sous-suites, théorème Bolzano-Weierstrass.

Ainsi, les suites définies par récurrence n'apparaissent pas de façon explicite dans le programme. Du point de vue théorique, nous en déduisons que le paradigme à privilégier à ce niveau d'enseignement est le paradigme [A2], mais cela reste à être vérifié (nous y reviendrons dans la section 6.2.1). Concernant les suites, aucun registre sémiotique n'est explicité et l'utilisation d'instruments numériques dans les cours n'est pas mentionné. A ce stade et vu la façon dont le programme est rédigé, nous ne pouvons pas inférer de sous-activités qui soient mises en avant à l'heure d'étudier les suites.

6.1.2 Programme de la Terminale Scientifique

Le programme de la classe de terminale scientifique de lycée commence en présentant l'objectif général :

> « Outre l'apport de nouvelles connaissances, le programme vise le développement des compétences suivantes :
>
> - mettre en œuvre une recherche de façon autonome ;
> - mener des raisonnements ;
> - avoir une attitude critique vis-à-vis des résultats obtenus ;
> - communiquer à l'écrit et à l'oral. » (MEN, 2011, p. 1)

Nous pouvons observer que, dès le début, le programme préconise un travail en autonomie de la part de l'élève tout en ayant une démarche critique par rapport au travail produit. Ainsi, un contrôle (en terme général) autonome de la part de l'élève est recommandé. Mais avec quels moyens l'élève peut-il arriver à maîtriser ce contrôle ?

Le programme présente ensuite trois axes à développer tout au long de ce niveau d'enseignement. (1) Le raisonnement et le langage mathématiques où il est préconisé des capacités d'argumentation, de rédaction et de démonstrations. Ici, il n'existe pas une section spéciale d'apprentissage de la logique, du vocabulaire ou de notations mathématiques, bien qu'elles doivent faire partie des cours de façon systématique. (2)

L'utilisation de logiciels pour favoriser la démarche investigatrice de la part des élèves est signalée. Les logiciels sont mis en avant pour réduire le temps de calcul et se focaliser davantage dans les raisonnements. Pour les utiliser, trois façons de les utiliser sont recommandées : deux utilisations en classe, d'abord par l'enseignant pour favoriser une visualisation collective de la classe et, ensuite, par les élèves au cours du développement des travaux pratiques ; enfin, une utilisation hors classe de la part de l'élève dans son étude personnelle. (3) Une diversité de l'activité de l'élève visant à résoudre des problèmes est aussi signalée. Cette diversité passe par les actions à réaliser de la part de l'élève : chercher, expérimenter, modéliser (avec des logiciels), appliquer des techniques de calcul, raisonner, démontrer, etc. Il est important de signaler que la conjecture n'est pas mise en avant dans le programme et aucune recommandation n'est faite par rapport à cela. Concernant le point (2), le programme attend un développement de la sous-activité de contrôle instrumental dans le travail des élèves. Cela est explicité par la phrase « *À l'occasion de l'écriture d'algorithmes et de programmes, il convient de donner aux élèves de bonnes habitudes de rigueur et de les entraîner aux pratiques systématiques de vérification et de contrôle* » (Ibid., p.16) ; néanmoins cela dit peu sur la façon dont on peut encourager ce type de contrôle chez l'élève.

Par rapport aux modes d'évaluation, le programme précise l'évaluation de l'utilisation d'outils informatiques dans la résolution de problèmes. Finalement, quant à l'organisation, le programme explique que le plan présenté n'indique pas la progression à suivre, néanmoins il signale que la moitié du temps pourrait être consacrée à l'étude du thème de l'analyse (l'autre moitié étant consacrée aux thèmes de géométrie et de probabilités-statistiques de façon équitable).

Contenus mathématiques en Analyse

Dans le programme[58], le thème d'Analyse commence par énoncer qu'un des objectifs est la « *consolidation et un enrichissement des notions relatives aux suites et aux fonctions* » pour étudier des phénomènes discrets et continus. Ainsi le programme marque une séparation entre le travail de suites et celui de fonctions dès le début[59]. La notion de limite de suite impliquera une étude approfondie pour présenter ensuite la notion de limite de fonction. Différents types de fonctions sont préconisées à être

[58] Voir annexe 3.1, page 347.

[59] Car les suites sont des fonctions définies sur l'ensemble discret $\mathbb{N}$, et la façon de les étudier diffère de celle des fonctions qui sont définies sur un ensemble « continu », comme $\mathbb{R}$.

étudiés (exponentielle, logarithme, sinus et cosinus) et une partie spéciale est dédiée à l'étude du concept d'intégrale. Ici le programme déclare comme objectif l'acquisition d'automatismes de calcul de la part des élèves, cela nous laisse penser qu'il pourrait y avoir un privilège du paradigme d'analyse [A2] à ce niveau[60].

Plus précisément, concernant le thème de suites, 6 contenus mathématiques sont établis : raisonnement par récurrence, limite finie ou infinie d'une suite (avec la capacité attendue de la mise en place d'un algorithme pour étudier le cas d'une limite infinie), notion de convergence d'une suite de façon non formelle, limites et comparaisons (plus précisément, il faut démontrer qu'étant données deux suites de telle sorte que, si à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$ et que $(u_n) \to +\infty$ alors $(v_n) \to +\infty$ ainsi que, si une suite croissante converge vers l, tous ces termes sont inférieurs ou égaux à l et le théorème des gendarmes qui est admis), opérations des limites (limite d'une somme, d'un produit et d'un quotient de deux suites), comportement à l'infini de la suite (q^n) (on démontre que la suite (q^n), avec $q > 1$ a pour limite $+\infty$) et, finalement, suite majorée, minorée, bornée et le théorème de convergence de suites croissantes majorées (resp. décroissantes minorées) comme admis. Ensuite, le programme déclare : « *Il est intéressant de démontrer qu'une suite croissante non majorée a pour limite* $+\infty$ ».

Au moment d'étudier les suites, le programme stipule « *il est important de varier les approches et les outils sur lesquels le raisonnement s'appuie » ;* néanmoins, rien n'est dit de la façon de faire « varier » les approches dans l'étude de suites et aucun cadre n'est donné. Nous pensons qu'ici la notion de paradigmes peut s'avérer pertinente pour encourager cette variété souhaitée.

Concernant les suites définies par récurrence, les signes $u_{n+1} = f(u_n)$ n'apparaissent pas dans la partie du tronc commun du programme. Il stipule seulement que « *Des exemples de suites récurrentes, en particulier arithmético-géométriques, sont traités en exercice »*, sans donner des méthodes d'étude de ses suites, ni de spécificités de l'étude de ces suites récurrentes en lien avec l'étude des fonctions qui les définissent. Des tâches faisant intervenir des algorithmes sont indiquées, néanmoins aucune suggestion n'est donnée.

D'un point de vue théorique et spécifiquement aux trois types de sous-activités de contrôle, nous pouvons dire que les contrôles sémiotiques ne s'observent pas de façon explicite dans le programme mais ce dernier laisse sous-entendre que l'utilisation des logiciels (où il y aura besoin d'un contrôle instrumental) va permettre une

---

[60] Rappelons qu'une des caractéristiques du paradigme [A2] est de suivre une démarche de calcul algébriquement efficace.

visualisation des objets mathématiques travaillés (cela possiblement avec l'utilisation de différents registres et leur exploration). Bien qu'une activité d'argumentation soit mise en avant dans cette classe de terminale, des précisions sur la façon d'apprendre aux élèves à argumenter ou démontrer ne sont pas détaillées. Cela nous dit également très peu de la façon dont ils pourront contrôler leur discours mathématique et cette argumentation.

Compte tenu de l'évolution du programme, nous tenons à remarquer que les nouveaux programmes de spécialité de mathématiques de terminale générale (MEN, 2019) changent peu en contenu concernant les spécificités de suites. Dans les deux programmes, le théorème de convergence de suites croissantes majorées (décroissantes minorées) est admis. À la différence du programme précédent, celui-ci signale l'utilisation de suites adjacentes comme approfondissement possible, de suites récurrentes linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, l'application de la méthode de Newton et l'étude de la convergence de la méthode de Héron (alors qu'avant les programmes faisaient seulement référence à l'approximation de réels). En d'autres termes, l'étude de suites définies par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ apparaît cette fois de façon explicite dans le programme, mais dans la section « *continuité des fonctions d'une variable réelle* ». Dans cette section il est, d'abord, explicité le contenu *« Image d'une suite convergente par une fonction continue »*[61] et, ensuite, la capacité attendue « *Pour une fonction continue f d'un intervalle dans lui-même, étudier une suite définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$* ». À nouveau, la méthode de Newton est évoquée, cette fois pour l'étude d'exemples d'algorithmes. Bien que dans ces nouveaux programmes les suites récurrentes soient explicites, les outils théoriques pour les étudier ne semblent pas être différents du programme précédent, et les programmes n'explicitent pas un travail spécifique pour différencier les suites $u_n = f(n)$ des suites $u_{n+1} = f(u_n)$ notamment.

[61] Cela fait référence notamment au théorème que si (u_n) converge vers l, f est continue et définie sur un intervalle I et pour tout n, $u_n \in I$, alors $\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = f(l)$.

6.2 Étude de tâches proposées à la transition L-U

Pour mieux connaître l'activité et le travail mathématique à développer dans chacune des institutions, un deuxième niveau d'analyse est nécessaire : l'étude de tâches proposées dans les classes. En effet, les tâches sont importantes pour les deux théories que nous utilisons (Flores González, 2018) et c'est en partie grâce à celles-ci que nous pourrons mieux caractériser l'activité et le travail mathématique développés dans les institutions lycée et université.

Nous analyserons tout d'abord des données de la L1, à savoir : le support du cours en version diaporama (spécifiquement celui utilisé dans la filière CPEI) et les tâches proposées dans les feuilles de TD de MM1 sur le thème de suites[62]. Deuxièmement, en ce qui concerne le lycée, nous analyserons les tâches proposées dans trois manuels de lycée de la classe de Terminale Scientifique. La décision d'analyser les tâches des manuels vient du fait que les enseignants de Lycée déclarent les utiliser pour s'en servir en tant que listes d'exercices dans leurs pratiques (Hache, 2008).

Catégories d'analyse de tâches

Comme il s'agit d'analyser les tâches proposées, nous repèrerons tout d'abord les **paradigmes** de l'analyse [A1] et [A2] utilisés dans chacune de ces tâches, ainsi que les articulations entre eux, à savoir [A1] ↔ [A2]. Plus particulièrement :

- Nous considérons que la tâche permet un travail mathématique dans le paradigme [A1] si l'exercice demande, de façon explicite, des interprétations issues de calculs arithmétiques de plusieurs termes de la suite, des représentations graphiques de ces termes ou encore des représentations numériques données dans un tableau de valeurs. Ici, la demande d'une conjecture du comportement de la suite répond à un travail basé sur la visualisation de signes (données d'emblée dans l'énoncé ou demandées dans la résolution de l'exercice), ce qui est en accord au travail en [A1].
- La tâche assure un travail dans le paradigme [A2] si l'énoncé demande de façon explicite un travail de preuve avec des expressions mathématiques formelles sur le comportement de la suite. Ici, il est nécessaire d'étudier les théorèmes et les propriétés mathématiques dont l'élève dispose pour y répondre.

[62] Voir annexe 3.4, page 354.

- La tâche propose un travail de changement de paradigme [A1] vers le paradigme [A2] si, à l'issue d'un travail dans le paradigme [A1] (travail de conjectures par exemple), l'énoncé demande de montrer le comportement de la suite dans [A2].
- La tâche propose un travail de changement de paradigme [A2] vers le paradigme [A1] si l'exercice demande, tout d'abord, d'étudier le comportement de la suite grâce aux méthodes algébriques connues puis si l'exercice demande explicitement la représentation graphique de la suite ou de calculer les termes de la suite par exemple.

Deuxièmement, nous regarderons dans quelle mesure les différentes **reconnaissances** à réaliser sont laissées à la charge des élèves (attendues) ou si elles sont présentées dans les énoncés. Plus précisément, nous analyserons si l'énoncé de l'exercice est explicite ou pas concernant :

- La suite récurrente : par exemple, si l'exercice demande d'étudier la suite définie par un premier terme et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ avec par exemple f la fonction $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$, la fonction est présentée de façon explicite (l'introduction de cet intermédiaire n'est pas à la charge de l'élève). En revanche, si l'énoncé demande d'étudier la suite récurrente définie par un premier terme et $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$, dans ce cas la fonction n'est pas explicite dans l'énoncé.
- La nécessité de faire une preuve par récurrence pour montrer une propriété de la suite (u_n).
- Les variations de la suite (u_n).
- La convergence de la suite (u_n).

Enfin, nous analyserons la possibilité de mettre en fonctionnement des sous-activités de contrôle à partir de la rédaction de l'énoncé. En particulier nous analyserons si l'énoncé de l'exercice :

- Explicite un contrôle non mathématique ou pas. Comme nous l'avons signalé dans le chapitre 4, ce type de contrôle est lié au but de l'activité à développer lors de la résolution de la tâche et il est identifié dans l'énoncé lorsque le but de l'activité est explicité. Par exemple, dans l'énoncé « montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la suite (u_n) est dans [0,1] », la conclusion à laquelle l'élève doit arriver est déjà formulée.

- Favorise un contrôle mathématique c'est-à-dire qui encourage des sous-activités de contrôle sémiotique, instrumental ou discursif. Selon les indications données dans chaque tâche, nous repérons deux considérations de ces contrôles :
  a) *Occasion de contrôle mathématique* : dans ce cas le contrôle n'est pas explicité dans l'énoncé ; néanmoins un contrôle mathématique est possible. Par exemple, dans une occasion de contrôle sémiotique et instrumental, l'exercice demande d'utiliser la calculatrice pour conjecturer le comportement de la suite mais aucune indication n'est donnée ni sur le registre sémiotique, ni sur la façon dont on doit/peut utiliser la calculatrice.
  b) *Contrôle mathématique explicite* : celui-ci est formulé clairement dans l'énoncé. Par exemple, dans le cas d'un contrôle sémiotique et instrumental, l'exercice indique ce que l'élève doit faire ou interpréter et quelle fonction de la calculatrice utiliser pour obtenir des informations sur le comportement de la suite.

