

2-5. Description macroscopique

2-5-1. Équation fluide

A l'ordre ε^0 :

$$\begin{aligned} \rho_f \omega^2 u_f^0 + i\omega (\eta_f \Delta_y u_f^0) - \nabla_y p^1 &= \nabla_x p^0 - \rho_f \omega^2 u_s^0 \quad \text{dans } \Omega_f \\ \nabla_x \cdot u_f^0 + \nabla_y \cdot u_f^1 &= 0 \quad \text{dans } \Omega_f \\ u_f^0 &= u_s^0 \quad \text{dans } \Gamma \end{aligned}$$

A l'ordre ε^1 :

$$\begin{aligned} u_f^1 &= u_s^1 \quad \text{dans } \Gamma \\ \text{or : } \begin{cases} u_s^1(x, y) = \zeta_{kl} \left[\lambda^* \nabla_x \cdot u_s^0 Id + 2\mu^* \varepsilon_x(u_s^0) \right] + \kappa_k p^0 + \bar{u}_s^{-1}(x) \\ u_f^0 = u^0 + u_s^0 \end{cases} \end{aligned}$$

alors,

$$\nabla_x \cdot u^0 + \nabla_x \cdot u_s^0 = \nabla_y \cdot \zeta_{kl} \left\{ \lambda^* \nabla_x \cdot u_s^0 Id + 2\mu^* \varepsilon_x(u_s^0) \right\} - \nabla_y \cdot \kappa_k p^0$$

En moyennant, on obtient **l'Équation** de continuité à l'échelle macroscopique :

$$\nabla_x \cdot \langle u^0 \rangle = \beta p^0 + \left\{ \lambda^* \nabla_x \cdot u_s^0 Id + 2\mu^* \varepsilon_x(u_s^0) \right\} \cdot \langle \nabla_y \cdot \zeta_{kl} \rangle - \phi \nabla_x \cdot u_s^0 \quad (16)$$

$$\text{avec, } \langle \cdot \rangle = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} d\Omega$$

2-5-2. Équation solide

Pour les **Équations** de conservations :

A l'ordre ε^{-1} :

$$\begin{cases} \nabla_x \cdot \sigma_s^{-1} + \nabla_y \cdot \sigma_s^0 = 0 \\ (\sigma_s^{-1})_n = 0 \end{cases} \quad (17)$$

$$\text{avec, } \tilde{\sigma}_s^0 = \lambda^* \nabla_x \cdot u_s^0 Id + 2\mu^* \varepsilon_x(u_s^0) + \lambda^* \nabla_y \cdot \left[\zeta_{kl} \varepsilon_x(u_s^0) \right] Id + 2\mu^* \varepsilon_y \left[\zeta_{kl} \varepsilon_x(u_s^0) \right]$$

A l'ordre ε^0 :

$$-\rho_s \omega^2 u_s^0 = \nabla_x \cdot \sigma_s^0 + \nabla_y \cdot \sigma_s^1 \quad (18)$$

Par passage à la moyenne, cette **Équation (18)** devient :

$$-\rho_s \omega^2 u_s^0 (1 - \phi) = \nabla_x \cdot \langle \sigma_s^0 \rangle \quad (19)$$

$$\text{où, } \langle \sigma_s^0 \rangle = \langle \tilde{\sigma}_s^0 \rangle + \left[\frac{1}{\Omega} \int_{\Omega_s} (\lambda^* \nabla_y \cdot \kappa_k + 2 \mu^* \varepsilon_y(\kappa_k)) d\Omega \right] p^0$$

2-5-3. Équation macroscopique

Ainsi, les **Équations** obtenues pour l'échelle macroscopique sont regroupées dans (20).

$$\begin{cases} \langle \rho \rangle \omega^2 u_s^0 + \rho_f \omega^2 \langle u^0 \rangle = -\nabla_x \cdot \langle \tilde{\sigma}_s^0 \rangle + \nabla_x \cdot \alpha p^0 \\ \nabla_x \cdot \langle u^0 \rangle = \beta p^0 + \left\{ \lambda^* \nabla_x \cdot u_s^0 Id + 2 \mu^* \varepsilon_x(u_s^0) \right\} \langle \nabla_y \cdot \zeta_{kl} \rangle - \phi \nabla_x \cdot u_s^0 \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \text{avec, } \langle \rho \rangle &= \rho_s (1 - \phi) + \rho_f \phi ; \alpha = \phi Id - \langle \lambda^* \nabla_y \cdot \kappa_k + 2 \mu^* \varepsilon_y(\kappa_k) \rangle ; \\ i\omega \eta_f \langle u^0 \rangle &= -K (\nabla_x p^0 - \rho_f \omega^2 u_s^0) ; \\ \tilde{\sigma}_s^0 &= \left\{ \lambda^* \nabla_x \cdot u_s^0 Id + 2 \mu^* \varepsilon_x(u_s^0) \right\} [Id + \lambda^* \nabla_y \cdot \zeta_{kl} + 2 \mu^* \varepsilon_y(\zeta_{kl})] ; \\ \beta &= \langle \nabla_y \cdot \kappa_k \rangle . \end{aligned}$$

Le comportement macroscopique recherché est en outre décrit par le système (20). La stratégie de l'implémentation numérique renferme trois étapes :

- a. Résoudre les trois problèmes de cellule par la méthode des éléments finis de référence ;
- b. Calculer la perméabilité effective et les propriétés élastiques effectives du milieu poreux ;
- c. Résoudre le problème macroscopique par une méthode itérative.



