

### Composants de vitesse de l'air relative à une typique

Les charges aérodynamiques transversales sont obtenues dans l'état déformé de la pôle. Par conséquent, les composantes de la vitesse doivent être définies dans le système de coordonnées rotatif fixe de la lame ( $\hat{e}_{x4k}, \hat{e}_{y4k}, \hat{e}_{z4k}$ ).

La vitesse relative nette du flux d'air a deux composantes :

- ✚ la vitesse d'avancement ( $\mu\Omega R$ ) et le flux induit ( $\lambda\Omega R$ ) ;
- ✚ la vitesse due au mouvement de la lame.

Soit  $\vec{V}_F$  est la vitesse libre de l'air défini dans le plan du moyeu. Il est donné comme

$$\vec{V}_F = \Omega R \mu \hat{e}_{xH} - \Omega R \lambda \hat{e}_{zH} = \Omega R \mu \cos\psi \hat{e}_{x1} - \Omega R \mu \sin\psi \hat{e}_{y1} - \Omega R \lambda \hat{e}_{z1} \quad (4.35)$$

La vitesse au point "P" sur l'axe de référence due au mouvement de la lame dans le système 1k est donnée par (à partir de l'équation 4.13) :

$$\vec{v}_P = \Omega \{ (-x\zeta_k \dot{\zeta}_k - x\beta_P \dot{\beta}_k - x\zeta_k) \hat{e}_{x1} + [(e+x-x\beta_k\beta_P+x\dot{\zeta}_k) \hat{e}_{y1}] + x\dot{\beta}_k \hat{e}_{z1} \} \quad (4.36)$$

Le vecteur relatif de la vitesse de l'air relatif à la section transversale typique du bidon de lame est écrit :

$$\vec{V}_{net-air1k} = \vec{V}_F - \vec{v}_P \quad (4.37)$$

En utilisant les relations de transformation données dans les équations 4.05 à 4.08, la vitesse nette dans le système 4k peut s'écrire :

$$\vec{V}_{net-air4k} = [T_{43}][T_{32}][T_{21}]\vec{V}_{net-air1k} \quad (4.38)$$

La vitesse nette de l'air peut être écrite sous forme symbolique :

$$\vec{V}_{net-air4k} = U_R \hat{e}_{x4} - U_T \hat{e}_{y4} - U_P \hat{e}_{z4} \quad (4.39)$$

En utilisant les équations 4.35 à 4.38, on obtient les composantes radiales, tangentielles et perpendiculaires de vitesse (pour des raisons de commodité, les grandeurs de longueur sont non dimensionnées par rapport au rayon du rotor R et les dérivées temporelles sont non dimensionnées avec la vitesse angulaire du rotor  $\Omega$ ).

$$U_R = \Omega R \{ (1 - \beta_P \beta_k) \mu \cos\psi_k - \zeta_k \mu \sin\psi_k - (\beta_P + \beta_k) \lambda - e \zeta_k \} \quad (4.40)$$

$$U_T = \Omega R \{ \zeta_k \mu \cos\psi_k + \mu \sin\psi_k - \zeta_k (\beta_P + \beta_k) \lambda + x \dot{\zeta}_k + x + e - x \beta_P \beta_k - x \zeta_k^2 \} \quad (4.41)$$

$$U_P = \Omega R \{ (\beta_P + \beta_k) \mu \cos\psi_k + (1 - \beta_P \beta_k) \lambda + x \dot{\beta}_k + x \zeta_k (\beta_P + \beta_k) \} \quad (4.42)$$

Il est à noter que les composantes de la vitesse  $U_T$  et  $U_P$  représentent la vitesse d'approche dans les directions, comme le montre la figure 4.09.

Les composantes de la vitesse peuvent être simplifiées en négligeant les termes d'ordre supérieur par rapport au terme en tête. Les expressions finales pour les composantes de la vitesse de l'air sont données par :

$$U_T = \Omega R \{ \zeta_k \mu \cos \psi_k + \mu \sin \psi_k + x \dot{\zeta}_k + x + e \} \quad (4.43)$$

$$U_P = \Omega R \{ (\beta_P + \beta_k) \mu \cos \psi_k + \lambda + x \dot{\beta}_k + x \zeta_k (\beta_P + \beta_k) \} \quad (4.44)$$

### Charges aérodynamiques et racine des moments de la lame

Les forces aérodynamiques de portance et de traînée agissant sur une section transversale typique sont résolues le long du système de coordonnées transversales de la lame, comme le montre la figure 4.09. Elles sont données par :

$$F_{y4k} = -L \sin \phi - D \cos \phi \quad (4.45)$$

$$F_{z4k} = L \cos \phi - D \sin \phi \quad (4.46)$$

En supposant que la traînée soit très faible par rapport à la portance, ainsi que l'angle induit, les charges aérodynamiques en coupe peuvent se rapprocher de :

$$F_{y4k} \cong -L \phi - D \quad (4.47)$$

$$F_{z4k} \cong L \quad (4.48)$$

En substituant les équations 4.33 et 4.34, les charges aérodynamiques sectionnelles peuvent s'écrire :

$$F_{y4k} = -\frac{1}{2} \rho a c \left( U_P U_T \theta_{con} - U_P^2 + \frac{U_T^2 C_{d0}}{a} \right) \quad (4.49)$$

$$F_{z4k} = \frac{1}{2} \rho a c (U_T^2 \theta_{con} - U_P U_T) \quad (4.50)$$

La force aérodynamique le long de l'axe  $x_{4k}$  étant prise comme 0.

Le moment aérodynamique autour de la charnière à la racine peut être obtenu en utilisant les deux forces dans le système  $4k$ , qui est écrit comme :

$$Q_A = \int_0^l x \hat{e}_{x4k} X (F_{y4k} \hat{e}_{y4k} + F_{z4k} \hat{e}_{z4k}) dx \quad (4.51)$$

Où  $l = (R - e)$  est la longueur de la lame. En substituant les équations 4.49 et 4.50 aux forces aérodynamiques et en utilisant les équations 4.43 et 4.44, on peut obtenir le moment aérodynamique autour de la charnière. Les composantes du moment aérodynamique sont données :

$$Q_{Ay4k} = - \int_0^l x F_{z4k} dx \quad (4.52)$$

$$Q_{Az4k} = \int_0^l x F_{y4k} dx \quad (4.53)$$

En utilisant la relation de transformation donnée dans l'équation 4.08, les facteurs aérodynamiques peuvent être transformés en composants dans le système  $3k$ .

En négligeant les termes d'ordre supérieur, on peut l'exprimer comme :

$$Q_{Ay3k} = Q_{Ay4k} \quad (4.54)$$

$$Q_{Az3k} \cong Q_{Az4k} - \beta_k \zeta_k Q_{Ay4k} \quad (4.55)$$

#### 4.2.9.1 Charges aérodynamiques

Les expressions détaillées de ces moments aérodynamiques dans le mouvement des battements et des traînées sont données ci-après.

Les charges aérodynamiques sont obtenues à l'aide d'un modèle aérodynamique quasi-stable. La lame est supposée être une lame droite ayant une torsion nulle. Un modèle d'entrée uniforme basé sur la théorie de la quantité de mouvement est utilisé. Les zones de décrochage, de compressibilité et d'écoulement inverse n'ont pas été prises en compte.