6.2.1 Classe L1 : support du cours (diaporamas) et exercices proposés

Le thème de suites est présenté après l'étude des propriétés de $\mathbb{R}$ et correspond au dernier thème à traiter dans le semestre. Tout d'abord on remarque que le cours aborde les suites numériques dans le système numérique $\mathbb{C}$. Cela peut être considéré comme une difficulté potentielle pour les étudiants puisque $\mathbb{C}$ n'est pas un ensemble ordonné contrairement à $\mathbb{R}$ donc toutes les propriétés des suites réelles ne sont pas équivalentes pour les suites complexes (notamment celles qui se réfèrent aux comparaisons). Ensuite, un vocabulaire sur les suites est présenté (suite majorée, minorée, bornée en $\mathbb{C}$) et les définitions des suites arithmétiques et géométriques sont exposées. Plus précisément elles sont présentées de façon explicite pour tout n dans $\mathbb{N}$ comme $u_n = nr + c$ et $u_n = r^n c$ respectivement (raison r et premier terme c). Ensuite, les définitions formelles de suite convergente et de suite infinie sont données. Cela est suivi des propositions sur les suites extraites (non démontrées) ainsi que de la propriété de la densité de $\mathbb{R}$ en termes de suites convergentes (considérée comme admise). Puis on trouve les théorèmes « *Si* $\lim_{x\to\alpha} f(x) = l$ *et si* $\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha$ *alors* $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = l$ » (non démontré), « f *définie en tout point d'un intervalle de* $\mathbb{R}$ *contenant* α*, alors* f *est continue en* α *si et seulement si pour toute* (u_n) *qui converge vers* α*, la suite* $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $f(\alpha)$ » (admis). Ensuite ces théorèmes sont suivis par le théorème de prolongement des inégalités larges[63] et le théorème des gendarmes[64] (non démontrés). Cela est suivi de propriétés d'opérations sur les limites (somme et produit) et de la définition des suites monotones (croissantes, décroissantes), majorées et minorées. Le cours finit par les trois théorèmes suivants : théorème de la limite monotone (pour les suites réelles), théorème des suites adjacentes (toujours de suites réelles) et théorème de Bolzano-Weierstrass (pour les suites complexes). Ainsi, aucune propriété ni théorème n'est démontré dans le support du cours (diaporama) ; néanmoins, leurs démonstrations peuvent être abordées par l'enseignant pendant le déroulement de la classe, que ce soit à l'oral ou par écrit directement au tableau. Le cours ne présente pas d'exemple ni développé, ni proposé comme exercice. Néanmoins, comme le cours est utilisé en tant qu'appui par l'enseignant, des exercices et des exemples peuvent être pris en compte dans la classe, à l'oral ou à l'écrit (directement au tableau). Dans ce cas, la responsabilité de garder des traces écrites est complètement à la charge de l'élève.

a) Exercices proposés (non résolus)

La feuille d'exercices sur les suites numériques est la même que celle de l'étude des nombres réels où 46 exercices au total sont proposés (feuille V à ce stade de l'année académique). De ceux-là, 21 exercices correspondent aux corps des réels (structure d'ordre totale, valeur absolue, borne supérieure et inférieure, propriété Archimédienne et irrationalité), et 25 aux suites numériques. Concernant ces 25 derniers, il y est proposé des exercices pour étudier les bornes, la monotonie, la limite et la convergence de suites. Cependant, seulement 3 exercices font référence aux suites récurrentes (voir Figure 21, Figure 22 et Figure 23 ci-dessous).

Exercice 40. Soit $x \in \mathbb{R}, x > 0$. On considère la suite définie par récurrence

$$u_0 = 1, \qquad u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{x}{u_n}\right)$$

1. Montrer que $u_n \geq \sqrt{x}$ pour tout $n \geq 1$.
2. Montrer que u_n est décroissante.
3. Calculer $\lim u_n$.

Figure 21 : Première tâche de suite récurrente dans la feuille TD.

63 Si $u_n \leq v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = v$ alors $u \leq v$.

64 Si $u_n \leq v_n \leq w_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$.

Exercice 43. Soient $0 < a < b$. Montrer préliminairement les inégalités suivantes
$$a < \sqrt{ab} < \tfrac{a+b}{2} < b.$$
On considère maintenant les suites définies par récurrence
$$u_1 = a, \qquad v_1 = b.$$
$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, \qquad v_{n+1} = \tfrac{u_n+v_n}{2}$$
Montrer que

1. $u_n < u_{n+1} < v_{n+1} < v_n$ pour tout $n \geq 1$.
2. les suites u_n et v_n ont même limite.

Figure 22 : Deuxième tâche de suite récurrente dans la feuille de TD

Exercice 45. Soit $\alpha \geq 0$ et (u_n) la suite définie par récurrence
$$u_0 = \alpha, \qquad u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$$
Montrer que (u_n) est convergente et calculer sa limite. [*Indication : commencer par* $\alpha = 2$.]

Figure 23 : Troisième tâche de suite récurrente dans la feuille de TD.

Concernant le premier exercice, il s'agit d'une étude de la convergence de la suite de Héron. L'exercice cherche à montrer que la limite de la suite est $\sqrt{x}$ en montrant qu'elle est décroissante et minorée par $\sqrt{x}$. Quant au deuxième exercice, il s'agit d'étudier la convergence de deux suites récurrentes sans calculer la limite (les suites sont adjacentes et leur limite est la moyenne arithmético-géometrique). Cet exercice a une complexité supplémentaire puisque les deux suites définies par récurrence sont imbriquées. Dans le troisième exercice il s'agit de montrer la convergence de la suite vers 2, où l'on peut identifier deux cas : la suite est croissante et majorée pour $\alpha \in [0,2]$, décroissante et minorée pour $\alpha \in \,]2,+\infty[$).

Ces exercices sont proposés dans le paradigme [A2] et dans le registre algébrique (le paradigme [A1] est absent) ce qui, évidemment, ne permet pas une articulation entre paradigmes. Concernant les reconnaissances, dans les trois cas, les suites récurrentes sont présentées explicitement par les énoncés et elles ne font pas référence à la fonction qui les définissent. Ainsi, la reconnaissance de la fonction, d'une part, et la nécessité d'une preuve par récurrence, d'autre part, restent toutes les deux à la charge de l'étudiant. Par rapport à la variation de la suite, elle est explicitée dans le premier et deuxième exercice mais pas dans le troisième et la valeur de la limite reste à la charge de l'étudiant dans le premier et troisième cas. En ce qui concerne les contrôles, nous observons que les trois tâches présentent des contrôles non mathématiques : dans le premier exercice, par exemple, les informations de la borne inférieure et de la décroissance de la suite sont données ; dans le deuxième, la croissance de (u_n) et la décroissance de (v_n) sont exprimées en registre de représentation algébrique et, dans le troisième, il est explicité que la suite est convergente. Néanmoins, concernant la possibilité de développer des contrôles mathématiques, on n'observe ni des occasions de contrôle, ni de contrôles explicites, que ce soit des contrôles sémiotiques, instrumentaux ou discursifs. Ainsi, la sous-activité mathématique de contrôle reste implicite et à la charge de l'élève. À cela, il est à additionner qu'on n'observe ni un travail de conjecture, ni des registres de représentation autre que l'ensembliste ou l'algébrique, ni un travail de pour étudier la convergence de ces suites (qui correspondrait à un travail dans le paradigme [A3]) que ce soit dans le support diaporama du cours ou dans les feuilles de TD.

6.2.2 Classe TS : Manuels

Pour faire l'étude de classes de TS, nous avons choisi trois manuels : *Indice* de l'éditeur Bordas (*Maths Term. S. Enseignement Spécifique*, 2016), *Odyssée* de l'éditeur Hatier (*Mathématiques TS. Enseignement Spéficique*, 2012) et, *Transmath* de l'éditeur Nathan (*Transmath Term S. Enseignement Spécifique*, 2012). L'ensemble des manuels commencent par le thème Analyse avec le chapitre concernant les « *suites* ». D'abord ils présentent des tâches d'introduction qui permettent aux élèves de se situer dans le thème à traiter par rapport aux connaissances qu'ils ont déjà acquises. Puis, ils continuent avec la partie « cours » où ils exposent des définitions, des propriétés, des méthodes et des théorèmes à utiliser dans les exercices qui sont proposés ensuite. Concernant le cours, ils abordent le raisonnement par récurrence, les définitions intuitives de limite finie et infinie d'une suite, les théorèmes (admis) sur les limites (unicité, opérations somme, produit et quotient de suites), la limite d'une suite géométrique (démontré), les théorèmes de comparaison de limites infinis (démontré), le théorème des gendarmes (démontré seulement dans 1 des manuels), les définitions de suites majorées, minorées et bornées, les suites géométriques, arithmétiques et le théorème de convergence de suites monotones (admis). Ensuite ils continuent avec la section de « savoir-faire du cours » où ils présentent des exemples d'exercices développés et ils terminent avec des exercices proposés, que ce soit pour préparer l'évaluation du cours ou pour s'entraîner au Baccalauréat.

Pour en savoir davantage sur l'enseignement dans cette classe, nous nous intéresserons aux exercices qui y sont proposés puisqu'ils ont été identifiés comme la partie la plus utilisée des manuels dans les classes de mathématiques (Hache, 2008). Ainsi, nous pouvons différencier deux sortes de tâches, l'une correspondant aux exercices résolus (les exemples) par les auteurs du manuel et l'autre correspondant à ceux qui ne sont pas résolus mais proposés pour que l'élève les résolve. Pour analyser ces tâches, nous sélectionnerons celles où l'on propose d'étudier une suite récurrente que ce soit à partir de l'étude de la fonction ou pas. Nous exclurons les tâches qui demandent d'exprimer le terme général u_n en fonction de n, car cela revient à une étude explicite de (u_n) et on n'est plus dans le cas de l'étude d'une suite récurrente mais plutôt dans l'étude d'une fonction. Nous présenterons les résultats de cette analyse dans ce qui va suivre.

a) Exemples proposés (exercices résolus)

Des trois manuels analysés[65], nous avons repéré 11 exemples résolus. Concernant les paradigmes (voir Figure 24 ci-dessous), il existe un privilège dans l'utilisation du paradigme [A2] (utilisation dans 100% des exemples) sur le paradigme [A1] (utilisation dans 36% des exemples). La présence des deux paradigmes pourrait faire penser qu'une articulation immédiate est produite entre les paradigmes [A1] et [A2] (c'est-à-dire que quand le calcul des termes de la suite est demandé dans l'énoncé, une preuve dans le paradigme [A2] est demandée ensuite) ; néanmoins, cela n'est pas toujours le cas. En effet, 27% des exemples présentent une articulation du paradigme [A1] vers le paradigme [A2] (où dans la plupart des cas il s'agit de conjectures) et seulement 9% des exemples font une articulation de [A2] vers [A1]. Si une articulation entre paradigmes n'est pas appuyée par les exemples que présentent les manuels, comment pourrions-nous espérer que la mise en fonctionnement d'une sous-activité de contrôle grâce à l'articulation de ces paradigmes soit entreprise par les élèves ?

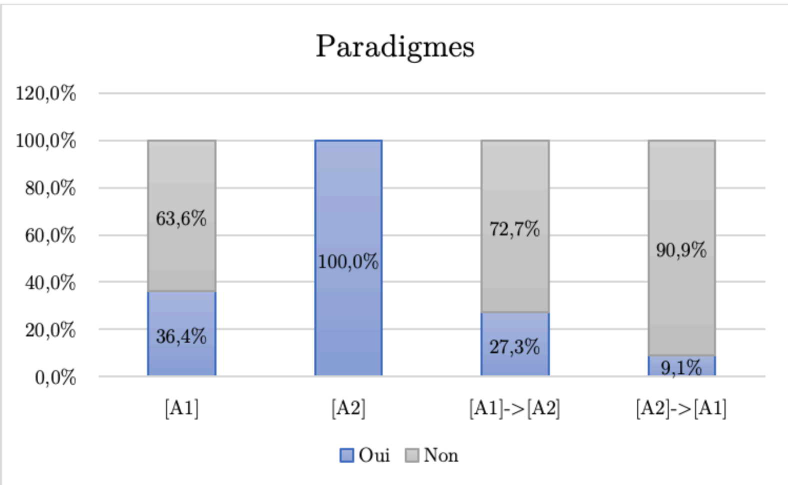


Figure 24 : Graphique analysant les paradigmes [A1] et [A2] dans les exemples des manuels.

65 Voir annexes 3.5 et 3.6, page 356-379.

En ce qui concerne les reconnaissances (voir Figure 25 ci-dessous), la plupart sont effectuées par les énoncés : la variation de la suite est apportée dans 100% des énoncés, la suite récurrente exprimée en termes de u_n est explicitée dans 90% des énoncés, la fonction f est explicite dans 36% des 11 énoncés, et la nécessité d'utiliser une preuve par récurrence est explicitée dans 79%. La convergence de la suite est également explicitée dans 42% des énoncés. Ce fait se traduit par une baisse dans la demande cognitive de la tâche du point de vue de la sous-activité de reconnaissance.

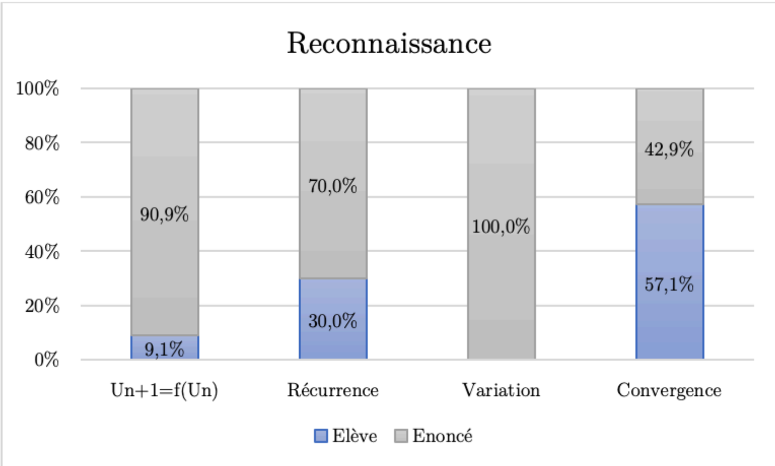


Figure 25 : Graphique analysant les reconnaissances dans les exemples des manuels.

En faisant référence aux sous-activités de contrôle, nous tenons à rappeler que les contrôles sémiotiques et instrumentaux n'ont pas le même statut que les sous-activités de reconnaissance car, lorsque les occasions de contrôle mathématique sont présentes, elles permettent la mise en fonctionnement de ces sous-activités de contrôle alors que lorsque les reconnaissances sont évidentes, ou quand le contrôle discursif est explicite, cela produit une baisse dans la demande cognitive de l'activité à développer. En ce qui concerne le contrôle et les pourcentages relatifs aux énoncés, la totalité des exemples de manuels présentent des contrôles non mathématiques apportés par les énoncés (voir Figure 26 ci-dessous). En lien avec les reconnaissances des énoncés analysées dans la Figure 25, on peut penser que, comme il s'agit des exemples de résolution de tâches, le manuel entraîne les élèves à une routinisation de l'identification de la variation de la suite ou de l'utilisation d'une preuve par récurrence, par exemple, qui apparaissent explicitement dans l'énoncé de la tâche. Concernant les sous-activités de contrôle mathématique, 36% permettent un contrôle sémiotique (18% des occasions de contrôle et 18% aussi de contrôle explicite), alors que seulement 9% montrent un contrôle instrumental (tous explicites) et 18% présentent un contrôle discursif (9% de contrôle explicite et 9% des occasions de contrôle). Nous pourrions interpréter ces pourcentages comme si la résolution de la tâche attendue devait se faire en favorisant les contrôles non mathématiques. En effet, les exemples que l'on montre aux élèves explicitent à chaque fois la conclusion à laquelle l'élève doit arriver dans l'énoncé. Il reste à s'attendre seulement à une bonne résolution de ce qui est déjà indiqué c'est-à-dire à ce que l'élève développe seulement une sous-activité de traitement (tâches avec des mises en fonctionnement de connaissances de niveau technique).