Figure 1 : Géométrie périodique à simple porosité 2D

3. Résultats et discussion

3-1. Équation fluide

Les **Équations** correspondant à la partie fluide seront simulées dans le maillage de la **Figure 2**.

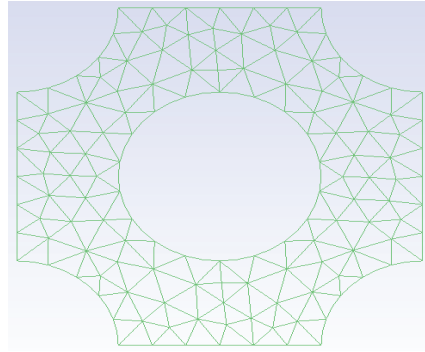


Figure 2 : Maillage de la partie fluide

Pour une fréquence égale à 10Hz, il y a les résultats suivants : On peut constater ainsi sur les **Figures 3 et 4** suivantes une dépression au niveau du solide. Ce phénomène est causé par l'incapacité du fluide de passer (on impose un déplacement nul à ce niveau) ; alors il s'écoule d'autant mieux qu'il est éloigné du matériau. D'ailleurs au niveau des vecteurs de déplacement représentés sur les **Figures 3 et 4**, on obtient bien que celui-ci est quasi nul au niveau du solide.

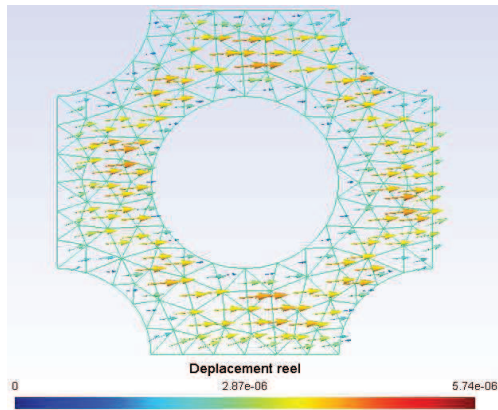


Figure 3 : Déplacement relatif réel

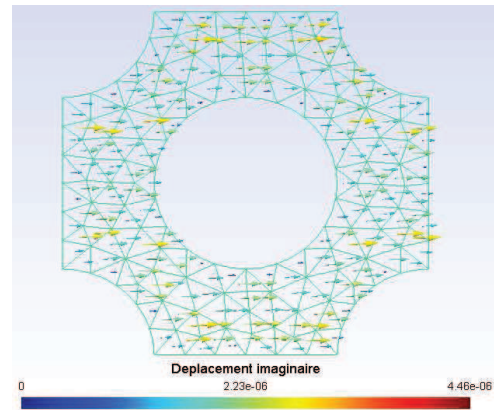


Figure 4 : Déplacement relatif imaginaire

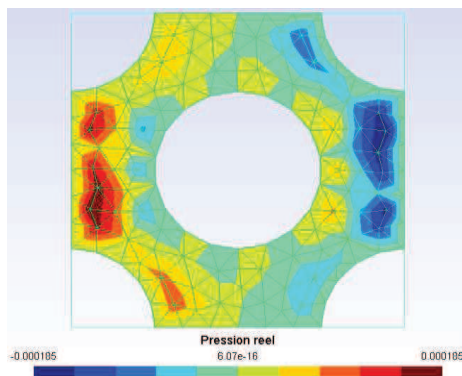


Figure 5 : Pression réel

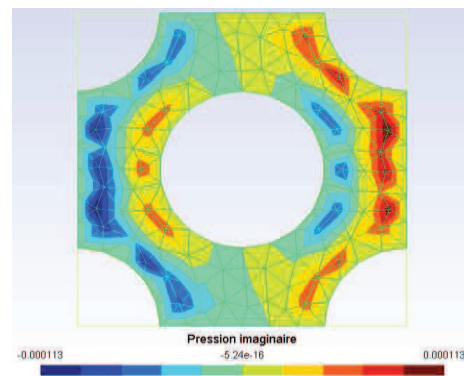


Figure 6 : Pression imaginaire

A partir de la définition de quantités moyennes sur le volume Ω , on obtient la perméabilité effective :

$$\langle k \rangle = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} k d\Omega \quad (21)$$

On observe sur la **Figure 7 et 8** que le déplacement relatif décroît en fonction de la fréquence. Même remarque concernant la perméabilité effective (**Figures 9 et 10**).

