## Conception en rigidité



$$\xi_2 = \frac{(T_0 + 2T_1 - 4R_1\xi_1)E_x^m - 8T_0T_1 + 16R_1^2\xi_1^2}{(-1)^k R_0 (8T_1 - E_x^m)} \qquad \text{courbes de niveau de } E_x^m,$$

$$\xi_2 = \frac{(T_0 + 2T_1 + 4R_1\xi_1)E_y^m - 8T_0T_1 + 16R_1^2\xi_1^2}{(-1)^k R_0 (8T_1 - E_y^m)} \qquad \text{courbes de niveau de } E_y^m,$$

$$\xi_2 = \frac{T_0 - G_{xy}^m}{(-1)^k R_0} \qquad \text{courbes de niveau de } G_{xy}^m,$$

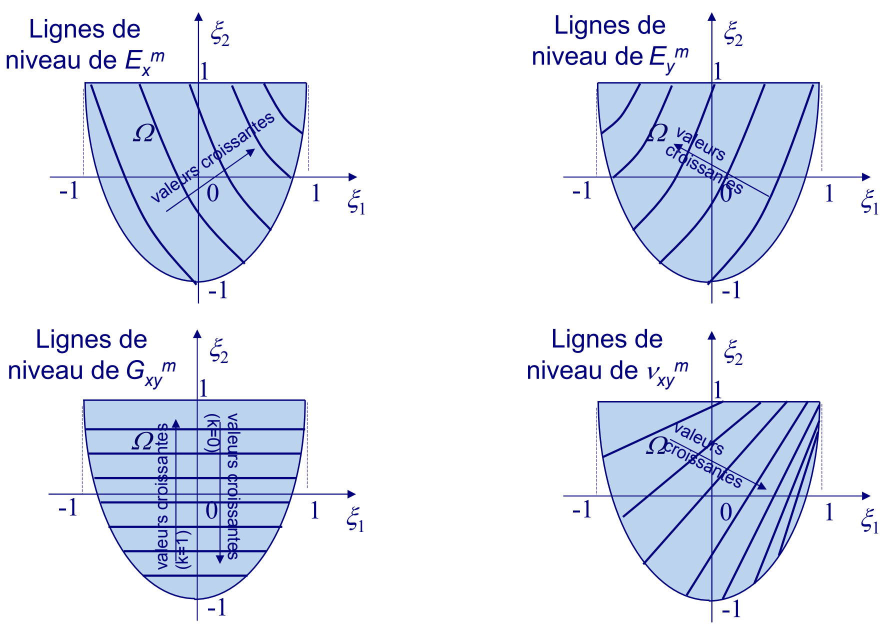
$$\xi_2 = \frac{2T_1 - T_0 - (T_0 + 2T_1 - 4R_1\xi_1)\nu_{xy}^m}{(-1)^k R_0 (1 + \nu_{xy}^m)} \qquad \text{courbes de niveau de } \nu_{xy}^m.$$

- Les figures suivantes montrent l'allure qualitative des lignes de niveau des modules de l'ingénieur en membrane.



## Conception en rigidité





## Conception en rigidité

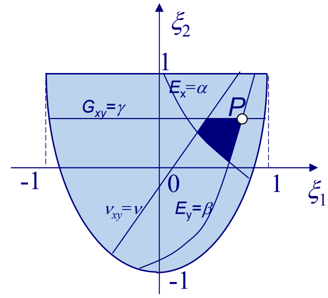


- Voyons des exemples d'application de la méthode de Miki.
- Exemple 1 (Miki): on veut concevoir un stratifié tel que:

  $E_x^m$ soit maximal,

  avec les conditions:

  $E_x^m > \alpha$, $E_y^m > \beta$, $G_{xy}^m > \gamma$, $\nu_{xy}^m < \nu$.




- On choisit alors un matériau de base pour lequel le domaine admissible, défini par les conditions ci-dessus, soit contenu dans $\Omega$.
- On connaît donc la région de $\Omega$ à laquelle le point de stratification doit appartenir. Par les courbes de niveau de $E_x^m$, on reconnaît que le point d'optimum est alors le point $P$ en figure (si $U_3>0$, $k=0$).
- On connaît maintenant les paramètres de stratification de la solution et pour déterminer les orientations on procède comme vue auparavant.



## Conception en rigidité



- Exemple 2 (Gürdal, Haftka, Hajela): concevoir un stratifié en carbone-époxyde ($E_1$= 128 GPa, $E_2$= 13 GPa, $G_{12}$= 6.4 GPa, $\nu_{12}$=0.3) qui maximise $E_x^m$ et respecte les conditions suivantes: $G_{xy}^m \geq 25$ GPa, $\nu_{xy}^m \leq 1$.
- Calculons d'abord les paramètres de Tsai et Pagano (ou les paramètres polaires) de la couche de base: on obtient (formules des pages 156 et 393)

$$U_1 = 57.547 \text{ GPa}, \quad U_2 = 58.030 \text{ GPa}, \quad U_3 = 13.604 \text{ GPa},$$
$$U_4 = 17.540 \text{ GPa}, \quad U_5 = 20.004 \text{ GPa},$$

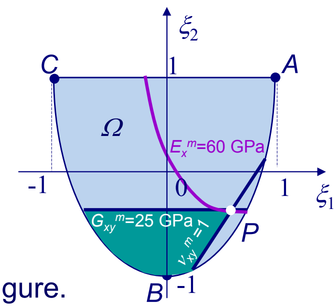
ou bien

$$T_0 = 20 \text{ GPa}, \quad T_1 = 18.772 \text{ GPa}, \quad R_0 = 13.604 \text{ GPa},$$
$$R_1 = 14.508 \text{ GPa}, \quad \Phi_0 = \Phi_1 = 0° \ (\rightarrow k = 0).$$

- Déterminons le domaine admissible dans $\Omega$ : les droites qui correspondent aux deux conditions sont, dans l'ordre

## Conception en rigidité

$$\xi_2 = -0.3673,$$
$$\xi_2 = 2.1328\, \xi_1 - 1.4704.$$




- Le domaine admissible est représenté en figure.
- Alors, en se rappelant de l'allure des courbes de niveau de $E_x{}^m$, on obtient que le point de stratification qui maximise $E_x{}^m$ avec les conditions imposées est le point $P$=(0.5172, – 0.3672).
- On peut donc calculer (par exemple par le biais des formules de page 413) la valeur obtenue pour $E_x{}^m$; on trouve $E_x{}^m$=60 GPa.
- Il ne reste plus qu'à décider comment obtenir le stratifié qui a ces caractéristiques. Pour cela, on peut suivre la procédure analytique de page 409. Si l'on prend $\nu_1$=0.5, on obtient facilement

$$\delta_1 = 21.20°, \quad \delta_2 = 36.39°.$$





## Conception en rigidité

- Donc, le stratifié est composé par une séquence symétrique d'un égal nombre de couches dans chacune des orientations suivantes: ±21.20°, ±36.39°. Le nombre minimum de couches est donc 8.

- D'autres problèmes de conception des propriétés de membrane peuvent être traités de la même façon, dont, par exemple, celui de la conception des coefficients d'expansion thermique.

- Plus difficile est la conception de la rigidité en flexion. Dans ce cas, en fait, les formules de page 396 montrent que dans la définition des paramètres de stratification entrent aussi les coefficients $d_k$, et donc la position de la couche sur la séquence d'empilement.
- En outre, on a déjà dit de la difficulté d'obtenir au même temps le découplage membrane-flexion et l'orthotropie en flexion.

## Conception en rigidité



- Ceci veut dire que, *a priori*, on ne peut pas considérer nuls les termes $D_{xs}$ et $D_{ys}$, et donc qu'il faudrait travailler avec 4 paramètres de stratification et pas avec 2. En définitive, l'approche de Miki, à stricte rigueur, n'est plus possible en flexion.
- Pour palier à cet inconvénient et continuer à utiliser une méthode du type de celle de Miki, beaucoup d'auteurs font l'hypothèse que les composantes $D_{xs}$ et $D_{ys}$, soient négligeables.
- En définitive, ils considèrent le stratifié comme s'il était orthotrope en flexion, mais il faut préciser que cette hypothèse n'a pas de fondement scientifique précis, et il n'est pas exclu que, *a posteriori*, les composantes $D_{xs}$ et $D_{ys}$ se révèlent de valeur importante.
- Par cette approche, on se réduit à considérer les seuls paramètres de stratification $\xi_9$ et $\xi_{10}$, pour lesquels valent des limitations analogues à celles pour $\xi_1$ et $\xi_2$ (Miki, 1985):

$$-1 \le \xi_9 \le 1, \quad 2\xi_9^2 - 1 \le \xi_{10} \le 1.$$



## Conception en rigidité



- Les considérations faites dans le cas du comportement de membrane peuvent être faites même dans le cas de la flexion; en particulier, les paramètres de stratification peuvent être réécrits, pour un stratifié équilibré, comme

$$\xi_9 = \sum_{k=1}^{n_g} s_k \cos 2\delta_k,$$

$$\xi_{10} = \sum_{k=1}^{n_g} s_k \cos 4\delta_k,$$

$$s_k = \frac{\sum_{j=1}^{n_k} d_j}{n^3}, \quad \text{somme sur les } n_k \text{ couches du groupe d'orientation } k.$$

- On vérifie facilement que vaut toujours la règle pour laquelle la somme des $s_k$ est égale à 1.
- En particulier, si l'on prends seulement deux groupes d'orientations, $\pm\delta_1$ et $\pm\delta_2$, alors on obtient une solution identique à celle de page 409, mais avec $\xi_9$ et $\xi_{10}$ à la place de $\xi_1$ et $\xi_2$.

## Conception en rigidité



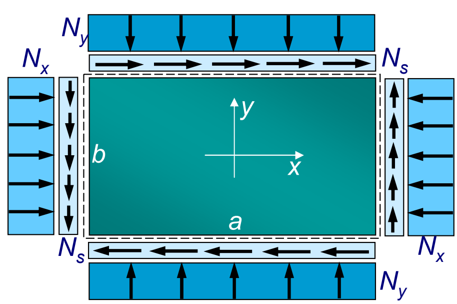
- La conception par rapport à la rigidité en flexion est nécessaire aussi dans deux circonstances importantes: le dimensionnement par rapport à la charge critique de stabilité ou aux fréquences propres.
- Dans les deux cas, il faut spécifier la géométrie et les conditions d'appui de la plaque, et pour le cas de la charge critique aussi le type de sollicitation de membrane (normalement, des actions dans le plan moyen de la plaque et sur son contour).
- Les solutions dont on dispose concernent généralement les plaque rectangulaires orthotropes en flexion, avec les axes d'orthotropie parallèles aux côtés de la plaque.
- Cette dernière semble être une condition indispensable pour obtenir une solution analytique (sous forme analytique ou en série) à tout problème de plaque anisotrope; il n'existe pas, en fait des solutions analytiques pour des plaque rectangulaires orthotropes hors axes; en définitive, la présence des termes de couplage flexion-torsion, $D_{xs}$ et $D_{ys}$, exclue, apparemment, la possibilité de trouver une solution analytique ou en série.



## Conception en rigidité



- Pour le cas de la charge critique de stabilité, si $N_s$=0 et si la charge est appliquée seulement sur le bord (voir la figure), pour une plaque appuyée on peut exprimer la déflection comme




$$w_0 = a_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b},$$

où $m$ et $n$ sont le nombre de semi ondes, respectivement en direction $x$ et $y$, de la déformation sinusoïdale de la plaque due à la perte de stabilité.

- La plaque est considérée découplée (par exemple par la symétrie de la séquence) et orthotrope (éventuellement parce qu'on considère nuls $D_{xs}$ et $D_{ys}$). On a déjà vu que cette hypothèse est, la plupart des fois, une approximation, éventuellement à vérifier *a posteriori*.

## Conception en rigidité



- dans ces hypothèses, on connaît la valeur du multiplicateur critique de stabilité $\lambda$ de la charge **N**=($N_x$, $N_y$, 0), voir le chapitre suivant:

$$\lambda=\pi^2\frac{D_{xx}\frac{m^4}{a^4}+2(D_{xy}+2D_{ss})\frac{m^2}{a^2}\frac{n^2}{b^2}+D_{yy}\frac{n^4}{b^4}}{N_x\frac{m^2}{a^2}+N_y\frac{n^2}{b^2}}.$$

- On remarque que $\lambda$ dépend de l'anisotropie de flexion et du rapport *a/b*; il est donc impossible de dire *a priori* à quelle forme modale correspond la charge critique la plus petite.
- Normalement, on veut maximiser $\lambda$; donc, pour chaque forme modale, à savoir pour chaque choix de *m* et *n*, il faut maximiser la fonction

$$f=D_{xx}\alpha^2+2(D_{xy}+2D_{ss})\alpha\beta+D_{yy}\beta^2,\quad \alpha=\frac{m^2}{a^2},\ \beta=\frac{n^2}{b^2}.$$



## Conception en rigidité



- Avec les paramètres de stratification on a, pour chaque forme modale, le problème d'optimum suivant en forme standard

$$\min f(\xi_9,\xi_{10})=-[U_1(\alpha^2+\beta^2)+2\alpha\beta(U_4+2U_5)+ \\ +\xi_9U_2(\alpha^2-\beta^2)+\xi_{10}U_3(\alpha^2-6\alpha\beta+\beta^2)]$$

$$\text{avec}\quad \xi_9-1\le 0,\quad -1-\xi_9\le 0,\quad \xi_{10}-1\le 0,\quad \xi_9^2-\xi_{10}-1\le 0.$$

- Avec les paramètres polaires on a

$$\min f(\xi_9,\xi_{10})=-(T_0+2T_1)(\alpha+\beta)^2-4R_1\xi_9\left(\alpha^2-\beta^2\right)-(-1)^kR_0\xi_{10}\left(\alpha^2-6\alpha\beta+\beta^2\right)$$

$$\text{avec}\quad \xi_9-1\le 0,\quad -1-\xi_9\le 0,\quad \xi_{10}-1\le 0,\quad \xi_9^2-\xi_{10}-1\le 0.$$

- On remarque que la fonction à minimiser dépend linéairement de $\xi_9$ et $\xi_{10}$ et le problème est convexe dans l'espace des paramètres de stratification.

## Conception en rigidité



- La fonction $f(\xi_9\ ,\ \xi_{10})$ décrit un plan (ses courbes de niveau sont donc des droites parallèles) et ceci implique que la maximum se trouve sur le bord de $\Omega$ : les stratifiés qui maximisent la charge critique sont des stratifiés *angle-ply*.
- Il faut toutefois rappeler que la plupart des fois ces solutions sont approximées, pour ce qu'on a dit auparavant; l'évaluation des valeurs des composantes $D_{xs}$ et $D_{ys}$ est importante, et devrait considérer la perturbation de la charge critique provoquée par leur éventuelle présence.
- En ce qui concerne la conception des fréquences propres, considérons seulement le cas où l'on veut maximiser la première fréquence propre d'une plaque rectangulaire, de masse surfacique $\mu$, appuyée sur le contour, orthotrope dans les axes $x$ et $y$, à séquence symétrique (ou en tout cas découplée); finalement, c'est le même type de plaque déjà considéré pour la charge critique.



## Conception en rigidité



- On cherche normalement une solution dans la forme

$$w_0 = a_{mn} \sin\frac{m\pi\, x}{a} \sin\frac{n\pi\, y}{b} \sin\omega_{mn} t.$$

- Dans ce cas, les fréquences propres sont données par (voir le chapitre suivant)

$$\omega_{mn}^2 = \frac{\pi^4}{\mu}\left[D_{xx}\alpha^2 + 2(D_{xy} + 2D_{ss})\alpha\beta + D_{yy}\beta^2\right]$$

- Pour maximiser la fréquence d'un certain mode il faut donc maximiser la même fonction qui rend maximale la charge critique du même mode: à savoir, les stratifiés qui maximisent la charge critique d'un mode maximisent aussi la fréquence correspondante.

## Conception de la résistance



- La conception par rapport à la résistance est plus compliquée de celle en rigidité, pour diverses raisons.
- D'abord, il faut spécifier une situation de chargement, et en général celle-ci dépend d'au moins 6 paramètres, les composantes de **M** et **N** (on exclue par simplicité les sollicitations d'autre nature, comme celles thermiques).
- Ensuite, il faut pouvoir remonter des sollicitations aux limites admissibles, et ceci pour chaque couche, car on ne peut pas savoir *a priori* quelle est la plus sollicitée.
- En outre, ceci comporte le choix d'un critère de résistance, et ceux-ci ne sont pas équivalents, surtout du point de vue du calcul.
- Les méthodes de conception en résistance sont donc moins bien établies que celles en rigidité.
- Ci de suite, on montre seulement une application possible de la méthode de Miki à la conception en résistance.



