

Cycles limites de quelques classes d'équations de Liénard perturbées

4.1 Introduction

Les équations différentielles du deuxième ordre surviennent dans de nombreux domaines de la science et de la technologie. Le problème est plus pertinent dans la théorie de la perturbation où les orbites périodiques jouent un rôle principal [23, 25, 48, 33].

Il est bien connu que toutes les solutions de l'oscillateur harmonique sont périodiques de même période, c'est-à-dire l'origine de ce système est un centre isochrone. Quand nous perturbons un oscillateur harmonique, nous pouvons se poser les questions suivantes : Quelle sont les orbites périodiques qui persistent ? Quelle sont orbites périodiques qui génèrent des cycles limites ?

Dans ce chapitre, nous répondons à ces questions pour une large classe d'équations de Liénard.

L'équation de Liénard

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = e(t)$$

n'est pas seulement considérée comme une généralisation de l'équation du pendule amorti ou un système de sying-masse amorti (où $f(x)\dot{x}$ est la force d'amortissement, $g(x)$ est la force de rappel et $e(t)$ est la force externe), mais aussi servi comme un modèle non linéaire dans de nombreux domaines de

recherche scientifiques lors de la prise de différent choix pour $f(x)$, $g(x)$ et $e(t)$. Par exemple pour le choix $f(x) = \varepsilon(x^2 - 1)$, $g(x) = x$ et $e(t) = 0$, on aura l'équation de Van der Pol qui servi de modèle non linéaire pour les oscillations électroniques [52].

Le problème général du nombre et de disposition des cycles limites dans les systèmes de Liénard sont l'objectif principal de nombreuses recherches.

Nous étudions les cycles limites de quelques classes d'équations de Liénard perturbées de la forme

$$\ddot{x} + x = \varepsilon F(t, x, \dot{x}), \quad (4.1)$$

où ε un paramètre petit et $F(t, x, \dot{x}) \in C^2$ est 2π -périodique en t .

Ces équations peuvent considérées comme une perturbation particulière de l'oscillateur harmonique. Nous appliquons le théorème de la moyennisation du second ordre afin d'étudier les cycles limites de cette classe d'équation différentielle ordinaire. Nous illustrons cette étude par de nombreuses applications.

L'équation différentielle linéaire du second ordre $\ddot{x} + x = 0$ fournit un système linéaire dans $\mathbb{R}^2$ qui a un centre. Le théorème 2.4.1 du chapitre 2 réduit l'étude des cycles limites de l'équation différentielle du second ordre (4.1) qui bifurquent des orbites périodiques de ce centre à trouver les racines non dégénérées du système algébrique de deux équations à deux inconnus. En général, le problème de trouver les racines de deux équations algébriques à deux inconnus n'est pas facile, mais il est plus facile que de chercher directement les orbites périodiques d'une équation différentielle.

4.2 Résultat principal

Dans cette section, nous établissons notre résultat principal pour l'étude des cycles limites de l'équation (4.1). Elle est organisée comme suite : nous présentons l'existence des orbites périodiques des centres isochrones perturbés. Nous donnons quatre corollaires avec huit applications de ces corollaires et les preuves de ces résultats.

Nos résultats sont les suivants :

Théorème 4.2.1 *On considère l'équation différentielle (4.1) où $F(t + 2\pi, x, \dot{x}) =$*

$F(t, x, \dot{x})$ et ε un paramètre petit. Soient

$$\begin{aligned} f_1(x_0, y_0) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin t F(t, x_0 \cos t + y_0 \sin t, -x_0 \sin t + y_0 \cos t) dt \\ f_2(x_0, y_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos t F(t, x_0 \cos t + y_0 \sin t, -x_0 \sin t + y_0 \cos t) dt \end{aligned}$$

pour tout (x_0^*, y_0^*) racines du système algébriques

$$f_1(x_0, y_0) = 0, \quad f_2(x_0, y_0) = 0 \quad (4.3)$$

verifiant

$$\det \left(\frac{\partial (f_1, f_2)}{\partial (x, y)} \right)_{(x_0, y_0) = (x_0^*, y_0^*)} \neq 0, \quad (4.4)$$