$$\begin{aligned}
Q_{Ay3k} = \frac{\rho a \Omega^2 R^4}{2} & \left\{ -\theta_{con} \left\{ \frac{\bar{l}^4}{4} + 2\bar{e} \frac{\bar{l}^3}{3} + \bar{e}^2 \frac{\bar{l}^2}{2} + 2 \left( \frac{\bar{l}^3}{3} + \bar{e} \frac{\bar{l}^2}{2} \right) \mu \sin \psi_k + \frac{\bar{l}^2}{2} (\mu \sin \psi_k)^2 \right. \right. \\
& + 2\dot{\zeta}_k \left( \frac{\bar{l}^4}{4} + 2\bar{e} \frac{\bar{l}^3}{3} + \frac{\bar{l}^3}{3} \mu \sin \psi_k \right) + 2\zeta_k \mu \cos \psi_k \left( \frac{\bar{l}^3}{3} + \bar{e} \frac{\bar{l}^2}{2} + \frac{\bar{l}^2}{2} \mu \sin \psi_k \right) \left. \right\} \\
& + \dot{\beta}_k \left( \frac{\bar{l}^4}{4} + 2\bar{e} \frac{\bar{l}^3}{3} + \frac{\bar{l}^3}{3} \mu \sin \psi_k \right) \\
& + (\beta_P + \beta_k) \mu \cos \psi_k \left( \frac{\bar{l}^3}{3} + \bar{e} \frac{\bar{l}^2}{2} + \frac{\bar{l}^2}{2} \mu \sin \psi_k \right) + \lambda \left( \frac{\bar{l}^3}{3} + \bar{e} \frac{\bar{l}^2}{2} + \frac{\bar{l}^2}{2} \mu \sin \psi_k \right) \\
& + \lambda \frac{\bar{l}^3}{3} \dot{\zeta}_k + \lambda \dot{\zeta}_k \frac{\bar{l}^2}{2} \mu \cos \psi_k \left. \right\} \\
& + \frac{\rho a \Omega^2 R^4}{2} \left\{ -\theta_{con} \left\{ 2\zeta_k \dot{\zeta}_k \frac{\bar{l}^3}{3} \mu \cos \psi_k + \zeta_k^2 \frac{\bar{l}^2}{2} (\mu \cos \psi_k)^2 \right\} \right. \\
& + \zeta_k (\beta_P + \beta_k) \left( \frac{\bar{l}^4}{4} + \bar{e} \frac{\bar{l}^3}{3} + \frac{\bar{l}^3}{3} \mu \sin \psi_k \right) + \dot{\zeta}_k (\beta_P + \beta_k) \frac{\bar{l}^3}{3} \mu \cos \psi_k \\
& \left. + (\beta_P + \beta_k) \zeta_k \frac{\bar{l}^2}{2} (\mu \cos \psi_k)^2 + \zeta_k \dot{\beta}_k \frac{\bar{l}^3}{3} \mu \cos \psi_k \right\}
\end{aligned} \quad (4.56)$$

L'expression du moment peut être écrite en deux parties :

$$Q_{Ay3k} = Q_{Ay3k}^L + Q_{Ay3k}^{NL} \quad (4.57)$$

Où l'exposant "L" représente le terme linéaire et NL représente le terme non linéaire.

$$\begin{aligned}
Q_{Ay3k} = \frac{\rho a \Omega^2 R^4}{2} & \left\{ -\frac{C_{d0}}{\alpha} \left\{ \frac{\bar{l}^4}{4} + 2\bar{e} \frac{\bar{l}^3}{3} + \bar{e}^2 \frac{\bar{l}^2}{2} + 2 \left( \frac{\bar{l}^3}{3} + \bar{e} \frac{\bar{l}^2}{2} \right) \mu \sin \psi_k + \frac{\bar{l}^2}{2} (\mu \sin \psi_k)^2 \right. \right. \\
& + 2\dot{\zeta}_k \left( \frac{\bar{l}^4}{4} + 2\bar{e} \frac{\bar{l}^3}{3} + \frac{\bar{l}^3}{3} \mu \sin \psi_k \right) + 2\zeta_k \mu \cos \psi_k \left( \frac{\bar{l}^3}{3} + \bar{e} \frac{\bar{l}^2}{2} + \frac{\bar{l}^2}{2} \mu \sin \psi_k \right) \left. \right\} \\
& + \dot{\beta}_k 2\lambda \frac{\bar{l}^3}{3} + \mu \cos \psi_k (\beta_P + \beta_k) \frac{\bar{l}^2}{2} 2\lambda + \frac{\bar{l}^2}{2} \lambda^2 \\
& - \theta_{con} \left\{ \dot{\beta}_k \left( \frac{\bar{l}^4}{4} + 2\bar{e} \frac{\bar{l}^3}{3} + \frac{\bar{l}^3}{3} \mu \sin \psi_k \right) \right. \\
& + (\beta_P + \beta_k) \mu \cos \psi_k \psi_k \left( \frac{\bar{l}^3}{3} + \bar{e} \frac{\bar{l}^2}{2} + \frac{\bar{l}^2}{2} \mu \sin \psi_k \right) \\
& + \lambda \left( \frac{\bar{l}^3}{3} + \bar{e} \frac{\bar{l}^2}{2} + \frac{\bar{l}^2}{2} \mu \sin \psi_k \right) + \lambda \dot{\zeta}_k \frac{\bar{l}^3}{3} + \lambda \dot{\zeta}_k \frac{\bar{l}^2}{2} \mu \cos \psi_k \left. \right\} \\
& + \frac{\rho a \Omega^2 R^4}{2} \left\{ -\frac{C_{d0}}{\alpha} \left\{ 2\dot{\zeta}_k \zeta_k \frac{\bar{l}^3}{3} \mu \cos \psi_k + \zeta_k^2 \frac{\bar{l}^2}{2} (\mu \cos \psi_k)^2 \right\} \right. \\
& + \dot{\beta}_k (\beta_P + \beta_k) \frac{\bar{l}^3}{3} 2\mu \sin \psi_k + \zeta_k (\beta_P + \beta_k) \frac{\bar{l}^3}{3} 2\lambda \\
& + (\beta_P + \beta_k)^2 \frac{\bar{l}^2}{2} (\mu \cos \psi_k)^2 \left. \right\} \\
& - \theta \left\{ \zeta_k (\beta_P + \beta_k) \left( \frac{\bar{l}^4}{4} + 2\bar{e} \frac{\bar{l}^3}{3} + \frac{\bar{l}^3}{3} \mu \sin \psi_k \right) + \dot{\zeta}_k (\beta_P + \beta_k) \frac{\bar{l}^3}{3} \mu \sin \psi_k \right. \\
& + \zeta_k (\beta_P + \beta_k) \frac{\bar{l}^2}{2} (\mu \sin \psi_k)^2 + \dot{\beta}_k \zeta_k \frac{\bar{l}^3}{3} \mu \sin \psi_k \left. \right\} \\
& + \frac{\rho a \Omega^2 R^4}{2} \beta_k \zeta_k \left\{ -\dot{\beta}_k \left( \frac{\bar{l}^4}{4} + 2\bar{e} \frac{\bar{l}^3}{3} + \frac{\bar{l}^3}{3} \mu \sin \psi_k \right) \right. \\
& + (\beta_P + \beta_k) \mu \cos \psi_k \left( \frac{\bar{l}^3}{3} + \bar{e} \frac{\bar{l}^2}{2} + \frac{\bar{l}^2}{2} \mu \sin \psi_k \right) + \lambda \left( \frac{\bar{l}^3}{3} + \bar{e} \frac{\bar{l}^2}{2} + \frac{\bar{l}^2}{2} \mu \sin \psi_k \right) \\
& + \theta_{con} \left\{ \frac{\bar{l}^4}{4} + 2\bar{e} \frac{\bar{l}^3}{3} + \bar{e}^2 \frac{\bar{l}^2}{2} + 2 \left( \frac{\bar{l}^3}{3} + \bar{e} \frac{\bar{l}^2}{2} \right) \mu \sin \psi_k + \frac{\bar{l}^2}{2} (\mu \sin \psi_k)^2 \right. \\
& + 2\dot{\zeta}_k \left( \frac{\bar{l}^3}{3} + \bar{e} \frac{\bar{l}^2}{2} + \frac{\bar{l}^2}{2} \mu \sin \psi_k \right) + 2\zeta_k \mu \cos \psi_k \left( \frac{\bar{l}^3}{3} + \bar{e} \frac{\bar{l}^2}{2} + \frac{\bar{l}^2}{2} \mu \sin \psi_k \right) \left. \right\} \left. \right\}
\end{aligned} \tag{4.58}$$

Le moment aérodynamique dans le décalage peut être écrit en deux parties :

$$Q_{z3k} = Q_{Az3k}^L + Q_{Az3k}^{NL} \tag{4.59}$$

Où l'exposant "L" représente le terme linéaire et NL représente le terme non linéaire.

#### 4.2.9.2 Racine du moment

Les moments de restauration dus à l'assemblage du ressort racine peuvent être écrits comme (à partir de l'équation 4.45)

$$M_\beta = (K_\beta \cos^2 R\theta + K_\zeta \sin^2 R\theta) \beta_k - (K_\beta - K_\zeta) \sin R\theta \cos R\theta \zeta_k \tag{4.60}$$

Et

$$M_\zeta = -(K_\beta \sin^2 R\theta + K_\zeta \cos^2 R\theta) \zeta_k + (K_\beta - K_\zeta) \sin R\theta \cos R\theta \beta_k \tag{4.61}$$

L'indice "k" se réfère à la lame kth dans le système de rotor.

En substituant les différentes expressions de charge dans les équations 4.01 et 4.02, les équations couplées de battement et de traînée peuvent être exprimées sous une forme étendue. Ces équations sont des équations différentielles ordinaires non linéaires couplées. La stabilité de la lame est analysée en utilisant une analyse de perturbation linéarisée sur une position d'équilibre non linéaire. Cette analyse est habituellement appelée "analyse de stabilité aéroélastique linéarisée". La procédure pour l'analyse de stabilité linéarisée est décrite ci-après.