## Conception de la résistance



- Considérons donc le cas d'un stratifié équilibré, symétrique, sollicité seulement dans son plan (**M**=**O**).
- Les déformations dans les couches sont les mêmes, et elles sont dans ce cas

$$\boldsymbol{\varepsilon}^o = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{N}.$$

- D'ailleurs, **A** est fonction des paramètres de stratification $\xi_1$ et $\xi_2$, pages 391 et 397, et donc en développant les calculs avec les paramètres de Tsai et Pagano on obtient

$$\varepsilon_x^o = \frac{1}{h}\frac{(U_1 - U_2\xi_1 + U_3\xi_2)N_x - (U_4 - U_3\xi_2)N_y}{(U_1^2 - U_4^2) - U_2^2\xi_1^2 + 2U_3(U_1 + U_4)\xi_2},$$

$$\varepsilon_y^o = \frac{1}{h}\frac{(U_1 + U_2\xi_1 + U_3\xi_2)N_y - (U_4 - U_3\xi_2)N_x}{(U_1^2 - U_4^2) - U_2^2\xi_1^2 + 2U_3(U_1 + U_4)\xi_2},$$

$$\varepsilon_s^o = \frac{1}{h}\frac{N_s}{U_5 - U_3\xi_2}.$$

## Conception de la résistance

- Avec les paramètres polaires on a

$$\varepsilon_x^o=\frac{1}{8h}\frac{(T_0+2T_1-4R_1\xi_1+(-1)^k R_0\xi_2)N_x+(T_0-2T_1+(-1)^k R_0\xi_2)N_y}{T_0T_1-2R_1^2\xi_1^2+(-1)^k R_0T_1\xi_2},$$

$$\varepsilon_y^o=\frac{1}{8h}\frac{(T_0+2T_1+4R_1\xi_1+(-1)^k R_0\xi_2)N_y+(T_0-2T_1+(-1)^k R_0\xi_2)N_x}{T_0T_1-2R_1^2\xi_1^2+(-1)^k R_0T_1\xi_2},$$

$$\varepsilon_s^o=\frac{1}{h}\frac{N_s}{T_0-(-1)^k R_0\xi_2}.$$

- Ces composantes tensorielles de la déformation doivent ensuite être transformées, pour chaque couche, afin de les exprimer dans le repère matériel de la couche, tourné en sens trigonométrique d'un angle $\delta_k$ par rapport au repère global du stratifié.
- Ceci se fait en utilisant les formules de page 160:





## Conception de la résistance

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_6\end{Bmatrix}_k=\begin{bmatrix}c^2 & s^2 & sc\\ s^2 & c^2 & -sc\\ -2sc & 2sc & c^2-s^2\end{bmatrix}_k\begin{Bmatrix}\varepsilon_x^o\\ \varepsilon_y^o\\ \varepsilon_s^o\end{Bmatrix},\quad c=\cos\delta_k,\quad s=\sin\delta_k.$$

- Considérons par simplicité seulement le cas d'un stratifié équilibré, avec deux seuls groupes possibles d'orientations, $\pm\delta_1$ et $\pm\delta_2$.
- Dans ce cas, en rappelant les formules de page 409, on obtient, par des simples transformations, les expressions des composantes de déformation dans les deux groupes de couches

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_6\end{Bmatrix}_k=\begin{bmatrix}\frac{1+Q_k}{2} & \frac{1-Q_k}{2} & \frac{\sin(\arccos Q_k)}{2}\\ \frac{1-Q_k}{2} & \frac{1+Q_k}{2} & -\frac{\sin(\arccos Q_k)}{2}\\ -\sin(\arccos Q_k) & \sin(\arccos Q_k) & Q_k\end{bmatrix}_k\begin{Bmatrix}\varepsilon_x^o\\ \varepsilon_y^o\\ \varepsilon_s^o\end{Bmatrix},\quad k=1,2.$$



Copyright P. Vannucci – UVSQ
paolo.vannucci@meca.uvsq.fr

## Conception de la résistance



- Maintenant, on peut calculer les contraintes dans chaque couche (la matrice [$Q$] est la même pour tous les plis):

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_6\end{Bmatrix}_k=\begin{bmatrix}Q_{11} & Q_{12} & 0\\ Q_{12} & Q_{22} & 0\\ 0 & 0 & Q_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_6\end{Bmatrix}_k .$$

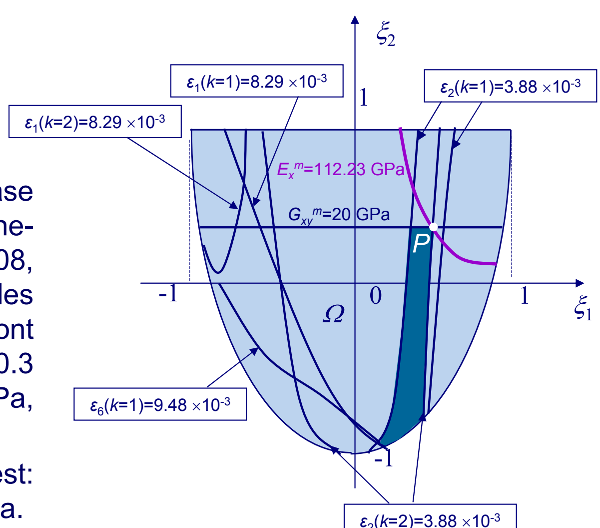
- Connaissant les contraintes dans les deux groupes de couches, on peut représenter dans le plan $\xi_1$ - $\xi_2$ des limites imposées sur les contraintes maximales (critère de la contrainte maximale), ou sur une leur combinaison (critères de Tsai-Hill, Hoffmann, Tsai-Wu), ou en s'arrêtant aux déformations, les limites propres au critère de la déformation maximale.
- De cette façon, on définit sur le domaine $\Omega$ une région admissible, éventuellement déterminée aussi par d'autres conditions, par exemple sur la rigidité, dans laquelle on peut trouver un point de stratification optimale pour un problème donnée (par exemple, $E_x^m$ max).



## Conception de la résistance

Copyright P. Vannucci – UVSQ
paolo.vannucci@meca.uvsq.fr

- A titre d'exemple, on montre le cas suivant (Gürdal, Haftka, Hajela): il faut maximiser $E_x^m$ avec les conditions:
  - $G_{xy}^m \geq 20$ GPa;
  - $\varepsilon_1 \leq 8.29 \times 10^{-3}$;
  - $\varepsilon_2 \leq 3.88 \times 10^{-3}$;
  - $\varepsilon_6 \leq 9.48 \times 10^{-3}$.




- Le matériau de base est un carbone-époxyde T300-5208, dont les caractéristiques sont $E_1$= 181 GPa, $E_2$= 10.3 GPa, $G_{12}$= 7.17 GPa, $\nu_{12}$=0.28.
- La sollicitation est: **N**/$h$={0.5, 0.25,0} GPa.

## Conception de la résistance



- Les courbes représentant les différentes conditions sont montrées dans la figure précédente; le domaine admissible est hachuré et le point de stratification qui maximise $E_x^m$ est $P$= (0.397, 0.349), pour lequel on obtient, pour $\nu_1$=0.4, $Q_1$= –0.4842 et $Q_2$=0.9838, d'où les deux angles du premier groupe (40% des couches) $\delta_1=\pm 59.48°$ et du deuxième (60% des couches) $\delta_2=\pm 5.16°$.
- Pour le module d'Young, on obtient la valeur $E_x^m$= 112.23 GPa.
- Une solution possible est un stratifié symétrique à 20 couches avec 8 couches dans le premier groupe et 12 dans le deuxième, de sorte à respecter la condition de stratifié équilibré et les fractions volumiques des couches, par exemple

$$[\delta_1/-\delta_1/\delta_2/-\delta_2/\ \delta_2/-\delta_2/\ \delta_2/-\delta_2/-\delta_1/\delta_1]_s.$$



## Approches numériques modernes



- Le bref panorama des méthodes de conception présenté permet de mettre en évidence certains points critiques de ces méthodes classiques.
- Le plus important, est qu'en effet *presque jamais on recherche une authentique solution optimale à un problème donné*.
- En effet, le choix de rechercher la solution dans une classe particulière de stratifiés (surtout les équilibrés symétriques) rétrécit drastiquement l'espace de recherche, en éliminant à la base des solutions possibles, souvent les vraies solutions optimales.
- D'ailleurs, on l'a vu, cette stratégie est utilisée pour deux raisons fondamentales: d'un côté, pour réduire la complication du problème (par exemple, parce qu'elle permet de limiter le nombre des variables de conception), de l'autre, pour garantir *a priori* certaines propriétés mécaniques de difficile conception et formalisation mathématique en un problème d'optimum.
- Ces choix ont des conséquences importantes, surtout pour la conception en flexion, pour laquelle presque toutes les solutions

## Approches numériques modernes



disponibles en littérature, par exemple pour la charge critique, sont approximées (car on néglige la conception de $D_{xs}$ et $D_{ys}$).

- Vu la complexité des problèmes de conception d'un stratifié, la voie la plus indiquée est celle d'utiliser des méthodes propres à l'optimisation structurale.
- De cette manière, il est possible de formaliser de façon classique, dans le contexte de cette discipline, un problème de conception qui permette de prendre en compte non seulement l'objectif premier de la conception (par exemple, la maximisation de la rigidité), mais aussi les requis sur les symétries élastiques (découplage, orthotropie en membrane et/ou en flexion etc.) qui normalement font partie intégrante de la conception d'un stratifié.
- Ces requis peuvent être formalisés soit sous la forme de conditions imposées à la recherche de l'optimum, soit, dans certains cas, comme partie intégrante de la fonction objectif.



## Approches numériques modernes



- Dans d'autres termes, on peut parler aujourd'hui d'*optimisation globale* d'un stratifié.
- Cette perspective est permise en grande partie par les techniques modernes d'optimisation.
- En fait, il ne faut pas oublier que la complexité intrinsèque des problèmes qu'on rencontre en conception des stratifiés (fonctions objectif non convexes avec un nombre important de variables de conception), comporte que la plupart des fois on a à faire à des problèmes de minimum ayant une grande multiplicité de solutions (minima absolus ou relatifs), ou parfois avec des vrais domaines de solutions (solutions non isolées).
- En outre, souvent, par des habitudes technologiques, on limite les orientations possibles à un ensemble plutôt restreint d'angles (par exemple, 0°, 90°, ±45°), et donc il faut opérer avec des variables discrètes.

## Approches numériques modernes

- Ces difficultés sont abordées par les techniques modernes d'optimisation, qui peuvent traiter avec succès des problèmes non convexes, de grandes dimensions et avec des variables de tout type: ce sont les *métaheuristiques d'optimisation*.
- Il s'agit d'algorithmes capables de traiter des problèmes compliqués en s'inspirant non pas des techniques mathématiques classiques (descente vers le minimum d'un "individu", guidé par les "informations" données par la fonction objectif), mais d'autres lois de la Nature, venants de différents contextes:
  - métallurgique: méthode du recuit simulé (s*imulated annealing)*;
  - sociologique: méthode tabou;
  - biologique: algorithmes génétiques ou évolutionnaires, métaphores immunologiques, essaims particulaires (*particle swarm optimization*), colonies de fourmis, réseaux de neurones etc.
- Les méthodes appliquées avec plus de succès dans le domaine de la conception des stratifiés sont la méthode du *simulated annealing* et les algorithmes génétiques.





## Approches numériques modernes

- Dans ces algorithmes, on fait évoluer, par un critère de sélection inspiré par la fonction objectif, une population d'"individus" candidats à être solution du problème donné.
- Il s'agit de méthodes d'ordre 0 (il ne nécessitent pas du calcul des dérivées de la fonction objectif) et donc elles sont bien adaptées à représenter tout type de variables, continues ou discrètes.
- Par le fait, ensuite, qu'elles ne travaillent pas sur un seul "individu" mais sur toute une population, ces méthodes contournent à la base, statistiquement, le problème de la non convexité et donc le risque de converger vers des solutions non optimales (minima locaux).
- Par cette raison, ces méthodes se prêtent très bien à traiter des problèmes de conception optimale des stratifiés, pour lesquels la fonction objectif est toujours une combinaison de fonctions trigonométriques des orientations, et donc fortement non convexe.
- De nombreux travaux ont été conduits récemment par divers chercheurs, tels Haftka, Gürdal, Hajela, Le Riche, Grédiac etc.

## Approches numériques modernes



- Dans ces travaux, les problèmes abordés couvrent un spectre beaucoup plus vaste que celui, restreint, vu aux paragraphes précédents, et ceci est possible grâce au point de vue totalement différent: on formalise un problème de minimum et on en recherche la solution par une métaheuristique.
- Toutefois, dans plusieurs travaux, on reste encore ancrés à des choix faits *a priori*, et visant à garantir l'existence des symétries élastiques souhaitées.
- Des recherches plus récentes (Vannucci & Vincenti, etc.), basées sur une généralisation radicale du problème de conception d'un stratifié comme un problème de minimum, permettent d'obtenir la plus grande généralité dans la recherche des solutions optimales et de s'affranchir donc des conditionnements classiques qu'on pose normalement dans les démarches classiques de conception d'un stratifié (typiquement, la symétrie de la solution, par exemple).
- A titre d'exemple, on montre le cas d'un stratifié à 12 plis en carbone-époxyde T300-5208 (page 438), avec **B**=**O**, **A** orthotrope et



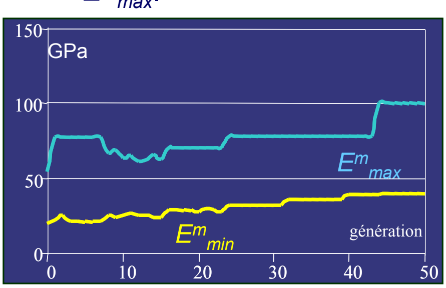
## Approches numériques modernes

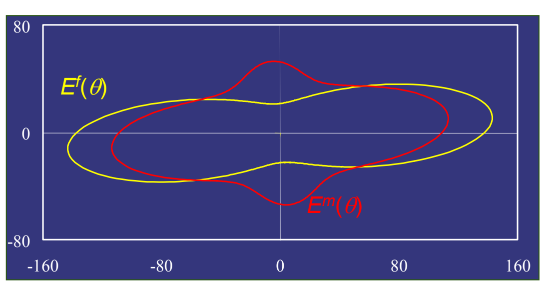


tel à respecter les conditions suivantes: $E^m_{max}$≥100 GPa (0.55 $E_1$) et $E^m_{min}$≥40 GPa (3.88 $E_2$). En plus, les orientations doivent être des multiples de 15° (Vannucci et Vincenti).

- Le problème a été résolu par un algorithme génétique; la solution est

  [0°/30°/–15°/15°/90°/–75°/0°/45°/–75°/0°/–15°/15°].
- En figure, on montre les graphiques directionnels de $E^m$ et $E^f$, ainsi que la variation, au cours des générations (50 en tout), de $E^m_{min}$ et $E^m_{max}$.



# Chapitre 8

- **Théories et solutions pour stratifiés et sandwiches**







# Introduction

- Pour ce qu'on a vu jusqu'ici, la théorie classique de stratifiés concerne essentiellement la réduction du comportement du stratifié à une monocouche équivalente.
- Le comportement du stratifié est décrit, on l'a vu, par trois tenseurs, **A**, **B** et **D**; quand ceux-ci sont connus, si l'on accepte les hypothèses de la théorie classique, l'analyse de la réponse d'un stratifié se ramène à celle de la monocouche équivalente.
- Pour celle-ci, on peut alors adopter les méthodes classiques d'analyse des plaques anisotropes, en considérant par contre l'éventuelle présence du couplage membrane-flexion.
- Cette partie est rapidement présentée dans les trois premiers paragraphes de ce chapitre, pour l'analyse statique d'abord et pour celle dynamique et de stabilité ensuite, avec un rappel des méthodes traditionnelles de solution analytique.
- Toutefois, on a déjà souligné auparavant les contradictions et inconvénients de la théorie classique, dense de paradoxes

## Introduction

mécaniques, dont le plus important est l'impossibilité de prédire les contraintes de cisaillement, dont l'existence est nécessaire pour l'équilibre en cas d'actions appliquées orthogonales au plan moyen.