l'équation différentielle (4.1) a une solution périodique $x(t, \varepsilon)$ qui tend vers la solution

$$x(t) = x_0^* \cos t + y_0^* \sin t \quad (4.5)$$

de l'équation différentielle $\ddot{x} + x = 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Corollaire 4.2.1 On considère l'équation de Liénard

$$\ddot{x} + x + \varepsilon f(x) \dot{x} = \varepsilon G(t, x, \dot{x}), \quad (4.6)$$

où $G(t + 2\pi, x, \dot{x}) = G(t, x, \dot{x})$ et ε un paramètre petit. Soient

$$\begin{aligned} f_1(x_0, y_0) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin t (G(t, x_0 \cos t + y_0 \sin t, -x_0 \sin t + y_0 \cos t) \\ &\quad - f(x_0 \cos t + y_0 \sin t) (-x_0 \sin t + y_0 \cos t)) dt, \\ f_2(x_0, y_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos t (G(t, x_0 \cos t + y_0 \sin t, -x_0 \sin t + y_0 \cos t) \\ &\quad - f(x_0 \cos t + y_0 \sin t) (-x_0 \sin t + y_0 \cos t)) dt. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Pour toute (x_0^*, y_0^*) racines du système algébrique (4.3) satisfaisant (4.4), l'équation différentielle (4.6) a une solution périodique $x(t, \varepsilon)$ qui tend vers la solution (4.5) de l'équation différentielle $\ddot{x} + x = 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Corollaire 4.2.2 *On considère l'équation de Van der Pol forcée*

$$\ddot{x} + x + \varepsilon (x^2 - 1) \dot{x} = \varepsilon G(t, x, \dot{x}), \quad (4.8)$$

où $G(t + 2\pi, x, \dot{x}) = G(t, x, \dot{x})$ et ε un paramètre petit. Soient

$$\begin{aligned} f_1(x_0, y_0) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin t (G(t, x_0 \cos t + y_0 \sin t, -x_0 \sin t + y_0 \cos t) \\ &\quad - \frac{1}{8} x_0 (x_0^2 + y_0^2 - 4)) dt, \\ f_2(x_0, y_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos t (G(t, x_0 \cos t + y_0 \sin t, -x_0 \sin t + y_0 \cos t) \\ &\quad - \frac{1}{8} y_0 (x_0^2 + y_0^2 - 4)) dt. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Pour toute (x_0^*, y_0^*) racine du système algébrique (4.3) satisfaisant (4.4), l'équation différentielle (4.8) a une solution périodique $x(t, \varepsilon)$ qui tend vers la solution (4.5) de l'équation différentielle $\ddot{x} + x = 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Corollaire 4.2.3 *On considère l'équation de Liénard*

$$\ddot{x} + x + \varepsilon f(\dot{x}) = \varepsilon G(t, x, \dot{x}), \quad (4.10)$$

où $G(t + 2\pi, x, \dot{x}) = G(t, x, \dot{x})$ et ε un paramètre petit. Soient

$$\begin{aligned} f_1(x_0, y_0) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin t (G(t, x_0 \cos t + y_0 \sin t, -x_0 \sin t + y_0 \cos t) \\ &\quad - f(-x_0 \sin t + y_0 \cos t)) dt, \\ f_2(x_0, y_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos t (G(t, x_0 \cos t + y_0 \sin t, -x_0 \sin t + y_0 \cos t) \\ &\quad - f(-x_0 \sin t + y_0 \cos t)) dt. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Pour toute (x_0^*, y_0^*) racine du système algébrique (4.3) satisfaisant (4.4), l'équation différentielle (4.10) a une solution périodique $x(t, \varepsilon)$ qui tend vers la solution (4.5) de l'équation différentielle $\ddot{x} + x = 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Corollaire 4.2.4 *On considère l'équation de Liénard*