1. Supposons que :

$$\theta = \theta_0 + \tilde{\theta}(t) \quad (4.62)$$

$$\beta_k = \beta_0 + \tilde{\beta}(t)$$

$$\zeta_k = \zeta_0 + \tilde{\zeta}(t)$$

$$\lambda = \lambda_0 + \tilde{\lambda}(t)$$

Où  $\theta_0, \beta_0, \zeta_0, \lambda_0$  représentent les quantités d'équilibre. En raison de la charge périodique, les quantités d'équilibre varient également en fonction du temps. Cependant, dans le cas spécialisé de vol stationnaire, les quantités d'équilibre sont des constantes.

$\tilde{\theta}(t), \tilde{\beta}(t), \tilde{\zeta}(t)$  et  $\tilde{\lambda}(t)$  sont les grandeurs de perturbation autour de l'état d'équilibre de lame.

2. En substituant la forme supposée des quatre paramètres (Equation 4.62) dans les équations de retard et en rassemblant tous les termes correspondants à l'état d'équilibre et aux grandeurs perturbatives et en les assimilant séparément à 0, on obtient deux ensembles d'équations. Le premier ensemble d'équations, contenant uniquement des grandeurs  $(\beta_0, \zeta_0, \theta_0, \lambda_0)$ , est appelé "équations d'équilibre". En formant l'autre ensemble d'équations contenant les grandeurs perturbatives, le produit des grandeurs perturbatives est négligé commande.

Ces deuxièmes équations contenant les grandeurs de perturbation  $\tilde{\beta}(t), \tilde{\zeta}(t), \tilde{\theta}(t), \tilde{\lambda}(t)$  sont appelées «équations de stabilité linéarisées». Par exemple, l'approximation utilisée pour convertir un terme non linéaire en linéarisé les termes de perturbation sont montrés dans ce qui suit.

$$\beta_k \zeta_k = (\beta_0 + \tilde{\beta}(t))(\zeta_k = \zeta_0 + \tilde{\zeta}(t)) \cong \beta_0 \zeta_0 + \beta_0 \tilde{\zeta}(t) + \zeta_0 \tilde{\beta}(t) \quad (4.63)$$

On peut noter que le produit des grandeurs de perturbation est désagrégé en formant les équations de perturbation linéarisées.

3. En vol longitudinal, les équations d'équilibre (ou état d'équilibre) sont des équations différentielles non linéaires avec des coefficients variables dans le temps.

Ces équations sont résolues par intégration temporelle ou par équilibrage harmonique pour obtenir la réponse en régime permanent (réponse d'équilibre) de la lame.

Dans le cas d'un vol stationnaire, les équations d'état d'équilibre sont des équations algébriques non-linéaires qui peuvent être résolues par la méthode de Newton-Raphson.

4. Les équations de perturbation linéarisées sont des équations différentielles linéaires.

Pour le vol longitudinal, ils contiennent des coefficients périodiques variables dans le temps.

L'analyse de stabilité en vol longitudinal doit être effectuée en utilisant la méthode approximative de transformation de coordonnées multi-lames. Dans le cas d'un vol stationnaire, les équations sont des équations différentielles linéaires à coefficients constants.

En suivant la procédure standard d'analyse de valeurs propres, la stabilité du système en vol stationnaire peut être analysée. Les valeurs propres apparaissent comme  $(s_j = \sigma_j \pm i\omega_j)$  quantités complexes, où  $\sigma_j$  représente l'amortissement et  $\omega_j$  représente la fréquence du mode jth aeroelastic. Si  $\sigma_j$  est négatif, le mode est stable, et si  $\sigma_j$  est positif, le mode est instable.

L'ensemble de l'exercice d'analyse de stabilité aéroélastique est effectué pour identifier si un mode est stable ou non et comment la stabilité de la lame est affectée par divers paramètres du système et conditions de fonctionnement.

Considérons le cas le plus simple de vol stationnaire. Supposons que  $\mu = 0$ ,  $\beta_p = 0$  et incluons les couplages tangage et traîné, et ci-dessous comme la perturbation :

$$\beta_k = \beta_0 + \tilde{\beta}(t) \quad (4.64)$$

$$\zeta_k = \zeta_0 + \tilde{\zeta}(t)$$

$$\theta = \theta_0 + \tilde{\theta}(t)$$

$$\lambda = \lambda_0$$

L'hypothèse d'un afflux constant simplifie le problème. D'un autre côté, si l'on inclut la variation temporelle de l'influx ( $\tilde{\lambda}(t)$ ), on doit formuler une équation supplémentaire pour  $\tilde{\lambda}$  en utilisant la théorie du moment de perturbation, qui est une extension de la théorie des moments. Cette extension de la formulation d'une équation supplémentaire pour  $\lambda(t)$  est la base fondamentale pour le modèle d'entrée dynamique, qui n'est pas couverte dans ce manuel de base.

L'inclusion du couplage de traînée ( $\delta_1$ ) et du couplage tangage qui ( $\delta_3$ ) modifie l'angle de tangage :

$$\theta = (\theta_{con} - K_{P\beta}\beta_0 + K_{P\zeta}\zeta_0) + (-K_{P\beta}\tilde{\beta} + K_{P\zeta}\tilde{\zeta}) \quad (4.65)$$

On peut noter à partir de l'équation 4.63 que :

$$\theta = (\theta_{con} - K_{P\beta}\beta_0 + K_{P\zeta}\zeta_0) \quad \tilde{\theta}(t) = (-K_{P\beta}\tilde{\beta} + K_{P\zeta}\tilde{\zeta})$$

Où  $\theta_{con}$  est l'entrée de hauteur de contrôle donnée à la racine de la lame.

#### 4.2.10 Equations d'équilibre

La substitution de ces expressions (équations 4.64 et 4.65) aux équations des battements et de traînées et la séparation des équations d'équilibre et de perturbation donnent les résultats suivants (par souci de simplicité, les termes non linéaires des moments aérodynamiques sont négligés dans la formulation des équations suivantes).

Les équations d'état d'équilibre dans les modes de battements et traînées sont les suivantes:

Mouvement de battements :

$$\begin{aligned} & (K_{\beta}\cos^2R\theta_{con} + K_{\zeta}\sin^2R\theta_{con})\beta_0 - (-K_{P\beta} - K_{P\zeta})\sin R\theta_{con} \cos R\theta_{con}\zeta_0 + I_b\beta_0 \\ & + eMX_{c.g.}\Omega^2\beta_0 \\ & + \frac{\rho a CR^4\Omega^2}{2} \left\{ -\theta_{con} \left\{ \frac{\bar{l}^4}{4} + 2\bar{e}\frac{\bar{l}^3}{3} + \bar{e}^2\frac{\bar{l}^2}{2} \right\} + \lambda_0 \left\{ \frac{\bar{l}^3}{3} + \bar{e}^2\frac{\bar{l}^2}{2} \right\} \right. \\ & \left. + \left\{ \frac{\bar{l}^4}{4} + 2\bar{e}\frac{\bar{l}^3}{3} + \bar{e}^2\frac{\bar{l}^2}{2} \right\} K_{P\beta}\beta_0 - \left\{ \frac{\bar{l}^4}{4} + 2\bar{e}\frac{\bar{l}^3}{3} + \bar{e}^2\frac{\bar{l}^2}{2} \right\} K_{P\zeta}\zeta_0 \right\} = 0 \end{aligned} \quad (4.66)$$

Mouvement de traînée :

$$\begin{aligned} & -(K_{\beta}\sin^2R\theta_{con} + K_{\zeta}\cos^2R\theta_{con})\zeta_0 + (K_{\beta} - K_{\zeta})\sin R\theta_{con} \cos R\theta_{con}\beta_0 - eMX_{c.g.}\Omega^2\zeta_0 \\ & + \frac{\rho a CR^4\Omega^2}{2} \left\{ -\frac{C_{d0}}{a} \left\{ \frac{\bar{l}^4}{4} + 2\bar{e}\frac{\bar{l}^3}{3} + \bar{e}^2\frac{\bar{l}^2}{2} \right\} + \lambda_0^2\frac{\bar{l}^2}{2} - \theta_{con}\lambda_0 \left\{ \frac{\bar{l}^3}{3} + \bar{e}^2\frac{\bar{l}^2}{2} \right\} \right. \\ & \left. + \left\{ \frac{\bar{l}^3}{3} + \bar{e}^2\frac{\bar{l}^2}{2} \right\} K_{P\beta}\beta_0\lambda_0 - \left\{ \frac{\bar{l}^3}{3} + \bar{e}^2\frac{\bar{l}^2}{2} \right\} K_{P\zeta}\zeta_0\lambda_0 \right\} = 0 \end{aligned} \quad (4.67)$$