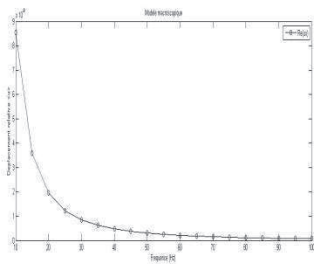


Figure 7 : Partie réel du déplacement relatif

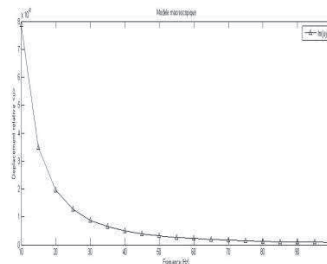


Figure 8 : Partie imaginaire du déplacement relatif

D'après la relation (7a), on a :

$$i\omega \eta_f u^0 = -k (\nabla p - \rho_f \omega^2 u_s^0)$$

Par prise de moyenne, on obtient le déplacement macroscopique $\langle u \rangle$:

$$i\omega \eta_f \langle u^0 \rangle = -\phi \langle k \rangle (\nabla p - \rho_f \omega^2 u_s^0) \quad (18)$$

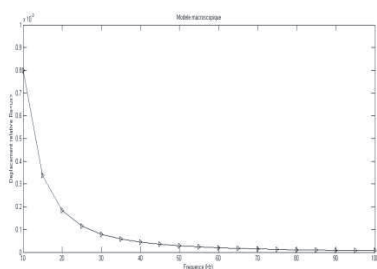


Figure 9 : Perméabilité effective réel

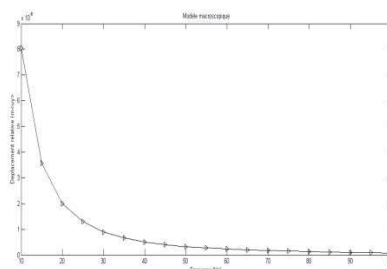
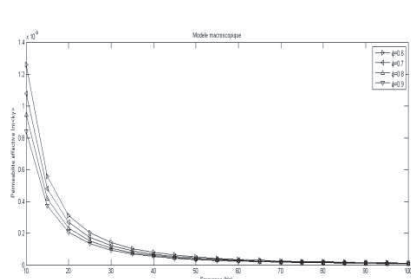
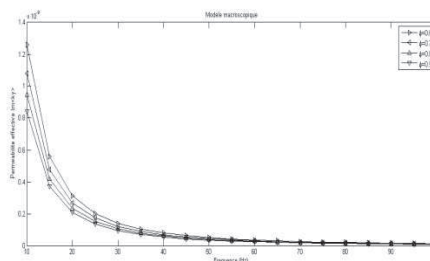


Figure 10 : Perméabilité effective imaginaire

Les **Figures 11 et 12** montrent le rôle de la porosité dans la propagation du son dans un milieu poreux. En effet lorsque la porosité augmente l'onde acoustique circule mieux.



a) Partie réel de la perméabilité effective



b) Partie imaginaire de la perméabilité effective

Figure 11 : Perméabilité effective pour différentes valeurs de la porosité

3-2. Équation solide

Le maillage dans lequel les équations correspondant à la partie solide sont représentées par la **Figure 12**.

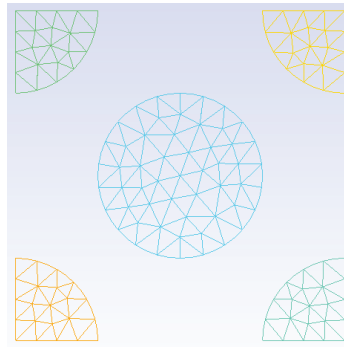


Figure 12 : Maillage de la partie solide

Deux cas sont à prendre :

1^{er} cas : Le déplacement solide κ_k est induit par la pression ($p^0 = 1$)

Le problème variationnel donnant κ s'écrit alors : $\int_{\Omega_s} (\lambda^* \nabla_y \cdot \kappa + 2\mu^* \varepsilon_y(\kappa)) \nabla_y \bar{w} d\Omega = \int_{\Omega_s} \nabla_y \bar{w} d\Omega$

Les **Figures 13 et 14** montrent que le déplacement de déroule en majorité dans un sens. Le champ de déformation (correction par rapport au gradient moyen) est montré pour une compression selon la direction e_z .