$$\ddot{x} + x + \varepsilon f(\dot{x}) = \varepsilon p(t), \quad (4.12)$$

où $p(t + 2\pi) = p(t)$ et ε un paramètre petit. Soit

$$\begin{aligned} f_1(x_0, y_0) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin t [p(t) - f(-x_0 \sin t + y_0 \cos t)] dt, \\ f_2(x_0, y_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos t [p(t) - f(-x_0 \sin t + y_0 \cos t)] dt. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Pour toute (x_0^*, y_0^*) racine du système algébrique (4.3) satisfaisant (4.4), l'équation différentielle (4.12) a une solution périodique $x(t, \varepsilon)$ qui tend vers la solution (4.5) de l'équation différentielle $\ddot{x} + x = 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Dans ce qui suit on donne deux exemples du théorème 4.2.1, deux exemples de corollaire 4.2.1, deux exemples de corollaire 4.2.2 avec un cas général, un exemple de corollaire 4.2.3 et un exemple de corollaire 4.2.4.

exemple 4.2.1 Si a_0 et a_2 vérifient $a_0 a_2 < 0$, alors l'équation de Liénard

$$\ddot{x} + x = \varepsilon (a_0 + a_1 x + a_2 x^2) \sin t$$

a deux solutions périodiques $x_k(t, \varepsilon)$, $k = 1, 2$ tendent respectivement vers les solutions périodiques

$$x_1(t) = 2\sqrt{-\frac{a_0}{a_2}} \cos t, \quad x_2(t) = 2\sqrt{-\frac{1}{3} \frac{a_0}{a_2}} \sin t$$

de l'équation différentielle $\ddot{x} + x = 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

exemple 4.2.2 Soit l'équation de Liénard ([34] page 235)

$$\ddot{x} + x = \varepsilon \sin \dot{x}.$$

Cette équation différentielle a une infinité de solutions périodiques $x(t, \varepsilon)$ tendent vers les solutions périodiques

$$x_k(t) = r_k \cos t$$

de l'équation différentielle $\ddot{x} + x = 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$, où r_k , $k = 1, 2, \dots$ sont les racines de l'équation de Bessel $J_1(r)$.

exemple 4.2.3 Soit l'équation de Liénard ([28] page 181)

$$\ddot{x} + x + \varepsilon x \dot{x} = \varepsilon [\gamma \cos t - \beta x],$$

avec $\gamma \neq 0$ et $\beta \neq 0$. cette équation différentielle a une solution périodique $x(t, \varepsilon)$ qui tend vers la solution périodique

$$x(t) = \frac{\gamma}{\beta} \cos t,$$

de l'équation différentielle $\ddot{x} + x = 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

exemple 4.2.4 L'équation de Liénard ([62] page 153)

$$\ddot{x} + x + \varepsilon (e^x - 2) \dot{x} = 0,$$

a une solution périodique $x(t, \varepsilon)$ qui tend vers la solution périodique

$$x(t) = 2.486837646 \cos t,$$

de l'équation différentielle $\ddot{x} + x = 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

exemple 4.2.5 L'équation de Liénard

$$\ddot{x} + x + \varepsilon (x^2 - 1) \dot{x} = \varepsilon (x^2 - 1) \sin t,$$

a deux solutions périodiques $x_k(t, \varepsilon)$, $k = 1, 2$ qui tendent vers les solutions périodiques

$$x_1(t) = -\cos t, \quad x_2(t) = 2 \cos t,$$

de l'équation différentielle $\ddot{x} + x = 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

exemple 4.2.6 Si $(16a_0^3 + 27a_2)a_2 \geq 0$ et $a_2 \neq 0$, alors l'équation de Liénard

$$\ddot{x} + x + \varepsilon (a_2 x^2 + a_0) \dot{x} = \varepsilon \cos t,$$

a une solution périodique $x(t, \varepsilon)$ qui tend vers la solution périodique

$$x(t) = -\frac{1}{3} \frac{6^{\frac{1}{3}} \left[2a_2 a_0 6^{\frac{1}{3}} - (\mu a_2^2)^{\frac{2}{3}} \right]}{a_2 (\mu a_2^2)^{\frac{1}{3}}} \sin t,$$

de l'équation différentielle $\ddot{x} + x = 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$, où $\mu = 9 + \sqrt{3} \sqrt{\frac{16a_0^3 + 27a_2}{a_2}}$.