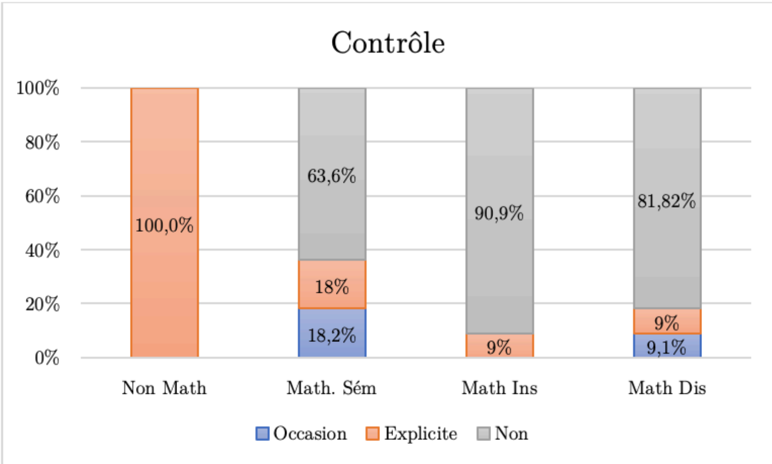


Figure 26 : Graphique analysant les contrôles dans les énoncés des exemples des manuels.

Il est à remarquer que toutes les résolutions des exemples utilisent un contrôle discursif, 36% utilisent un contrôle sémiotique et seulement 9% un contrôle instrumental (voir Figure 27 ci-dessous). Cela est cohérent avec les énoncés pour les contrôles sémiotique et instrumental mais non pour le contrôle discursif.

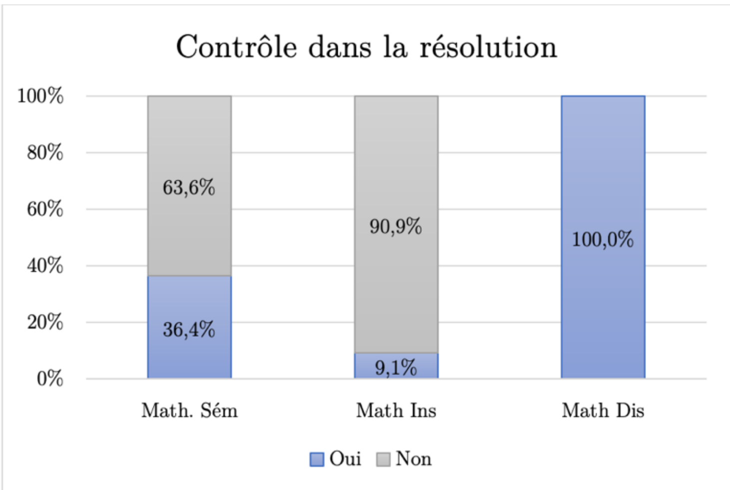


Figure 27 : Graphique analysant les contrôles des résolutions d'exemples de manuels.

Ci-dessous, dans la Figure 28 nous présentons, à titre d'exemple, un exercice résolu issu du manuel *Indice*. Cet exemple présente les paradigmes [A1] et [A2] et un passage du [A1] vers [A2] (il fait partie des 27% de la Figure 24). Concernant les reconnaissances présentées dans les énoncés, la suite récurrente $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n}$ (avec la fonction $f(x) = 2\sqrt{x}$ de façon explicite), la nécessité d'une preuve par récurrence et le sens de variation de la suite ont été apportés dans l'énoncé ; cependant, la reconnaissance de la convergence de la suite reste attendue. Le contrôle non mathématique est présent dans les questions 2 ($u_n \leq 4$) et 3 ((u_n) est croissante). Quant à la sous-activité de contrôle possible, l'énoncé présente un contrôle sémiotique de façon explicite dans la question 1 (faire une conversion et des traitements dans le registre de représentation graphique pour, ensuite conjecturer la variation et la convergence de la suite) et une occasion de contrôle discursif explicite dans l'énoncé de la question 3 car il montre la méthode à utiliser pour y répondre (justifier pour tout n que $u_{n+1} - u_n = 2\sqrt{u_n}\left(1 - \frac{\sqrt{u_n}}{2}\right)$). Le contrôle instrumental n'est pas présent dans l'énoncé. Finalement la résolution de l'exercice utilise des contrôles sémiotiques (utilisation de registre graphique, et algébrique) et discursifs (il est nécessaire d'appliquer différents éléments du référentiel théorique pour l'étude de la suite, l'étude de $u_{n+1} - u_n$, la preuve par récurrence, le théorème de convergence monotone).

EXERCICE RÉSOLU

94 Réaliser une construction graphique des premiers termes d'une suite pour conjecturer sa limite

Énoncé

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n}$. On pose f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = 2\sqrt{x}$.

1. a. Dans un repère orthogonal, tracer sur $[0\,;5]$ la courbe de la fonction f ainsi que la droite d'équation $y = x$. Placer les points M_0, M_1 et M_2 d'ordonnées nulle et d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2.

b. Quelles conjectures peut-on faire sur le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) ?

2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 4$.

3. a. Justifier que pour tout entier naturel n :

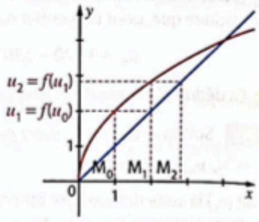
$$u_{n+1} - u_n = 2\sqrt{u_n}\left(1 - \frac{\sqrt{u_n}}{2}\right).$$

b. En déduire que (u_n) est croissante.

4. Que peut-on conclure sur la convergence de (u_n) ?

Solution commentée

1. a. $u_0 = 1$, donc on place M_0 de coordonnées $(1\,;0)$. Pour placer M_1 de coordonnées $(u_1\,;\,0)$, il suffit de placer u_1 sur l'axe des abscisses. Or, $u_1 = f(u_0)$, donc on obtient u_1 sur l'axe des ordonnées



en lisant graphiquement l'image de u_0 par f. Ensuite, on projette le point de coordonnées $(0\,;u_1)$ sur la droite d'équation $y = x$, parallèlement à l'axe des abscisses. Le point M_1 est alors le projeté du dernier point obtenu, sur l'axe des abscisses, parallèlement à l'axe des ordonnées. Pour obtenir M_2, on réitère le processus avec $u_2 = f(u_1)$.

b. On conjecture que la suite (u_n) est croissante et converge vers l'abscisse du point d'intersection de la courbe de f et de la droite d'équation $y = x$.

2. Pour tout entier naturel n, soit P(n) : « $u_n \leqslant 4$ ».

Initialisation. $u_0 = 1$ donc $u_0 < 4$. Ainsi, P(0) est vraie.

Hérédité. Soit p un entier naturel tel que P(p) est vraie, c'est-à-dire tel que $u_p \leqslant 4$. Montrons que P$(p + 1)$ est vraie, c'est-à-dire $u_{p+1} \leqslant 4$.

Par hypothèse de récurrence, $u_p \leqslant 4$ donc comme la fonction racine carré est croissante sur $[0\,;+\infty[$, $\sqrt{u_p} \leqslant 2$.

Ainsi, $2\sqrt{u_p} \leqslant 4$, donc $u_{p+1} \leqslant 4$. L'hérédité est prouvée.

Conclusion. La proposition est vraie au rang 0 et est héréditaire. Donc d'après le principe de récurrence, P(n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $u_n \leqslant 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. a. Soit n entier naturel. Comme $2\sqrt{u_n} \times \frac{\sqrt{u_n}}{2} = u_n$:

$$u_{n+1} - u_n = 2\sqrt{u_n} - u_n = 2\sqrt{u_n}\left(1 - \frac{\sqrt{u_n}}{2}\right).$$

b. Soit n un entier naturel. Comme $u_n \leqslant 4$, on a $\sqrt{u_n} \leqslant 2$ donc $\frac{\sqrt{u_n}}{2} \leqslant 1$. Ainsi, $1 - \frac{\sqrt{u_n}}{2} \geqslant 0$. De plus, $2\sqrt{u_n} \geqslant 0$, donc par produit, $2\sqrt{u_n}\left(1 - \frac{\sqrt{u_n}}{2}\right) \geqslant 0$.

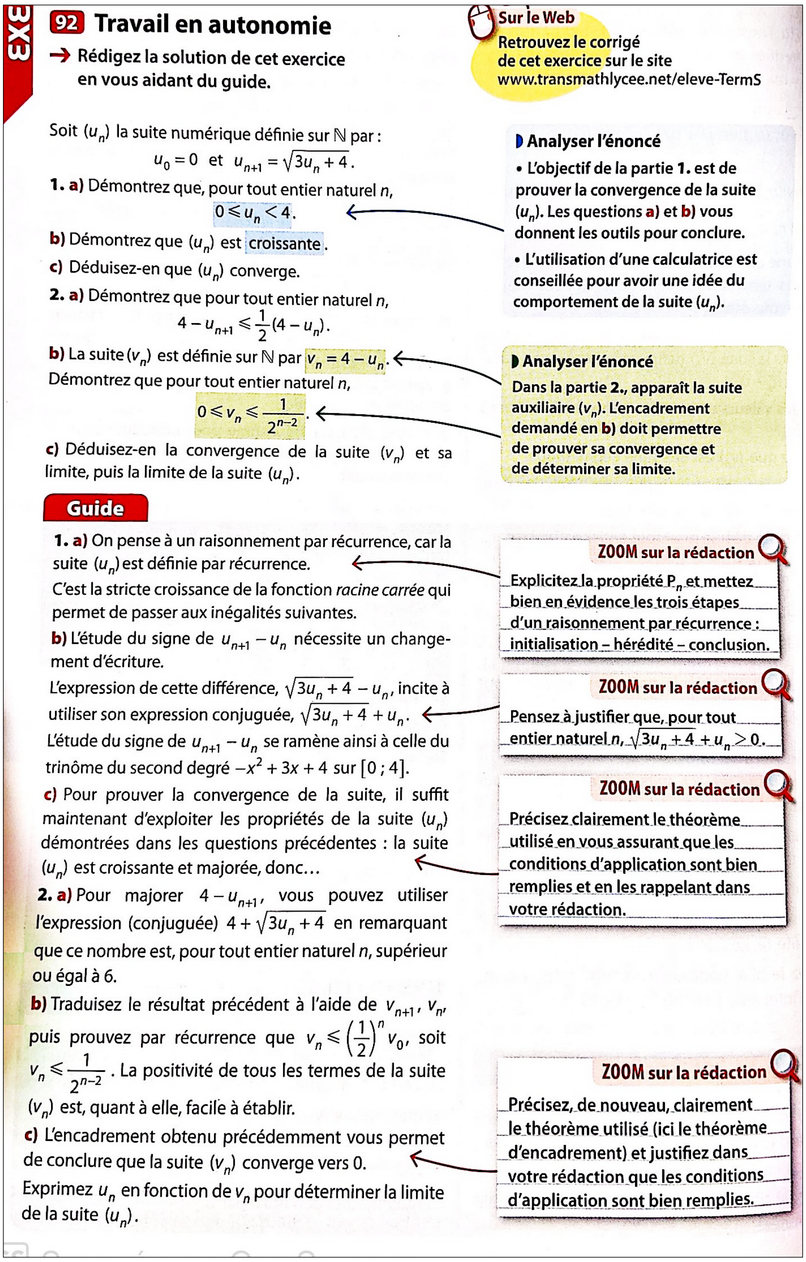
Ainsi, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ pour tout entier naturel n, donc (u_n) est une suite croissante.

4. La suite (u_n) est croissante et majorée par 4, donc d'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) converge.

Figure 28 : Exemple a.4, manuel *Indice*, page 28.

L'exemple de la Figure 29, ci-dessous, est intéressant car il s'agit d'un exemple type Baccalauréat qui montre comment analyser un énoncé pour repérer les contrôles non mathématiques présents. Il indique les objectifs des questions et explique comment utiliser les énoncés de questions pour conclure la tâche. Alors que la calculatrice est proposée dans l'« analyse de l'énoncé » pour étudier le comportement de la suite, l'énoncé de la tâche ne propose pas l'utilisation de la calculatrice et la résolution de l'exercice a été faite seulement en utilisant des contrôles discursifs (voir partie « guide ») et totalement dans le paradigme [A2] (comme la plupart des résolutions).

Du côté des reconnaissances, celles à la charge de l'élève sont l'utilisation d'une démonstration par récurrence et le théorème de la limite monotone, et la fonction qui définit la suite récurrente n'est pas explicite dans l'énoncé.



EXE

92 Travail en autonomie

→ **Rédigez la solution de cet exercice en vous aidant du guide.**

Sur le Web
Retrouvez le corrigé de cet exercice sur le site www.transmathlycee.net/eleve-TermS

Soit (u_n) la suite numérique définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}.$$

1. a) Démontrez que, pour tout entier naturel n,

$$0 \leqslant u_n < 4.$$

b) Démontrez que (u_n) est croissante.

c) Déduisez-en que (u_n) converge.

2. a) Démontrez que pour tout entier naturel n,

$$4 - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(4 - u_n).$$

b) La suite (v_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = 4 - u_n$.
Démontrez que pour tout entier naturel n,

$$0 \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{2^{n-2}}.$$

c) Déduisez-en la convergence de la suite (v_n) et sa limite, puis la limite de la suite (u_n).

Analyser l'énoncé
- L'objectif de la partie **1.** est de prouver la convergence de la suite (u_n). Les questions **a)** et **b)** vous donnent les outils pour conclure.
- L'utilisation d'une calculatrice est conseillée pour avoir une idée du comportement de la suite (u_n).

Analyser l'énoncé
Dans la partie **2.**, apparaît la suite auxiliaire (v_n). L'encadrement demandé en **b)** doit permettre de prouver sa convergence et de déterminer sa limite.