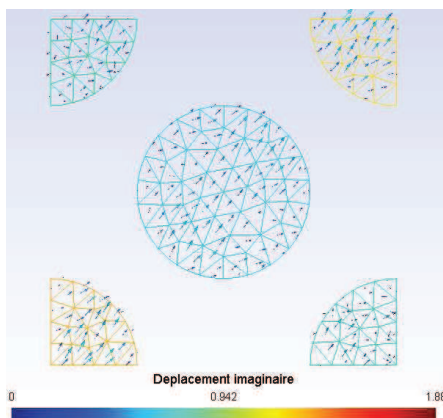


Figure 13 : Déplacement solide κ imaginaire

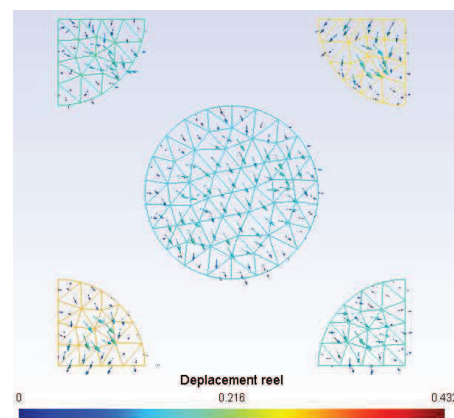
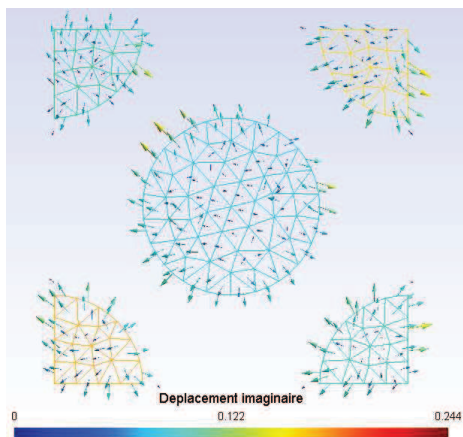
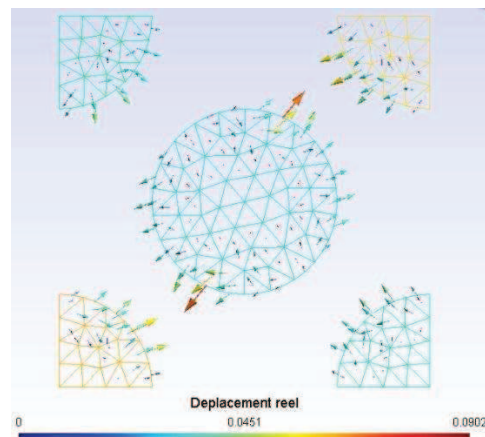


Figure 14 : Déplacement solide κ réel

2^e cas : Le déplacement solide ζ_{kl} est induit par la déformation macroscopique ($\lambda^* \nabla_x \cdot u_s^0 Id + 2\mu^* \varepsilon_x(u_s^0) \neq 0$). Le problème variationnel donnant ζ s'écrit alors :

$$\int_{\Omega_s} [\lambda^* \nabla_y \cdot \zeta + 2\mu^* \varepsilon_y(\zeta)] \varepsilon_x(u_s^0) \nabla_y \bar{w} d\Omega = - \int_{\Omega_s} [\lambda^* \nabla_x \cdot u_s^0 Id + 2\mu^* \varepsilon_x(u_s^0)] \nabla_y \bar{w} d\Omega$$

On observe que le déplacement solide réel est la même que dans le premier cas (**Figure 15**). Tandis que la partie imaginaire se fait par une traction et qui est maximum sur la surface (**Figure 16**).

Figure 15 : Déplacement solide ζ imaginaireFigure 16 : Déplacement solide ζ réel

3-3. Modèle macroscopique

Le modèle macroscopique est le milieu équivalent au milieu poreux saturé, vu précédemment. Le problème variationnel donnant u_s^0 et p^0 s'écrit alors :

$$\langle \rho \rangle \omega^2 \int_{\Omega} u_s^0 \bar{w} d\Omega + \rho_f \omega^2 \int_{\Omega} \langle u^0 \rangle \bar{w} d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla_x \cdot \langle \tilde{\sigma}_s^0 \rangle \bar{w} d\Omega + \int_{\Omega} \nabla_x \cdot \alpha p^0 \bar{w} d\Omega$$

Le maillage dans lequel *l'Équation* correspondant au modèle macroscopique est représentée par la **Figure 17**. Le domaine de calcul correspondant est un carré de côté $C = 4 \cdot 10^{-2} m$ et la porosité de cette géométrie vaut $\phi = 0.3$. Le pas du maillage vaut $h = 0.2$.

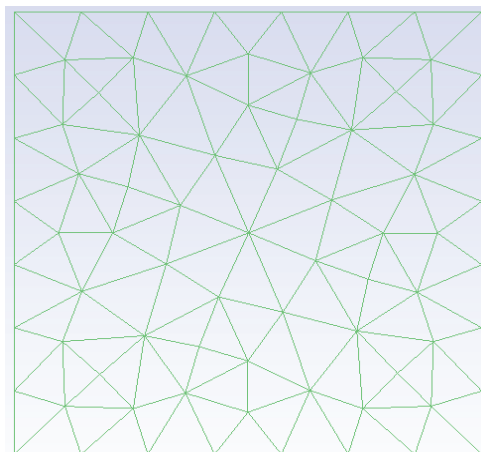


Figure 17 : Maillage du domaine macroscopique

L'écoulement se fait selon la direction $\overrightarrow{e_x}$, c'est-à-dire de gauche à droite dans le cadre de la **Figure 18 et 19**, et on impose des conditions de périodicité entre les bords gauche et droit du domaine. On observe une légère augmentation du déplacement au milieu du carré.