Remarque 4.2.1 Dans le cas $a_0 = -1$ et $a_2 = 1$, on trouve que l'équation de Van der Pol perturbée a une solution périodique

$$x(t) = -2.382975767 \sin t.$$

exemple 4.2.7 L'équation de Liénard

$$\ddot{x} + x + \varepsilon (\dot{x}^3 - \dot{x}) = \varepsilon (1 - \dot{x}^2) \sin t,$$

a deux solutions périodiques $x_k(t, \varepsilon)$, $k = 1, 2$ qui tendent vers les solutions périodiques

$$x_1(t) = \cos t, \quad x_2(t) = \frac{2}{3}\sqrt{3} \cos t,$$

de l'équation différentielle $\ddot{x} + x = 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

exemple 4.2.8 L'équation de Liénard

$$\ddot{x} + x + \varepsilon (\dot{x}^2 - \dot{x}) = \varepsilon \cos t,$$

a une solution périodique $x(t, \varepsilon)$ qui tend vers la solution périodique

$$x_1(t) = -\sin t,$$

de l'équation différentielle $\ddot{x} + x = 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Dans ce qui suit nous allons démontrer les résultats obtenus en utilisant le corollaire 2.4.1 du chapitre 2.

Preuve du Théorème 4.2.1

En introduisant les variables $(x, y) = (x, \dot{x})$, l'équation différentielle (4.1) devient

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + \varepsilon F(t, x, y). \quad (4.14)$$

Elle est définie sur un sous ensemble ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$. Le système $(4.14)_{\varepsilon=0}$ est dit système non perturbé, le système (4.14) est un système perturbé qui possède un seul point d'équilibre à l'origine. La partie linéaire du système $(4.14)_{\varepsilon=0}$ à l'origine est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

où la solution périodique de système $(4.14)_{\varepsilon=0}$ est

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \cos t + y_0 \sin t \\ -x_0 \sin t + y_0 \cos t \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

Avec la notations introduites dans le théorème 2.4.1, le système (4.14) est similaire au système (2.12) avec

Preuve.

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, F_0(t, X) = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}, F_1(t, X) = \begin{pmatrix} 0 \\ F(t, X) \end{pmatrix}.$$

Obtenir les solutions périodiques de (4.14) se réduit à déterminer les racines du système $F(z) = 0$, où $F(z)$ est donnée par (2.15). La matrice fondamentale $M(t)$ du système différentiel $(4.14)_{\varepsilon=0}$ le long de toute solution périodique est

$$M(t) = M_z(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

La matrice inverse de $M(t)$

$$M^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

Toutes les conditions du théorème 2.4.1 sont satisfaites. Il reste à déterminer les racines du système algébrique $F(z) = (f_1(x_0, y_0), f_2(x_0, y_0)) = 0$ dans V où

$$f_1(x_0, y_0) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin t F(t, x(t), y(t)) dt, \quad f_2(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos t F(t, x(t), y(t)) dt \quad (4.16)$$

avec $x(t)$ et $y(t)$ sont données par (4.15).