- Dans les deux paragraphes successifs, on introduit d'abord la méthode pour compléter, dans certains cas, la théorie classique dans le but d'introduire dans le calcul les contraintes tangentielles en direction orthogonales au plan moyen, ensuite on introduit le problème des contraintes au bord libre, importantes car elles peuvent provoquer le phénomène du délaminage.
- L'existence de ces contraintes aux bords libres met encore plus en évidence les limites de la théorie classique des stratifiés.
- Au paragraphes successifs, on montre une rapide présentation des théories d'ordre supérieur pour les stratifiés et les plaques sandwich, en terminant avec la solution 3D exacte de Pagano.
- Pour brièveté, ce chapitre ne peut pas entrer dans les détails des différentes théories, pour lesquels on renvoie aux textes spécialisés.





## Équations d'équilibre d'un stratifié

- Considérons un élément infinitésimal de plaque, soumis aux actions internes montrées dans les figures suivantes et à des actions externes orthogonales au plan moyen $p(x, y)$.
- Par rapport à la théorie classique, en voulant ici trouver les équations d'équilibre, il faut introduire aussi les résultantes, par unité de longueur, des efforts tranchants, normalement indiqués, en mécanique des stratifiés, avec $Q_x$ et $Q_y$ et définies comme

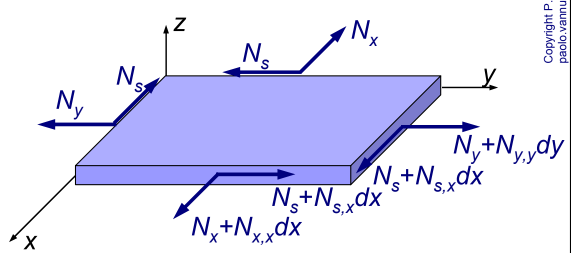
$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{zx} dz \\ \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{zy} dz \end{Bmatrix}.$$

- Par rapport aux figures suivantes, les équations d'équilibre dans les trois directions et à la rotation autour des deux axes s'écrivent facilement et en négligeant les termes infinitésimaux d'ordre supérieur on obtient (les virgules indiquent dérivation):

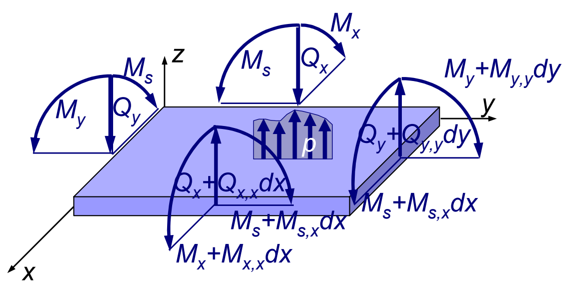
## Équations d'équilibre d'un stratifié



$$
\begin{aligned}
N_{x,x} + N_{s,y} &= 0, \\
N_{s,x} + N_{y,y} &= 0, \\
Q_{x,x} + Q_{y,y} &= -p, \\
M_{x,x} + M_{s,y} &= Q_x, \\
M_{s,x} + M_{y,y} &= Q_y.
\end{aligned}
$$




- Les deux dernières équations définissent les résultantes des efforts tranchants, même lorsqu'elles ne sont pas calculables en termes de contraintes, comme dans la théorie classique des stratifiés.






## Équations d'équilibre d'un stratifié



- En injectant les deux dernières équations dans celle d'équilibre selon $z$, la troisième, on obtient

$$M_{x,xx} + 2M_{s,xy} + M_{y,yy} = -p.$$

- Les conditions au contour concernent les données mécaniques (les résultantes) ou cinématiques (les déplacements).
- Si maintenant on introduit un modèle cinématique et une loi de comportement, on peut lier les résultantes aux composantes de déplacement et exprimer ainsi les équations d'équilibre en termes de ces dernières.
- En particulier, en prenant le modèle de Kirchhoff, celui de la théorie classique, le lien entre résultantes et composantes de déplacement est donné par la loi fondamental des stratifiés:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^o \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix},$$

## Équations d'équilibre d'un stratifié



qui, une fois explicitée en fonction des composantes de déplacement du plan moyen, devient

$$\left\{\begin{array}{c} N_x \\ N_y \\ N_s \\ \hline M_x \\ M_y \\ M_s \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} A_{xx} & A_{xy} & A_{xs} & B_{xx} & B_{xy} & B_{xs} \\ A_{xy} & A_{yy} & A_{ys} & B_{xy} & B_{yy} & B_{ys} \\ A_{xs} & A_{ys} & A_{ss} & B_{xs} & B_{ys} & B_{ss} \\ \hline B_{xx} & B_{xy} & B_{xs} & D_{xx} & D_{xy} & D_{xs} \\ B_{xy} & B_{yy} & B_{ys} & D_{xy} & D_{yy} & D_{ys} \\ B_{xs} & B_{ys} & B_{ss} & D_{xs} & D_{ys} & D_{ss} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} u_{0,x} \\ v_{0,y} \\ u_{0,y}+v_{0,x} \\ \hline -w_{0,xx} \\ -w_{0,yy} \\ -2w_{0,xy} \end{array}\right\}.$$

- L'injection de ces relations dans les équations d'équilibre fournit la généralisation complète, dans le cadre de la théorie classique des stratifiés, des équations des plaques minces de Germain-Lagrange (1811):



## Équations d'équilibre d'un stratifié



$$\begin{gathered} A_{xx}u_{0,xx}+2A_{xs}u_{0,xy}+A_{ss}u_{0,yy}+A_{xs}v_{0,xx}+(A_{xy}+A_{ss})v_{0,xy}+A_{ys}v_{0,yy}- \\ -B_{xx}w_{0,xxx}-3B_{xs}w_{0,xxy}-(B_{xy}+2B_{ss})w_{0,xyy}-B_{ys}w_{0,yyy}=0, \\ A_{xs}u_{0,xx}+(A_{xy}+A_{ss})u_{0,xy}+A_{ys}u_{0,yy}+A_{ss}v_{0,xx}+2A_{ys}v_{0,xy}+A_{yy}v_{0,yy}- \\ -B_{xs}w_{0,xxx}-(B_{xy}+2B_{ss})w_{0,xxy}-3B_{ys}w_{0,xyy}-B_{yy}w_{0,yyy}=0, \\ D_{xx}w_{0,xxxx}+2(D_{xy}+2D_{ss})w_{0,xxyy}+D_{yy}w_{0,yyyy}+4D_{xs}w_{0,xxxy}+4D_{ys}w_{0,xyyy}- \\ -B_{xx}u_{0,xxx}-3B_{xs}u_{0,xxy}-(B_{xy}+2B_{ss})u_{0,xyy}-B_{ys}u_{0,yyy}- \\ -B_{xs}v_{0,xxx}-(B_{xy}+2B_{ss})v_{0,xxy}-3B_{ys}v_{0,xyy}-B_{yy}v_{0,yyy}=p. \end{gathered}$$

- On peut écrire ces équations de façon compacte:

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ p \end{Bmatrix}.$$

- Les $L_{ij}$ sont des opérateurs différentiels définis ainsi:

# Équations d'équilibre d'un stratifié



$$L_{11}=A_{xx}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2A_{xs}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+A_{ss}\frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$$L_{22}=A_{yy}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+2A_{ys}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+A_{ss}\frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

$$L_{33}=D_{xx}\frac{\partial^4}{\partial x^4}+4D_{xs}\frac{\partial^4}{\partial x^3\partial y}+2(D_{xy}+2D_{ss})\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+4D_{ys}\frac{\partial^4}{\partial x\partial y^3}+D_{yy}\frac{\partial^4}{\partial y^4},$$

$$L_{12}=L_{21}=A_{xs}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+(A_{xy}+A_{ss})\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+A_{ys}\frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$$L_{13}=L_{31}=-B_{xx}\frac{\partial^3}{\partial x^3}-3B_{xs}\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}-(B_{xy}+2B_{ss})\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}-B_{ys}\frac{\partial^3}{\partial y^3},$$

$$L_{23}=L_{32}=-B_{xs}\frac{\partial^3}{\partial x^3}-(B_{xy}+2B_{ss})\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}-3B_{ys}\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}-B_{yy}\frac{\partial^3}{\partial y^3}.$$



# Équations d'équilibre d'un stratifié



- Ces équations sont très compliquées, elles sont complètement couplées et ne sont presque jamais utilisées directement.
- Une simplification remarquable, et de grand intérêt pratique, est celle qui concerne un stratifié découplé, **B=O**. Dans ce cas on a

$$A_{xx}u_{0,xx}+2A_{xs}u_{0,xy}+A_{ss}u_{0,yy}+A_{xs}v_{0,xx}+(A_{xy}+A_{ss})v_{0,xy}+A_{ys}v_{0,yy}=0,$$
$$A_{xs}u_{0,xx}+(A_{xy}+A_{ss})u_{0,xy}+A_{ys}u_{0,yy}+A_{ss}v_{0,xx}+2A_{ys}v_{0,xy}+A_{yy}v_{0,yy}=0,$$
$$D_{xx}w_{0,xxxx}+2(D_{xy}+2D_{ss})w_{0,xxyy}+D_{yy}w_{0,yyyy}+4D_{xs}w_{0,xxxy}+4D_{ys}w_{0,xyyy}=p.$$

- Les deux premières équations sont couplées, mais découplées de la troisième, qui peut être résolue indépendamment des autres, conséquence du fait que le comportement de membrane et de flexion sont indépendants.
- Dans l'ultérieure hypothèse que le stratifié soit orthotrope et que les axes d'orthotropie, aussi bien en membrane qu'en flexion, correspondent avec ceux du repère, on a

# Équations d'équilibre d'un stratifié



$$A_{xx}u_{0,xx} + A_{ss}u_{0,yy} + (A_{xy} + A_{ss})v_{0,xy} = 0,$$
$$(A_{xy} + A_{ss})u_{0,xy} + A_{ss}v_{0,xx} + A_{yy}v_{0,yy} = 0,$$
$$D_{xx}w_{0,xxxx} + 2(D_{xy} + 2D_{ss})w_{0,xxyy} + D_{yy}w_{0,yyyy} = p.$$

- En utilisant les relations qui lient les composantes de **A** et **D** respectivement aux modules de l'ingénieur en membrane et en flexion, pages 330 et suivantes, on obtient finalement

$$\frac{E_x^m}{1-\nu_{xy}^m\nu_{yx}^m}u_{0,xx} + G_{xy}^m u_{0,yy} + \left(\frac{\nu_{xy}^m E_y^m}{1-\nu_{xy}^m\nu_{yx}^m} + G_{xy}^m\right)v_{0,xy} = 0,$$
$$\left(\frac{\nu_{xy}^m E_y^m}{1-\nu_{xy}^m\nu_{yx}^m} + G_{xy}^m\right)u_{0,xy} + G_{xy}^m v_{0,xx} + \frac{E_y^m}{1-\nu_{xy}^m\nu_{yx}^m}v_{0,yy} = 0,$$
$$\frac{E_x^f}{1-\nu_{xy}^f\nu_{yx}^f}w_{0,xxxx} + 2\left(\frac{\nu_{xy}^f E_y^f}{1-\nu_{xy}^f\nu_{yx}^f} + 2G_{xy}^f\right)w_{0,xxyy} + \frac{E_y^f}{1-\nu_{xy}^f\nu_{yx}^f}w_{0,yyyy} = \frac{12}{h^3}p.$$



# Équations d'équilibre d'un stratifié



- Ces dernières sont les équations d'équilibre des plaques minces orthotropes, dans les axes d'orthotropie, valables aussi pour le cas de stratifiés couplés.
- Pour les monocouches et les stratifiés quasi-homogènes, les modules en membrane et en flexion sont identiques.
- On vérifie facilement qu'en cas de comportement isotrope les équations se réduisent à

$$2u_{0,xx} + (1-\nu^m)u_{0,yy} + (1+\nu^m)v_{0,xy} = 0,$$
$$(1+\nu^m)u_{0,xy} + (1-\nu^m)v_{0,xx} + 2v_{0,yy} = 0,$$
$$\nabla^4 w_0 = \frac{12(1-\nu^{f^2})}{E^f h^3}p.$$

- La dernière équation est la classique équation des plaques minces de Germain-Lagrange.

# Équations d'équilibre d'un stratifié



- Pour les conditions aux bords, pour les stratifiés il faut considérer non seulement les déplacements selon *z*, mais aussi selon les deux autres axes; la même considération doit être faite pour les caractéristiques mécaniques duales des déplacements.
- Généralement, on considère les deux possibilités de bord en appui simple et de bord encastré.
- En réalité, pour ce qu'on vient de dire, chacune de ces deux possibilités se décline en 4 cas différents, illustrés dans les figures suivantes (tirées du livre de Jones), respectivement pour le cas d'appui simple (symbole S, *supported*) et d'encastrement (symbole C, *clamped*).
- En cas de bord libre, la condition de type $w_0$=0 doit être remplacée par celle de Kirchhoff sur l'effort tranchant:

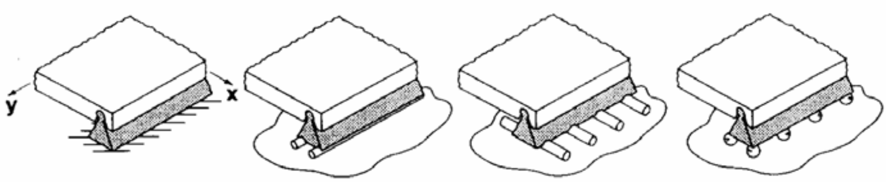
$$M_{n,t} + Q_n = K_n,$$

où $n$ indique la normale sortante du bord et $t$ la tangente au bord; $K_n$ est la force de Kirchhoff et constitue la donnée au bord.



# Équations d'équilibre d'un stratifié

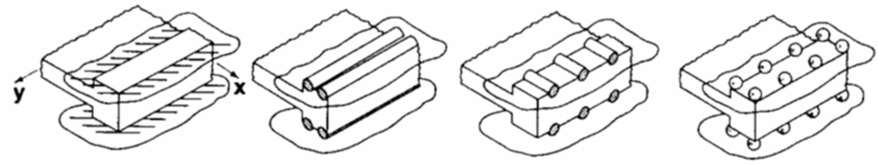





| S1 | S2 | S3 | S4 |
|---|---|---|---|
| $w = 0$ | $w = 0$ | $w = 0$ | $w = 0$ |
| $M_x = 0$ | $M_x = 0$ | $M_x = 0$ | $M_x = 0$ |
| $u = 0$ | $N_x = 0$ | $u = 0$ | $N_x = 0$ |
| $v = 0$ | $v = 0$ | $N_{xy} = 0$ | $N_{xy} = 0$ |

# Équations d'équilibre d'un stratifié






| C1 | C2 | C3 | C4 |
|---|---|---|---|
| $w = 0$ | $w = 0$ | $w = 0$ | $w = 0$ |
| $w_{,x}$ | $w_{,x}$ | $w_{,x}$ | $w_{,x}$ |
| $u = 0$ | $N_x = 0$ | $u = 0$ | $N_x = 0$ |
| $v = 0$ | $v = 0$ | $N_{xy} = 0$ | $N_{xy} = 0$ |



# Équations d'équilibre d'un stratifié



- Considérons maintenant, brièvement, les méthodes de solution des équations vues et certains résultats de littérature concernant les cas de stratifiés en flexion.
- La méthode la plus utilisée pour trouver une solution aux équations d'équilibre est celle de Navier: la charge $p$ et la déflection $w_0$ sont développées en série double de Fourier:

$$p(x,y)=\sum_{m,n=1}^{\infty} p_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b},$$
$$w_0(x,y)=\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}.$$

- Les différentes expressions des coefficients $p_{mn}$ déterminent le type de chargement; par exemple, le cas de chargement uniforme est donné par

$$p_{mn}=\frac{16p}{\pi^2 mn},\quad m \text{ et } n \text{ impair.}$$

# Équations d'équilibre d'un stratifié



- La forme donnée à la déflection $w_0$ permet de prendre en compte automatiquement les conditions d'appui simple sur le bord d'une plaque rectangulaire de côtés $0 \leq x \leq a$ et $0 \leq y \leq b$.
- Une solution exacte s'obtient dans le cas de stratifiés découplés et orthotropes au moins en flexion, avec les axes d'orthotropie parallèles aux côtés. C'est le cas des *cross-ply* symétriques, apr exemple, mais pas seulement.
- Dans ce cas, on vérifie facilement que l'expression précédente de $w_0$ en série double de Fourier est la solution, à savoir elle satisfait les équations au bord et sur le champ

$$D_{xx} w_{0,xxxx} + 2(D_{xy} + 2D_{ss}) w_{0,xxyy} + D_{yy} w_{0,yyyy} = p,$$

si

$$a_{mn} = \frac{1}{\pi^4} \frac{p_{mn}}{D_{xx}\alpha^2 + 2(D_{xy} + 2D_{ss})\alpha\beta + D_{yy}\beta^2}, \quad \alpha = \frac{m^2}{a^2}, \beta = \frac{n^2}{b^2}.$$

- Un fois la fonction $w_0$ connue, on peut remonter aux déformations et donc aux contraintes, couche par couche.