Guide

1. a) On pense à un raisonnement par récurrence, car la suite (u_n) est définie par récurrence.
C'est la stricte croissance de la fonction *racine carrée* qui permet de passer aux inégalités suivantes.

b) L'étude du signe de $u_{n+1} - u_n$ nécessite un changement d'écriture.
L'expression de cette différence, $\sqrt{3u_n + 4} - u_n$, incite à utiliser son expression conjuguée, $\sqrt{3u_n + 4} + u_n$.
L'étude du signe de $u_{n+1} - u_n$ se ramène ainsi à celle du trinôme du second degré $-x^2 + 3x + 4$ sur $[0\,;4]$.

c) Pour prouver la convergence de la suite, il suffit maintenant d'exploiter les propriétés de la suite (u_n) démontrées dans les questions précédentes : la suite (u_n) est croissante et majorée, donc…

2. a) Pour majorer $4 - u_{n+1}$, vous pouvez utiliser l'expression (conjuguée) $4 + \sqrt{3u_n + 4}$ en remarquant que ce nombre est, pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 6.

b) Traduisez le résultat précédent à l'aide de v_{n+1}, v_n, puis prouvez par récurrence que $v_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n v_0$, soit $v_n \leqslant \frac{1}{2^{n-2}}$. La positivité de tous les termes de la suite (v_n) est, quant à elle, facile à établir.

c) L'encadrement obtenu précédemment vous permet de conclure que la suite (v_n) converge vers 0.
Exprimez u_n en fonction de v_n pour déterminer la limite de la suite (u_n).

ZOOM sur la rédaction
Explicitez la propriété P_n et mettez bien en évidence les trois étapes d'un raisonnement par récurrence : initialisation – hérédité – conclusion.

ZOOM sur la rédaction
Pensez à justifier que, pour tout entier naturel n, $\sqrt{3u_n + 4} + u_n > 0$.

ZOOM sur la rédaction
Précisez clairement le théorème utilisé en vous assurant que les conditions d'application sont bien remplies et en les rappelant dans votre rédaction.

ZOOM sur la rédaction
Précisez, de nouveau, clairement le théorème utilisé (ici le théorème d'encadrement) et justifiez dans votre rédaction que les conditions d'application sont bien remplies.

Figure 29 : Exemple 3.c, manuel *Transmath*, page 46.

b) Exercices proposés (non résolus)

En ce qui concerne les exercices non résolus, nous avons repéré, dans les trois manuels analysés, 51 tâches au total[66]. Concernant les paradigmes (voir Figure 30 ci-dessous), nous trouvons comme résultat de cette analyse, une cohérence entre les exemples d'exercices résolus et les exercices non résolus. C'est-à-dire qu'il existe une prédominance du paradigme [A2] (qui apparaît dans 88% des exercices) sur le paradigme [A1] (présent dans 47% des exercices). Au titre d'articulation entre paradigmes, les résultats vont aussi dans le même sens que les exemples résolus ayant 28% d'une articulation de [A1] vers [A2] et 10% d'une articulation de [A2] vers [A1]. Cela permet de dire qu'une dialectique entre ces deux paradigmes n'est pas favorisée non plus dans les exercices proposés (dans la plupart des cas il s'agit d'un travail avec des conjectures).

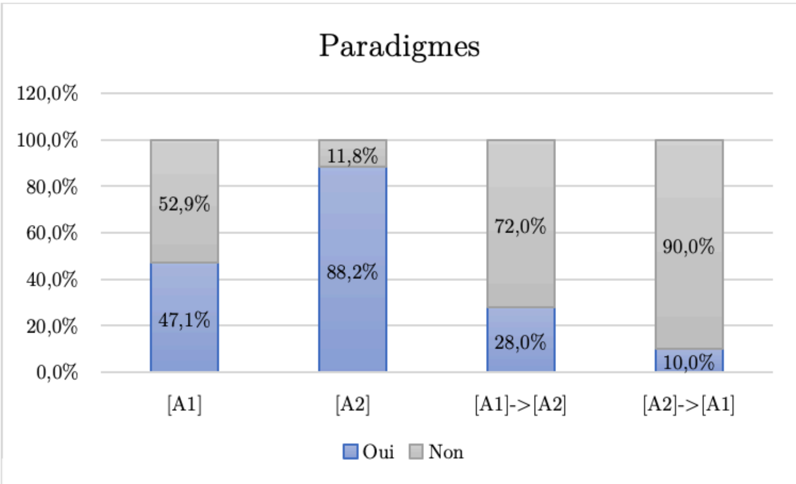


Figure 30 : Graphique analysant les paradigmes dans les exercices des manuels.

En ce qui concerne les reconnaissances (voir Figure 31 ci-dessous), les résultats varient un peu par rapport aux exemples développés. La reconnaissance de la suite récurrente exprimée en termes de u_n est prise en charge par 90% d'énoncés (elle est donc peu attendue à développer de la part des élèves) et la fonction f est explicite dans 35% des 51 exercices. Ensuite, le besoin d'une preuve par récurrence, la variation et la convergence de la suite sont à peu près similaires. La récurrence apparaît dans 62% des énoncés (alors que cela est explicite dans 70% des exemples), et la variation

[66] Voir annexe 3.5 et 3.6, page 356-379

de la suite est explicitée dans 63% d'exercices (et dans tous les exemples). Finalement la convergence est explicite dans 59% des exercices (et dans 42% des exemples).

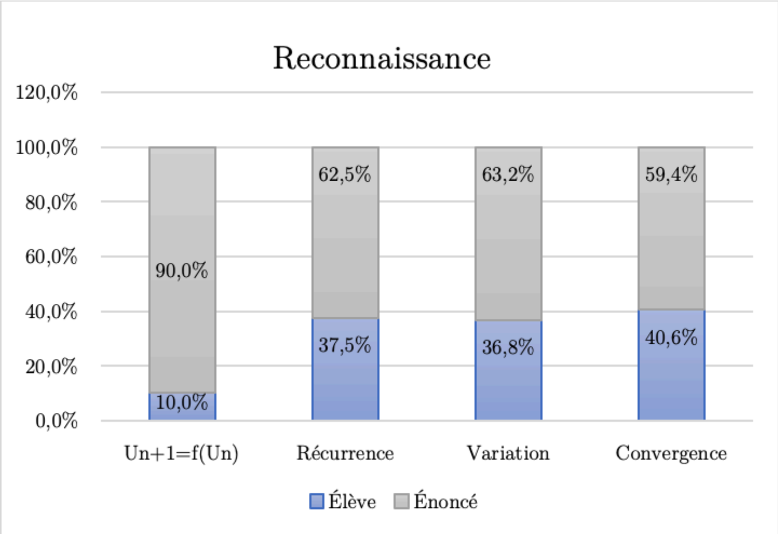


Figure 31 : Graphique analysant les reconnaissances dans les exercices des manuels.

En ce qui concerne les contrôles (voir Figure 32 ci-dessous) nous notons quelques changements dans les exercices par rapport aux exemples résolus. Les contrôles non mathématiques sont présents dans 84% des exercices proposés alors que pour les exemples c'était 100%. Concernant les contrôles mathématiques, les occasions de contrôle discursif sont présentes dans 4% des exercices (il n'y a pas de contrôle discursif explicite) et nous pouvons dire que la sous-activité de contrôle discursif est totalement à la charge de l'élève (96% d'exercices), ce qui est cohérent à la résolution d'exemples. Concernant les contrôles sémiotiques, ils sont cohérents avec les énoncés des exemples résolus. Ici, 13% constituent des occasions de contrôler et 24% constituent des contrôles sémiotiques explicites. Le contrôle instrumental est présent dans 33% des énoncés, ce qui constitue une hausse par rapport aux exemples (9%). Dans le cas des exercices, il s'agit de 13% d'occasion de contrôle instrumental et 20% de contrôle instrumental explicite. De surcroît, une corrélation entre un changement de paradigme et les contrôles de type mathématique est constaté. En effet, lorsque l'on favorise le passage du paradigme [A1] vers [A2], on observe une possibilité de contrôle sémiotique et instrumental (contrôles explicites ou seulement des occasions de contrôle). Les contrôles instrumentaux et sémiotiques, sont principalement encouragés par l'utilisation de la calculatrice (que ce soit avec l'utilisation de l'algorithmique, du tableur ou des graphiques).

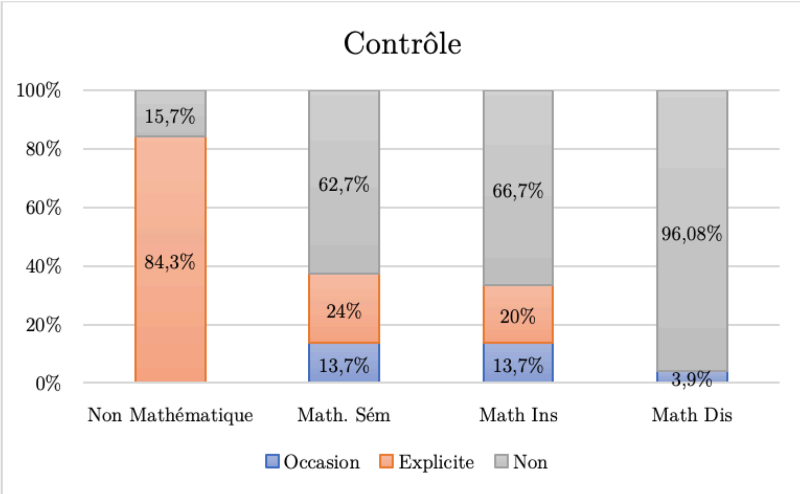
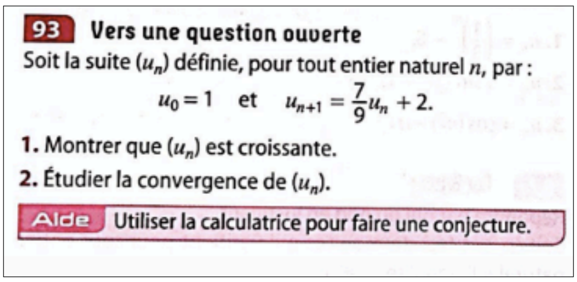


Figure 32 : Graphique analysant les contrôles dans les exercices des manuels.

L'exemple de la Figure 33 correspond à un travail dans le paradigme [A2]. Le paradigme [A1] serait potentiellement présent. Ainsi, nous ne pouvons pas dire grand-chose concernant la dialectique entre ces paradigmes si elle se produit. En effet, bien que la calculatrice soit recommandée en tant qu'aide pour effectuer une conjecture, nous ne savons pas dans qu'elle mesure cette dialectique serait mise en avant. Quant aux reconnaissances, la suite $u_{n+1} = \frac{7}{9}u_n + 2$ est explicitée dans l'énoncé mais pas la fonction définissante (comme il s'agit d'une suite arithmétique géométrique on peut ne pas utiliser la fonction pour étudier la suite car on peut utiliser une suite auxiliaire) et, la variation de la suite est apportée par l'énoncé (ce qui est représentatif des autres exercices). Le contrôle non mathématique est présent et les occasions de sous-activités de contrôle instrumental et sémiotique existent grâce à l'usage, fortement encouragée, de la calculatrice (dans ce cas, cette sous-activités serait attendue).


93 **Vers une question ouverte**

Soit la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{7}{9}u_n + 2.$$

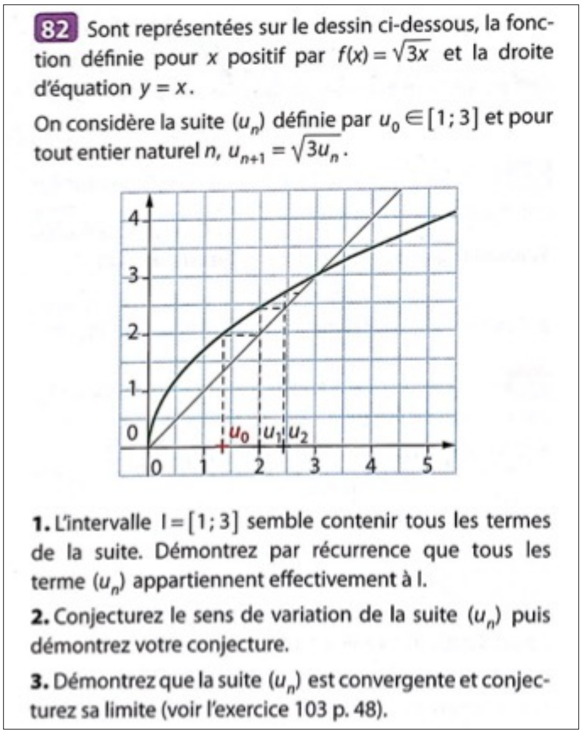
1. Montrer que (u_n) est croissante.

2. Étudier la convergence de (u_n).

Aide Utiliser la calculatrice pour faire une conjecture.

Figure 33 : Exercice a.11, manuel *Indice*, page 28.

La Figure 34 montre un exemple intéressant où l'on étudie la suite récurrente à l'aide de la fonction qui la définit. Ici les paradigmes [A1] et [A2] sont clairement présents. L'élève peut visualiser la croissance de la fonction (occasion de développer une sous-activité de contrôle sémiotique car cela n'est pas demandé dans l'énoncé) et doit conjecturer la croissance de la suite (contrôle sémiotique explicite) pour ensuite la démontrer (possibilité de développer une sous-activité de contrôle discursif). Cela se traduit par un changement de paradigme du [A1] vers [A2] ; néanmoins le changement du paradigme de [A2] vers [A1] est peu mis en avant. Quant aux reconnaissances, l'énoncé de la tâche prend en charge trois des quatre reconnaissances repérées : la suite récurrente $u_{n+1} = \sqrt{3u_n}$ (où la fonction est explicitée dans l'énoncé), l'utilisation d'une preuve par récurrence et la convergence de la suite. Ainsi, seule la variation de la suite est laissée à la charge de l'élève. Concernant les sous-activités mathématiques de contrôles, même si une occasion de développer un contrôle instrumental n'est pas mise en avant, l'élève peut quand même avoir un contrôle sémiotique puisque la conversion entre registres de représentation sémiotique et leur traitement sont proposés.



82 Sont représentées sur le dessin ci-dessous, la fonction définie pour x positif par $f(x) = \sqrt{3x}$ et la droite d'équation $y = x$.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in [1; 3]$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{3u_n}$.

1. L'intervalle $I = [1; 3]$ semble contenir tous les termes de la suite. Démontrez par récurrence que tous les terme (u_n) appartiennent effectivement à I.

2. Conjecturez le sens de variation de la suite (u_n) puis démontrez votre conjecture.

3. Démontrez que la suite (u_n) est convergente et conjecturez sa limite (voir l'exercice 103 p. 48).

Figure 34 : Exercice c.9, manuel *Transmath*, page 44.

Finalement, l'exemple de la Figure 35 est un extrait d'un exercice d'approfondissement visant à une introduction à l'étude de la suite logistique[67]. Ici, il est intéressant de remarquer que dans un type d'exercice avec une difficulté mathématique qui peut être très élevée pour la classe de TS, c'est le paradigme [A1] qui est privilégié. D'ailleurs les questions de l'énoncé favorisent les occasions pour

[67] Voir annexe 1.2.4, page 341.

développer des sous-activités de contrôle sémiotique et instrumental, les reconnaissances sont à la charge de l'élève (sauf pour celle de la suite $p_{n+1} = kp_n(1 - p_n)$ et la fonction qui est introduite dans l'énoncé) et on ne repère pas de contrôle non mathématique. Cet exemple est isolé et ne représente pas la majorité des exercices proposés dans les manuels.