S'il existe $(x_0^*, y_0^*) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$f_1(x_0^*, y_0^*) = f_2(x_0^*, y_0^*) = 0 \text{ et } \det \left(\frac{\partial (f_1, f_2)}{\partial (x_0, y_0)} \right)_{(x_0, y_0) = (x_0^*, y_0^*)} \neq 0,$$

alors pour $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ avec ε_0 petit, il existe une solution 2π -périodique $x(t, \varepsilon)$ de (4.1) telle que $x(t, \varepsilon)$ tend vers la solution $x(t)$ de (4.5). ■

4.4 Preuve des corollaires

L'équation (4.6) du corollaire 4.2.1 correspond le cas où $F(t, x, \dot{x}) = G(t, x, \dot{x}) - f(x)\dot{x}$, et le système (4.1) devient

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + \varepsilon [G(t, x, \dot{x}) - f(x)\dot{x}]. \quad (4.17)$$

L'équation de Van der.Pol forcée (4.8) correspond le cas où $F(t, x, \dot{x}) = G(t, x, \dot{x}) - (x^2 - 1)\dot{x}$, et le système (4.1) devient

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + \varepsilon [G(t, x, \dot{x}) - (x^2 - 1)\dot{x}]. \quad (4.18)$$

L'équation (4.10) du corollaire 4.2.3 correspondante le cas où $F(t, x, \dot{x}) = G(t, x, \dot{x}) - f(\dot{x})$, et le système (4.1) devient

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + \varepsilon [G(t, x, y) - f(y)]. \quad (4.19)$$

L'équation (4.11) du corollaire 4.2.4 correspondante le cas où $F(t, x, \dot{x}) = p(t) - f(\dot{x})$, et le système (4.1) devient

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + \varepsilon [p(t) - f(y)]. \quad (4.20)$$

L'étude des cycles limites des systèmes différentielles (4.17), (4.18), (4.19) et (4.20) avec $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ avec ε_0 suffisamment petit qui bifurquent des orbites périodiques d'un centre réduit à trouver les racines non dégénérés du système algébrique de deux équations à deux inconnus donnée par (4.3), de plus si (4.4) est vérifiée, alors pour $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ avec ε_0 suffisamment petit, il existe une solution 2π -périodique $x(t, \varepsilon)$ des équation différentielles (4.6), (4.8), (4.10) et (4.11) respectivement tel que $x(t, \varepsilon)$ tend vers la solution $x(t)$ de (4.5).

4.5 Preuve des exemples

Preuve de l'exemple 4.2.1

Utilisant les notations introduites dans le théorème 4.2.1, l'équation de Liénard

$$\ddot{x} + x = \varepsilon (a_0 + a_1x + a_2x^2) \sin t$$

est similaire à (4.1) avec $F(t, x, \dot{x}) = (a_0 + a_1x + a_2x^2) \sin t$. Les fonctions f_1 et f_2 du théorème 1 dans ce cas sont données par

$$f_1 = -\frac{1}{2}a_0 - \frac{3}{8}a_2y_0^2 - \frac{1}{8}a_2x_0^2, \quad f_2 = \frac{1}{4}a_2x_0y_0.$$

Le système $f_1 = f_2 = 0$ a quatre solutions : $\left(0, 2\sqrt{-\frac{1}{3}\frac{a_0}{a_2}}\right)$, $\left(2\sqrt{-\frac{a_0}{a_2}}, 0\right)$, $\left(0, -2\sqrt{-\frac{1}{3}\frac{a_0}{a_2}}\right)$ et $\left(-2\sqrt{-\frac{a_0}{a_2}}, 0\right)$, de plus

$$\begin{aligned} \det \left(\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_0, y_0)} \right)_{(x_0, y_0) = \left(0, 2\sqrt{-\frac{1}{3}\frac{a_0}{a_2}}\right)} &= -\frac{1}{4}a_0a_2, \\ \det \left(\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_0, y_0)} \right)_{(x_0, y_0) = \left(2\sqrt{-\frac{a_0}{a_2}}, 0\right)} &= \frac{1}{4}a_0a_2, \\ \det \left(\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_0, y_0)} \right)_{(x_0, y_0) = \left(0, -2\sqrt{-\frac{1}{3}\frac{a_0}{a_2}}\right)} &= -\frac{1}{4}a_0a_2, \\ \det \left(\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_0, y_0)} \right)_{(x_0, y_0) = \left(-2\sqrt{-\frac{a_0}{a_2}}, 0\right)} &= \frac{1}{4}a_0a_2. \end{aligned}$$

Toutes les conditions du théorème 4.2.1 et le résultat suit immédiatement.