En divisant par  $I_b\Omega^2$  et en rassemblant les termes, les équations d'équilibre sous forme non dimensionnelle peuvent s'écrire comme suit :

**Equation d'équilibre de battement:**

$$\begin{aligned} & (\bar{\omega}_{NRF}^2\cos^2R\theta_{con} + \bar{\omega}_{NRL}^2\sin^2R\theta_{con})\beta_0 \\ & - (\bar{\omega}_{NRF}^2 - \bar{\omega}_{NRL}^2)\sin R\theta_{con} \cos R\theta_{con}\zeta_0 + \beta_0 + \frac{eMX_{c.g.}}{I_b}\beta_0 \\ & + \frac{\gamma}{2} \left\{ \left\{ \frac{\bar{l}^4}{4} + 2\bar{e}\frac{\bar{l}^3}{3} + \bar{e}^2\frac{\bar{l}^2}{2} \right\} K_{P\beta}\beta_0 - \left\{ \frac{\bar{l}^4}{4} + 2\bar{e}\frac{\bar{l}^3}{3} + \bar{e}^2\frac{\bar{l}^2}{2} \right\} K_{P\zeta}\zeta_0 \right\} \\ & = \frac{\gamma}{2} \left\{ \theta_{con} \left\{ \frac{\bar{l}^4}{4} + 2\bar{e}\frac{\bar{l}^3}{3} + \bar{e}^2\frac{\bar{l}^2}{2} \right\} - \lambda_0 \left\{ \frac{\bar{l}^3}{3} + \bar{e}^2\frac{\bar{l}^2}{2} \right\} \right\} \end{aligned} \quad (4.68)$$

### Equation d'équilibre de traînée :

$$\begin{aligned}
 & -(\bar{\omega}_{NRF}^2 \sin^2 R\theta_{con} + \bar{\omega}_{NRL}^2 \cos^2 R\theta_{con})\zeta_0 \\
 & + (\bar{\omega}_{NRF}^2 - \bar{\omega}_{NRL}^2) \sin R\theta_{con} \cos R\theta_{con} \beta_0 - \frac{eMX_{c.g.}}{I_b} \zeta_0 \\
 & + \frac{\gamma}{2} \left\{ \left( \frac{\bar{l}^3}{3} + \bar{e} \frac{\bar{l}^2}{2} \right) K_{P\beta} \beta_0 \lambda_0 - \left( \frac{\bar{l}^3}{3} + \bar{e} \frac{\bar{l}^2}{2} \right) K_{P\zeta} \zeta_0 \lambda_0 \right\} \\
 & = \frac{\gamma}{2} \left\{ \frac{C_{d0}}{a} \left( \frac{\bar{l}^4}{4} + 2\bar{e} \frac{\bar{l}^3}{3} + \bar{e}^2 \frac{\bar{l}^2}{2} \right) - \lambda_0^2 \frac{\bar{l}^2}{2} + \theta_{con} \lambda_0 \left( \frac{\bar{l}^3}{3} + \bar{e} \frac{\bar{l}^2}{2} \right) \right\}
 \end{aligned} \tag{4.69}$$

Ou :

$$\bar{\omega}_{NRF}^2 = \frac{K_\beta}{I_b \Omega^2} \quad \bar{\omega}_{NRL}^2 = \frac{K_\zeta}{I_b \Omega^2} \quad \gamma = \frac{\rho a C R^4}{I_b}$$

### 4.2.11 Linéarisation de l'équation de perturbation

Les équations de perturbation linéarisées peuvent s'écrire comme suit :

#### Équation de perturbation du mouvement de battement :

$$\begin{aligned}
 & (K_\beta \cos^2 R\theta_{con} + K_\zeta \sin^2 R\theta_{con}) \tilde{\beta} - (K_\beta - K_\zeta) \sin R\theta_{con} \cos R\theta_{con} \tilde{\zeta} + I_b \Omega^2 \ddot{\tilde{\beta}} + 2I_b \beta_0 \dot{\tilde{\zeta}} \\
 & + (I_b \Omega^2 + eMX_{c.g.} \Omega^2) \tilde{\beta} \\
 & + \frac{\rho a C R^4 \Omega^2}{2} \left\{ -\tilde{\theta} \left( \frac{\bar{l}^4}{4} + 2\bar{e} \frac{\bar{l}^3}{3} + \bar{e}^2 \frac{\bar{l}^2}{2} \right) - \theta_0 2\dot{\tilde{\zeta}} \left( \frac{\bar{l}^4}{4} + \bar{e} \frac{\bar{l}^3}{3} \right) + \dot{\tilde{\beta}} \left( \frac{\bar{l}^4}{4} + \bar{e} \frac{\bar{l}^3}{3} \right) \right. \\
 & \left. + \lambda_0 \frac{\bar{l}^3}{3} \dot{\tilde{\zeta}} \right\} = 0
 \end{aligned} \tag{4.70}$$

#### Équation de perturbation du mouvement de traînée :

$$\begin{aligned}
 & -(K_\beta \sin^2 R\theta_{con} + K_\zeta \cos^2 R\theta_{con}) \tilde{\zeta} + (K_\beta - K_\zeta) \sin R\theta_{con} \cos R\theta_{con} \tilde{\beta} - I_b \Omega^2 \ddot{\tilde{\zeta}} \\
 & + 2I_b \Omega^2 \beta_0 \dot{\tilde{\beta}} - eMX_{c.g.} \Omega^2 \tilde{\zeta} \\
 & + \frac{\rho a C R^4 \Omega^2}{2} \left\{ -\frac{C_{d0}}{a} \left( 2\dot{\tilde{\zeta}} \left[ \frac{\bar{l}^4}{4} + \bar{e} \frac{\bar{l}^3}{3} \right] \right) + \dot{\tilde{\beta}} 2\lambda_0 \frac{\bar{l}^3}{3} \right. \\
 & \left. - \theta_0 \left\{ \dot{\tilde{\beta}} \left( \frac{\bar{l}^4}{4} + \bar{e} \frac{\bar{l}^3}{3} \right) + \lambda_0 \frac{\bar{l}^3}{3} \dot{\tilde{\zeta}} \right\} - \tilde{\theta} \left\{ \lambda_0 \frac{\bar{l}^3}{3} + \bar{e} \frac{\bar{l}^2}{2} \right\} \right\} = 0
 \end{aligned} \tag{4.71}$$

Il convient de noter que, dans les équations 4.70 et 4.71,  $\theta_0 = \theta_{con} - K_{P\beta} \beta_0 + K_{P\zeta} \zeta_0$  et  $\tilde{\theta} = -K_{P\beta} \beta + K_{P\zeta} \zeta$ .

L'entrée  $\lambda_0$  peut être obtenue à partir de l'une des deux équations suivantes :

La théorie globale du moment de l'afflux est constante :

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{C_T}{2}} \quad (4.72)$$

La théorie du moment local rapporte l'afflux à 75% du rayon à l'angle de pas de la lame :

$$\lambda_0 = \frac{\sigma a}{16} \left[ \sqrt{1 + \frac{32}{\sigma a} \theta_0 \left( \frac{3}{4} \right)} - 1 \right] \quad (4.73)$$

Où :  $\theta_0 = \theta_{con} - K_{P\beta}\beta_0 + K_{P\zeta}\zeta_0$

L'ensemble des équations d'équilibre, de perturbation et d'entrée peut être résolu pour deux ensembles de conditions différents. Ils sont les suivants :

- (1) le coefficient de poussée  $C_T$ , qui évalue l'équilibre et la stabilité du système; et
- (2) étant donné l'angle de tangage  $\theta_{con}$ , qui évalue l'équilibre et la stabilité de la lame.

### Problème 1

Résoudre les conditions d'équilibre et de stabilité en tenant compte du coefficient de poussée  $C_T$ .

Dans cette approche, sachant  $C_T$ , une estimation préliminaire de  $\lambda_0$  peut être obtenue comme

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{C_T}{2}}$$

En utilisant cette relation et on obtient :

$$C_T = \frac{\sigma a}{2} \left[ \frac{\theta_0}{3} - \frac{\lambda_0}{2} \right] \quad (4.74)$$

Où  $\theta_0 = \theta_{con} - K_{P\beta}\beta_0 + K_{P\zeta}\zeta_0$

En supposant que  $\beta_0$  et  $\zeta_0$  soient 0, une estimation initiale de l'angle de pas  $\theta_{con}$  peut être obtenue à partir de l'équation 4.74. En résolvant les quatre équations (deux équations d'équilibre [Equations 4.68 et 4.69], l'équation d'entrée différentielle (équation 4.73), et l'équation du coefficient de poussée (équation 4.74)), les grandeurs d'équilibre  $\theta_{con}, \theta_0, \beta_0, \zeta_0, \lambda_0$  peuvent être obtenues.