# Équations d'équilibre d'un stratifié



- Considérons à présent le cas d'un stratifié encore découplé, mais non orthotrope en flexion, ou quand même avec les axes d'orthotropie tournés par rapport aux côtés de la plaque.
- L'équation sur le champ est maintenant la suivante, où apparaissent les termes de couplage flexion-torsion, $D_{xs}$ et $D_{ys}$:

$$D_{xx} w_{0,xxxx} + 2(D_{xy} + 2D_{ss}) w_{0,xxyy} + D_{yy} w_{0,yyyy} + 4D_{xs} w_{0,xxxy} + 4D_{ys} w_{0,xyyy} = p.$$

- Les mêmes termes de couplage apparaissent aussi dans les conditions naturelles au bord, voir page 453:

$$M_x = -D_{xx} w_{0,xx} - D_{xy} w_{0,yy} - 2D_{xs} w_{0,xy} = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0, a,$$

$$M_y = -D_{xy} w_{0,xx} - D_{yy} w_{0,yy} - 2D_{ys} w_{0,xy} = 0, \quad \text{pour} \quad y = 0, b.$$

- Or, c'est justement la présence de ces termes de couplage qui a rendu jusqu'ici sans issue la recherche de solutions exactes, même sous forme d'expansion en série.
- En fait, l'expression donnée pour la déflection $w_0$ est un cas typique de séparation des variables, $x$ et $y$.

## Équations d'équilibre d'un stratifié



- Si les termes de couplage $D_{xs}$ et $D_{ys}$ ne sont pas nuls, cette expression ne satisfait plus les équations sur le champ et aux bords, ou si l'on veut, les variables ne sont plus séparables.
- Ce problème se présente non seulement dans la méthode de Navier, mais aussi dans toutes les autres méthodes d'expansion en série essayées jusqu'ici, basées aussi sur des approches différentes, comme la méthode de Rayleigh-Ritz ou celle de Galerkin, et pour différents problèmes et modèles; on le retrouve en analyse de la stabilité et des vibrations, dans la solution tridimensionnelle exacte de Pagano et dans celle pour les plaques sandwich de Verchery-Pham Dang (voir plus avant), etc.
- Dans tous ces cas, la procédure est différente, sur plusieurs point, par rapport à celle vue ci-dessus, mais l'effet de la présence des termes $D_{xs}$ et $D_{ys}$ est le même.
- En définitive, on connaît des solutions analytiques seulement pour le cas de plaques rectangulaires orthotropes avec les axes d'orthotropie parallèles aux côtés.



## Équations d'équilibre d'un stratifié



- Ashton (1967) a utilisé la méthode de Rayleigh-Ritz pour trouver une solution approximée à ce problème, dans laquelle on renonce à satisfaire aux conditions naturelles au bord.
- En utilisant l'expansion en série de Fourier déjà vue, arrêtée à $m$=$n$=7, il a obtenu, pour un stratifié où

$$D_{xx} = D_{yy}, \quad D_{xy} + 2D_{ss} = 1.5D_{xx}, \quad D_{xs} = D_{ys} = -0.5D_{xx},$$

  la valeur de la flèche maximale, pour un chargement uniforme $p$,

$$w_{\max} = 0.00425\frac{a^4 p}{D_{xx}}.$$

- Si par contre on cherche une solution par la méthode de Navier, en ignorant la présence des termes de couplage $D_{xs}$ et $D_{ys}$, on obtient

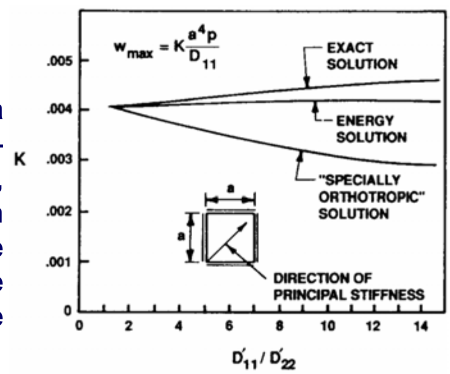
$$w_{\max} = 0.00324\frac{a^4 p}{D_{xx}}.$$

## Équations d'équilibre d'un stratifié



- La solution exacte a été obtenue par Ashton en utilisant une méthode d'identification de la rigidité avec le cas de plaques isotropes en forme de parallélogramme, pour lesquelles on dispose de solutions exactes, et vaut

$$w_{\max} = 0.00452 \frac{a^4 p}{D_{xx}}.$$




- Donc, la solution trouvée par la méthode énergétique (Rayleigh-Ritz) sous-estime la flèche du 6%, tandis que celle approximée en considérant la plaque orthotrope avec les axes d'orthotropie parallèles aux côtés la sous-estime du 28%.
- En figure (Jones), on met en évidence comme l'approximation devient, dans les deux cas, de moins en moins bonne avec l'augmentation du rapport $D_{11}/D_{22}$.



## Équations d'équilibre d'un stratifié



- Considérons à présent le cas d'un *cross-ply* antisymétrique et à couches alternées, donc orthotrope en membrane et flexion, avec les axes parallèles aux côtés, mais couplé; en particulier, on vérifie facilement que dans ce cas on a $A_{xx}=A_{yy}$, $D_{xx}=D_{yy}$, $B_{yy}=-B_{xx}$, tandis que les autres composantes de **B** sont nulles.
- Les équations sont alors

$$A_{xx}u_{0,xx} + A_{ss}u_{0,yy} + (A_{xy} + A_{ss})v_{0,xy} - B_{xx}w_{0,xxx} = 0,$$
$$(A_{xy} + A_{ss})u_{0,xy} + A_{ss}v_{0,xx} + A_{xx}v_{0,yy} + B_{xx}w_{0,yyy} = 0,$$
$$D_{xx}w_{0,xxxx} + 2(D_{xy} + 2D_{ss})w_{0,xxyy} + D_{xx}w_{0,yyyy} - B_{xx}(u_{0,xxx} - v_{0,yyy}) = p.$$

- Whitney (1968) a résolu ces équations pour le cas d'appui simple de type S2 (voir page 460): dans le cas où la charge est donnée par la série de Fourier de page 462, la solution est du type

## Équations d'équilibre d'un stratifié

$$u_0(x,y)=\sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b},$$
$$v_0(x,y)=\sum_{m,n=1}^{\infty} v_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b},$$
$$w_0(x,y)=\sum_{m,n=1}^{\infty} w_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}.$$

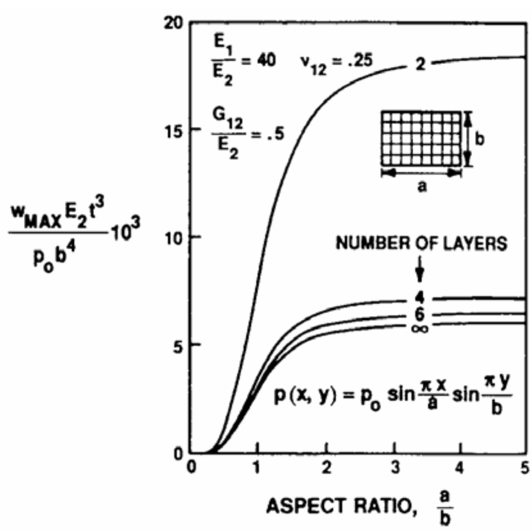
- Si la charge est constituée d'une seule harmonique, alors le système d'équations admet une solution exacte; le cas d'un chargement exprimé par plusieurs harmoniques peut donc être résolu par le principe de superposition des effets.
- Pour étudier les effets du couplage sur la valeur de la solution, Jones a étudié le cas où un stratifié *cross-ply* antisymétrique d'épaisseur totale constante est obtenu avec un nombre croissant de couches, de 2 jusqu'à l'infini (dans ce dernier cas, le couplage tend vers zéro).





## Équations d'équilibre d'un stratifié

- En figure, on montre le diagramme de la flèche maximale en fonction du rapport a/b pour divers cas, lorsque la charge est une simple sinusoïde ($m$=$n$=1).
- Entre le cas d'un stratifié découplé (infinies couches) et celui d'un stratifié avec le couplage maximal (2 couches), la flèche augmente d'environ un facteur 3.
- Le couplage a donc l'effet d'une diminution de la rigidité flexionnelle apparente du stratifié.



## Équations d'équilibre d'un stratifié



- Finalement, considérons le cas d'un *angle-ply* antisymétrique, à couches alternées, donc orthotrope en membrane et flexion, avec les axes parallèles aux côtés, mais couplé; en particulier, on vérifie facilement que dans ce cas on a $B_{xs}$ et $B_{ys}$ différents de zéro, tandis que les autres composantes de **B** sont nulles. Le couplage est donc différent de celui du cas précédent.
- Dans ce cas, les équations sont

$$A_{xx}u_{0,xx}A_{ss}u_{0,yy}+(A_{xy}+A_{ss})v_{0,xy}-3B_{xs}w_{0,xxy}-B_{ys}w_{0,yyy}=0,$$
$$(A_{xy}+A_{ss})u_{0,xy}+A_{ss}v_{0,xx}+A_{yy}v_{0,yy}-B_{xs}w_{0,xxx}-3B_{ys}w_{0,xyy}=0,$$
$$D_{xx}w_{0,xxxx}+2(D_{xy}+2D_{ss})w_{0,xxyy}+D_{yy}w_{0,yyyy}-$$
$$-B_{xs}(3u_{0,xxy}+v_{0,xxx})-B_{ys}(u_{0,yyy}3v_{0,xyy})=p.$$

- Withney (1968) a résolu ce cas pour les conditions d'appui simple de type S3 (voir page 460); si la charge est encore exprimée en série de Fourier, la solution est du type



## Équations d'équilibre d'un stratifié



$$u_0(x,y)=\sum_{m,n=1}^{\infty}u_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b},$$
$$v_0(x,y)=\sum_{m,n=1}^{\infty}v_{mn}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b},$$
$$w_0(x,y)=\sum_{m,n=1}^{\infty}w_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}.$$

- Comme au cas précédent, la solution analytique existe si la charge est représentée par une seule harmonique; dans le cas général, on peut encore utiliser le principe de superposition des effets.
- La même analyse vue auparavant, conduite sur un stratifié avec un nombre de couches qui augmente mais avec une épaisseur totale constante, a été réalisée même dans ce cas par Jones.
- Le diagramme suivant montre le résultat pour une plaque carrée, en fonction de l'angle d'orientation des couches, $\theta$.
- Les mêmes considérations peuvent être faites.

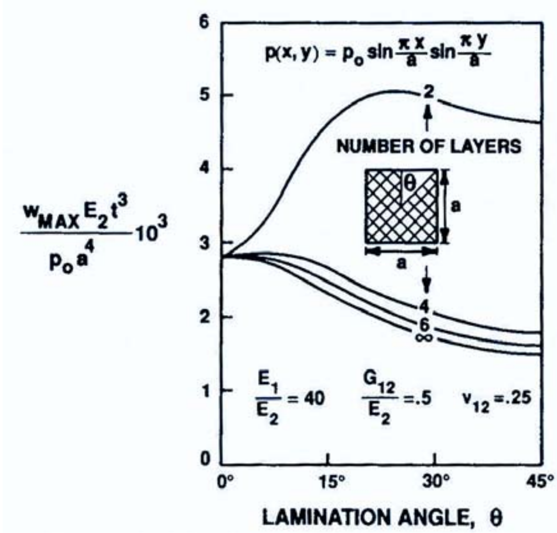
# Équations d'équilibre d'un stratifié



- En particulier, on vérifie facilement que dans un cas pareil on a

$$B_{xs}=\frac{h^2}{2n}Q_{xs},$$
$$B_{ys}=\frac{h^2}{2n}Q_{ys}.$$

- Donc, si le nombre $n$ des couches augmente, les coefficients de couplage diminuent et avec eux leur effet sur la valeur du déplacement.






# Stabilité élastique d'un stratifié



- Considérons à présent la théorie classique de stabilité des stratifiés, celle qui est basée sur le modèle de Kirchhoff et sur une analyse linéarisée, capable de saisir la valeur de la charge critique (si elle existe) et la déformée modale.
- Il y a différentes façons pour arriver à l'écriture des équations de stabilité d'un stratifié.
- Une voie classique (cfr. par exemple l'article de Leissa dans le livre de Turvey et Marshall en bibliographie), est celle de réécrire les équations d'équilibre de la plaque, comme déjà fait au paragraphe précédent, mais en correspondance d'une configuration fléchie de la plaque, proche à la configuration de départ et sous l'action de forces distribuées non seulement orthogonales au plan moyen mais aussi parallèles à celui-ci, $q_x$ et $q_y$.
- En négligeant les termes infinitésimaux d'ordre supérieur, on arrive par des simple passages aux équations d'équilibre suivantes:

## Stabilité élastique d'un stratifié



$$N_{x,x}+N_{s,y}+q_x=Q_x w_{0,x},$$
$$N_{s,x}+N_{y,y}+q_y=Q_y w_{0,y},$$
$$Q_{x,x}+Q_{y,y}+N_x w_{0,xx}+2N_s w_{0,xy}+N_y w_{0,yy}+p=0,$$
$$M_{x,x}+M_{s,y}=Q_x,$$
$$M_{s,x}+M_{y,y}=Q_{y.}$$

- Dans ces équations, on admet que les efforts tranchants $Q_x$ et $Q_y$, aussi bien que les inclinaisons du plan moyen $w_{0,x}$ et $w_{0,y}$, soient petites; en négligeant alors les termes relatifs et en injectant les deux dernières équations dans les trois premières, on parvient à

$$N_{x,x}+N_{s,y}+q_x=0,$$
$$N_{s,x}+N_{y,y}+q_y=0,$$
$$M_{x,xx}+2M_{s,xy}+M_{y,yy}+N_x w_{0,xx}+2N_s w_{0,xy}+N_y w_{0,yy}+p=0.$$



## Stabilité élastique d'un stratifié



- A ce point, on considère que chacune des grandeurs qui apparaissent dans les équations précédentes puisse être écrite comme la somme de deux parties, une partie initiale (indice *i*), qui existe avant l'instabilité, et une partie due à l'instabilité (indice *b*, *buckling*); par exemple

$$N_x=N_x^i+N_x^b.$$

- En outre, on considère que la plaque reste plane jusqu'à l'instabilité et qu'aucune force s'ajoute en phase instable, à savoir que ce soit

$$w_0=w_0^b,\quad q_x=q_x^i,\quad q_y=q_y^i,\quad p=p^i.$$

- Avant l'instabilité, les équations précédentes se réduisent à celles classiques d'équilibre,

$$N_{x,x}^i+N_{s,y}^i+q_x^i=0,$$
$$N_{s,x}^i+N_{y,y}^i+q_y^i=0,$$
$$M_{x,xx}^i+2M_{s,xy}^i+M_{y,yy}^i+p^i=0.$$

## Stabilité élastique d'un stratifié

- Les équations d'équilibre de page 475 se réduisent alors à

$$N^b_{x,x} + N^b_{s,y} = 0,$$
$$N^b_{s,x} + N^b_{y,y} = 0,$$
$$M^b_{x,xx} + 2M^b_{s,xy} + M^b_{y,yy} + N^i_x w_{0,xx} + 2N^i_s w_{0,xy} + N^i_y w_{0,yy} = 0.$$

- Dans l'écriture de ces équations on a négligé les termes

$$N^b_x w_{0,xx} + 2N^b_s w_{0,xy} + N^b_y w_{0,yy}$$

considérés petits par rapport aux trois derniers de la troisième équation. En outre, si on ne les néglige, on ne peut pas parvenir à des équations linéaires, vu que les termes du type $N_x^b$ etc. dépendent de $w_0$.

- Les équations précédentes sont les équations de stabilité des plaques dans leur forme fondamentale.