2. Étude de la suite p_n

La correspondance avec le modèle cyclique constaté au Canada est frappante, ce qui montre la validité du modèle de Verhulst. Pour en simplifier l'étude, on s'intéresse à présent à la proportion de proies p_n parmi la population totale des deux espèces pour l'année n. Cela permet d'étudier une seule suite, avec un seul paramètre. Pour tout entier n, on a $0 \leq p_n \leq 1$ et, pour voir l'évolution de cette proportion d'une année sur l'autre, il faut exprimer la suite par récurrence. Pour retrouver le phénomène cyclique recherché, il est classique d'utiliser la relation de récurrence $p_{n+1} = k\,p_n(1 - p_n)$ où k est un coefficient que l'on va faire varier en fonction des situations. Il est possible de tracer les différents termes de la suite (p_n) pour un réel k fixé, en traçant la courbe représentative de la fonction f définie sur $[0\,;\,1]$ par $f(x) = kx(1 - x)$ ainsi que la droite d'équation $y = x$.

a. Proposer une technique pour réaliser cette construction.

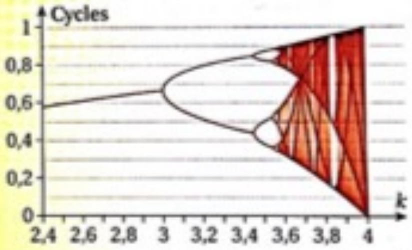
b. Réaliser cette construction sous un logiciel de géométrie dynamique pour les 20 premiers termes de la suite en gardant la possibilité de faire varier k.

c. Comment expliquer la forme du diagramme pour $k = 2{,}8$?

d. Pour quelle valeur de k obtient-on des cycles similaires à ceux obtenus pour les lièvres et les lynx ? Comment expliquer ces cycles ?

Théorie du chaos

Le mathématicien et physicien Mitchell Feigenbaum a étudié ces phénomènes et a utilisé le diagramme suivant sur lequel on place en abscisses le nombre k et en ordonnées les points formant les cycles.



Ces diagrammes sont utilisés dans de nombreux domaines, comme l'économie, la physique, la biologie, etc.
On peut voir certaines zones blanches dans le diagramme de bifurcation de Feigenbaum. Ces zones sont des zones où règne le « chaos », c'est-à-dire où les suites ont des comportements très étranges avec d'extrêmes variations en changeant très peu les conditions initiales. Cette situation de chaos se retrouve dans de nombreux domaines et notamment les systèmes dynamiques continus.
En effet, nous avons vu ce qu'est un système dynamique discret mais si on s'intéresse à des intervalles plutôt qu'à des nombres isolés, à des fonctions plutôt qu'à des suites, à des dérivées plutôt qu'à des taux de croissance, on se retrouve avec des problèmes qui occupent les chercheurs en mathématiques à l'heure actuelle.

Figure 35 : Extrait exercice b.16, manuel *Odyssée*, page 69.

6.3 Analyses de tâches d'évaluation fin de lycée et début de l'université

En vue d'étudier un troisième niveau d'analyse des institutions, nous analyserons des tâches d'évaluation proposées à la fin de la TS et en début de L1. Cela dans le but de caractériser l'activité et le travail mathématique attendu des institutions de façon plus fine à travers la succession à suivre par l'étudiant ou l'élève. En effet, comme nous l'avons vu dans les analyses du chapitre 4, les analyses avec les deux théories TADM et ETM nous permettent d'identifier une temporalité dans l'activité et le travail que développe un sujet. Cela rend possible une reconstruction chronologique des sous-activités mathématiques (reconnaissance, organisation et traitement) et du travail mathématique (à travers les dimensions et plans verticaux des ETM).

Dans cette section nous analyserons d'abord une tâche proposée dans un examen de décembre 2018, à la fin du premier semestre de la L1. Ensuite nous analyserons une tâche du Baccalauréat Scientifique de 2016 (date relativement proche de celle de l'examen). De plus, cette tâche est cohérente avec celles qui proposent les manuels de TS en guise de préparation à cette épreuve.

6.3.1 Analyse exemple : examen de L1

La Figure 36 ci-dessous, correspond à un exercice d'un examen qui contient 5 exercices au total[68] et qui, sauf pour la filière des MIASH, était commun à toutes les autres filières de la L1. La durée de cet examen était de 3 heures, ce qui laisse en moyenne 36 minutes de résolution par exercice.

Soit $\alpha \in]0,1[$ et soit $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\forall x \in [0,1], f(x) = \frac{1}{2-x}$.
On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant les conditions : $u_0 = \alpha$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) = \frac{1}{2-u_n}$.

1. Montrer que, pour tout $x \in [0,1], f(x) \in [0,1]$. Puis que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in [0,1]$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
4. Quelle est la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Figure 36 : Tâche de l'étude d'une suite récurrente en L1.

[68] Voir annexe 3.7, page 380.

Il s'agit d'une tâche où le contrôle non mathématique est favorisé dans l'énoncé. Au titre des paradigmes, la tâche est proposée entièrement dans le paradigme [A2] donc il n'y a pas de possibilité de dialectique entre les paradigmes [A1] et [A2]. Concernant les reconnaissances, seule la nécessité d'une preuve par récurrence est laissée à la charge des étudiants. Dans l'énoncé de l'examen, en plus de signaler le temps, il est déclaré que les calculatrices sont interdites (ce qui fait partie du contrat didactique) et l'environnement de la tâche est celui du papier-crayon. Cela nous permet d'assurer qu'une occasion de développer une sous-activité de contrôle instrumental n'est pas possible d'emblée. Dans ce cas, l'interdiction de la calculatrice empêche aussi la possibilité de développer une sous-activité de contrôle sémiotique : comme l'énoncé ne demande pas une conversion entre registres, cette sous-activité est très peu présente (voire presque nulle). Ci-après nous présenterons d'abord l'analyse détaillée de chacune des questions de la tâche et ses stratégies puis la succession des sous-activités et le travail mathématique attendu dans la résolution de chaque sous-tâche.

a) Analyse question 1 examen L1

Tableau 4 : Stratégies de résolution question 1.

<table>
<tr><th colspan="2">(a) Montrer que, pour tout $\boldsymbol{x} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$</th></tr>
<tr><td>Stratégie Inégalités algébriques (a.1)</td><td>* Pour tout $x \in [0,1]$, on a : $0 \leq x \leq 1$ donc $-1 \leq -x \leq 0$
donc $1 \leq 2 - x \leq 2$ donc $0 < \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2-x} \leq 1$. Cela montre que $f(x) \in [0,1]$.
*Dans cette stratégie on peut procéder comme suit : comme $x \in [0,1]$ donc $2 - x > 0$, les inégalités $0 \leq \frac{1}{2-x} \leq 1$ sont vraies si et seulement si $(2-x) \times 0 \leq 1 \leq (2-x) \times 1$, soit $0 \leq 1 \leq 2 - x$, ce qui est vrai.</td></tr>
<tr><td>Stratégie de variations de $\boldsymbol{f}$ (a.2)</td><td>*Nous pouvons procéder à l'étude de variation de f dans [0,1] par le calcul de la dérivée : $f'(x) = \frac{1'(2-x)-1(2-x)'}{(2-x)^2} = \frac{1}{(2-x)^2} \geq 0$.
Ainsi nous pouvons construire le tableau de variation de f comme suit :
<table>
<tr><th>$\boldsymbol{x}$</th><th>$\mathbf{0}$</th><th></th><th>$\mathbf{1}$</th></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{f'(x)}$</td><td></td><td>+</td><td></td></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{f}$</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>↗</td><td>1</td></tr>
</table>
Donc pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) \in [0,1]$.</td></tr>
</table>

(a) Montrer que, pour tout $\boldsymbol{x} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$	
	*Nous pouvons aussi prouver que f est strictement croissante en appliquant la définition élémentaire de fonction croissante : pour tout x_1 et $x_2 \in [0, 1]$ tel que $x_1 < x_2$, alors $f(x_1) < f(x_2)$. Puis procéder à l'évaluation des bornes de l'intervalle.
(b) Montrer que, que pour tout $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{u_n} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$	
Stratégie récurrence	On montre par récurrence que $u_n \in [0,1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. (i) Initialisation : On a $u_0 = \alpha$ et $\alpha \in]0, 1[$ donc $u_0 \in [0, 1]$. (ii) Hérédité : Soit $m \in \mathbb{N}$, on suppose $u_m \in [0, 1]$. $u_m \in [0, 1] \Rightarrow f(u_m) \in [0, 1]$. Or $f\ (u_m) = u_{m+1}$. Donc $u_{m+1.} \in [0, 1]$. (iii) Conclusion : Par le principe de récurrence montre que $u_n \in [0, 1]$ pour tout $n \geq 0$.

La Figure 37, la Figure 38 et la Figure 39 ci-dessous montrent la succession des trois stratégies décrites. Dans chacune des trois, il faut que l'étudiant s'investisse d'abord dans une sous-activité de reconnaissance pour, ensuite, continuer avec la sous-activité de traitement. Toutefois, les reconnaissances de chacune des stratégies ne sont pas du même ordre : dans la *sous-tâche a*, il s'agit du choix de stratégie (non forcé), et dans la *sous-tâche b*, il s'agit de la nécessité du raisonnement par récurrence. De plus, dans la sous-activité de traitement de la *sous-tâche b*, il y a une reconnaissance importante concernant l'utilisation de la question précédente (hérédité), ce qui peut aussi bloquer le développement de la résolution de la tâche. Dans la *sous-tâche a* il s'agit d'introduction d'intermédiaires avec des calculs à effectuer et la construction d'un outil (le tableau de variation) pour y répondre. Ainsi, les sous-activités de traitement sont aussi d'ordre différent. En termes de la théorie des ETM, dans la stratégie a.1 par exemple, l'étudiant peut trouver des difficultés de travail dans la dimension sémiotique à travers la non conversion du registre algébrique vers le registre ensembliste ($x \in [0,1]$ équivaut à $0 \leq x \leq 1$). Dans le cas où l'étudiant arrive à bien réaliser les conversions, l'étudiant peut trouver des difficultés dans les traitements à réaliser avec les inégalités dans le registre algébrique en tant qu'artefact symbolique pour produire la réponse souhaitée ($-1 \leq -x \leq 0$ donc $1 \leq 2 - x \leq 2$ donc $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2-x} \leq 1$). Si l'étudiant réalise ces traitements, il lui reste une dernière conversion à faire du registre sémiotique vers le registre ensembliste ($0 \leq \frac{1}{2-x} \leq 1$ équivaut à $\frac{1}{2-x} \in [0,1]$) pour conclure la *sous-tâche a* ($f\ (x) \in [0,1]$). Ainsi, les difficultés rencontrées peuvent se traduire comme des difficultés d'ordre sémiotique ou d'ordre instrumental (notamment de l'artefact symbolique).

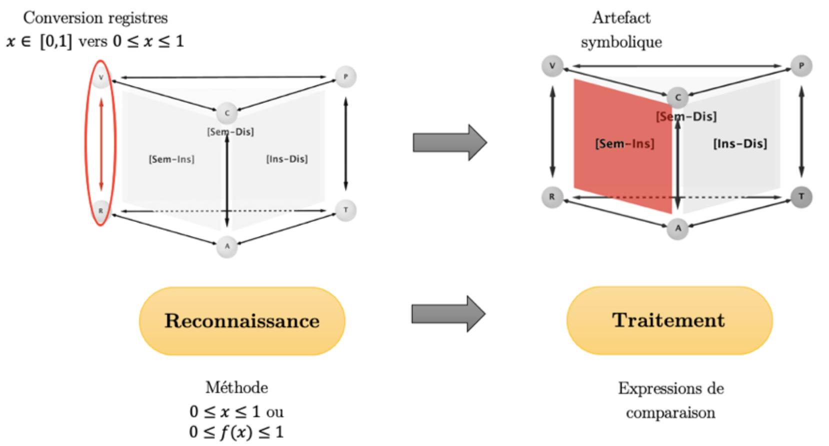


Figure 37 : Successions de sous-activités et du travail attendu dans la stratégie a.1 question 1.

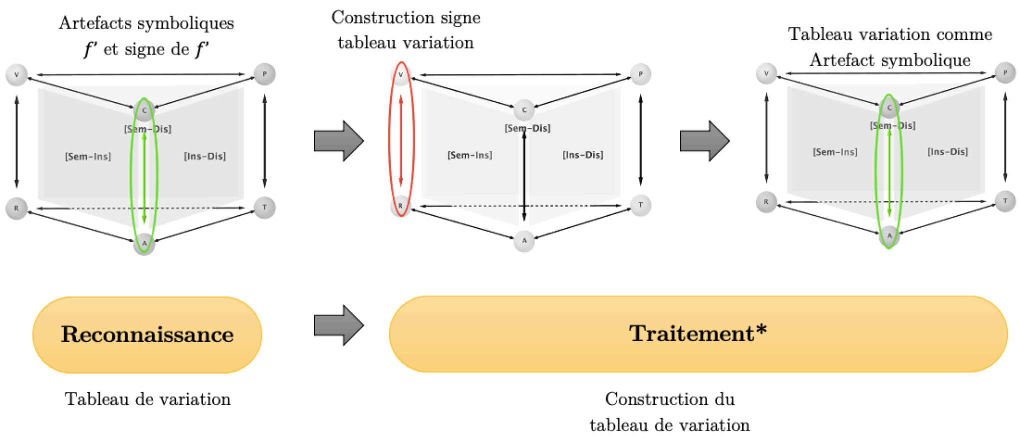


Figure 38 : Successions de sous-activités et du travail attendu dans la stratégie a.2 question 1.

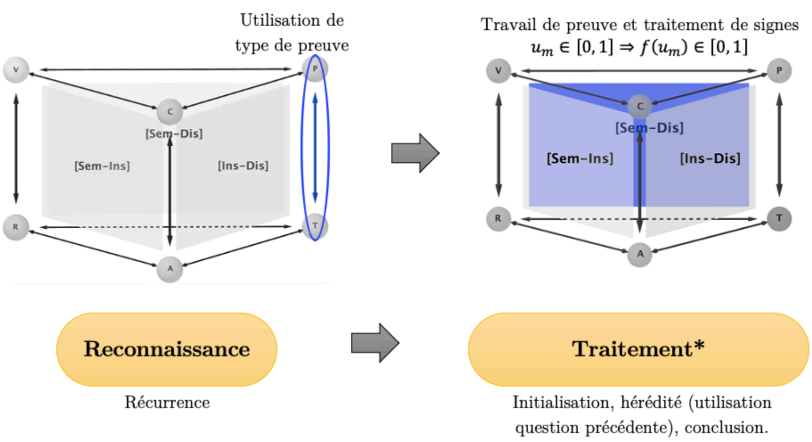


Figure 39 : Successions de sous-activités et du travail attendu dans la stratégie b question 1.

b) Analyse question 2 examen L1

Tableau 5 : Stratégies de résolution question 2.