### Problème 2

Evaluer l'entrée de l'équation différentielle (équation 4.73) compte tenue de l'angle de pas  $\theta_{con}$ .

Dans la première itération sont supposées égales à zéro les valeurs de  $\beta_0$  et  $\zeta_0$ .

En utilisant les trois équations (deux équations d'équilibre (équations 4.68 et 4.69) et l'équation d'entrée différentielle (équation 4.73)), résoudre itérativement pour  $\beta_0, \zeta_0, \lambda_0$ . La poussée résultante peut être obtenue à partir de l'équation de poussée (équation 4.74).

#### 4.2.12 Équations de stabilité perturbatrice

Les équations de perturbation linéarisées (équations 4.70 et 4.71) peuvent être écrites sous forme matricielle (après division par  $I_b \Omega^2$ ) :

$$[M] \begin{Bmatrix} \ddot{\tilde{\beta}} \\ \ddot{\tilde{\zeta}} \end{Bmatrix} + [C] \begin{Bmatrix} \dot{\tilde{\beta}} \\ \dot{\tilde{\zeta}} \end{Bmatrix} + [K] \begin{Bmatrix} \tilde{\beta} \\ \tilde{\zeta} \end{Bmatrix} = 0 \quad (4.75)$$

Où

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad [C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \quad [K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}$$

Les éléments des matrices d'amortissement et de rigidité sont donnés par :

$$C_{11} = \frac{\gamma}{2} \left\{ \frac{\bar{l}^4}{4} + \bar{e} \frac{\bar{l}^3}{3} \right\}$$

$$C_{12} = 2\beta_0 - \left\{ \frac{\bar{l}^4}{4} + \bar{e} \frac{\bar{l}^3}{3} \right\} \gamma (\theta_{con} - K_{P\beta} \beta_0 + K_{P\zeta} \zeta_0) + \gamma \frac{\bar{l}^3}{6} \lambda_0$$

$$C_{21} = 2\beta_0 - \frac{\gamma}{2} \left\{ \frac{\bar{l}^4}{4} + \bar{e} \frac{\bar{l}^3}{3} \right\} (\theta_{con} - K_{P\beta} \beta_0 + K_{P\zeta} \zeta_0) + \gamma \frac{\bar{l}^3}{3} \lambda_0$$

$$C_{22} = -\gamma \frac{C_{d0}}{2} \left\{ \frac{\bar{l}^4}{4} + \bar{e} \frac{\bar{l}^3}{3} \right\} - \gamma \frac{\bar{l}^3}{6} (\theta_{con} - K_{P\beta} \beta_0 + K_{P\zeta} \zeta_0) \lambda_0$$

$$K_{11} = \left( (\bar{\omega}_{NRF}^2 \sin^2 R \theta_{con} + \bar{\omega}_{NRL}^2 \cos^2 R \theta_{con}) + 1 + \frac{eMX_{c.g.}}{I_b} \right) + \frac{\gamma}{2} \left\{ \frac{\bar{l}^4}{4} + 2\bar{e} \frac{\bar{l}^3}{3} + \bar{e}^2 \frac{\bar{l}^2}{2} \right\} K_{P\beta}$$

$$K_{12} = -(\bar{\omega}_{NRF}^2 - \bar{\omega}_{NRL}^2) \sin R \theta_{con} \cos R \theta_{con} - \frac{\gamma}{2} \left\{ \frac{\bar{l}^4}{4} + 2\bar{e} \frac{\bar{l}^3}{3} + \bar{e}^2 \frac{\bar{l}^2}{2} \right\} K_{P\zeta}$$

$$K_{21} = -(\bar{\omega}_{NRF}^2 - \bar{\omega}_{NRL}^2) \sin R \theta_{con} \cos R \theta_{con} + \frac{\gamma}{2} \left\{ \frac{\bar{l}^3}{3} + \bar{e} \frac{\bar{l}^2}{2} \right\} \lambda_0 K_{P\beta}$$

$$K_{22} = - \left( (\bar{\omega}_{NRF}^2 \sin^2 R \theta_{con} + \bar{\omega}_{NRL}^2 \cos^2 R \theta_{con}) + \frac{eMX_{c.g.}}{I_b} \right) - \frac{\gamma}{2} \left\{ \frac{\bar{l}^3}{3} + \bar{e} \frac{\bar{l}^2}{2} \right\} \lambda_0 K_{P\zeta}$$

Il ressort de ces équations que la matrice d'amortissement est fonction de la position d'équilibre. Par conséquent, selon les conditions de fonctionnement et les paramètres du système, les éléments de la matrice d'amortissement varient. Pour certaines combinaisons de conditions de fonctionnement et de paramètres du système, le système dynamique couplé du couplage battement et traînée peut devenir instable. L'analyse de stabilité est réalisée comme suit:

Supposons une solution du formulaire :

$$\begin{Bmatrix} \tilde{\beta} \\ \tilde{\zeta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\beta} \\ \bar{\zeta} \end{Bmatrix} e^{st} \quad (4.76)$$

En remplaçant l'équation 4.76 par l'équation de stabilité (équation 4.75), on obtient :

$$\begin{bmatrix} M_{11}s^2 + C_{11}s + K_{11} & C_{12}s + K_{12} \\ C_{21}s + K_{11} & M_{22}s^2 + C_{22}s + K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\beta} \\ \bar{\zeta} \end{Bmatrix} = 0 \quad (4.77)$$

Les caractéristiques polynomiales peuvent être écrites comme :

$$(M_{11}s^2 + C_{11}s + K_{11})(M_{22}s^2 + C_{22}s + K_{22}) - (C_{12}s + K_{12})(C_{21}s + K_{11}) = 0 \quad (4.78)$$

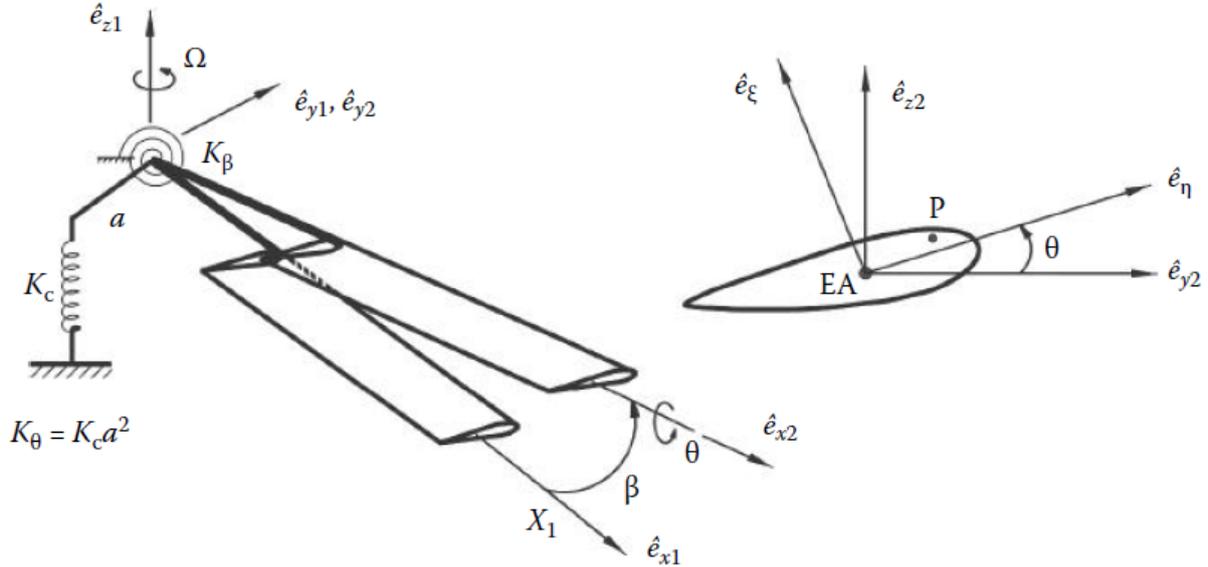
### 4.3 Modélisation dynamique couplée de battement-torsion d'une pale de rotor isolée

La stabilité aéroélastique de la dynamique couplée battement-torsion d'une pale de rotor isolée est similaire aux problèmes de divergence et aux recourbements de flottement de torsion d'une aile fixe. Cependant, il existe certaines différences fondamentales entre la dynamique de la torsion d'une pale de rotor et le problème de recourbement de flottement de torsion d'une aile fixe. La principale différence réside dans la description de la charge non stationnaire-dynamique sur la pale. Dans le cas de l'aile fixe, le sillage instable de l'aile est balayé derrière l'aile, tandis que dans le cas de l'aile tournante, le sillage est poussé sous le rotor.