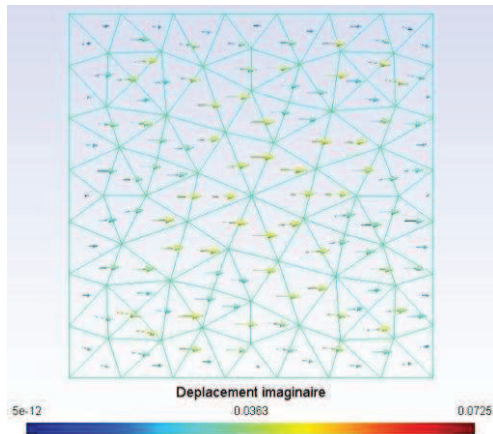


Figure 18 : Déplacement solide u_s^0 réel

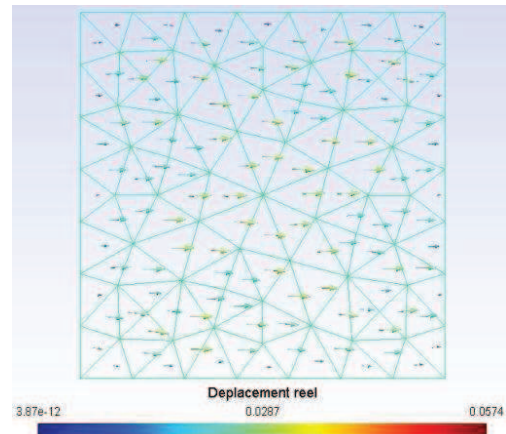


Figure 19 : Déplacement solide u_s^0 imaginaire

Sur la **Figure 21**, la pression imaginaire débute avec une faible valeur. Après elle augmente progressivement. Et il y a l'événement contraire pour la pression réelle (**Figure 20**).

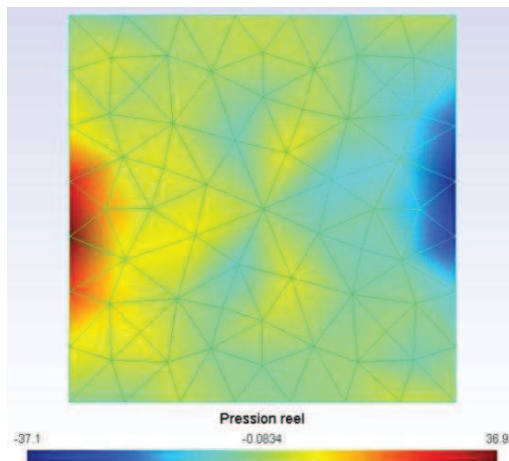


Figure 20 : Pression réel

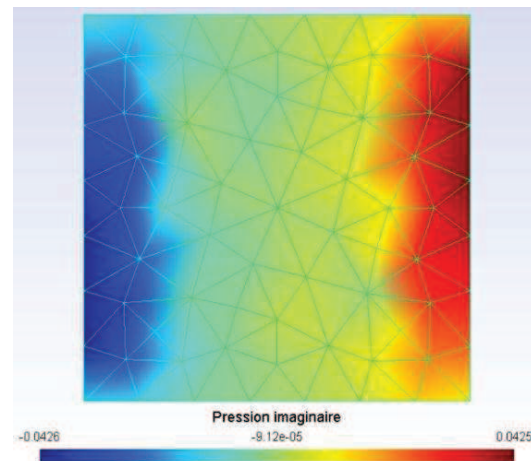
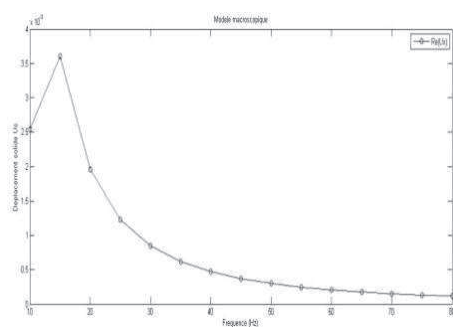
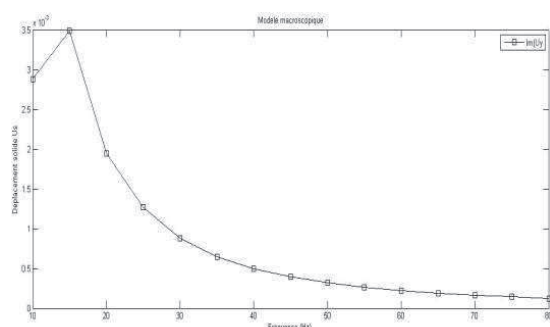