2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.	
Stratégie 1 : $u_{n+1} - u_n \geq 0$	Pour tout $n \geq 0$ on a : $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = \frac{1}{2-u_n} - u_n = \frac{1-2u_n+u_n^2}{2-u_n} = \frac{(u_n-1)^2}{2-u_n}$ Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$. Cela montre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
Stratégie 2 : $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$	Par récurrence on montre que u_n est non nul pour tout n. Initialisation : $u_0 = \alpha$ est non nul par définition car $\alpha \in]0,1[$. Hérédité : Soit $m \in \mathbb{N}$, on suppose u_m est non nul. On sait que $u_{m+1} = \frac{1}{2-u_m}$ et par résultat de la question 1, on a que $2 - u_m \in [1,2]$ donc u_{m+1} est non nul. Conclusion : Par le principe de récurrence on montre que u_n est non nul pour tout $n \geq 0$. Puis nous procédons par l'étude du rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$: $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{(2-u_n)u_n} = \frac{1}{2u_n - u_n^2} = \frac{1}{(2u_n - u_n^2 - 1) + 1} = \frac{1}{-(u_n-1)^2 + 1} > 1$$ car $u_n \in [0,1]$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$. Cela montre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante
Stratégie 3 : récurrence	On montre par récurrence que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (on reviendra à la stratégie 1) (i) Initialisation : On a $u_0 \leq u_1$ car $u_1 - u_0 = f(u_0) - u_0 = \frac{1}{2-\alpha} - \alpha = \frac{1-2\alpha+\alpha^2}{2-\alpha} = \frac{(\alpha-1)^2}{2-\alpha}$ et comme $\alpha \in]0,1[$ donc $u_1 - u_0 \geq 0$. (ii) Hérédité : Soit $m \in \mathbb{N}$, on suppose $u_{m-1} \leq u_m$. $u_{m+1} - u_m$ $$= f(u_m) - u_m = \frac{1}{2-u_m} - u_m = \frac{1-2u_m+u_m^2}{2-u_m} = \frac{(u_m-1)^2}{2-u_m}$$ donc $u_{m+1} - u_m \geq 0$. (iii) Conclusion : Par le principe de récurrence on montre que $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
Stratégie théorème *	Utilisation théorème : si f croissante alors (u_n) monotone. Si $f(u_0) - u_0 \geq 0$, alors (u_n) est croissante. Appliquons ce théorème : $$f(u_0) - u_0 = \frac{1}{2-\alpha} - \alpha = \frac{1-2\alpha+\alpha^2}{2-\alpha} = \frac{(\alpha-1)^2}{2-\alpha} \geq 0$$

2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.	
	Donc (u_n) est croissante. *Ce théorème n'est pas traité dans la classe de Licence que nous analysons.

La Figure 40 correspond aux successions de sous-activités et travail attendu dans les stratégies 1 et 2 de la question 2. Que ce soit pour la stratégie 1 ou 2, l'étudiant commence par une sous-activité de reconnaissance de la méthode à utiliser pour prouver que la suite est croissante. Il peut choisir entre $u_{n+1} - u_n \geq 0$ ou $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ (choix non forcé). En termes de travail mathématique, l'étudiant commence par l'utilisation d'une des méthodes en tant qu'artefact symbolique, ce qui active la dimension instrumentale. Ensuite, l'étudiant continue dans une sous-activité de traitement par laquelle il effectue des calculs pour arriver à une expression algébrique qui lui permet de conclure (dans la stratégie 2, une argumentation supplémentaire est nécessaire, puisque pour utiliser la méthode $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ il est nécessaire que u_n soit strictement positif). Ici la reconnaissance de l'identité remarquable dans l'expression $1 - 2u_n + u_n^2$ vers $(u_n - 1)^2$ est nécessaire. En même temps, en termes de travail, pour bien utiliser cet artefact symbolique, l'élève doit réaliser un travail de traitements sémiotiques dans le registre algébrique ce qui amène à activer le plan vertical [Sem-Ins] pour conclure avec la conversion du registre sémiotique algébrique (comme $\frac{(u_n-1)^2}{2-u_n} \geq 0$) vers le registre sémiotique de langue naturelle (la suite (u_n) est croissante).

La Figure 41 illustre la succession de la stratégie 3. Il s'agit d'abord d'une sous-activité de reconnaissance de la méthode de preuve par récurrence (choix non forcé). Cela amène l'activation de la dimension discursive puisque la récurrence est utilisée comme une méthode de preuve. Ensuite il est nécessaire de développer la méthode avec les étapes d'initialisation, d'hérédité et de conclusion. Ici, comme dans les stratégies précédentes, la reconnaissance de l'identité $(u_n - 1)^2$ est nécessaire. En termes de travail mathématique, cela implique un travail dans le plan [Sem-Ins] puisqu'il s'agit d'effectuer la preuve par récurrence où, dans chacune des étapes, il faut faire un travail de traitements et de conversions dans le registre de représentation algébrique et dans le registre de représentation de la langue naturelle. Par exemple, l'étudiant doit non seulement établir l'égalité $\frac{1-2u_m+u_m^2}{2-u_m} = \frac{(u_m-1)^2}{2-u_m}$, mais aussi convertir $u_n \leq u_{n+1}$ au registre de langue naturel pour conclure que la suite (u_n) est croissante.

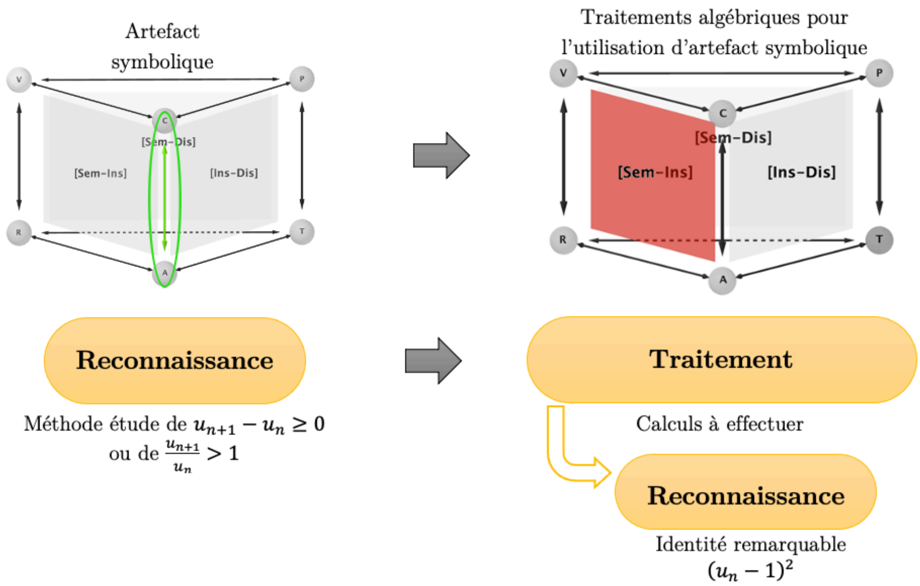


Figure 40 : Successions de sous-activités et du travail attendu dans les stratégies 1 et 2 de la question 2.

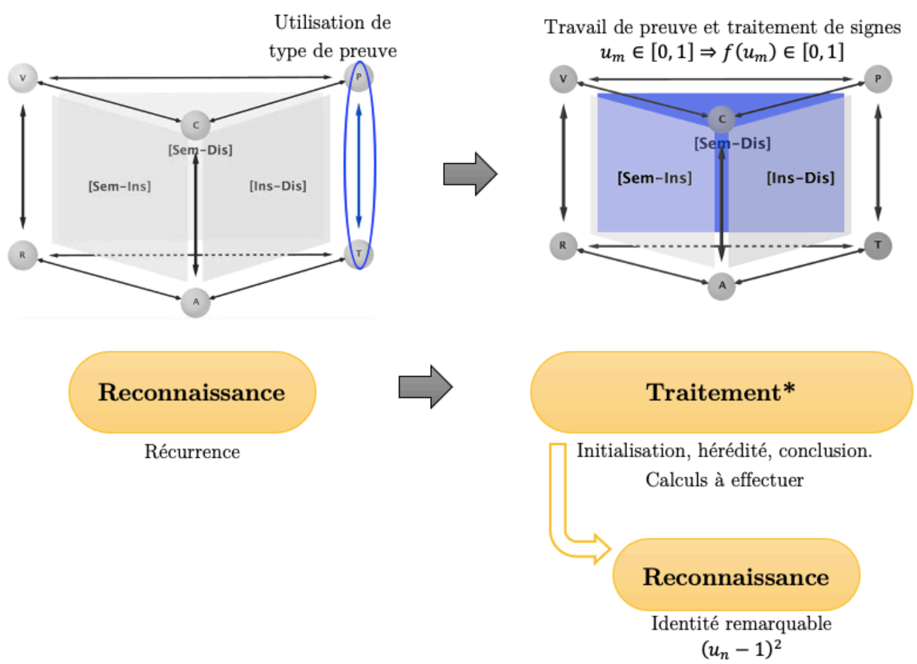


Figure 41 : Successions de sous-activités et du travail attendu dans la stratégie 3 de la question 2.

c) Analyse question 3 examen L1

Tableau 6 : Stratégie de résolution question 3.

3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge	
Stratégie théorème	D'après la question 1, la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est majorée par 1. De plus, d'après la question 2, la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante. Donc par théorème de la limite monotone, $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente.

Quant à la succession de sous-activités et travail attendu dans la question 3 (Figure 42), l'étudiant doit reconnaître le théorème de la limite monotone pour répondre à la question. Ici il s'agit d'un choix forcé. En termes de travail mathématique, cela veut dire que l'étudiant identifie ce théorème comme dans son référentiel théorique. Ensuite, l'étudiant doit développer une sous-activité du traitement en utilisant les résultats de questions précédentes, c'est-à-dire que la suite est croissante et majorée. Cela amène à activer la dimension instrumentale chez l'étudiant en utilisant le théorème en tant qu'artefact symbolique pour y répondre.

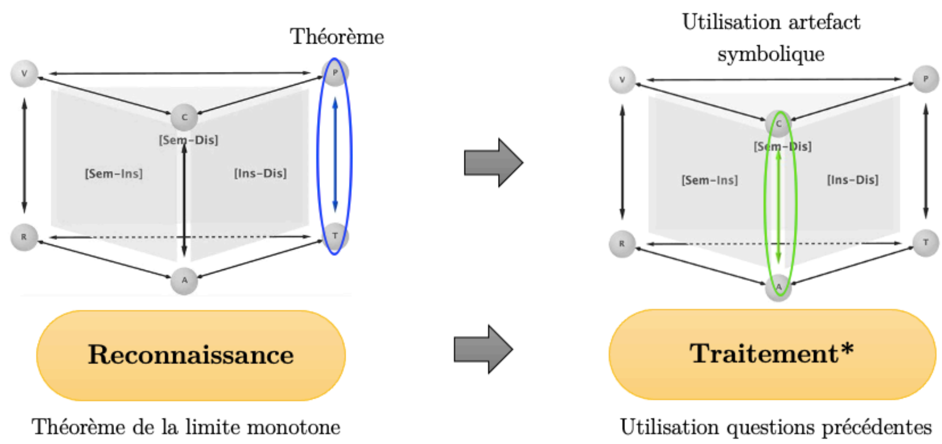


Figure 42 : Successions de sous-activités et du travail attendu dans la stratégie de la question 3.

d) Analyse question 4 examen L1

Tableau 7 : Stratégies de résolution question 4.

4. Quelle est la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?	
Stratégie passage à la limite	On note la limite de $(u_n)_{n\geq 0}$ comme l. Ensuite, par passage à la limite $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(l)$ car f est continue en l. Puis comme $u_{n+1} = f(u_n)$ on obtient $f(l) = l$ par passage à la limite. Pour tout $x \in [0,1]$, on a : $f(x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{2-x} = x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Ce qui montre que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers 1.

Concernant la succession de sous-activités et du travail attendu dans la question 3 (Figure 43), l'étudiant doit d'abord reconnaître qu'un passage à la limite est nécessaire pour utiliser $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(l)$. Ainsi l'élève est amené à développer une sous-activité de reconnaissance. Cela nécessite ensuite une sous-activité de traitement pour l'utilisation de $f(l) = l$. En termes de travail mathématique, il s'agit de l'activation de la dimension instrumentale notamment pour l'utilisation de $f(l) = l$ en tant qu'artefact symbolique. La sous-activité de traitement est requise ensuite pour finaliser la résolution de la tâche, notamment pour effectuer les calculs de $f(x) = x$ et trouver la valeur de la limite dans cette sous-activité de traitement, la reconnaissance de l'identité remarquable ou le calcul de delta dans l'équation $x^2 - 2x + 1 = 0$ est nécessaire pour conclure que $x = 1$. Puisqu'il s'agit d'un travail sémiotique de traitements dans le registre algébrique et de la finalisation de la preuve, cela se traduit par un travail mathématique dans le plan vertical [Sem-Ins].

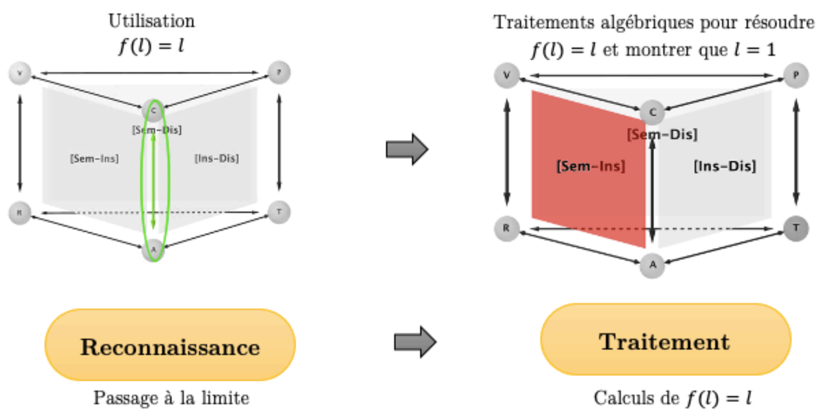


Figure 43 : Successions de sous-activités et du travail attendu dans la question 4.

6.3.2 Analyse exemple tâche d'évaluation : Baccalauréat S

La tâche de la Figure 44 correspond à un exercice du Baccalauréat Scientifique Métropole de 2016. L'épreuve possède 4 exercices et l'élève dispose de 4 heures pour résoudre la totalité. Il s'agit de l'exercice 3 qui est le seul exercice qui correspond aux suites. À la différence de la classe de L1, les calculatrices sont autorisées.