Les structures de sillage sont entièrement différentes pour les deux cas. La prédiction de charge aérodynamique instationnaire d'une pale de rotor est très difficile, et c'est encore un sujet de recherche. Par conséquent, pour des raisons de compréhension, un modèle aérodynamique simple, basé sur la théorie de l'aile fixe, sera utilisé; cependant, certaines modifications seront incorporées pour rendre le modèle approprié pour l'analyse aéroélastique de la pale tournante.

Un tel modèle permettra de bien comprendre les aspects fondamentaux de la dynamique couplée de battement-torsion. Une autre différence entre l'hélice rotative et le problème aéroélastique à voilure fixe est l'effet de rotation, qui introduit un couplage entre le clapet et la torsion, lorsque le centre de section de la lame est déporté par rapport à l'axe de tangage.

La figure 4.10 montre une lame uniforme avec deux ressorts à la racine. Le ressort  $K_\beta$  représente le ressort de volet, et le ressort linéaire  $K_c$  présente l'effet combiné de la rigidité du système de commande et de la rigidité de torsion de la lame. Ce ressort est attaché à la racine avec un décalage  $a$ . La rigidité en torsion effective de la lame est donnée par  $K_\theta = K_c a^2$ .



**Figure 4.10 : Idéalisations de la pale de rotor pour l'analyse dynamique couplée de battement-torsion et les systèmes de coordonnées.**

La pale du rotor subit une déformation de volet  $\beta$ , suivie d'une déformation de torsion  $\theta$ , comme le montre la figure 4.10.

$X_1 - Y_1 - Z_1$  représente le système de coordonnées rotatif fixé au moyeu, également appelé «système de coordonnées de la lame non déformée», avec les vecteurs unitaires  $\hat{e}_{x1}, \hat{e}_{y1}, \hat{e}_{z1}$

$X_2 - Y_2 - Z_2$  représente le système de coordonnées de la lame déformée, avec les vecteurs unitaires  $\hat{e}_{x2}, \hat{e}_{y2}, \hat{e}_{z2}$ .

$\eta - \xi$  représente le système de coordonnées de la section transversale de la pale, dont l'origine se situe à l'axe élastique de référence (EA) à une distance  $r$  du centre du moyeu. Les vecteurs unitaires le long du système de coordonnées transversales sont  $\hat{e}_\eta, \hat{e}_\xi$ .

La relation de transformation entre le système d'axes  $X_1 - Y_1 - Z_1$  et  $X_2 - Y_2 - Z_2$  est donnée par [4.09] :

$$\begin{Bmatrix} \hat{e}_{x1} \\ \hat{e}_{y1} \\ \hat{e}_{z1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{e}_{x2} \\ \hat{e}_{y2} \\ \hat{e}_{z2} \end{Bmatrix} \quad (4.79)$$

La transformation entre les systèmes de coordonnées  $X_2, \eta, \xi$  et  $X_2, Y_2, Z_2$  peut être donnée comme :

$$\begin{pmatrix} \hat{e}_{x2} \\ \hat{e}_{y2} \\ \hat{e}_{z2} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{e}_{x2} \\ \hat{e}_\eta \\ \hat{e}_\xi \end{pmatrix} \quad (4.80)$$

Le vecteur de position de tout point P arbitraire dans la section transversale peut être écrit comme :

$$\vec{r}_p = r \hat{e}_{x2} + \eta \hat{e}_\eta + \xi \hat{e}_\xi \quad (4.81)$$

En utilisant ces relations de transformation données dans les équations 4.78 et 4.79, le vecteur de position peut être écrit comme :

$$\begin{aligned} \vec{r}_p = r \cos\beta \hat{e}_{x1} + r \sin\beta \hat{e}_{z1} + (\eta \cos\theta - \xi \sin\theta) \hat{e}_{y1} - \sin\beta (\eta \sin\theta + \xi \cos\theta) \hat{e}_{x1} \\ + \cos\beta (\eta \sin\theta + \xi \cos\theta) \hat{e}_{z1} \end{aligned} \quad (4.82)$$

Réécrivant le vecteur de position en utilisant une hypothèse de petit angle pour la déviation de volet  $\beta$ , le vecteur de position peut être écrit comme :

$$\begin{aligned} \vec{r}_p = [r - \beta (\eta \sin\theta - \xi \cos\theta)] \hat{e}_{x1} + (\eta \cos\theta - \xi \sin\theta) \hat{e}_{y1} + (r\beta + \eta \sin\theta \\ + \xi \cos\theta) \hat{e}_{z1} \end{aligned} \quad (4.83)$$

Puisque la dimension de la section transversale de la lame est très petite par rapport à la longueur, on peut négliger le terme  $\beta(\eta \sin\theta + \xi \cos\theta)$  en comparaison de  $r$ .

Négligeant ce terme, le vecteur de position peut être simplifié :

$$\vec{r}_p \cong r \hat{e}_{x1} + (\eta \cos\theta - \xi \sin\theta) \hat{e}_{y1} + (r\beta + \eta \sin\theta + \xi \cos\theta) \hat{e}_{z1} \quad (4.84)$$

La vitesse absolue du point P est :

$$\vec{V}_p = \{\dot{\vec{r}}_p\}_{rel} + \vec{\omega} \times \vec{r}_p \quad (4.85)$$

Où  $\vec{\omega} = \Omega \hat{e}_{z1}$  est la vitesse angulaire du système de rotor. Expansion de l'équation 4.84, la vitesse absolue du point P peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \vec{V}_p = \Omega [ -(\eta \cos\theta - \xi \sin\theta) \hat{e}_{x1} + \{r - (\eta \sin\theta + \xi \cos\theta)\theta\} \hat{e}_{y1} \\ + \{r\beta + (\eta \cos\theta - \xi \sin\theta)\theta\} \hat{e}_{z1} ] \end{aligned} \quad (4.86)$$

Il est à noter que les dérivées temporelles sont prises en ce qui concerne le temps non dimensionnel  $\psi = \Omega t$ .

La vitesse à la référence EA à l'emplacement x est donnée par :

$$\vec{V}_{EA} = \Omega [r \hat{e}_{y1} + r\beta \hat{e}_{z1}] \quad (4.87)$$

L'accélération absolue du point P est :

$$\vec{a}_p = \ddot{\vec{r}}_p + \vec{\omega}X\vec{r}_p + 2\vec{\omega}X\dot{\vec{r}}_p + \vec{\omega}X(\vec{\omega}X\vec{r}_p) \quad (4.88)$$

En substituant divers termes et en notant que  $\Omega$  est une constante, l'accélération au point P sous forme étendue peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \vec{a}_p = \Omega^2 & \left[ \{-r + 2\dot{\theta}(\eta\sin\theta + \xi\cos\theta)\}\hat{e}_{x1} \right. \\ & + \{-\eta\cos\theta + \xi\sin\theta\} - (\eta\sin\theta + \xi\cos\theta)\ddot{\theta} \\ & - (\eta\cos\theta - \xi\sin\theta)\dot{\theta}^2\}\hat{e}_{y1} \\ & \left. + \{r\ddot{\beta} + (\eta\cos\theta - \xi\sin\theta)\ddot{\theta} - (\eta\cos\theta + \xi\sin\theta)\dot{\theta}^2\}\hat{e}_{z1} \right] \end{aligned} \quad (4.89)$$

L'accélération peut être approximée en négligeant les termes d'ordre supérieur, tels que  $\dot{\theta}^2$  et  $2\dot{\theta}(\eta\sin\theta + \xi\cos\theta)$  en comparaison avec d'autres termes. L'expression simplifiée peut être écrite comme :

$$\begin{aligned} \vec{a}_p = \Omega^2 & \left[ -r\hat{e}_{x1} + \{-\eta\cos\theta + \xi\sin\theta\} - (\eta\sin\theta + \xi\cos\theta)\ddot{\theta}\}\hat{e}_{y1} \right. \\ & \left. + \{r\ddot{\beta} + (\eta\cos\theta - \xi\sin\theta)\ddot{\theta}\}\hat{e}_{z1} \right] \end{aligned} \quad (4.90)$$

La force d'inertie transversale et le moment d'inertie autour de la référence EA peuvent être obtenus en évaluant les intégrales suivantes sur la section transversale.

$$\vec{p}_1 = \iint -\rho_b \vec{a}_p dA \quad (4.91)$$

$$\tilde{q}_l = \iint [\eta\hat{e}_\eta + \xi\hat{e}_\xi]X(-\rho_b \vec{a}_p)dA \quad (4.92)$$

Où  $\rho_b$  est la masse par unité de volume de la lame.