Figure 21 : Pression imaginaire

La **Figure 22** montre que le déplacement solide u_s^0 diminue lorsque la fréquence augmente. On observe une légère augmentation du déplacement pour une fréquence égale à 20 Hz cela est dû au squelette qui est déformable.



a) Déplacement solide réel



b) Déplacement solide imaginaire

Figure 22 : Déplacement solide u_s^0 en fonction de la fréquence

4. Conclusion

Dans cet article nous avons étudié la modélisation et simulation numérique de la propagation du son dans un milieu poreux flexible saturé par un fluide incompressible. La déformation dans le milieu solide est décrite par la loi de Hooke linéaire avec prise en compte de l'amortissement structural du squelette. La méthode d'homogénéisation de structure périodique appliquée aux équations fluide-structure à l'échelle microscopique a permis de déduire le comportement effectif équivalent à l'échelle macroscopique. On a confronté le modèle que nous avons obtenu avec le modèle de Biot-Allard actuellement utilisé par les physiciens et industriels pour étudier les problèmes couplés fluide-structure. Ce modèle de Biot-Allard a été établi de manière empirique et est très satisfaisant dans le cas des basses fréquences et des hautes fréquences. La simulation numérique a été faite par la méthode des éléments finis de référence par l'algorithme d'Uzawa. Il est faisable ultérieurement d'augmenter la complexité de cette étude en prenant une géométrie à double porosité.

Références

- [1] - DENIS LAFARGE, Propagation du son dans les matériaux poreux à structure rigide saturés par un fluide visco-thermique : (définition de paramètres géométriques analogie électromagnétiques temps de relaxation), (1993)
- [2] - SYLVAIN BERGER, Contribution à la caractérisation du milieu poreux par des methods acoustiques : estimations des paramètres physiques, (2004)
- [3] - NAVID NEMATI, Macroscopic theory of sound propagation in rigid-framed porous materials allowing for spatial dispersion : Principle and validation, (2012)
- [4] - STEPHANE GASSER, Etude des propriétés acoustiques et mécanique d'un matériau métallique poreux. Modèle à base de sphère creuse de nickel, (2003)
- [5] - AMELIE RENAULT, Caractérisation mécanique dynamique de matériaux poro-visco-élastique, (2008)
- [6] - OLIVIER DOUTRES, Caractérisation mécanique de matériaux fibreux en vibro-acoustique, (2007)
- [7] - MINH TAN HOANG, Modélisation et Simulation Multi-Echelle et Multi-Physique du Comportement Acoustique de Milieux Poro-Elastiques : Application aux Mousses de Faible Densité, (2012)
- [8] - CHARLES PEYREGA, DOMINIQUE JEULINA, Estimation of acoustic properties and of the representative volume element of random fibrous media, (2013)
- [9] - A. BENSOUSSAN, J. L. LIONS, G. PAPANICOLAOU, Asymptotic Analysis for periodic structures, (1978)
- [10] - I. MALINOUSKAYA, « Propriétés acoustiques des milieux poreux secs et saturés », (2007)
- [11] - NAVID NEMATI, ANSHUMAN KUMAR, DENIS LAFARGE, NICHOLAS X. FANG, « Non local description of sound propagation through an array of Helmholtz resonators », (2015)
- [12] - RUSTEM R. GADYL'SHIN, « On scattering frequencies in homogenization problems. Critical cases », C. R. Mecanique, 344 (2016) 181 - 189
- [13] - GILLES A. FRANCFORT, Antoine Gloria, « Isotropy prohibits the loss of strong ellipticity through homogenization in linear elasticity », C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 354 (2016) 1139 - 1144
- [14] - MOJTABA IZADMEHR, MAHDI ABBASI, MEHRSHAD MANSOURI, ALIREZA KAZEMI, ALI NAKHAEI, AMIN DARYASAFAR, « Accurate analytical model for determination of effective diffusion coefficient of polymer electrolyte fuel cells by designing compact Loschmidt cells », Fuel, 199 (2017) 551 - 561
- [15] - EDUARD ROHAN, SALAH NAILI, VU-HIEU NGUYEN, « Wave propagation in a strongly heterogeneous elastic porous medium : Homogenization of Biot medium with double porosities », C. R. Mecanique, 344 (2016) 569 - 581

Simulation de l'infiltration des eaux usées à travers une microstructure saturée

Aro Pascal RATSIMBAZAFY^{1*}, José Marie Michel ANDRIAMAMPIANINA²,
Adolphe Andriamanga RATIARISON¹ et Alain Jean de Dieu RAVOLANIRINA¹

¹ Université d'Antananarivo, Faculté des Sciences, Laboratoire de Dynamique de l'Atmosphère du
Climat et des Océans, Madagascar

² Institut Supérieur de Technologie d'Antananarivo, Madagascar

* Correspondance, courriel : ratsimbazafy.aro@gmail.com

Résumé

Ce travail consiste à étudier l'infiltration de l'eau usée à travers une microstructure saturée. Ce concept nécessite l'utilisation de la méthode d'homogénéisation de structure périodique sur les équations de Navier-Stokes correspondant à l'échelle microscopique, pour déterminer la propriété effective du milieu équivalent à l'échelle macroscopique. Après l'obtention d'un modèle numérique, des simulations sont faites avec des vitesses initiales différentes, afin de voir son impact sur l'écoulement.