Preuve de l'exemple 4.2.2

L'équation de Liénard

$$\ddot{x} + x = \varepsilon \sin \dot{x}$$

est équivalente à (4.10) avec $f(\dot{x}) = \sin \dot{x}$, $G(t, x, \dot{x}) = 0$.

Ou encore

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + \varepsilon \sin y, \end{cases}$$

en coordonnée polaire $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, ce système devient

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon \cos \theta \sin(r \cos \theta), \\ \dot{\theta} = 1 - \varepsilon \frac{1}{r} \sin \theta \sin(r \cos \theta) \end{cases}$$

ce qui implique que

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon \cos \theta \sin(r \cos \theta) + 0(\varepsilon^2) \quad (4.21)$$

En appliquant le théorème 2.4.1 sachant que $F_0(\theta, r) = 0$, $F_1(\theta, r) = \cos \theta \sin(r \cos \theta)$, $(4.21)_{\varepsilon=0}$ a une solution $r(\theta) = r_0$, elle est constante et la matrice fondamentale est $M(\theta) = 1$.

Soit

$$f(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin(r \cos \theta) d\theta = J_1(r)$$

où $J_1(r)$ est la fonction de Bessel. Nous savons que $J_1(r)$ a exactement n racines dans $[0, (n+1)\pi]$.

Dans ce cas les solutions $x_k(t) = r_k \cos t$ pour $k = 1, 2, \dots$ où $J_1(r_k) = 0$. Finalement, cette équation a une infinité de solutions périodiques.

Preuve de l'exemple 4.2.3

L'équation de Liénard

$$\ddot{x} + x + \varepsilon x \dot{x} = \varepsilon (\gamma \cos t - \beta x)$$

est équivalente à (4.6) avec $G(t, x, \dot{x}) = \gamma \cos t - \beta x$, $f(x) = x$ avec $\gamma \neq 0$ et $\beta \neq 0$. Les fonctions f_1 et f_2 dans ce cas sont données par

$$f_1(\alpha) = \frac{1}{2}\beta y_0, \quad f_2(\alpha) = -\frac{1}{2}\beta x_0 + \frac{1}{2}\gamma,$$

et le système $f_1(\alpha) = f_2(\alpha) = 0$ a une seule solution $\alpha = \left(\frac{\gamma}{\beta}, 0\right)$ et on a $\det \left(\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_0, y_0)} \right)_{(x_0, y_0) = \left(\frac{\gamma}{\beta}, 0\right)} = \frac{\beta^2}{4} \neq 0$. Toutes les conditions du corollaire 4.2.1 sont satisfaites et le résultat suit immédiatement.

Preuve de l'exemple 4.2.4

L'équation de Liénard

$$\ddot{x} + x + \varepsilon (e^x - 2) \dot{x} = 0,$$

est équivalente à (4.6) avec $G(t, x, \dot{x}) = 0$, $f(x) = e^x - 2$, correspondante au système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + \varepsilon (2 - e^x) y. \end{cases}$$

en coordonnée polaire $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, ce système devient

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon r \sin^2 \theta (2 - e^{r \cos \theta}), \\ \dot{\theta} = -1 + \varepsilon \sin \theta \cos \theta (2 - e^{r \cos \theta}) \end{cases}$$

Ou encore

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon r \sin^2 \theta (e^{r \cos \theta} - 2) + 0(\varepsilon^2). \quad (4.33)$$