L'équation 4.92 peut s'écrire :

$$\tilde{q}_l = \iint [(\eta\cos\theta - \xi\sin\theta)X\hat{e}_{y1} + (\eta\sin\theta + \xi\cos\theta)\hat{e}_{z1}]X(-\rho_b \vec{a}_p)dA \quad (4.93)$$

Les intégrales transversales peuvent être définies comme suit:

Masse par unité de longueur de la lame :

$$m = \iint \rho_b dA$$

Moment de masse statique par unité de longueur :

$$m\eta_m = \iint \rho_b \eta dA \quad m\xi_m = \iint \rho_b \xi dA$$

Moment d'inertie de masse par unité de longueur :

$$I_{\xi\xi} = \iint \rho_b \eta^2 dA \quad I_{\eta\eta} = \iint \rho_b \xi^2 dA \quad I_{\eta\xi} = \iint \rho_b \eta \xi dA \quad (4.94)$$

En utilisant les intégrales données dans l'équation 4.94, la force distribuée d'inertie par unité de longueur de la lame peut être écrite :

$$p_{Ix1} = m\Omega^2 r \quad (4.95)$$

$$p_{Iy1} = \Omega^2 \{ (m\eta_m \cos\theta - m\xi_m \sin\theta) + (m\eta_m \sin\theta - m\xi_m \cos\theta)\ddot{\theta} \} \quad (4.96)$$

$$p_{Iz1} = \Omega^2 \{ -mr\ddot{\beta} - (m\eta_m \cos\theta - m\xi_m \sin\theta)\ddot{\theta} \} \quad (4.97)$$

Le moment d'inertie distribué par unité de longueur peut s'écrire :

$$q_{Ix1} = \Omega^2 \iint -\rho_b [ (\eta \cos\theta - \xi \sin\theta) \{ r\ddot{\beta} + (\eta \cos\ddot{\theta} - \xi \sin\ddot{\theta})\ddot{\theta} \} - (\eta \sin\theta + \xi \cos\theta) \{ -(\eta \cos\theta - \xi \sin\theta) - (\eta \sin\theta + \xi \cos\theta)\ddot{\theta} \} ] dA \quad (4.98)$$

$$q_{Iy1} = \Omega^2 \iint -\rho_b [ (\eta \sin\theta + \xi \cos\theta)(-r) ] dA \quad (4.99)$$

$$q_{Iz1} = \Omega^2 \iint -\rho_b [ -(\eta \cos\theta - \xi \sin\theta)(-r) ] dA \quad (4.100)$$

Intégrant sur la section transversale et simplifiant, le moment distribué d'inertie par envergure d'unité peut être écrit :

$$q_{Ix1} = \Omega^2 \{ (m\eta_m \cos\theta - m\xi_m \sin\theta)r\ddot{\beta} + (I_{\xi\xi} + I_{\eta\eta})\ddot{\theta} \} \quad (4.101)$$

$$+ (I_{\xi\xi} + I_{\eta\eta})\sin\theta\cos\theta + I_{\eta\xi}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

$$q_{Iy1} = -\Omega^2 [ -(m\eta_m \sin\theta + m\xi_m \cos\theta)r ] \quad (4.102)$$

$$q_{Iz1} = -\Omega^2 [ (m\eta_m \cos\theta - m\xi_m \sin\theta)r ] \quad (4.103)$$

Les forces et les moments importants d'inertie de la section sont illustrés à la figure 4.11. Le moment d'inertie autour de la racine de la pale de rotor, en supposant un décalage de charnière nul, peut être obtenu à partir de l'expression :

$$\vec{Q}_I = \int_0^R \{ \vec{q}_1 + (r\hat{e}_{y1} + r\beta\hat{e}_{z1}) \times \vec{p}_1 \} dr \quad (4.104)$$

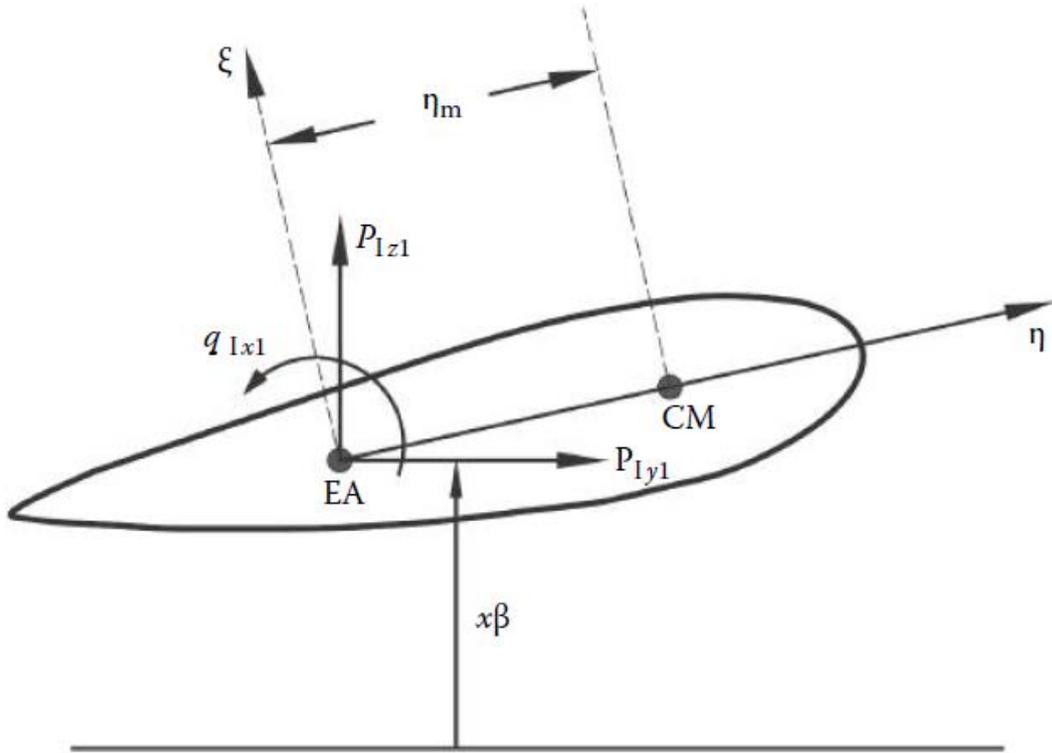


Figure 4.11 : Charges d'inertie sectionnelles.

En identifiant les quantités pertinentes de l'intégrale ci-dessus, les moments de torsion et de battement à la racine de l'aube peuvent s'écrire comme suit:

**Racine du moment d'inertie de torsion :**

$$\bar{Q}_{Ix1} = \int_0^R \{ \bar{q}_{Ix1} + (-r\beta p_{Iy1}) \} dr \quad (4.105)$$

En supposant des propriétés uniformes le long de la portée de la lame, l'équation 4.105 peut être écrite sous forme étendue :

$$\begin{aligned} Q_{Ix1} = -\Omega^2 \left[ \left\{ (m\eta_m \cos\theta - m\xi_m \sin\theta) \frac{R^2}{2} \ddot{\beta} + (I_{\xi\xi} + I_{\eta\eta}) R \ddot{\theta} \right\} \right. \\ \left. + \{ (I_{\xi\xi} + I_{\eta\eta}) \sin\theta \cos\theta + I_{\eta\xi} (\cos^2\theta - \sin^2\theta) \} R \right. \\ \left. + \beta \left\{ (m\eta_m \cos\theta - m\xi_m \sin\theta) \frac{R^2}{2} \right. \right. \\ \left. \left. + (m\eta_m \sin\theta + m\xi_m \cos\theta) \frac{R^2}{2} \ddot{\theta} \right\} \right] \quad (4.106) \end{aligned}$$

**Racine du moment d'inertie de battement :**

$$Q_{Iy1} = \int_0^R \{ q_{Iy1} + r\beta p_{Ix1} - r p_{Iz1} \} dr \quad (4.107)$$

L'équation 4.107 peut être étendue :

$$Q_{Iy1} = \Omega^2 \left[ (m\eta_m \sin\theta + m\xi_m \cos\theta) \frac{R^2}{2} + m \frac{R^3}{3} \beta + m \frac{R^3}{3} \ddot{\beta} \right. \\ \left. + (m\eta_m \cos\theta - m\xi_m \sin\theta) \frac{R^2}{2} \ddot{\theta} \right]$$

Le moment d'inertie de la racine dans le volet peut être comme suit :

$$Q_{Iy1} = m\Omega^2 \frac{R^3}{3} [\ddot{\beta} + \beta] \tag{4.108} \\ + \frac{R^2}{2} \Omega^2 \{ (m\eta_m \cos\theta - m\xi_m \sin\theta) \ddot{\theta} + (m\eta_m \sin\theta + m\xi_m \cos\theta) \}$$

Les équations couplées de mouvement de battement et de torsion peuvent être obtenues par l'équilibre des moments à la racine de la lame. Ces équations peuvent être symboliquement écrites comme suit :

**Equation des battements :**

$$Q_{Iy1} + K_\beta \beta + Q_{Ay1} = 0 \tag{4.109}$$

**Équation de torsion :**

$$Q_{Ix1} + K_\theta \theta + Q_{Ax1} = 0 \tag{4.110}$$

Où  $Q_{Ax1}$  et  $Q_{Ay1}$  sont respectivement les racines des moments de torsion et des battements, en raison des charges aérodynamiques agissant sur la pale.