## Stabilité élastique d'un stratifié

- Si maintenant on fait référence à la théorie classique des stratifiés, on peut, comme déjà fait dans le cas des équations d'équilibre, exprimer les résultantes en termes des composantes de déplacement du plan moyen, page 453, et on obtient alors, par des simples passages, les équations de la stabilité des plaques dans la forme suivante

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} - F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

- Cette dernière équation définit un problème homogène, et les termes $L_{ij}$ sont les mêmes opérateurs différentiels définis à page 455 (par simplicité, on omet ici les indices $i$ et $b$), alors que $F$, qui représente la charge dans le plan moyen, est

$$F = N_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2N_s \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

## Stabilité élastique d'un stratifié



- Les équations précédentes, à cause du couplage membrane-flexion, constituent un système d'équations différentielles aux dérivées partielles du 8ème ordre, comme dans le cas de la théorie classique des coques minces.
- Les équations se simplifient dans le cas d'un stratifié découplé, **B**=**O**: les deux premières équations se réduisent aux classiques équations d'équilibre d'une plaque sollicitée dans son plan, les deux premières équations de page 456, et deviennent découplées de la troisième, qui devient

$$D_{xx}w_{0,xxxx}+4D_{xs}w_{0,xxxy}+2(D_{xy}+2D_{ss})w_{0,xxyy}+4D_{ys}w_{0,xyyy}+$$
$$+D_{yy}w_{0,yyyy}=N_xw_{0,xx}+2N_sw_{0,xy}+N_yw_{0,yy}$$

- Celle-ci est l'équation d'instabilité d'une plaque monocouche anisotrope ou bien, on l'a vu, d'un stratifié découplé; il s'agit d'une équation du 4ème ordre.
- Dans le cas particulier où le comportement de flexion soit



## Stabilité élastique d'un stratifié



orthotrope (celui de membrane n'entre pas en jeu en théorie linéarisée), l'équation ci-dessus se simplifie en

$$D_{xx}w_{0,xxxx}+2(D_{xy}+2D_{ss})w_{0,xxyy}+D_{yy}w_{0,yyyy}=$$
$$=N_xw_{0,xx}+2N_sw_{0,xy}+N_yw_{0,yy}$$

- Les équations précédentes permettent de calculer la charge critique et la forme modale. Les méthodes normalement utilisées sont les mêmes déjà vues pour la solution des équations d'équilibre.
- En particulier, on connaît la solution exacte de la charge critique pour un stratifié rectangulaire, appuyé aux bords, orthotrope en flexion avec les axes d'orthotropie parallèles aux côtés, découplé et soumis seulement à une charge dans son plan du type **N**=($N_x$, $N_y$, 0).
- Dans ce cas, l'équation sur le champ est

$$D_{xx}w_{0,xxxx}+2(D_{xy}+2D_{ss})w_{0,xxyy}+D_{yy}w_{0,yyyy}=N_xw_{0,xx}+N_yw_{0,yy},$$

## Stabilité élastique d'un stratifié



et si l'on utilise encore l'expression de page 462 pour exprimer la déflection $w_0$, on a que les équations dans le champ et aux bords sont satisfaites si le multiplicateur $\lambda$ de la charge est

$$\lambda = \pi^2 \frac{D_{xx}\alpha^2 + 2(D_{xy} + 2D_{ss})\alpha\beta + D_{yy}\beta^2}{N_x\alpha + N_y\beta}, \quad \alpha = \frac{m^2}{a^2}, \beta = \frac{n^2}{b^2}.$$

- Evidemment, le multiplicateur critique de stabilité est la plus petite valeur de $\lambda$; il est difficile de dire *a priori* quel est $\lambda$, car il dépend de $m$, $n$ et des coefficients élastiques $D_{ij}$, outre que des rapports entre $N_x$ et $N_y$ et entre $a$ et $b$.
- Par exemple, si $N_y$=0, à savoir si l'on a compression seulement le long de $x$, alors on a la valeur critique pour $n$=1, mais en ce qui concerne $m$ on ne peut rien dire, en général.
- Considérons (Jones) le cas d'uns tratifé pour lequel

$$D_{xx} = 10D_{yy}, \quad D_{xy} + 2D_{ss} = D_{yy}.$$



## Stabilité élastique d'un stratifié



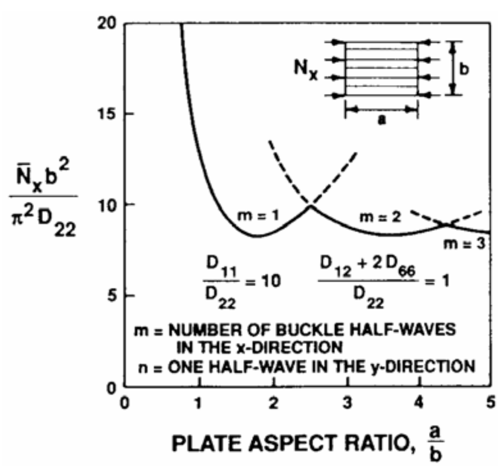
- La valeur de $N_x$ critique en fonction de $m$ et de $a/b$ est en figure.
- On observe que pour $a/b$<~2.5, $m$=1, à savoir le mode a une seule semi onde; pour $a$=$b$ on a

$$N_x^{crit} = 13\frac{\pi^2 D_{yy}}{b^2}.$$

- Pour $a/b$ qui tend vers l'infini, le nombre des semi ondes augmente et la charge critique tend vers

$$N_x^{crit} = 8.32456\frac{\pi^2 D_{yy}}{b^2}.$$

- Pour les autres matériaux, on obtient des résultats analogues.



## Stabilité élastique d'un stratifié



- Le cas de stratifiés découplés mais non orthotropes, ou encore orthotropes mais tournés par rapport aux côtés de la plaque, a été encore traité par Ashton et Waddoups (1969) par la même méthode vue pour la flexion, ou encore par Chamis (1968), par la méthode de Galerkin.
- L'effet des termes de couplage flexion-torsion $D_{xs}$ et $D_{ys}$ est celui de diminuer la charge critique; en définitive, considérer que le stratifié se comporte comme orthotrope en flexion lorsqu'il ne l'est pas, comme on fait souvent en conception, n'est pas une démarche conservative.

- Le cas d'un stratifié *cross-ply* antisymétrique et à couches alternées, déjà traité en flexion, a été considéré et résolu par Jones dans le même cas de la flexion et pour une charge monoaxiale $N_x$.
- Sans entrer dans les détails de la solution, plutôt compliquée, on reporte de suite une figure analogue, pour ce qui concerne la valeur de la charge critique, à celle de page 470 pour la flèche.

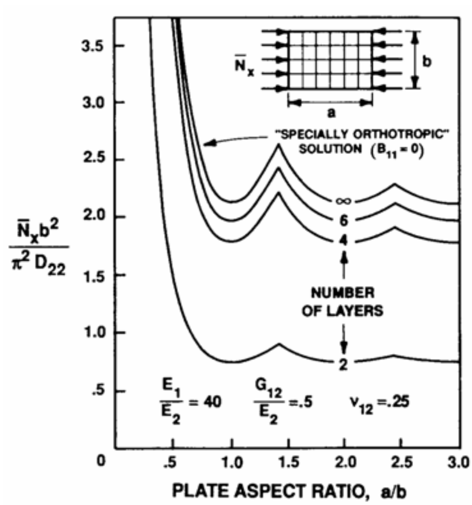


## Stabilité élastique d'un stratifié



- Elle montre la variation de la valeur critique de stabilité de $N_x$, lorsqu'on laisse inchangée l'épaisseur totale et on augmente le nombre de couches.
- Même dans ce cas, l'effet du couplage membrane-flexion est celui de diminuer la charge critique.

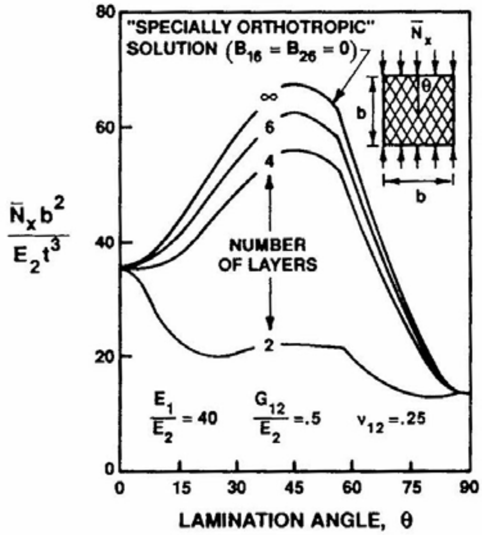
- Withney (1968) a resolu le cas, analogue à celui de page 471, d'un *angle-ply* antisymétrique, à couches alternées, encore soumis à une charge monoaxiale $N_x$, et dans les mêmes conditions vues en flexion.



# Stabilité élastique d'un stratifié



- Encore une fois on n'entre pas dans les détails de la solution (voir Jones), mais on reporte une figure analogue à la précédente, qui montre la variation de la charge critique avec l'angle d'orientation et le nombre de couches, lorsque l'épaisseur totale est inchangée.
- On confirme encore que la présence du couplage membrane-flexion a l'effet de diminuer la charge critique.
- Il faut toutefois donner une précision.






# Stabilité élastique d'un stratifié



- En effet, la présence d'un couplage membrane-flexion a, la plupart des fois, un effet perturbateur sur le comportement de la plaque.
- En fait, on sait que ce couplage provoque des courbures, et donc une déflection, à la suite de charges dans le plan moyen de la plaque.
- Dans d'autres termes, le couplage produit un effet d'imperfection automatique, présente dans le stratifié dès le début du chargement, qui normalement efface le phénomène proprement dit de perte de stabilité d'une configuration fondamentale d'équilibre en correspondance d'une bifurcation de celui-ci.
- Finalement, la présence du couplage produit des déplacements transversaux dès qu'on applique la charge membranale, bien avant l'apparition de l'instabilité.
- La déflection augmente donc progressivement, et il n'existe pas une configuration fondamentale d'équilibre.

## Stabilité élastique d'un stratifié



- L'effet du couplage sur la bifurcation et stabilité est en définitive semblable à celui d'une imperfection géométrique.
- Toutefois, dans certains cas on a encore l'apparition d'une bifurcation de l'équilibre même en présence d'un couplage membrane-flexion.
- Pour plus de détails sur ces aspects, on renvoie au livre de Jones ou à l'article de Leissa déjà cité, où l'on analyse aussi quelles doivent être les forces transversales à appliquer à la plaque couplée pour conserver la configuration plane et donc permettre le phénomène de la bifurcation.



## Vibrations transversales d'un stratifié



- Considérons à présent le cas des vibrations transversales libres de petite amplitude d'un stratifié autour d'une configuration d'équilibre stable.
- Les équations du mouvement pour un tel problème se trouvent simplement de celles vues pour la stabilité, en ajoutant à la charge transversale les forces d'inertie, $-\mu w_{0,tt}$, où $\mu$ est la masse du stratifié par unité de surface et $w_{0,tt}$ est la dérivée seconde du déplacement $w_0$ par rapport au temps.
- En développant encore les calculs comme déjà vu, les équations de page 477 deviennent

$$N_{x,x} + N_{s,y} = 0,$$

$$N_{s,x} + N_{y,y} = 0,$$

$$M_{x,xx} + 2M_{s,xy} + M_{y,yy} + N_x^i w_{0,xx} + 2N_s^i w_{0,xy} + N_y^i w_{0,yy} = \mu w_{0,tt}.$$

- L'indice $i$ reste à identifier la partie de la charge axiale appliquée au stratifié en correspondance de l'équilibre.

## Vibrations transversales d'un stratifié



- En procédant ensuite de la même façon vue pour la stabilité, à savoir en insérant dans les équations ci-dessus le lien entre actions et déplacements propre à la théorie classique, on obtient finalement l'équation cherchée:

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33}-F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

- L'équation ci-dessus définit un problème homogène et les termes $L_{ij}$ sont les mêmes opérateurs différentiels définis à page 455 (pour simplicité, on omet les indices *i* et *b*), tandis que *F* représente la charge, dans le plan moyen et due aux forces d'inertie:

$$F = N_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2N_s \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

- L'équation ci-dessus est utilisée dans la recherche des fréquences propres et des modes propres de la plaque.



## Vibrations transversales d'un stratifié



- Si **N**$^i$=**O**, à savoir si la plaque n'est pas soumise à des forces dans son plan, on parle de fréquences naturelles et dans ce cas

$$F = -\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

- Dans la suite, on introduit brièvement le calcul des fréquences naturelles, à savoir on considérera toujours **N**$^i$=**O**, encore pour les quatre cas déjà vus auparavant pour la flexion et la stabilité.

- Commençons donc avec le cas d'une plaque rectangulaire en appui simple, constituée par un stratifié découplé orthotrope au moins en flexion et avec les axes d'orthotropie parallèles aux côtés.
- Dans ce cas, on obtient encore une solution exacte, en prenant comme expression de la déflection

$$w_0(x,y,t) = a_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \sin\omega_{mn} t.$$

## Vibrations transversales d'un stratifié



- On a donc, de façon classique, séparé la partie dépendant du temps de celles dépendant de la position ou, si l'on veut, le mode, déterminé par le choix de $m$ et $n$, de la fréquence, $\omega_{mn}$.
- L'équation dans le champ dans ce cas est

$$D_{xx}w_{0,xxxx}+2(D_{xy}+2D_{ss})w_{0,xxyy}+D_{yy}w_{0,yyyy}=-\mu w_{0,tt}.$$

- Le choix fait pour $w_0$ satisfait l'équation dans le champ et celles aux bords si la fréquence est

$$\omega_{mn}^2=\frac{\pi^4}{\mu}\left[D_{xx}\alpha^2+2(D_{xy}+2D_{ss})\alpha\beta+D_{yy}\beta^2\right]\quad \alpha=\frac{m^2}{a^2},\ \beta=\frac{n^2}{b^2}.$$

- La fréquence naturelle fondamentale correspond à $m$=$n$=1, comme pour une plaque isotrope. Cette correspondance de modes ne se vérifie pas, toutefois, pour le fréquences supérieures, en général.



## Vibrations transversales d'un stratifié



- Le cas des stratifiés découplés mais pas orthotropes, ou orthotropes mais tournés par rapport aux côtés de la plaque, présente les mêmes problèmes vus pour la flexion et la stabilité, dus aux termes de couplage flexion-torsion $D_{xs}$ et $D_{ys}$; cependant, aucun résultat numérique approximé pour ce cas semble être disponible en littérature.

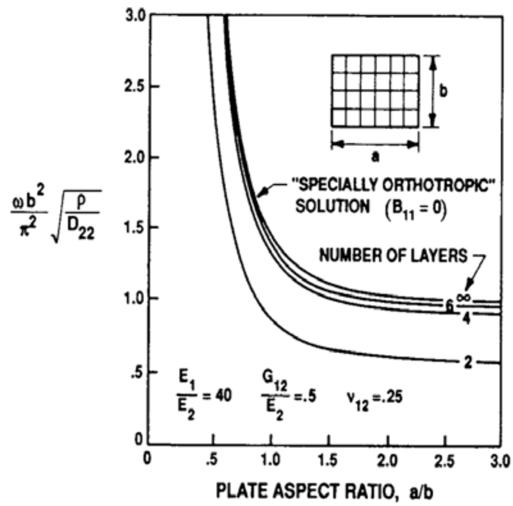
- Le cas d'un *cross-ply* antisymétrique et à couches alternées a été traité par Withney (1968); la solution est plutôt compliquée et on renvoie au livre de Jones pour plus de détails.
- Toutefois, pas comme au cas précédent, la fréquence fondamentale ne correspond pas automatiquement au cas $m$=$n$=1.
- On reporte ci de suite une figure qui, comme déjà fait pour la flexion et la stabilité, montre la variation de la fréquence fondamentale en fonction du rapport $a/b$ pour un stratifié ayant une épaisseur totale constante mais avec un nombre de couches différent.

# Vibrations transversales d'un stratifié



- On observe que l'effet du couplage est celui de reduire la fréquence fondamentale, ce qui confirme ce qu'on a déjà vu aupravant pour flexion et stabilité: dans les deux cas le couplage avait comme effet la diminution de la rigidité apparente en flexion.

- Pour terminer, la cas d'un *angle-ply* antisymétrique, à couches alternées, a été encore resolu par Withney (1968).