Mots-clés : *infiltration, milieu poreux, développement asymptotique, élément fini.*

Abstract

Simulation of wastewater infiltration through a saturated microstructure

This work consists studying the infiltration of waste water through a saturated microstructure. This concept requires the use of the method of homogenization of the periodic structure on the Navier-Stokes equations corresponding to the microscopic scale, to determine the effective property of the equivalent structure on a macroscopic scale. After obtaining a numerical model, simulations are made with different initial speeds, in order to see its impact on the flow.

Keywords : *infiltration, porous medium, asymptotic development, finite element.*

Nomenclature

ϕ	: Porosité
$\delta_{\alpha\beta}$	: Symbole de Kronecker
v	: Vitesse à l'échelle microscopique en $[m.s^{-1}]$
$\mathbf{v}$	: Vitesse à l'échelle macroscopique en $[m.s^{-1}]$
p	: Pression en $[N.m^{-2}]$
ρ	: Masse volumique en $[kg.m^{-3}]$

t	: Temps en [s]
μ	: Viscosité dynamique de l'eau en [kg.m ⁻¹ .s ⁻¹]
Ω_f	: Domaine fluide
Γ	: Interface solide-fluide
ε	: Séparateur d'échelle (microscopique et macroscopique)
x	: Variable macroscopique
y	: Variable microscopique
$\underline{\underline{K}}$	: Tenseur de conductivité hydraulique du milieu poreux
ψ	: Fonction test
φ	: Fonction test
g	: intensité de la pesanteur en [m.s ⁻²]

1. Introduction

L'observation à l'échelle microscopique permet de qualifier les objets comme étant un milieu poreux. Cette existence de pores permet aux eaux usées avoisinant de s'y infiltrer. Plusieurs recherches [1 - 5] sont focalisées sur l'étude de ces eaux à travers divers milieux. En se référant à l'échelle microscopique, il est possible d'apercevoir les hétérogénéités présentes et de considérer ces conduits comme étant un milieu poreux, périodique et rigide. En partant de cette échelle, la méthode d'homogénéisation de structure périodique permet d'obtenir les propriétés effectives correspondantes à l'échelle macroscopique. L'utilisation de cette méthode a débuté en 1978 [6, 7] et ne cesse d'être employée dans l'étude de divers structures et domaines [8 - 12]. Dans ce travail, elle est appliquée aux équations de Navier-Stokes. Ces équations sont ensuite résolues numériquement en utilisant l'algorithme d'Uzawa et par le logiciel MATLAB. Le logiciel GMSH a servi au maillage du volume élémentaire représentatif, puis à l'affichage de certaines figures obtenues lors de la résolution numérique. Les objectifs de ce travail sont : mettre en évidence l'impact de la variation de la vitesse initiale sur l'écoulement, montrer l'évolution de la vitesse suivant le changement du gradient de pression, ainsi que de déterminer la propriété effective du milieu équivalent à l'échelle macroscopique.

2. Méthodologie

2-1. Équations à considérer

L'écoulement d'un fluide incompressible à travers un milieu poreux rigide et saturé répond aux **Équations** de Navier-Stokes pour un écoulement très lent. Il correspond à un système **d'Équations** constitué par la conservation de la quantité de mouvement donnée par **l'Équation (i) de (1)**, puis du bilan de masse énoncé par **l'Équation (2)**. Après normalisation, il vient :

$$\begin{cases}
 \rho \frac{\partial}{\partial t}(v) = -\nabla p \delta_{\alpha\beta} + \mu \varepsilon^2 \Delta v & \text{sur } \Omega_f & (i) \\
 \nabla \cdot v = 0 & \text{sur } \Omega_f & (ii) \\
 v = 0 & \text{sur } \Gamma & (iii)
 \end{cases} \quad (1)$$