CHAPITRE 4. CYCLES LIMITES DE QUELQUES CLASSES
D'ÉQUATIONS DE LIÉNARD PERTURBÉES

En appliquant le théorème 2.4.1 sachant que $F_0(\theta, r) = 0$, $F_0(\theta, r) = r \sin^2 \theta (e^{r \cos \theta} - 2)$, $(4.22)_{\varepsilon=0}$ a une solution $r(\theta) = r_0$, elle est constante et la matrice fondamentale est $M(\theta) = 1$. Soit

$$\begin{aligned} f(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r \sin^2 \theta (e - 2) d\theta, \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r \sin^2 \theta e^{r \cos \theta} d\theta - \frac{r}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta, \\ &= \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \sum_{n \geq 0} \frac{r^n \cos^n \theta}{n!} d\theta - r, \\ &= \frac{r}{2\pi} \sum_{n \geq 0} \frac{r^n}{n!} \left[\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cos^n \theta d\theta \right] - r. \end{aligned}$$

mais

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cos^n \theta d\theta = \begin{cases} 0 & \text{if } n = 2m + 1 \\ \neq 0 & \text{if } n = 2m \end{cases}$$

Alors,

$$f(r) = \frac{r}{2\pi} \sum_{m \geq 0} \frac{r^{2m}}{(2m)!} \left[\int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) \cos^{2m} \theta d\theta \right] - r$$

Mais,

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cos^{2m} \theta d\theta = \frac{2\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{3}{2} + m\right)}{(2m+1)(m+1)!}$$

Alors,

$$f(r) = \frac{r}{2\pi} \sum_{m \geq 0} \left(\frac{r^{2m}}{(2m)!} \frac{2\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{3}{2} + m\right)}{(2m+1)(m+1)!} \right) - r$$

posons

$$U_m = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{3}{2} + m\right)}{(2m+1)!(m+1)!}.$$

on a $\frac{U_{m+1}}{U_m} = \frac{1}{4(m+1)(m+2)}$. Cette série est convergente à $f(r) = J_1(r) - r$ selon le critère de D'Alembert. Par Maple 12, $f(r) = 0$ a une unique solution

$r = 2.486837646$. Toutes les conditions du corollaire 4.2.1 sont satisfaites et le résultat suit immédiatement.

Preuve de l'exemple 4.2.5

L'équation de Liénard

$$\ddot{x} + x + \varepsilon (x^2 - 1) \dot{x} = \varepsilon (x^2 - 1) \sin t.$$

est équivalente à (4.8) avec $G(t, x, \dot{x}) = (x^2 - 1) \sin(t)$, Les fonctions f_1 et f_2 dans ce cas sont données par

$$f_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_0 - \frac{1}{8}x_0^2 - \frac{3}{8}y_0^2 - \frac{1}{8}x_0y_0^2 - \frac{1}{8}x_0^3, \quad f_2 = -\frac{1}{8}y_0(x_0^2 + y_0^2 - 2x_0 - 4).$$

Le système $f_1(\alpha) = f_2(\alpha) = 0$ a trois solutions $(-1, 0)$, $(2, 0)$ et $(-2, 0)$ et on a

$$\begin{aligned} \det \left(\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_0, y_0)} \right)_{(x_0, y_0)=(-1, 0)} &= 0.046875, \\ \det \left(\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_0, y_0)} \right)_{(x_0, y_0)=(2, 0)} &= -0.75, \\ \det \left(\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_0, y_0)} \right)_{(x_0, y_0)=(-2, 0)} &= 0.25. \end{aligned}$$

Donc toutes les conditions du corollaire 4.2.2 sont satisfaites, alors il existe deux solutions 2π -périodique $x_i(t, \varepsilon)$, $i = \overline{1, 3}$ qui tend respectivement vers

$$x_1(t) = \cos t, \quad x_2(t) = 2 \cos t$$

de l'équation différentielle $\ddot{x} + x = 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Preuve de l'exemple 4.2.6

L'équation de Liénard

$$\ddot{x} + x + \varepsilon (a_2 x^2 + a_0) \dot{x} = \varepsilon \cos t$$

est équivalente à (4.8) avec $G(t, x, \dot{x}) = \cos t$, les deux composantes (f_1, f_2) données dans (4.9) sont

$$f_1 = -\frac{1}{8}x_0(4a_0 + a_2x_0^2 + a_2y_0^2), \quad f_2 = -\frac{1}{8}a_2y_0^3 - \frac{1}{2}a_0y_0 - \frac{1}{8}a_2x_0^2y_0 + \frac{1}{2}.$$