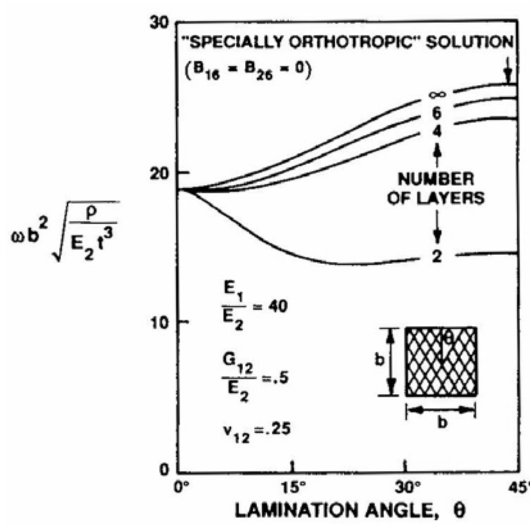





# Vibrations transversales d'un stratifié



- En renvoyant au texte de Jones pour les détails de la solution, pour laquelle valent les mêmes observations faites au cas précédent, on reporte une figure correspondant à la précédente, pour le même type d'analyse, mais en fonction de l'orientation $\theta$ des couches d'une plaque carrée.
- On observe l'effet du couplage, qui provoque encore une diminution de la fréquence fondamentale.



## Le calcul des contraintes de cisaillement



- Considérons maintenant le calcul des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur du stratifié, à savoir les contraintes $\sigma_{zx}$ et $\sigma_{zy}$.
- On a vu que celles-ci ne peuvent pas être calculées en théorie classique à travers les équations de comportement, car dans le modèle classique les déformations correspondantes $\varepsilon_{zx}$ et $\varepsilon_{zy}$ sont nulles, de par la cinématique adoptée (conservation de la normale à la surface moyenne).
- On ouvre ici une parenthèse pour une précision, pas fondamentale mais clarificatrice: ce qu'on vient de dire est une justification classique mais partielle de la nécessité de "régler la question des contraintes de cisaillement".
- En fait, même lorsque l'état de déformation est plan, ce qui arrive en théorie classique comme conséquence de l'hypothèse cinématique de Kirchhoff, les contraintes transversales calculées par le biais de la loi de comportement ne sont pas nécessairement nulles; en particulier, elles ne le sont pas pour un matériau anisotrope quelconque, voir page 299.



## Le calcul des contraintes de cisaillement

Copyright P. Vannucci – UVSQ
paolo.vannucci@meca.uvsq.fr

- Elles le sont, par contre, pour un matériau orthotrope avec l'axe $z$ d'orthotropie, et *a fortiori* pour un matériau isotrope tranverse, avec $z$ parmi les axes d'isotropie transverse, et pour un matériau isotrope.
- Ces 2 derniers sont les cas qui nous intéressent, le premier pour les matériaux composites, le deuxième pour les matériaux classiques.
- Ceci indique que le modèle cinématique à lui seul ne justifie pas la nécessité d'étudier à fond les contraintes de cisaillement, car cette nécessité est plus profonde et dérive de problèmes de cohérence mécanique d'une théorie des plaques.
- Dans d'autres termes, et pour clore cette parenthèse, si l'on appliquait le modèle de Kirchhoff à un matériaux anisotrope quelconque, on pourrait calculer des contraintes de cisaillement, mais elles ne seraient pas celles correctes.
- On a ensuite vu comment calculer, par le biais des équations d'équilibre, les résultantes $Q_x$ et $Q_y$ des contraintes de cisaillement, nécessaires à l'équilibre à chaque fois qu'on a une charge transversale au plan moyen.

## Le calcul des contraintes de cisaillement



- Par les équations indéfinies d'équilibre on peut aussi calculer les contraintes $\sigma_{zx}$ et $\sigma_{zy}$, par une procédure analogue, mais plus élaborée et complexe, de celle utilisée pour les plaques monocouche isotropes.
- En fait, les deux premières composantes de l'équation indéfinie d'équilibre

$$div\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0$$

écrites en hypothèse de forces de masse **b** nulles, sont

$$\sigma_{xx,x} + \sigma_{xy,y} + \sigma_{xz,z} = 0,$$

$$\sigma_{xy,x} + \sigma_{yy,y} + \sigma_{yz,z} = 0.$$

- Alors, pour chaque couche *k* on peut calculer les contraintes dans le plan en fonction des composantes de déplacement, en utilisant la loi de comportement.
- Pour simplifier, il convient de faire cette opération dans le repère matériel de chaque couche (le repère peut donc changer avec les couches).



## Le calcul des contraintes de cisaillement



- Alors, par des simples passages on obtient

$$\sigma_{13} = -[Q_{11}u_{0,11} + Q_{66}u_{0,22} + (Q_{12} + Q_{66})v_{0,12}]x_3 +$$

$$+[Q_{11}w_{0,111} + (Q_{12} + 2Q_{66})w_{0,122}]\frac{x_3^2}{2} + c_1,$$

$$\sigma_{23} = -[Q_{66}v_{0,11} + Q_{22}v_{0,22} + (Q_{12} + Q_{66})u_{0,12}]x_3 +$$

$$+[Q_{22}w_{0,222} + (Q_{12} + 2Q_{66})w_{0,112}]\frac{x_3^2}{2} + c_2.$$

- Les constantes d'intégration peuvent se déterminer seulement si la séquence est symétrique et si on n'a pas des déformations de membrane, en imposant la continuité des contraintes aux interfaces des couches et que la contrainte s'annule sur les surfaces extérieures (absence de charge tangentielle).
- Une solution dans un cas particulier (*cross-ply* ou en tout cas couches toutes avec les axes d'orthotropie parallèles) est donnée par Lekhnitskii.

## Le calcul des contraintes de cisaillement

- Dans tous les autres cas, le système linéaire qu'on obtient pour le calcul des constantes d'intégration est surdéterminé, et donc en général il n'est pas possible de le résoudre.
- Donc, il n'est pas en général possible de calculer les contraintes de cisaillement dans le cadre de la théorie classique.

- Une autre remarque: les équations indéfinies d'équilibre qu'on vient d'utiliser pour les contraintes de cisaillement amènent à un paradoxe, même dans le cas d'une monocouche isotrope.
- En fait, elles montrent que les contraintes de cisaillement ne sont pas nulles, et que donc l'état de contrainte est loin d'être plan, même dans le cas d'une pure déformation de membrane.
- Toutefois, un tel état de contrainte, à résultante nulle sur l'épaisseur, est compatible seulement avec des contraintes tangentielles opposées appliquées sur les deux faces extérieures, contraintes qui donnent une résultante de flexion!





## Le calcul des contraintes de cisaillement

- Dans un sens, les paradoxes du modèle classique ne sont jamais finis...
- En définitive: si, une fois accepté le modèle de Kirchhoff, et donc le fait que les déformations de cisaillement sont nulles, on calcule les contraintes de cisaillement par la loi de comportement d'un matériau au moins orthotrope, avec $z$ axe d'orthotropie, on trouve des contraintes de cisaillement nulles, mais si, avec le même modèle, on utilise les équations indéfinies d'équilibre et la loi de comportement orthotrope dans le calcul des contraintes de cisaillement, celles-ci ne sont nulles même pas pour un état de déformation de membrane, à savoir contant sur l'épaisseur.

- Ces observations nous font comprendre la nécessité d'une théorie plus fine, qui prenne en compte à partir du modèle cinématique l'existence des déformations de cisaillement et donc des contraintes correspondantes.

## Le calcul des contraintes de cisaillement



- Il reste toutefois à établir quel modèle cinématique choisir, car ceci influence le calcul des contraintes de cisaillement.
- Avant d'examiner brièvement cet aspect, on analyse rapidement au paragraphe suivant un problème qui montre l'importance de disposer d'une méthode de calcul fiable pour les contraintes transversales: il s'agit d'un modèle simple, qui met en évidence l'existence des *contraintes aux bords libres*.

- Mais pour clore ce paragraphe, on cite une méthode approximée, développée par Jones, à vrai dire plutôt compliquée, valable seulement pour des plaques rectangulaires appuyées constituées par des stratifiés symétriques avec chaque couche orthotrope et avec les axes d'orthotropie parallèles aux côtés de la plaque.
- On montre seulement le graphique suivant, où l'analyse de la variation de la flèche maximale en fonction du rapport côté/épaisseur montre la nécessité, pour les plaques épaisses, de faire appel à des modèles cinématiques divers du modèle classique, et pas seulement pour le calcul des contraintes de cisaillement.



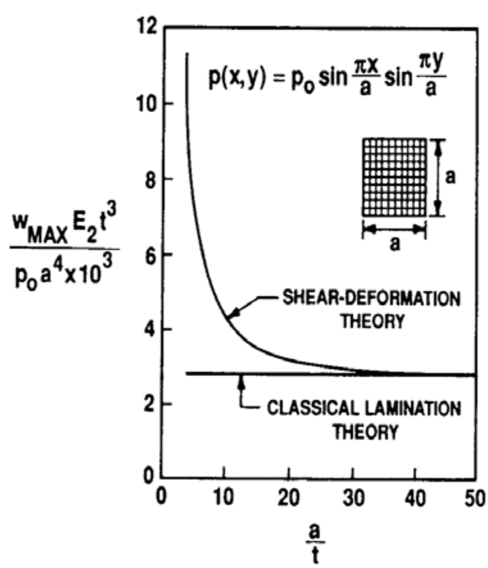
## Le calcul des contraintes de cisaillement



- Le graphique concerne une plaque carrée, à séquence [0°/90°/90°/0°], soumise à une charge sinusoïdale; le matériau des couches est un carbone-époxyde dont les caractéristiques sont

$$E_1 / E_2 = 40, \quad G_{12} / E_2 = 0.6,$$
$$G_{13} / E_2 = 0.5, \quad \nu_{13} = 0.25.$$

- On observe que seulement pour des valeurs très élevés (>~30) du rapport côté/épaisseur la théorie classique donne des résultats corrects pour la flèche maximale.

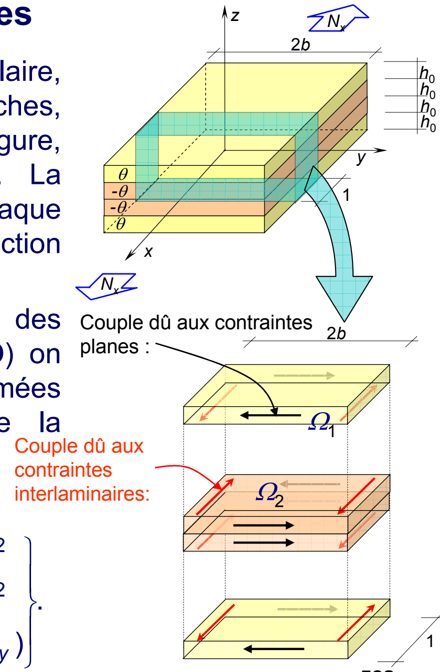


## Les contraintes aux bords libres

- Considérons une plaque rectangulaire, formée par un stratifié à 4 couches, symétrique, *angle-ply* comme en figure, étant $\theta$ l'angle de stratification. La largeur de la plaque est $2b$, et la plaque est soumise seulement à une traction $N_x$, comme en figure.
- En appliquant la loi fondamentale des stratifiés à ce cas (**M=O** et **B=O**) on obtient, pour les déformations exprimées dans le repère d'orthotropie de la couche:

$$\{\varepsilon\}=[T]^{-T}[A]^{-1}\{N\}=$$

$$=\frac{1}{4h_0}\frac{N_x}{Q_{xx}Q_{yy}-Q_{xy}^2}\begin{Bmatrix}Q_{yy}c^2-Q_{xy}s^2\\ Q_{yy}s^2-Q_{xy}c^2\\ -2cs(Q_{xy}+Q_{yy})\end{Bmatrix}.$$








## Les contraintes aux bords libres

- Alors que $\varepsilon_1$ et $\varepsilon_2$ sont les mêmes pour toutes les couches, $\varepsilon_6$ change de signe avec l'orientation, $\pm\theta$.
- Si on calcule les contraintes dans le repère de la plaque, on obtient

$$\{\sigma\}'_k=[Q]'_k\{\varepsilon\}'=[Q]'_k[A]^{-1}\{N\}=\frac{N_x}{4h_0}\begin{Bmatrix}1\\ 0\\ \dfrac{Q_{xs}Q_{yy}-Q_{ys}Q_{xy}}{Q_{xx}Q_{yy}-Q_{xy}^2}\end{Bmatrix}_k.$$

- Donc, $\sigma_s=\sigma_{xy}$ n'est pas nulle. Toutefois, la condition aux bords libres, $y=\pm b$, impose que ce soit

$$\begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \sigma_{xy}\\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\ \pm 1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}\quad\rightarrow\quad\sigma_{xy}=\sigma_{yy}=0.$$

- On a donc une contradiction avec ce qu'on a trouvé ci-dessus par le biais de la loi de comportement, car en général

## Les contraintes aux bords libres



$$\sigma_{xy} = \frac{N_x}{4h_0}\frac{Q_{xs}Q_{yy} - Q_{ys}Q_{xy}}{Q_{xx}Q_{yy} - Q_{xy}^2} \neq 0.$$

- Naturellement, il peut arriver que pour certaines valeurs de l'orientation $\theta$ le numérateur s'annule, mais en général il sera différent de zéro.
- Le résultat trouvé est mécaniquement impossible. En outre, si l'on considère cette fois les côtés de la plaque orthogonaux à l'axe $x$, on obtient encore la même incongruité pour les contraintes $\sigma_{yx}$.
- On a donc un paradoxe mécanique, qu'on peut expliquer avec le modèle de la figure de page 503: en isolant une bande de stratifié de longueur unitaire et en séparant les couches, on voit que chaque pli est soumis à un couple dû à la présence, dans l'épaisseur du pli, des contraintes $\sigma_{xy}$.
- Du moment que $\sigma_{yy}$=0 et que $\sigma_{xx}$ a une distribution constante le long de $y$, ce couple peut être équilibré seulement par d'autres contraintes, celles que les couches s'échangent entre elles.



## Les contraintes aux bords libres

Copyright P. Vannucci – UVSQ
paolo.vannucci@meca.uvsq.fr

- Ces contraintes, appelées contraintes interlaminaires de cisaillement (*shear interlaminar stresses* en anglais) sont du type $\sigma_{xz}$ et telles à équilibrer le couple dû aux contraintes $\sigma_{xy}$:

$$\int_{\Omega_1} \sigma_{xy} dy\, dz + \int_{\Omega_2} 2y\sigma_{xz} dx\, dy = 0.$$

- Donc, par réciprocité, même les contraintes $\sigma_{zx}$ ne sont pas nulles.
- Ce modèle, plutôt élémentaire, explique la nécessité de l'existence de contraintes de cisaillement même dans le cas extrêmement simple qu'on a examiné, dans lequel il n'est pas prévisible, *a priori*, l'existence de ces contraintes.
- Le problème provient de l'avoir considéré un état plan de contraintes, comme conséquence de l'application directe de la loi de comportement au tenseur des déformations qui dérive de l'hypothèse de Kirchhoff, et de l'avoir négligé les contraintes $\sigma_{zz}$.
- En définitive, même si l'état de la déformation est plan, celui de la contrainte ne l'est pas nécessairement.

## Les contraintes aux bords libres



- L'évaluation des contraintes de cisaillement apparaît donc dans toute son importance: si d'un côté, comme on a vu à l'exemple précédent, une cinématique correcte, qui prenne en compte les effets de cisaillement, est importante pour bien définir l'effective rigidité d'un stratifié, globalement beaucoup plus sensible des plaques monocouche au phénomène de la déformation à cisaillement, de l'autre il est important de pouvoir bien évaluer, localement, les contraintes de cisaillement.
- Celles-ci, en fait, doivent être prises en compte, à la rigueur, dans une vérification de résistance du matériau et en outre peuvent donner lieu, surtout près des bords libres, au phénomène de délaminage, à savoir de décollement des couches, provoqué par les contraintes interlaminaires et par celles, qui n'ont pas été mises en évidence par le modèle présenté, de type $\sigma_{zz}$, agissantes dans une direction où, en général, la résistance de la couche est plus faible.
- Il faut donc analyser le problème avec une approche tridimensionnelle.