2-2. Homogénéisation des équations

Il existe d'autres méthodes d'homogénéisations [13]. Celle correspondant à une structure finement périodique repose sur la technique des développements asymptotiques, faisant une séparation d'échelles : microscopique et macroscopique en considérant le changement d'échelle $\left(y = \frac{x}{\varepsilon}\right)$. L'application des développements asymptotiques sur les **Équations de (1)** donne :

$$\begin{cases} (\rho^0 + \varepsilon \rho^1) \frac{\partial}{\partial t} (v^0 + \varepsilon^1 v^1) = - \left(\nabla_x + \frac{1}{\varepsilon} \nabla_y \right) (p^0 + \varepsilon p^1) + \\ \varepsilon^2 \left[\mu \left(\Delta_x + \frac{2}{\varepsilon} \Delta_{xy} + \frac{1}{\varepsilon^2} \Delta_y \right) (v^0 + \varepsilon v^1) \right] \quad (i) \\ \left(\nabla_x + \frac{1}{\varepsilon} \nabla_y \right) \cdot (v^0 + \varepsilon v^1 + \dots) = 0 \quad (ii) \\ v^0 + \varepsilon v^1 + \varepsilon^2 v^2 + \dots = 0 \quad (iii) \end{cases} \quad (2)$$

La viscosité dynamique μ n'est pas affectée par le développement asymptotique car il s'agit d'une constante. Le regroupement des termes des **Équations (i-iii) de (2)** portant le même ordre de ε conduit :

- A l'ordre ε^{-1} :

$$\begin{cases} \nabla_y p^0 = 0 \quad (i) \\ \nabla_y \cdot v^0 = 0 \quad (ii) \end{cases} \quad (3)$$

- A l'ordre ε^0 :

$$\begin{cases} \rho^0 \frac{\partial}{\partial t} (v^0) = - \nabla_y p^1 - \nabla_x p^0 + \mu \Delta_y v^0 \quad (i) \\ \nabla_x \cdot v^0 + \nabla_y \cdot v^1 = 0 \quad (ii) \\ v^0 = 0 \quad (iii) \end{cases} \quad (4)$$

2-3. Problème de cellule

A l'ordre ε^{-1} , **l'Équation (i) de (3)** permet d'affirmer que la pression initiale ne dépend que de x , c'est-à-dire de l'échelle macroscopique.

$$p^0(x, y) = p^0(x) \quad (5)$$

A l'ordre ε^0 , **l'Équation (i) de (4)** montre que la vitesse initiale, ainsi que la pression sont tous deux fonctions du temps et ne dépendent que de l'échelle macroscopique. C'est-à-dire :

$$\begin{cases} v^0 = v^0(x, t) \quad (i) \\ p^1 = p^1(x, t) \quad (ii) \end{cases} \quad (6)$$

Par linéarité, l'Équation (i) de (4) permet d'écrire :

$$\begin{cases} v^0 = -\frac{k(y,t)}{\mu} \nabla_x p^0 & (i) \\ p^1 = -\pi(y,t) \nabla_x p^0 + p^1(x) & (ii) \end{cases} \quad (7)$$

Comme le gradient d'un scalaire donne un vecteur, il est possible d'écrire :

$$-\nabla_x p^0 = \delta_{ij} e_j \quad (8)$$

Le tenseur k_{ij} et le vecteur $\pi(x, y)$ sont des solutions du problème de cellule dans les Équations (i-iii) de (9) :

$$\begin{cases} \frac{\rho^0}{\mu} \frac{\partial k}{\partial t} + \Delta_y k - \nabla_y \pi = -I & (i) \\ \nabla \cdot k = 0 & (ii) \\ k = 0 & (iii) \end{cases} \quad (9)$$

2-4. Formulation variationnelle

En appliquant la formulation variationnelle aux Équations (i-iii) de (4), il vient :

$$\begin{cases} \frac{\rho^0}{\mu} \int_{\Omega} v_{n+1}^0 \psi \, d\Omega + \Delta t \int_{\Omega} \nabla_y v_{n+1}^0 \nabla_y \psi \, d\Omega - \Delta t \int_{\Omega} p^1 \nabla_y \cdot \psi \, d\Omega = \int_{\Omega} \psi \, d\Omega + \frac{\rho^0}{\mu} \int_{\Omega} v_n^0 \psi \, d\Omega & (i) \\ \int_{\Omega} v_{n+1}^0 \nabla_y \psi \, d\Omega = 0 & (ii) \\ v = 0 \quad \text{sur } \Gamma & (iii) \end{cases} \quad (10)$$

2-5. Écriture matricielle

Dans une étude en deux dimensions (2D), les Équations (i-iii) de (10) s'écrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

avec,

$$\begin{cases} A_{ij} = \left(\Delta t \int_{\Omega_f} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j \, d\Omega \right)_{1 \leq i, j \leq 3} + \frac{\rho^0}{\mu} \left(\int_{\Omega_f} \varphi_i \cdot \varphi_j \, d\Omega \right)_{1 \leq i, j \leq 3} & (i) \\ B_{ij} = \int_{\Omega} \psi_i \nabla_y \cdot \varphi_j \, d\Omega & (ii) \end{cases} \quad (12)$$

Dans cette écriture matricielle, A est la constituée de la somme de la matrice de rigidité et de la matrice de masse. Et B est la matrice divergence.