Le système $f_1 = f_2 = 0$ a une seule solution $\alpha = \left(0, -\frac{1}{3} \frac{6^{\frac{1}{3}} [2a_2 a_0 6^{\frac{1}{3}} - (\mu a_2^2)^{\frac{2}{3}}]}{a_2 (\mu a_2^2)^{\frac{1}{3}}} \right)$

avec $\mu = \left(9 + \sqrt{3} \sqrt{\frac{16a_0^3 + 27a_2}{a_2}} \right)$ et on a

$$\det \left(\frac{\partial (f_1, f_2)}{\partial (x_0, y_0)} \right)_{(x_0, y_0) = \alpha} = \frac{1}{288} \left[24a_0^2 + \frac{96a_0^4 6^{\frac{2}{3}} + 6^{\frac{1}{3}} (\mu a_2^2)^{\frac{2}{3}} \mu^2}{\mu (\mu a_2^2)^{\frac{1}{3}}} \right] \neq 0$$

Donc toutes les conditions du corollaire 4.2.2 sont satisfaites et le résultat suit immédiatement.

Preuve de l'exemple 4.2.7

L'équation de Liénard

$$\ddot{x} + x + \varepsilon (\dot{x}^3 - \dot{x}) = \varepsilon (1 - \dot{x}^2) \sin t,$$

est équivalente à (4.10) avec $G(t, x, \dot{x}) = (1 - \dot{x}^2) \sin t$, $f(\dot{x}) = (\dot{x}^3 - \dot{x})$, les zéros $\alpha = (x_0, y_0)$ des deux composantes (f_1, f_2) données dans (4.11) par

$$f_1 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{8}x_0^2 - \frac{3}{8}x_0y_0^2 + \frac{1}{8}y_0^2 - \frac{3}{8}x_0^3 + \frac{1}{2}x_0, \quad f_2 = -\frac{1}{8}y_0(3x_0^2 - 2x_0 + 3y_0^2 - 4),$$

sont $(1, 0)$, $\left(2\frac{\sqrt{3}}{3}, 0 \right)$ et $\left(-2\frac{\sqrt{3}}{3}, 0 \right)$ et on a

$$\begin{aligned} \det \left(\frac{\partial (f_1, f_2)}{\partial (x_0, y_0)} \right)_{(x_0, y_0) = (1, 0)} &= 0.046875, \\ \det \left(\frac{\partial (f_1, f_2)}{\partial (x_0, y_0)} \right)_{(x_0, y_0) = \left(2\frac{\sqrt{3}}{3}, 0 \right)} &= -0.0386751347, \\ \det \left(\frac{\partial (f_1, f_2)}{\partial (x_0, y_0)} \right)_{(x_0, y_0) = \left(-2\frac{\sqrt{3}}{3}, 0 \right)} &= 0.5386751347. \end{aligned}$$

Donc toutes les conditions du corollaire 4.2.3 sont satisfaites et le résultat suit immédiatement.

Preuve de l'exemple 4.2.8

L'équation de Liénard

$$\ddot{x} + x + \varepsilon (\dot{x}^2 - \dot{x}) = \varepsilon \cos t.$$

est équivalente à (4.12) avec $f(\dot{x}) = \dot{x}^2 - \dot{x}$, $p(t) = \cos t$, les deux composantes (f_1, f_2) données dans (4.13) sont

$$f_1 = \frac{1}{2}x_0, \quad f_2 = \frac{1}{2}(y_0 + 1).$$

et le système $f_1(\alpha) = f_2(\alpha) = 0$ a une unique solution $\alpha = (0, -1)$ et on a $\det \left(\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_0, y_0)} \right)_{(x_0, y_0) = (0, -1)} = 0.25$. Toutes les conditions du corollaire 4.2.4 sont satisfaites et le résultat suit immédiatement.