Lors de l'évaluation des charges aérodynamiques sur une section typique de la lame du rotor soumise à des mouvements de volets (plonger) et de torsion (tangage), il faut faire attention.

Les charges aérodynamiques instationnaires agissant sur la pale du rotor sont très difficiles à évaluer en raison de l'accumulation de rotor complexe sous le rotor. Le premier modèle aérodynamique instationnaire a été développé par Theodorsen (1935) pour un profil d'aile mince oscillante en cours de picotage et de mouvement plongeant dans un écoulement incompressible.

Cette théorie n'est pas directement applicable à la pale de rotor en raison de la différence dans la géométrie du sillage. Cette théorie a été modifiée plus tard par Greenberg (1947) pour inclure l'effet de l'écoulement venant en sens inverse et de l'angle d'attaque constant. Cependant, la géométrie du sillage était similaire au modèle de Theodorsen.

Plus tard, en 1957, Loewy (1957) a considéré un modèle en vol stationnaire avec des couches de sillage sous la pale du rotor. C'est le premier modèle bidimensionnel non-stable-dynamique applicable aux pales de rotor. La portance et les transitions de moment obtenues dans la théorie de Loewy sont similaires à celles obtenues dans la théorie de Theodorsen, sauf que la fonction de déficience de portance a une forme différente.

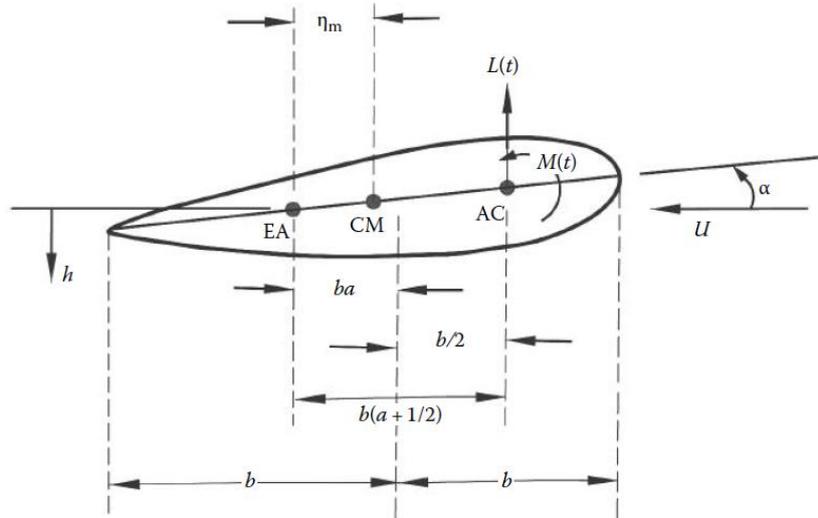
Il est important de reconnaître que la théorie de Loewy est difficile à mettre en œuvre dans une analyse de pale de rotor. Par conséquent, le modèle de Greenberg ou de Theodorsen est utilisé pour évaluer les charges aérodynamiques transversales des pales de rotor. Cependant, dans des situations pratiques, les données de profils aérodynamiques statiques sont corrigées dynamiquement et utilisées comme une table de consultation pour calculer les charges aérodynamiques.

Actuellement, des efforts sont en cours pour calculer les charges aérodynamiques instationnaires en utilisant des techniques de dynamique des fluides computationnelles (CFD). Pour une analyse très simplifiée, une approximation aérodynamique quasi-stable de la théorie de Theodorsen sera utilisée dans ce qui suit. Ce modèle est raisonnable pour faire ressortir les caractéristiques essentielles de la stabilité aéroélastique dynamique couplée de battement et de torsion. Il convient de souligner que le modèle aérodynamique quasi-statique basé sur l'attaque instantanée utilisée dans les chapitres et sections précédents (tout en tenant compte de la dynamique des volets) ne peut pas être appliqué à la dynamique couple-torsion car ce modèle aérodynamique quasi statique ne pas inclure les effets du taux de changement de l'angle de tangage de la lame. Par conséquent, ce modèle est inadéquat pour être utilisé dans une dynamique de couplage-torsion couplée.

Nous allons maintenant développer les charges aérodynamiques agissant sur la dynamique de battement et de torsion du rotor en utilisant une approximation quasi-stable de la théorie aérodynamique instationnaire de Theodorsen. Considérons un profil aérodynamique exécutant un mouvement harmonique simple dans les mouvements de tangage et de plongée, comme le montre la figure 4.12.

Sur cette figure 4.12,  $b$  représente la demi-corde de la lame,  $EA$  représente l'élasticité,  $AC$  représente le centre aérodynamique (à l'emplacement du quart de corde) et  $CM$  représente l'emplacement du centre de masse de la section transversale de la lame.

Le mouvement de plongée est représenté par le déplacement du point sur  $EA$  par  $h$ , et le mouvement de tangage est représenté par  $\alpha$ , mesuré par rapport à l'écoulement venant en sens inverse  $U$ .



**Figure 4.12 : Coupe transversale typique d'une pale de rotor subissant des mouvements de lacet et de tangage.**

Les expressions pour le lever instationnaire et le moment agissant à l'EA de référence sont données par la théorie de Theodorsen [4.01].

$$L(t) = \pi\rho b^2[\ddot{h} + U\dot{\alpha} - ba\ddot{\alpha}] + 2\pi\rho UbC(k) \left[ \dot{h} + U\alpha + b\left(\frac{1}{2} - a\right)\dot{\alpha} \right] \quad (4.111)$$

$$M_{EA}(t) = M(t) + Lb\left(\frac{1}{2} + a\right) \quad (4.112)$$

$$M_{EA}(t) = 2\pi\rho Ub^2 \left[ ba\ddot{h} - Ub\left(\frac{1}{2} - a\right)\dot{\alpha} - b^2\left(\frac{1}{8} + a^2\right)\ddot{\alpha} \right] + 2\pi\rho Ub^2\left(\frac{1}{2} + a\right)C(k) \left[ \dot{h} + U\alpha + b\left(\frac{1}{2} - a\right)\dot{\alpha} \right] \quad (4.113)$$

Où  $\rho$  est la densité de l'air,  $b = C/2$  est la lame semi-corde,  $C(k)$  est la fonction de déficience de levée Theodorsen (quantité complexe), et  $k = \frac{\omega b}{U}$  est le paramètre de fréquence réduite.

Le premier terme à la fois dans  $L$  et  $M_{EA}$  est appelé «terme de masse apparent». Les termes dérivés du second ordre peuvent être négligés en termes de masse apparente en raison de leur ordre de petitesse par rapport à la masse de pale. Cependant, le terme  $\dot{\alpha}$  est retenu car il représente l'amortissement aérodynamique. L'hypothèse aérodynamique quasi constante consiste à négliger les effets de sillage instationnaires en faisant  $C(k) = 1.0$ .

Le modèle aérodynamique quasi-stable simplifié peut s'écrire :

$$L(t) = \pi\rho b^2[U\dot{\alpha}] + 2\pi\rho Ub \left[ \dot{h} + U\alpha + b\left(\frac{1}{2} - a\right)\dot{\alpha} \right] \quad (4.114)$$

$$M_{EA}(t) = \pi\rho Ub^2 \left[ -Ub\left(\frac{1}{2} - a\right)\dot{\alpha} \right] + 2\pi\rho Ub^2\left(\frac{1}{2} + a\right)C(k) \left[ \dot{h} + U\alpha + b\left(\frac{1}{2} - a\right)\dot{\alpha} \right] \quad (4.115)$$