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$, par $f(x) = x - \ln(x^2 + 1)$.

1. Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation : $f(x) = x$.
2. Justifier tous les éléments du tableau de variations ci-dessous à l'exception de la limite de la fonction f en $+\infty$ que l'on admet.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
f	$-\infty$				$+\infty$

3. Montrer que pour tout réel x appartenant à $[0,1]$, $f(x)$ appartient à $[0,1]$.
4. On considère l'algorithme suivant :

Variables	N et A des entiers naturels ;
Entrée	Saisir la valeur de A
Traitement	N prend la valeur 0 Tant que $N - \ln(N^2 + 1) < A$ N prend la valeur $N+1$ Fin tant que
Sortie	Afficher N

a. Que fait cet algorithme ?

b. Déterminer la valeur N fournie par l'algorithme lorsque la valeur saisie pour A est 100.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n - \ln(u_n^2 + 1)$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n appartient à $[0,1]$.
2. Étudier les variations de la suite (u_n).
3. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
4. On note l sa limite, et on admet que l vérifie l'égalité $l = f(l)$. En déduire la valeur de l.

Figure 44 : Tâche suite récurrente Baccalauréat Scientifique Métropole (2016).

Il s'agit de l'étude d'une suite récurrente (décroissante) – Partie B - qui a été précédée par l'étude de la fonction f (croissante) qui définit la suite – Partie A. Malgré le fait que la calculatrice est acceptée, l'étude de la suite, tel que l'énoncé de la Partie B est rédigé, ne demande pas l'utilisation de la calculatrice. Nous présenterons l'analyse de chaque question de l'étude de la suite ci-dessous.

a) Analyse question 1 Bac S

Tableau 8 : Stratégie résolution question 1 Bac S.

1. Montrer par récurrence que, pour tout $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{u_n}$ appartient à $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$	
Stratégie récurrence	On montre par récurrence que $u_n \in [0,1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. (i) Initialisation : On a $u_0 = 1$ donc $u_0 \in [0,1]$. (ii) Hérédité : Soit $m \in \mathbb{N}$, on suppose $u_m \in [0,1]$. Comme $u_m \in [0,1] \Rightarrow f(u_m) \in [0,1]$ (par résultat de la question A3), on a $u_{m+1.} \in [0,1]$. (iii) Conclusion : Par le principe de récurrence on montre que $u_n \in [0,1]$ pour tout $n \geq 0$.

Pour cette question, la reconnaissance de la méthode d'une preuve par récurrence est suggérée. Ainsi, l'élève doit seulement appliquer les étapes de la preuve, travaillées pendant l'année scolaire dans la classe de Terminale Scientifique. Comme ces étapes sont classiques, la seule sous-activité à développer par l'élève est celle du traitement. En termes d'ETM, ce travail se traduit par des traitements de signes dans la preuve par récurrence, produisant un travail commandé par les dimensions du plan vertical [Sem-Dis].

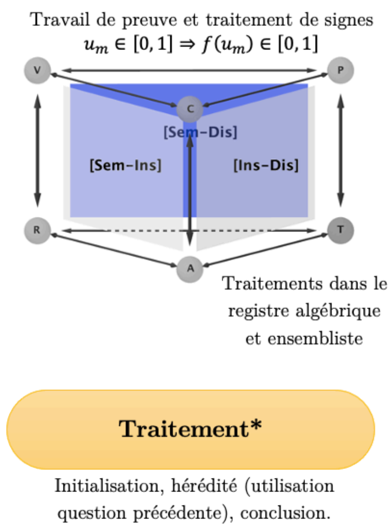


Figure 45 : Sous-activité et travail attendu dans la question 1.

b) Analyse question 2 Bac S

Tableau 9 : Stratégies résolution question 2 Bac S

2. Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.	
Stratégie 1 : signe de $u_{n+1} - u_n$	Pour tout $n \geq 0$ on a : $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = u_n - \ln(u_n^2 + 1) - u_n = -\ln(u_n^2 + 1)$. Comme $u_n^2 + 1 \geq 1$ et que la fonction $\ln$ est croissante $-\ln(u_n^2 + 1) \leq 0$, donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$. Cela montre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
Stratégie 2 : étude de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$	On a que u_n est positive par résultat de la question 1. Pour cette méthode on doit d'abord prouver que u_n est non nul $\forall n \in \mathbb{N}$. (i) Initialisation : On a u_0 non nul par définition. (ii) Hérédité : Soit $m \in \mathbb{N}$. On suppose que u_m est non nul. Puisque f est strictement croissante elle possède au plus un zéro. Or $f(0) = 0$, 0 est donc le zéro de f. Comme u_m est non nul, $u_{m+1} = f(u_m)$ est aussi non nul. (iii) u_n est non nul $\forall n \in \mathbb{N}$. On peut alors procéder par l'étude du rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. Pour tout $n \geq 0$ on a : $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_n - \ln(u_n^2 + 1)}{u_n} = 1 - \frac{\ln(u_n^2 + 1)}{u_n} < 1$$ Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
Stratégie 3 :	On montre par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. (i) Initialisation : On a $u_0 \geq u_1$ car $u_1 - u_0 = f(u_0) - u_0 = f(1) - 1 = -\ln(2)$ et comme $-\ln(2) < 0$ donc $u_1 - u_0 \leq 0$. (ii) Hérédité : Soit $m \in \mathbb{N}$, on suppose $u_{m-1} \geq u_m$. $$\begin{aligned} u_{\mathrm{m}+1} - u_m = f(u_m) - u_m &= u_m - \ln(u_m^2 + 1) - u_m \\ &= -\ln(u_m^2 + 1) \leq 0 \end{aligned}$$ donc $u_{m+1} - u_m \leq 0$. (iii) Conclusion : Par le principe de récurrence montre que $u_n \geq u_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

La Figure 46 est une illustration des successions de sous-activités et du travail attendu à l'issu des stratégies 1 et 2 de la question 3. Dans les deux stratégies l'élève commence son activité par une sous-activité de reconnaissance avec un choix de la méthode à utiliser (choix non forcé entre l'étude de $u_{n+1} - u_n$ ou de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ou une preuve par récurrence). Il est à remarquer ici qu'à la différence de l'énoncé de l'université, la question n'explicite pas la variation de la suite. Cela amène à l'activation de la dimension instrumentale dans l'ETM personnel de l'élève car la méthode choisie devient un artefact symbolique. Pour développer cette méthode, il faut que l'élève mette en fonctionnement une sous-activité de traitement pour effectuer des calculs afin d'arriver à une expression algébrique qui permette de conclure (comme dans le cas de la question L1, il faut que l'élève s'assure que u_n soit non nul pout tout n pour appliquer la stratégie 2). Dans les deux stratégies il faut que dans cette sous-activité de traitement, l'élève fasse une nouvelle reconnaissance de l'utilisation de la croissance de f (résultat question précédente). En termes de travail mathématique, l'utilisation de cet artefact symbolique entraîne un travail dans des registres sémiotiques, notamment pour les traitements et conversions à réaliser. Ce travail active le plan vertical [Sem-Ins] de l'ETM personnel de l'élève.

La Figure 47 montre la succession de la stratégie 3. Tous d'abord il faut que l'élève s'investisse dans une sous activité de reconnaissance de la méthode de preuve par récurrence, ce qui active la dimension discursive dans l'espace de travail mathématique de l'élève. Ensuite, la sous-activité de traitement est nécessaire pour continuer avec la résolution de la tâche en posant et développant les étapes de la preuve où la reconnaissance de l'utilisation de la croissance de f (une des questions précédentes) est nécessaire. Cette preuve par récurrence, comme dans les cas précédents, active le plan vertical [Sem-Dis].

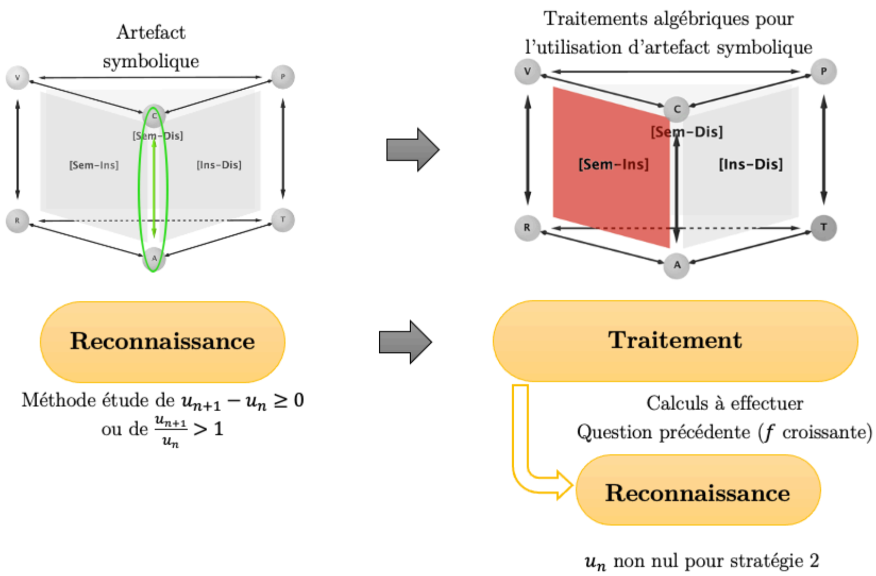


Figure 46 : Successions de sous-activités et du travail attendu dans les stratégies 1 et 2 de la question 2.

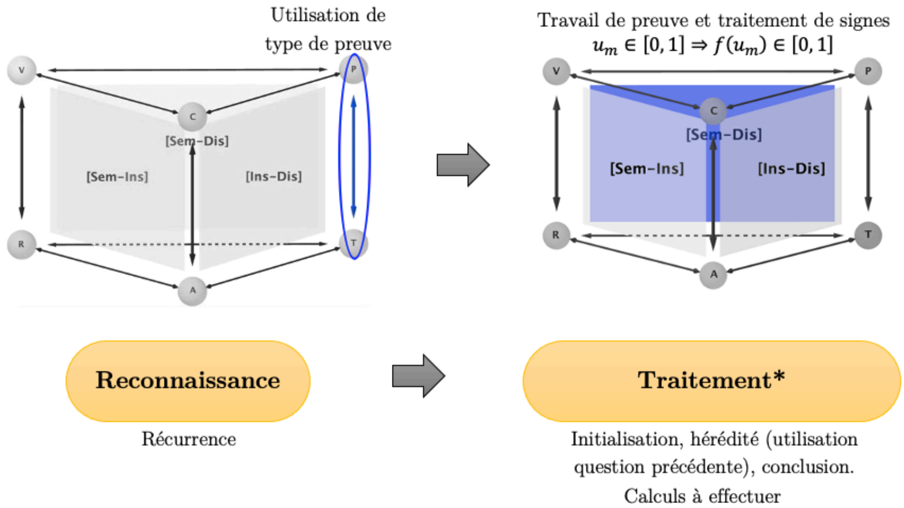


Figure 47 : Successions de sous-activités et du travail attendu dans la stratégie 3 de la question 2.

c) Analyse question 3 Bac S

Tableau 10 : Stratégie de résolution question 3 Bac S.

3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge	
Stratégie théorème	D'après la question 1, la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est minorée par 0. De plus, d'après la question 2, la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante. Donc par théorème de la limite monotone, $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente.

La Figure 48 montre la succession de sous-activités et du travail attendu dans la question 3. Ici l'élève doit d'abord s'investir dans une sous-activité de reconnaissance avec le choix forcé du théorème de la limite monotone. Cela signifie que l'élève active la dimension discursive en utilisant le théorème qui se trouve dans son référentiel théorique. Cela est suivi d'une sous-activité de traitement car l'élève a besoin d'utiliser les résultats de questions précédentes pour y répondre, ce qui amène à activer la dimension instrumentale et à utiliser le théorème comme artefact symbolique dans le travail mathématique que développe l'élève.

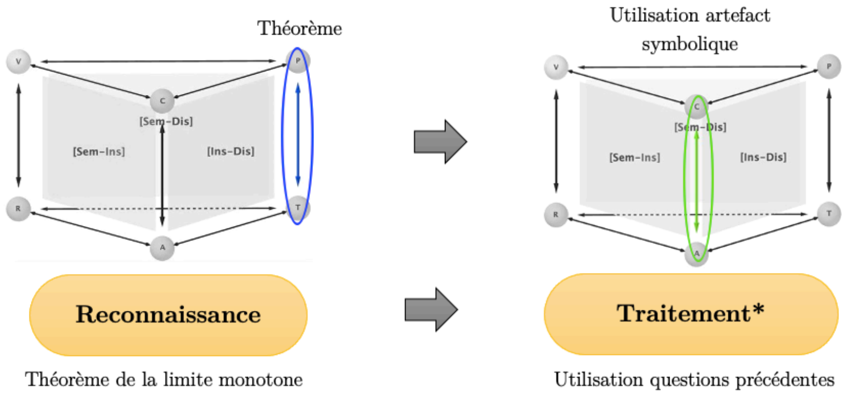


Figure 48 : Succession de sous-activités et du travail attendu dans la question 3.

d) Analyse question 4 Bac S

Tableau 11 : Stratégie question 4 Bac S

4. On note l sa limite, et on admet que l vérifie l'égalité $f(l) = l$. En déduire la valeur de l ?	
Stratégie **$f(l) = l$**	D'après la question A.1 on a : $f(x) = x \Leftrightarrow x - \ln(x^2 + 1) = x \Leftrightarrow \ln(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$. Comme $f(l) = l$ on peut en déduire que $l = 0$.

La Figure 49 montre la sous-activité et le travail mathématique à développer par l'élève. Cela concerne seulement la sous-activités du traitement pour le calcul de $f(l) = l$ (la reconnaissance de la méthode a été apportée par l'énoncé). Concernant le travail mathématique, le travail se fait dans le plan [Ins-Dis] car il s'agit de résoudre l'équation en utilisant l'artefact symbolique $f(l) = l$ avec des connaissances sur la fonction ln qui interviennent.

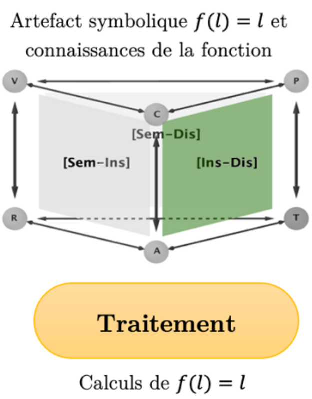


Figure 49 : Sous-activité et travail attendu dans la question 4.