## Les contraintes aux bords libres



- La loi de comportement d'une couche dans son repère matériel est alors, page 103,

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\\ \sigma_4\\ \sigma_5\\ \sigma_6\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0\\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0\\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\\ \varepsilon_4\\ \varepsilon_5\\ \varepsilon_6\end{Bmatrix}.$$

- En tournant cette relation pour l'écrire dans le repère du stratifié on obtient (on indique par le symbole ' les composantes écrites dans ce repère) :

## Les contraintes aux bords libres

$$\begin{Bmatrix}\sigma'_1\\ \sigma'_2\\ \sigma'_3\\ \sigma'_4\\ \sigma'_5\\ \sigma'_6\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & 0 & 0 & C'_{16}\\ C'_{12} & C'_{22} & C'_{23} & 0 & 0 & C'_{26}\\ C'_{13} & C'_{23} & C'_{33} & 0 & 0 & C'_{36}\\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} & 0\\ 0 & 0 & 0 & C'_{45} & C'_{55} & 0\\ C'_{16} & C'_{26} & C'_{36} & 0 & 0 & C'_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon'_1\\ \varepsilon'_2\\ \varepsilon'_3\\ \varepsilon'_4\\ \varepsilon'_5\\ \varepsilon'_6\end{Bmatrix}.$$

- Si les forces de volume sont nulles et en considérant l'état de sollicitation **N**=($N_x$, 0, 0), pour lequel les composantes de la contrainte ne dépendent pas de $x$, les équations indéfinies d'équilibre se réduisent à

$$\begin{aligned}\sigma'_{6,2}+\sigma'_{5,3}&=0,\\ \sigma'_{2,2}+\sigma'_{4,3}&=0,\\ \sigma'_{4,2}+\sigma'_{3,3}&=0.\end{aligned}$$





## Les contraintes aux bords libres

- En outre, de par les symétries du problème et le fait que les composantes de la contrainte ne sont pas fonction de $x$, les composantes de déplacement doivent avoir la forme

$$\begin{aligned}&u=\lambda x+U(y,z),\quad \lambda>0, && \text{avec}\quad U(y,z)=-U(-y,z)=U(y,-z),\\ &v=V(y,z), && \text{avec}\quad V(y,z)=-V(-y,z)=V(y,-z),\\ &w=W(y,z), && \text{avec}\quad W(y,z)=W(-y,z)=-W(y,-z).\end{aligned}$$

- En fait, on vérifie facilement, en utilisant la loi de comportement, que seulement de cette façon les composantes de la contrainte ne dépendent pas de $x$ et respectent les symétries du problème.
- Si l'on introduit dans les équations d'équilibre la loi de comportement vue et on exprime les composantes de déformation en fonction des composantes de déplacement exprimées comme ci-dessus, on obtient les équations d'équilibre en fonction de $U$, $V$ et $W$, qui décrivent les déplacements:

## Les contraintes aux bords libres



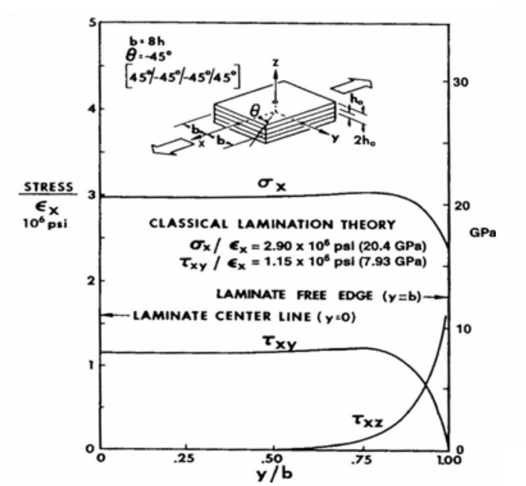
$$C'_{66}U_{,yy}+C'_{55}U_{,zz}+C'_{26}V_{,yy}+C'_{45}V_{,zz}+(C'_{36}+C'_{45})W_{,yz}=0,$$
$$C'_{26}U_{,yy}+C'_{45}U_{,zz}+C'_{22}V_{,yy}+C'_{44}V_{,zz}+(C'_{23}+C'_{44})W_{,yz}=0,$$
$$(C'_{36}+C'_{45})U_{,yz}+(C'_{23}+C'_{44})V_{,yz}+C'_{44}W_{,yy}+C'_{33}W_{,zz}=0.$$

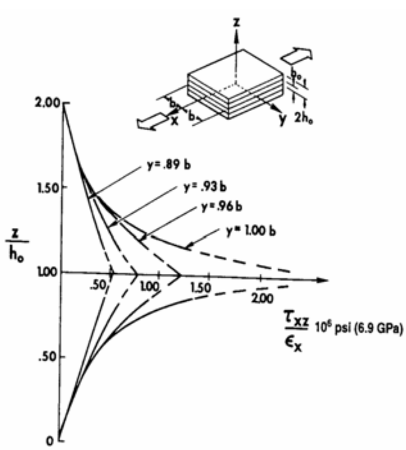
- Ces équations doivent être résolues par voie numérique, une fois les conditions aux bords précisées.
- Jones présente les résultats de cette analyse dans le cas d'un plaque avec $b$=8$h_0$ en carbone-époxyde.
- En particulier, on observe, voir la figure suivante (tirée du Jones, comme les successives), que la présence des contraintes interlaminaires de cisaillement se concentre dans une zone près du bord libre, et d'extension environ égale à l'épaisseur totale du stratifié.
- Le comportement est de type couche limite: dans une zone à côté d'une surface singulière, dans ce cas le bord, il y a des phénomènes qui modifient l'allure régulière des différentes grandeurs.



## Les contraintes aux bords libres

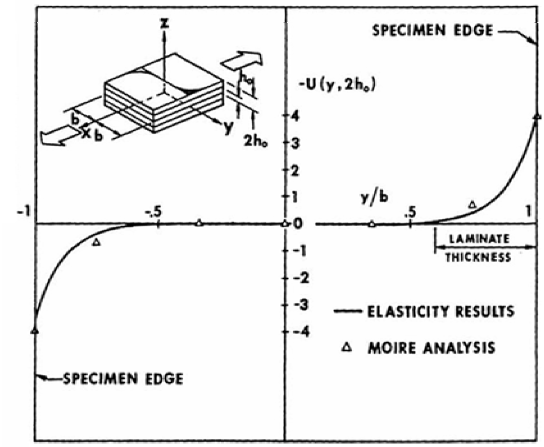




## Les contraintes aux bords libres

- La deuxième figure à la page précédente montre la variation des contraintes de cisaillement sur l'épaisseur.
- On remarque que celles-ci augmentent en s'approchant de l'interface entre les deux couches, qui semble être une surface de singularité pour les contraintes à cisaillement.
- La figure à côté montre le déplacement longitudinal $u(y, z)$ en surface, en fonction de l'abscisse $y$.
- On remarque que même dans ce cas l'effet de bord modifie sensiblement l'allure régulière du déplacement.








## Les contraintes aux bords libres

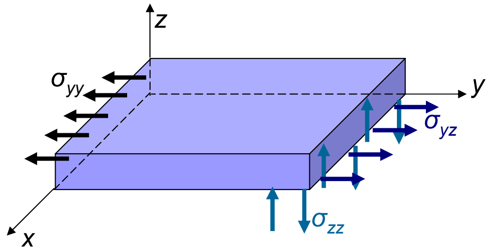
- Le simple modèle analysé ne doit pas tromper: il permet de mettre en évidence l'existence des contraintes interlaminaires de type $\sigma_{xz}$, mais les contraintes de type $\sigma_{yz}$ et $\sigma_{zz}$ peuvent exister aussi, pour le même cas de chargement, provoquées par une différentes séquence de stratification, ou pour d'autres types de charge.
- Par exemple, si les deux couches extérieures sont à 90° et celles intérieures à 0°, alors on met en évidence l'existence d'une contrainte de type $\sigma_{yy}$ sur l'épaisseur des couches égale à

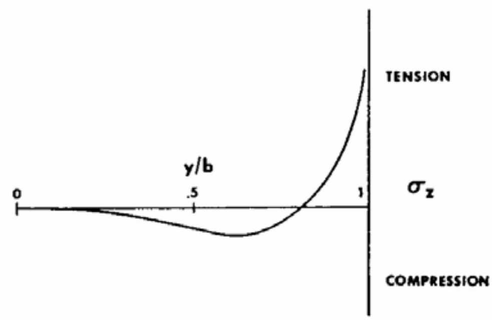
$$\sigma_{yy} = -\frac{N_x}{2h_0}\frac{(Q_{11}-Q_{22})Q_{12}}{(Q_{11}+Q_{22})^2-4Q_{12}^2}.$$

- Or, si l'on isole une portion de couche comme dans la figure suivante, on observe que pour l'équilibre à la rotation autour de l'axe $x$ doivent exister des contraintes normales de type $\sigma_{zz}$, dont la distribution doit être, bien évidemment, auto équilibrée.

## Les contraintes aux bords libres

- Une distribution plausible des contraintes $\sigma_{zz}$ pour ce cas a été proposée par Pipes et Pagano, voir la figure (Jones).
- On voit qu'elle tend vers zéro en dehors d'une bande limite adjacente au bord et d'extension égale à l'épaisseur de la plaque, tandis que près du bord elle tend vers l'infini.
- Ces contraintes sont donc en mesure de provoquer le délaminage au bord, théoriquement même pour des faibles valeurs des forces appliquées.





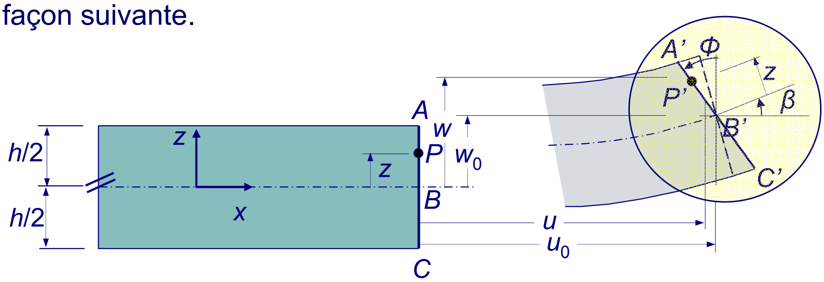



## La théorie de Reissner-Mindlin

- On a déjà dit que les problèmes principaux de la théorie classique dérivent du modèle cinématique même.
- En particulier, des trois hypothèses du modèle de Kirchhoff concernant la cinématique du segment orthogonal au plan moyen, celle qui pose les problèmes principaux est celle qui prévoit qu'il reste encore perpendiculaire à la surface moyenne déformée.
- Il semble donc inévitable la suppression d cette hypothèse, dans le but de mettre en évidence l'existence de déformations de cisaillement dans l'épaisseur de la plaque et ensuite pouvoir en déduire les contraintes correspondantes.
- Dans le modèle qui suit les autres hypothèses sur el comportement du segment orthogonal au plan moyen ne changent pas.
- En particulier, celui-ci reste rectiligne et il ne subit pas des changements de longueur.
- Ces deux hypothèses sont bien respectées, sauf pour les plaques très épaisses. Le modèle qui suit se prête donc raisonnablement bien pour l'analyse des plaques modérément épaisses.

## La théorie de Reissner-Mindlin

- Le modèle mécanique classique, page 292, est donc modifié de la façon suivante.




- La rotation du segment normal n'est plus égale à l'angle $\beta$ que la tangente à la surface moyenne forme avec l'horizontale, mais c'est un angle $\Phi$.
- Il faut tout de suite préciser que l'hypothèse classique soumettait la déformation à une condition très forte, qui avait comme conséquence fondamentale celle d'éliminer la déformation de cisaillement et les déplacements conséquents, et donc





## La théorie de Reissner-Mindlin

globalement elle surestimait l'effective rigidité de la plaque.

- Concernant la rotation $\Phi$, on fait l'hypothèse qu'elle reste petite, de sorte à ce que

$$\sin\Phi \cong \tan\Phi \cong \Phi, \quad \cos\Phi \cong 1.$$

- Il en suit que

$$u(x,y,z) = u_0(x,y) - z\,\Phi_x(x,y),$$
$$v(x,y,z) = v_0(x,y) - z\,\Phi_y(x,y),$$
$$w(x,y) = w_0(x,y) \quad \forall z.$$

- Les inconnues cinématiques sont maintenant, outre à $u_0$, $v_0$ et $w_0$, aussi les rotations $\Phi_x$ et $\Phi_y$; elles sont toutes des fonctions de $x$ et $y$, donc on se réduit encore à un modèle bidimensionnel.
- Si maintenant on calcule les déformations, on obtient

Copyright P. Vannucci – UVSQ
paolo.vannucci@meca.uvsq.fr

$$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x}=\frac{\partial u_0(x,y)}{\partial x}-z\frac{\partial \Phi_x(x,y)}{\partial x},$$
$$\varepsilon_{xy}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial y}+\frac{\partial v(x,y,z)}{\partial x}\right]=$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_0(x,y)}{\partial y}+\frac{\partial v_0(x,y)}{\partial x}\right]-\frac{z}{2}\left[\frac{\partial \Phi_x(x,y)}{\partial y}+\frac{\partial \Phi_y(x,y)}{\partial x}\right],$$
$$\varepsilon_{xz}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial z}+\frac{\partial w(x,y,z)}{\partial x}\right]=\frac{1}{2}\left[-\Phi_x(x,y)+\frac{\partial w_0(x,y)}{\partial x}\right],$$
$$\varepsilon_{yy}=\frac{\partial v(x,y,z)}{\partial y}=\frac{\partial v_0(x,y)}{\partial y}-z\frac{\partial \Phi_y(x,y)}{\partial y},$$
$$\varepsilon_{yz}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial v(x,y,z)}{\partial z}+\frac{\partial w(x,y,z)}{\partial y}\right]=\frac{1}{2}\left[-\Phi_y(x,y)+\frac{\partial w_0(x,y)}{\partial y}\right],$$
$$\varepsilon_{zz}=\frac{\partial w_0(x,y)}{\partial z}=0.$$





La théorie de Reissner-Mindlin

- Donc, maintenant les déformations $\varepsilon_{xz}$ et $\varepsilon_{yz}$ ne sont pas nulles, mais prennent une valeur constante sur l'épaisseur.
- Ceci constitue un défaut du modèle, car si l'on calcule les contraintes correspondantes par le biais de la loi de comportement, celles-ci prennent une valeur constante, si le matériau est au moins orthotrope avec l'axe $z$ axe d'orthotropie, tandis qu'on sait que ces contraintes ne peuvent pas être constantes, et qu'elles s'annulent obligatoirement sur les surfaces de la plaque si celles-ci n'est pas soumise à des charges distribuées tangentielles.
- Le champ des déformations dans le plan est encore écrit comme la somme de deux parties, une due aux déformations du plan moyen et une due aux courbures du plan moyen:

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_s\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x^o\\ \varepsilon_y^o\\ \varepsilon_s^o\end{Bmatrix}+z\begin{Bmatrix}\kappa_x\\ \kappa_y\\ \kappa_s\end{Bmatrix}.$$

Copyright P. Vannucci – UVSQ
paolo.vannucci@meca.uvsq.fr

## La théorie de Reissner-Mindlin



- Par rapport à la théorie classique, la définitions des courbures est cependant différente, car elles ne sont plus directement liées au déplacement $w_0$:

$$\begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_s \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \Phi_x(x,y)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \Phi_y(x,y)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \Phi_x(x,y)}{\partial y} + \dfrac{\partial \Phi_y(x,y)}{\partial x} \end{Bmatrix}.$$

- Si maintenant on introduit les résultantes des actions internes, définies à page 310 pour les actions de membrane et les moments fléchissants et de torsion, et à page 450 pour les efforts tranchants, on remarque d'abord que rien ne change pour le calcul des tenseurs **A**, **B** et **D**: *le comportement élastique n'est pas modifié par le changement de modèle*.



## La théorie de Reissner-Mindlin



- D'ailleurs, en cas contraire, la définition des symétries élastiques d'un stratifié dépendrait, paradoxalement, de la théorie des plaques utilisée.
- Le modèle cinématique, au contraire, change la définition de courbure et introduit des nouvelles variables cinématiques.
- En ce qui concerne les efforts tranchants, leur calcul présuppose d'abord le calcul des contraintes de cisaillement $\sigma_{zx}$ et $\sigma_{zy}$.
- Pour un matériau orthotrope avec $z$ axe d'orthotropie, la matrice de rigidité $[C]$ est celle de page 509, et donc on a que

$$\begin{Bmatrix} \sigma'_4 \\ \sigma'_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C'_{44} & C'_{45} \\ C'_{45} & C'_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon'_4 \\ \varepsilon'_5 \end{Bmatrix}.$$

- Si l'on est dans le repère d'orthotropie, alors $C_{44}=G_{23}$ et $C_{55}=G_{13}$. Si le matériau est isotrope transverse dans le plan 23, comme c'est le cas d'une couche unidirectionnelle avec les fibres en direction $x_1$, alors $C_{55}= C_{66}$ et donc $G_{13}=G_{12}$.