6.4 Conclusion du chapitre 6

Nous revenons à la QR1 rappelée dans l'introduction de ce chapitre à laquelle nous souhaitons répondre : *Quelles sont les continuités et les ruptures de la transition L-U en France quant aux suites définies par récurrence* $u_{n+1} = f(u_n)$ *? Plus particulièrement, que peut-on dire des trois sous-activités mathématiques de contrôle (sémiotique, instrumental, discursif) et des paradigmes de l'Analyse [A1] et [A2] dans les ETM de référence ; et quelles sont les caractéristiques pour les successions de l'activité et du travail mathématique dans les ETM attendus de chaque institution ?*

Pour répondre à cette question, nous avons établi trois niveaux d'analyse où chacun d'entre eux nous permet d'aller plus en profondeur dans les analyses des activités et du travail mathématique. Nous avons identifié l'analyse de programmes comme le premier niveau puisqu'ils nous permettent d'avoir une vision globale de la classe à analyser et les objectifs généraux fixés par les institutions. Mais cela n'est pas suffisant pour caractériser l'ETM de référence ni l'ETM attendu. C'est ainsi que nous avons poursuivi avec un deuxième niveau d'analyse qui cherchait à caractériser les tâches proposées aux élèves et aux étudiants dans chacune des classes. Cela nous a permis de caractériser de façon générale comment les paradigmes [A1] et [A2] sont considérés, d'identifier les reconnaissances qui sont apportées dans les énoncés et lesquelles sont attendues pour être développées par les élèves, et finalement, quel rôle jouent les différents types de contrôle dans les énoncés de ces tâches. Nous avons repéré les contrôles non mathématiques ainsi que les sous-activités de contrôle sémiotique, instrumental et discursif en identifiant les occasions de contrôle ainsi que le contrôle explicite. Un dernier niveau d'analyse nous permet de connaître l'ETM attendu : il s'agit de l'analyse de tâches d'évaluation à la transition L-U. Dans ces analyses nous avons pu relever notamment la succession existante dans la résolution de ces tâches qui se construisent grâce au développement de sous-activités mathématiques et l'activation de dimensions ou de plans verticaux de l'ETM personnel d'élèves et des étudiants. Ainsi, les analyses fournies nous permettent de constater les ruptures et les continuités des ETM de référence et de l'activité mathématique de chacune des institutions dans chacun de ces trois niveaux d'analyse ; ce que nous présentons ci-dessous :

Continuités dans les ETM de référence et attendu de la fin de lycée et du début de l'université

En ce qui concerne les continuités des programmes (premier niveau d'analyse) dans les deux niveaux d'enseignement, on les observe particulièrement dans les éléments du référentiel théorique : la définition de limite à l'infini dans le cas réel, l'unicité de la limite, un travail d'opération de limites et d'inégalités, le théorème de gendarmes, définitions de suites bornées, suites monotones et le théorème de la limite monotone.

Dans les analyses des tâches de cours (deuxième niveau d'analyse) nous identifions comme continuité le paradigme [A2] qui est largement travaillé dans les deux classes analysées. Ensuite, une deuxième continuité est la non prédominance de la dialectique entre les paradigmes [A1] et [A2] (surtout dans le cas du travail de [A2] vers [A1]), même si dans la classe de TS les deux paradigmes sont présents. De plus, la reconnaissance de la suite récurrente en termes de u_n reste explicitée dans la plupart des tâches des deux institutions et la reconnaissance de la convergence est attendue pour être développée par l'élève dans la plupart des exercices. Finalement, les contrôles non mathématiques sont fortement présents en L1 et en TS. Est-ce que ce dernier point répond, de façon plus générale, à une partie du contrat didactique des deux institutions ? Si oui, que se passerait-il avec les résultats des élèves et des étudiants si on réduisait les possibilités de ce type de contrôle dans les exercices ?

Avec les analyses de tâches d'évaluation (troisième niveau d'analyse), nous observons des continuités concernant l'ETM attendu à partir des successions de sous-activités et du travail mathématique car ces successions restent les mêmes pour les résolutions des questions 2 et 3. En effet, les connaissances à mettre en fonctionnement (éléments du référentiel théorique) pour étudier la variation de la suite (preuve par récurrence, étude du signe de $u_{n+1} - u_n$ et étude du rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$) et pour montrer la convergence de la suite (théorème de la limite monotone) restent les mêmes au lycée et à l'université. Par ailleurs, nous repérons que l'ETM personnel attendu est plutôt dans le paradigme [A2] car il est le seul à être utilisé dans l'étude de la suite dans les deux tâches d'évaluation. Aussi, le travail à développer présente presque les mêmes types de signes à utiliser (la plupart dans le registre algébrique) et, en général, c'est le traitement de ces signes qui va permettre un discours mathématique cohérent ainsi que des signes utilisés en tant qu'outils (les artéfacts symboliques). Finalement, en ce qui concerne les contrôles non mathématiques, ils constituent aussi une continuité. En effet les deux énoncés donnent déjà l'intervalle stable par f et ils explicitent tous les deux que la suite est convergente.

Ruptures dans les ETM de référence et attendu de la fin de lycée et du début de l'université

Concernant les programmes (premier niveau d'analyse), les principales ruptures entre le lycée et l'université sont les suivantes : (1) La sous-activité mathématique de contrôle instrumental est attendue dans le travail des élèves en TS mais rien n'est précisé dans les programmes de L1, (2) L'ordre de contenus est différent toutefois cela peut changer selon les enseignants (en TS on commence par le raisonnement par récurrence et les suites, en L1 on commence par l'étude de fonctions). (3) Les éléments du référentiel théorique : contrairement à la TS, la preuve par récurrence n'apparait pas comme un contenu du cours en L1. Les suites y sont introduites dans les nombres complexes, ce qui signifie qu'elles sont travaillées en deux dimensions alors qu'au lycée, on travaille les suites seulement en une dimension dans le cas réel. En L1 on introduit la définition de suites adjacentes (absentes en TS) et il existe une introduction de définitions formelles tout au long du cours ainsi qu'un accent sur les preuves formelles par rapport à la TS.

Dans les tâches présentées dans les cours (deuxième niveau d'analyse), les exercices résolus dans les manuels et ceux qui sont potentiellement proposés dans les classes, permettent de caractériser l'activité et le travail à développer dans les institutions en ce qui concerne les paradigmes présents, les reconnaissances, les contrôles mathématiques et non mathématiques. Nous observons tout d'abord une rupture qui concerne les contextes des tâches : dans le cas de la classe de L1, les étudiants trouvent dans la feuille des cours TD seulement 3 exercices parmi 25 sur les suites récurrentes et le mot récurrence n'est évoqué que pour nommer la suite ; au lycée, par contre, la tâche est présente dans plusieurs exercices des manuels de la classe de TS, et la démonstration par récurrence fait un objet d'étude du cours. En ce qui concerne les ruptures des paradigmes travaillés, il n'y a guère de paradigme [A1] dans la classe de L1 alors qu'en TS il est présent dans la moitié des exercices. Ainsi, on n'observe pas de dialectique entre les paradigmes [A1] et [A2] en L1 alors qu'en TS on l'observe de façon limitée. Concernant les ruptures liées aux reconnaissances, alors qu'en TS la récurrence était apportée dans plus de la moitié des exercices (exemples résolus et exercices proposés), à l'université la reconnaissance de la récurrence est une sous-activité attendue à développer par l'élève dans tous les exercices. La variation de la suite est une reconnaissance plus attendue à développer par l'élève en L1 qu'en TS.

Concernant la sous-activité de contrôle (contrôles mathématiques), il est à remarquer la corrélation existante entre le changement de paradigme et les occasions de contrôle ou contrôle explicite. En effet, lors que l'on favorise un passage du paradigme [A1] vers [A2] ou de [A2] vers [A1] on observe la possibilité de développer les sous-activités de contrôle sémiotique et instrumental avec des occasions de contrôle ou d'un contrôle explicite. Nous observons qu'un peu moins de la moitié des exercices permet ce type de contrôles mathématiques dans la classe de TS ; néanmoins, ils ne sont pas possibles dans la classe de L1. Mais quelles sont les raisons qui motivent ce choix de l'institution université ? Pourquoi empêcher les élèves d'avoir des occasions de contrôle instrumental, notamment avec la calculatrice ? Plus largement, concernant ces ruptures, nous n'observons pas un travail sur les conjectures dans les tâches de L1 alors qu'en TS, cela fait partie des exercices. Par ailleurs, la preuve par récurrence est requise dans le développement d'exercices de L1, sans être traitée dans les contenus, ce qui pourrait être interprété comme si, à l'université, ce type de preuve était considéré comme une connaissance ancienne (ou un acquis) pour les élèves qui devraient donc pouvoir l'utiliser en tant qu'outil.

Les analyses des tâches d'évaluation (troisième niveau d'analyse) permettent une comparaison de tâches proposées aux deux niveaux d'enseignement et cherche à caractériser la succession des sous-activités et du travail mathématique attendu par chaque institution. Ces successions permettent une analyse des tâches qui est plus fine par rapport à celles analysées dans le niveau précédent. Tout d'abord, l'exercice du baccalauréat portait sur l'étude de la suite donnée par $u_{n+1} = u_n - \ln(u_n^2 + 1)$ et $u_0 = 1$. L'étude est faite en deux parties, la première concernant l'étude de la fonction en jeu et la seconde concernant la suite elle-même et les tâches sont divisées en plusieurs questions où la mise en fonctionnement de connaissances répond à un *niveau technique* (elles sont indiquées). L'exercice de l'examen de niveau universitaire porte sur la suite donnée par $u_{n+1} = 1/(2 - u_n)$ et $u_0 = \alpha$ dans $[0,1]$. Cet exercice a un niveau de complexité plus élevé, tout d'abord à cause de la généricité de α. Ici, l'étude de la suite et l'étude de la fonction sont liées de telle sorte que les étudiants doivent davantage reconnaître et contrôler les objets mathématiques sur lesquels ils travaillent. Les sous-tâches sont aussi divisées en plusieurs questions mais à la différence du baccalauréat, les étudiants de l'université ont moins de questions qui peuvent orienter leur activité, ce qui se traduit aussi par un *niveau disponible* de mise en fonctionnement de connaissances (elles ne sont pas données dans l'énoncé, notamment pour la question 1 et la question 4). Concernant les ruptures des successions analysées, une première se trouve dans l'énoncé et la résolution de la question 1. Alors que dans l'examen de L1 il faut montrer la stabilité de l'intervalle en addition aux bornes de la suite, au Baccalauréat il faut seulement montrer que la suite est bornée (la preuve de la stabilité de l'intervalle correspond à l'étude de la fonction - Parie A). Ce changement provoque une exigence cognitive différente dans la tâche. En effet, dans le cas de L1 il y a des choix non forcés à mettre en fonctionnement qui amènent tous à des sous-activités de reconnaissance puis de traitement et à l'activation de différents dimensions ou plans verticaux de l'ETM (selon les choix de stratégies, on peut d'ailleurs activer les trois dimensions). Au contraire, dans le cas du Baccalauréat, il s'agit seulement de la sous-activité du traitement et de l'activation du plan vertical [Sem-Dis] de l'ETM. Par ailleurs, nous observons une deuxième rupture dans la succession de la résolution de la question 4. En effet, en L1 il est demandé la valeur de la limite de la suite (sans aucune aide), et, au Baccalauréat, il faut donner la valeur de limite sachant que $f(l) = l$. Alors qu'en L1 la résolution de la tâche demande le développement de sous-activités de reconnaissance et de traitement avec l'activation de la dimension instrumentale et du plan vertical [Sem-Ins], la tâche du Baccalauréat nécessite seulement la mise en fonctionnement d'une sous-activité de traitement (qui est simple car les élèves doivent juste résoudre l'équation) et l'activation du plan [Ins-Dis] de l'ETM. Une dernière rupture concerne la sous-activité de contrôle mathématique. Bien que la tâche du Baccalauréat ait été proposée de sorte que l'élève n'utilise pas la calculatrice, elle pourrait éventuellement être utilisée permettant ainsi le développement d'un contrôle mathématique instrumental et sémiotique de la part de l'élève ce qui est, comme nous l'avons signalé, interdit à l'université. Cela est paradoxal si l'on considère que les étudiants universitaires ont une plus grande responsabilité quant à l'orientation de l'ensemble du raisonnement et ont besoin d'un niveau de contrôle plus élevé afin de réussir la tâche globale.

Par ce qui précède nous pouvons dire que les théories utilisées et le networking de théories effectué, nous permettent d'observer des ruptures et des continuités dans l'étude de suites récurrentes à la transition L-U à partir de l'étude de tâches sur ces suites récurrentes. Par ailleurs, les analyses menées nous permettent de relever une des questions que nous avons citée dans le chapitre 2, posée par Gueudet (2008) : *Les compétences en matière de technologie acquises au lycée sont-elles exploitées à l'université ?* [Notre traduction] (Ibid., p. 252). Avec l'analyse des programmes, des manuels (de cours et de tâches) et les tâches d'évaluation, nous pouvons dire que la réponse, quant à l'étude de suites récurrentes, est non. D'ailleurs les tâches travaillées au lycée diffèrent de celles travaillées à l'université non seulement du point de vue technologique mais aussi de par les types de travail réalisé avec les paradigmes [A1] et [A2]. Au lycée, même si le contrôle privilégié est celui du non mathématique, il existe quand même la possibilité de contrôler l'activité et le travail mathématiquement grâce à la calculatrice, ce qui n'est pas possible à l'université.

Un autre point important à soulever est l'importance du théorème du point fixe dans l'étude de suites définies par récurrence. En effet, ce théorème n'est pas abordé dans la classe du TS au lycée ni du L1 à l'université, néanmoins il est au centre de la méthode d'étude de ces suites, que ce soit du point de vue algébrique (pour chercher les limites possibles de la suite en étudiant les solutions de $f(x) = x$) ou du point de vue graphique sans ou avec calculatrices. L'utilisation du point fixe est une méthode rigoureuse et pertinente, néanmoins l'usage qu'en font les élèves ne semble pas être questionné. De cette façon les élèves, au lieu d'entreprendre une étude d'une suite par eux-mêmes, résolvent un certain nombre de tâches très guidées et cadrées. Cela est fait notamment par le guidage de contrôles non mathématiques et les reconnaissances apportées par les énoncés qui sont, de plus, presque seulement dans un seul registre de représentation sémiotique et dans le paradigme [A2]. Ainsi, même si les énoncés répondent à une cohérence théorique mathématique, cela risque d'être dénué de sens pour les élèves. D'ailleurs, au lycée, au-delà de l'exercice qui étudie la suite logistique, aucun exercice en vue d'analyser l'intervalle où la suite est définie n'est proposé.

Dans le chapitre suivant nous étudierons l'activité et le travail que les élèves développent lors de la résolution de ces tâches d'évaluation. Plus précisément nous observerons quels sont les effets d'une non articulation entre paradigmes [A1] et [A2] dans le contrôle mathématique des étudiants, et nous chercherons à étudier les difficultés qu'élèves et étudiants rencontrent. Ainsi, nous nous demanderons quels sont les effets des ruptures de la transition L-U que nous avons constatées ? Est-ce que les continuités de la transition L-U relevées dans ce chapitre comportent aussi une continuité dans l'activité et le travail effectifs développés par les étudiants ?