# La théorie de Reissner-Mindlin



- Une remarque: comme déjà dans le cas tridimensionnel, on a indiqué avec le symbole ' les grandeurs tensorielles dans un repère qui n'est pas celui d'orthotropie.
- Pour les composantes planes, en suivant l'habitude, on avait choisi d'utiliser dans un tel cas les symboles *x*, *y* et *s* au lieu de 1, 2 et 6.
- Malheureusement, dans le cas tridimensionnel il n'y a pas, pour la notation de Voigt, une convention analogue pour les indices 3, 4 et 5, et donc on a choisi d'utiliser les indices numériques avec le symbole ' à indiquer le fait qu'on n'est pas, en général, dans le repère d'orthotropie du matériau.
- En particulier, pour un stratifié, avec le symbole ' on indique les grandeurs dans le repère global de la plaque. En définitive, la correspondance entre les composantes avec les indices en lettres et les composantes avec les indices numériques et le symbole ' est la suivante:

$$\begin{Bmatrix}\sigma'_4\\ \sigma'_5\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\sigma_{zy}\\ \sigma_{zx}\end{Bmatrix},\quad \begin{Bmatrix}\varepsilon'_4\\ \varepsilon'_5\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}2\varepsilon_{zy}\\ 2\varepsilon_{zx}\end{Bmatrix}.$$



# La théorie de Reissner-Mindlin



- Les relations constitutives précédentes montrent un paradoxe de cette théorie, en partie déjà cité: les contraintes de cisaillement sont constantes dans l'épaisseur de chaque couches, ne s'annulent pas sur les faces de la plaque et il n'y a pas de continuité des contraintes de cisaillement aux interfaces des couches, car en général

$$\begin{bmatrix}C'_{44} & C'_{45}\\ C'_{45} & C'_{55}\end{bmatrix}_k \neq \begin{bmatrix}C'_{44} & C'_{45}\\ C'_{45} & C'_{55}\end{bmatrix}_{k+1}.$$

- Si par contre on intègre les équations indéfinies d'équilibre, après avoir pris en compte la loi de comportement et l'expression des déformations en fonction des inconnues cinématiques, page 519, on obtient, comme en théorie classique des plaques, une variation parabolique des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur.
- Pour prendre en compte tout ça, dans la théorie de Reissner-Mindlin, dite aussi théorie FSDT (*First-order Shear Deformation Theory*) on introduit une *fonction de pondération* *f*(*z*) continue sur l'épaisseur:

## La théorie de Reissner-Mindlin



$$f(z)=\frac{5}{4}\left[1-\left(\frac{z}{h/2}\right)^2\right].$$

- Cette fonction, dont l'intégrale sur l'épaisseur vaut 5/6 *h*, et qui donc introduit un facteur de réduction de 5/6 dans le calcul des résultantes de cisaillement, permet d'obtenir une variation parabolique des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur et au même temps de respecter les conditions d'annulation de celles-ci en correspondance des surfaces extérieures, mais elle n'assure pas en tout cas la continuité des contraintes de cisaillement aux interfaces des couches.

- Le calcul des résultantes de cisaillement en tenant compte de la fonction de pondération et de la loi de comportement est donc le suivant:



## La théorie de Reissner-Mindlin



$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \frac{5}{4}\sum_{k=1}^{n}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\left[1-\left(\frac{z}{h/2}\right)^2\right](C'_{44}\varepsilon'_4+C'_{45}\varepsilon'_5)dz \\ \frac{5}{4}\sum_{k=1}^{n}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\left[1-\left(\frac{z}{h/2}\right)^2\right](C'_{45}\varepsilon'_4+C'_{55}\varepsilon'_5)dz \end{Bmatrix}.$$

- Les coefficients élastiques sont constants couche par couche tandis que les déformations sont constantes sur toute l'épaisseur; on obtient donc

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} H'_{44} & H'_{45} \\ H'_{45} & H'_{55} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \varepsilon'_4 \\ \varepsilon'_5 \end{Bmatrix},$$

où les *coefficients de rigidité à cisaillement* $H_{ij}$ sont donnés par

$$H'_{ij}=\frac{5}{4}\sum_{k=1}^{n}\left[z_k-z_{k-1}-\frac{4}{3}\frac{z_k^3-z_{k-1}^3}{h^2}\right](C'_{ij})_k,\quad i,j=4,5.$$

## La théorie de Reissner-Mindlin

- Dans le cas des stratifiés à couches identiques, l'expression précédente se simplifie:

$$H'_{ij} = \frac{5}{12}\frac{h}{n^3}\sum_{k=1}^{n} C'_{ij}\left(3n^2 - d_k\right), \quad i,j = 4,5,$$

où les coefficients $d_k$ ont déjà été définis à page 351,

$$d_k = 12k(k-n-1) + 4 + 3n(n+2).$$

- On dispose de certaines solutions analytiques basées sur la méthode de Navier pour les stratifiés symétriques, rectangulaires, appuyés aux bords et avec les axes d'orthotropie en flexion parallèles aux côtés (*e.g*. Whitney, 1972, voir Jones).





## Théories d'ordre supérieur pour les stratifiés

- La théorie de Reissner-Mindlin est meilleure de la théorie classique, parce qu'elle fournit des résultats meilleurs pour la déflection, plus grande car la plaque est plus déformable, et parce qu'elle permet de calculer les contraintes de cisaillement.
- Toutefois, elle n'est pas encore complètement satisfaisante, à plusieurs égards; par exemple, elle n'assure pas la continuité des contraintes de cisaillement aux interfaces des couches et ne permet pas le calcul de la contrainte $\sigma_{zz}$, qu'on a vu être importante pour les phénomènes de délaminage aux bords libres.
- En outre, l'évaluation de la déflection $w_0$, même si améliorée par rapport à la théorie classique, ne possède pas encore une précision suffisante.
- Pour ces raisons, de nombreuses théories d'ordre supérieur pour la modélisation des stratifiés ont été proposées dans le temps.
- Nous ne pouvons pas approfondir ici ces théories, très spécifiques.

## Théories d'ordre supérieur pour les stratifiés



- Toutefois, on veut ici donner seulement un aperçu très rapide de l'état de l'art en matière de théories pour les stratifiés.
- En général, le théories pour les stratifiés se distinguent en:
  - théories monocouche équivalente (ESL: *equivalent single layer*); aussi bien la théorie classique que celle de Reissner-Mindlin font partie de cette catégorie;
  - théories couche par couche (LW: *layer-wise theory*).
- Appartiennent à la première catégorie toutes les théories dans lesquelles on cherche de réduire le comportement du stratifié à celui d'une monocouche équivalente.
- Elles sont caractérisées par le fait que le nombre des variables cinématiques ne dépend pas du nombre des couches.
- Appartiennent à la seconde catégorie les théories dans lesquelles la description des déplacements dans chaque couche est faite par des fonctions propres à la couche et indépendantes de celles des autres couches.



## Théories d'ordre supérieur pour les stratifiés

Copyright P. Vannucci – UVSQ
paolo.vannucci@meca.uvsq.fr

- De par le fait d'utiliser un champ de déplacements définit couche par couche, ces théories sont en général plus précises que les autres; elles sont cependant aussi plus lourdes du point de vue du calcul.
- Les conditions de continuité aux interfaces peuvent être imposées facilement dans les théories du second type.
- Parmi les théories ESL, on rappelle seulement la théorie TSDT (*Third-order Shear Deformation Theory*), Reddy, 1983, dans laquelle la normale au plan moyen tourne et de déforme selon une cubique en *z*, de sorte à obtenir une variation parabolique des déformations, et donc des contraintes, sur l'épaisseur, et les théories de type Zig-Zag (Di Sciuva, 1984, Murakami, 1986), où le champ de déplacements dans les couches est différent mais on assure leur continuité aux interfaces.
- Une autre distinction qu'on fait souvent est celle relative à la formulation d'une théorie.

## Théories d'ordre supérieur pour les stratifiés



- Généralement, on distingue les théories basées sur une formulation en déplacements, et qui font donc usage d'un principe variationnel de type principe des travaux virtuels, de celles qui utilisent un principe mixte, où l'on définit comme champs indépendants certaines composantes de déplacement et de contrainte; dans ce cas, on fait appel au principe de Hellinger-Reissner pour la formulation variationnel du problème.
- Une ample discussion des théories possibles peut être trouvée en littérature dans certains travaux de Reddy et de Carrera, auxquels on renvoie.
- A titre d'exemple, on montre ci de suite un tableaux tiré d'un article de Carrera et Ciuffreda (*A unified formulation to assess theories of multilayered plates for various bending problems*, Composite Structures, 69, 2005).
- On y compare les valeurs de la flèche maximale pour deux *cross-ply* carrés à 3 et à 4 couches, les deuxième étant antisymétrique (et couplé).



## Théories d'ordre supérieur pour les stratifiés



- Les valeurs en question sont calculées avec 38 théories différentes, en partant de la théorie classique, en bas (CLT, *Classical Lamination Theory*), jusqu'à la solution exacte en élasticité tridimensionnelle (voir ci après, la solution de Pagano).
- Les résultats sont donnés pour deux valeurs du rapport *a/h*, 4 et 6.
- On remarque que la théorie classique sousestime de façon inacceptable le déplacement, tandis que la FSDT, même si pas encore satisfaisante, donne une évaluation nettement meilleure.
- Ceci montre que la théorie classique surestime de façon excessive la rigidité.

| | $a/h = 4$ | | $a/h = 6$ | |
|---|---|---|---|---|
| | $N_l = 3$ | $N_l = 4$ | $N_l = 3$ | $N_l = 4$ |
| 3D[23] | 2.887 | 4.181 | 1.635 | 2.556 |
| LM4 | 2.887 | 4.181 | 1.625 | 2.556 |
| LM3 | 2.887 | 4.181 | 1.635 | 2.556 |
| LM2 | 2.891 | 4.181 | 1.635 | 2.556 |
| LM1 | 3.539 | 4.710 | 1.880 | 2.803 |
| EMZC3 | 2.881 | 4.102 | 1.634 | 2.514 |
| EMZC2 | 2.831 | 3.478 | 1.602 | 2.195 |
| EMZC1 | 2.904 | 3.300 | 1.634 | 2.095 |
| EMZC3d | 2.898 | 4.124 | 1.637 | 2.516 |
| EMZC2d | 2.848 | 3.488 | 1.602 | 2.195 |
| EMZC1d | 2.904 | 3.306 | 1.634 | 2.098 |
| EMC4 | 2.721 | 3.885 | 1.534 | 2.391 |
| EMC3 | 2.744 | 3.696 | 1.543 | 2.285 |
| EMC2 | 2.244 | 3.158 | 1.284 | 2.031 |
| EMC1 | 3.515 | 3.681 | 1.844 | 2.257 |
| EMC3d | 2.717 | 3.869 | 1.529 | 2.381 |
| EMC2d | 2.744 | 3.660 | 1.542 | 2.268 |
| EMC1d | 2.109 | 3.029 | 1.225 | 1.972 |
| EMC1d | 2.196 | 3.142 | 1.258 | 2.014 |
| LD4 | 2.887 | 4.180 | 1.634 | 2.556 |
| LD3 | 2.887 | 4.180 | 1.634 | 2.556 |
| LD2 | 2.864 | 4.165 | 1.629 | 2.553 |
| LD1 | 2.783 | 4.058 | 1.583 | 2.495 |
| EDZ3 | 2.876 | 4.089 | 1.633 | 2.506 |
| EDZ2 | 2.781 | 3.377 | 1.583 | 2.150 |
| EDZ1 | 2.798 | 3.170 | 1.586 | 2.037 |
| EDZ3d | 2.893 | 4.110 | 1.636 | 2.507 |
| EDZ2d | 2.798 | 3.392 | 1.586 | 2.149 |
| EDZ1d | 2.798 | 3.177 | 1.586 | 2.040 |
| ED4 | 2.684 | 3.830 | 1.514 | 2.361 |
| ED3 | 2.687 | 3.595 | 1.514 | 2.238 |
| ED2 | 2.074 | 2.984 | 1.219 | 1.952 |
| ED1 | 2.091 | 2.924 | 1.209 | 1.917 |
| ED4d | 2.703 | 3.842 | 1.517 | 2.361 |
| ED3d | 2.703 | 3.606 | 1.517 | 2.238 |
| ED2d | 2.090 | 2.988 | 1.211 | 1.950 |
| FSDT | 2.091 | 2.924 | 1.211 | 1.919 |
| CLT | 0.5075 | 1.115 | 0.5075 | 1.115 |

## La théorie de Verchery-Pham Dang pour les sandwich



- Les panneaux sandwich sont caractérisés par le fait que, tandis que les deux peaux, les couches extérieures, sont en général rigides et minces, la couche centrale, l'âme, est souvent épaisse et souple.
- Dans ce cas il est nécessaire de disposer d'une bonne théorie, qui prenne en compte les déformations de cisaillement.
- Il existe différentes théories *ad-hoc* pour les plaques sandwich (dans ce but, on renvoie au texte en bibliographié édité par A. Vautrin).
- Ici, on veut rapidement présenter la théorie de Verchery-Pham Dang (1976), qui est une des premières théories mixtes pour les plaques et qui mène à une solution analytique, par l'approche de Navier, pour les plaques rectangulaires appuyées sur le contour, orthotropes et avec les axes d'orthotropie parallèles aux côtés.
- Sans rentrer dans les détails, dans le modèle de Verchery et Pham Dang, les variables indépendantes sont les déplacements dans le plan et les contraintes $\sigma_{i3}$, i=1,2.
- La contrainte $\sigma_{33}$ est calculée grâce aux équations d'équilibre.



## La théorie de Verchery-Pham Dang pour les sandwich



- Le champ des déplacements est considéré continu aux interfaces, constant dans les peaux et linéairement variable dans l'âme. Cette hypothèse est justifiée par la petite épaisseur des peaux.
- On considère ensuite que l'âme travaille seulement à cisaillement et on assigne les variations des contraintes de cisaillement.
- Ces dernières peuvent être de deux types: constantes dans l'âme et linéaires dans les peaux, ou bien constantes dans l'âme et quadratiques dans les peaux.
- Par cette théorie on peut prendre en compte aussi bien la continuité des déplacements que celle des contraintes de cisaillement et de $\sigma_{33}$ aux interfaces.
- Les équations d'équilibre et les conditions au bord associées sont récupérées par le biais d'une formulation variationnelle mixte.
- Pour plus de détails, on renvoie à l'article: *Pham Dang, T., Verchery, G.: Théorie des plaques sandwich assurant la continuité du déplacement et de la contrainte aux interfaces. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Paris, 2 A, 1976.*

## La théorie tridimensionnelle de Pagano



- Pour clore ce chapitre, on cite rapidement la théorie élaborée en 1969 par N. J. Pagano dans un célèbre article: *Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates* (Journal of Composite Materials, 4, 1970).
- L'importance de cette théorie est dans le fait qu'elle est une solution exacte tridimensionnelle en théorie de l'élasticité linéaire.
- Elle concerne le calcul de plaques stratifiées ou sandwich, mais elle est applicable aussi aux plaques monocouches, et n'a pas de restrictions par rapport à l'épaisseur.
- Chaque couche de la plaque doit être orthotrope et avoir les axes d'orthotropie parallèles aux côtés; la restriction usuelle, plusieurs fois déjà commentée, est donc encore plus forte dans ce cas, car elle concerne non seulement l'entière plaque, mais chaque couche.
- La solution est trouvée grâce à une démarche qui fait appel aux auto-fonctions de type exponentiel et trigonométrique, et il faut résoudre un système d'équations différent pour chacune des



## La théorie tridimensionnelle de Pagano



harmoniques dans lesquelles un chargement orthogonale à la plaque est décomposé, ce qui peut comporter des complications numériques.

- Cependant, la solution de Pagano est très utilisée comme solution de référence, car elle est exacte dans le cadre de l'élasticité linéaire et en plus elle est une solution tridimensionnelle, dans laquelle donc on ne fait pas d'hypothèses cinématiques sur le comportement de la plaque.
- Un point débattu de la solution de Pagano est celui des conditions aux bords, qui traduisent la condition bidimensionnelle d'appui simple.