ISTA Mohamed EL FASSI - Errachidia

Filière : Techniques de Réseaux Informatiques

Module N° 3 :

Notions de mathématiques appliquées à l'informatique

Elaboré par : A. EL GHATTAS

Septembre 2007

Table des matières

SYSTÈMES DE NUMÉRATION

1. Base d'un système de numération
1.1 Principe d'une base
La base est le nombre qui sert à définir un système de numération.
La base du système décimal est dix alors que celle du système octal est huit.

Quelque soit la base numérique employée, elle suit la relation suivante :

$$\sum_{i=0}^{i=n}(b_i a^i)=b_i a^n+.....+b_5a^5+b_4a^4+b_3a^3+b_2a^2+b_1a^1+b_0a^0$$

ou : $\mathbf{b}_i$: chiffre de la base de rang i
et : $\mathbf{a}^i$: puissance de la base a d'exposant de rang i

Exemple : base 10
$1986 = (1 \times 10^3) + (9 \times 10^2) + (8 \times 10^1) + (6 \times 10^0)$

1.2 Système décimal
C'est le système de base 10 que nous utilisons tous les jours. Il comprend dix symboles différents: **0**, **1**, **2**, **3**, **4**, **5**, **6**, **7**, **8** et **9**.

Tout nombre écrit dans le système décimal vérifie la relation suivante :
$745 = 7 \times 100 + 4 \times 10 + 5 \times 1$
$745 = 7 \times 10 \times 10 + 4 \times 10 + 5 \times 1$
$745 = 7 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 5 \times 10^0$

Chaque chiffre du nombre est à multiplier par une puissance de 10 : c'est ce que l'on nomme le **poids du chiffre**.
L'exposant de cette puissance est nul pour le chiffre situé le plus à droite et s'accroît d'une unité pour chaque passage à un chiffre vers la gauche.
Cette méthode de décomposition sera utilisée pour toutes les autres bases.

Par convention nous l'écrirons $N= (745)_{10}$. L'indice '10' indique la base dans laquelle le nombre est écrit. Nous verrons plus tard que cela a son importance.

1.3 Système binaire
Ce système dit de base 2 comprend **deux symboles différents : 0 et 1**. Chacun d'eux est aussi appelé **bit** qui est la contraction de l'anglais **b**inary dig**it** (élément binaire).
Exemple : $(1001\ 1011)_2$ est un nombre binaire de 8 bits.

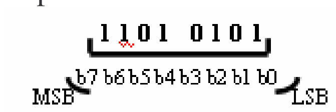
Pour écrire un chiffre on ne peut utiliser que ces deux symboles. Ainsi l'écriture suivante est correcte : $N = (11001)_2$. Par contre l'écriture suivante ne l'est pas : $N = (201253)_2$. Dans cette dernière écriture les symboles 2, 3 et 5 sont interdits car la base utilisée est la base binaire (indiquée par l'indice 2).

Tout ceci est très bien, mais que vaut le chiffre $(11001)_2$ dans la base 10 (qui est pour nous la base naturelle) ?
Tout d'abord nous allons décomposer le nombre dans sa base (comme ci-dessus). Nous avons donc :
$\mathbf{N = (11001)_2 = 1.2^4 + 1.2^3 + 0.2^2 + 0.2^1 + 0.2^0}$
Il ne reste plus qu'à calculer ce que nous venons d'écrire, ainsi N vaut $(25)_{10}$.

En utilisant n bits, on peut former **2^n nombres différents** et le plus grand d'entre eux **est égal à 2^n-1**. Par exemple avec un dispositif à 3 bits (n = 3), on peut représenter $2^3 = 8$ nombres différents dont le plus grand est $(111)_2 = (7)_{10}$.

Quelques définitions :
Mot binaire : En informatique, l'unité de traitement de l'information est le mot binaire (en anglais Binary Word).
Nota : - Un ensemble de 4 bits (Ou Mot de 4 bits) = Quartet
- Un ensemble de 8 bits (Ou Mot de 8 bits) = Octet.

Octet : Un octet (en anglais byte) est composé de 8 bits :



On distingue :
- Le bits de poids fort b7 (MSB : Most Significant Bit).
- Le bits de poids faible b0 (LSB : Least Significant Bit).

Autres unités :
- **Un kilooctet (Ko)** = 2^{10} octets = 1024 octets
- **Un Mégaoctet (Mo)** = 2^{20} octets = 1024 Ko = 1 048 576 octets
- **Un Gigaoctet (Go)** = 2^{30} octets = 1024 Mo = 1 073 741 824 octets
- **Un Téraoctet (To)** = 2^{40} octets = 1024 Go = 1 099 511 627 776 octets

Remarque : Il est utile de noter que la communauté internationale dans son ensemble utilise préférentiellement le nom de "byte" plutôt que le terme "octet" purement francophone. Cela donne les notations suivantes pour kilobyte, mégabyte, gigabyte et terabyte : KB, MB, GB, TB.
Notez l'utilisation d'un B majuscule pour différencier Byte et bit.

1.4 Système octal
Le système octal utilise un système de numération ayant comme base 8 (octal => latin octo = huit).
Il faut noter que dans ce système nous n'aurons que 8 symboles seulement : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
Ainsi, un nombre exprimé en base 8 pourra se présenter de la manière suivante : $(745)_8$

Lorsque l'on écrit un nombre, il faudra bien préciser la base dans laquelle on l'exprime pour lever les éventuelles indéterminations (745 existe aussi en base 10). Ainsi le nombre sera mis entre parenthèses (745 dans notre exemple) et indicé d'un nombre représentant sa base (8 est mis en indice).

Cette base obéira aux même règles que la base 10, vue précédemment, ainsi on peut décomposer $(745)_8$ de la façon suivante :

$(745)_8 = 7 \times 8^2 + 4 \times 8^1 + 5 \times 8^0$
$(745)_8 = 7 \times 64 + 4 \times 8 + 5 \times 1$
$(745)_8 = 448 + 32 + 5$
Donc : $\mathbf{(745)_8 = (485)_{10}}$

1.5 Système hexadécimal

Le système hexadécimal est le système de numération à base 16. Il est utilisé dans les calculateurs numériques car la représentation d'un nombre décimal est plus claire que sa représentation binaire. En effet, $(3561)_{16} = (0011\ 0101\ 0110\ 0001)_2$.
Ce système comprend 16 symboles constitués par les dix chiffres du système décimal **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9** et les 6 premières lettres de l'alphabet **A, B, C, D, E, F**.
Les valeurs des différentes lettres sont : **A=10, B=11, C=12, D=13, E=14 et F=15**.

Exemple : N = $(5AF)_{16}$. Ce nombre N peut se décomposer comme suit :
$(5AF)_{16} = 5 \times 16^2 + A \times 16^1 + F \times 16^0$

En remplaçant A et F par leur équivalent en base 10, on obtient :
$(5AF)_{16} = 5 \times 16^2 + 10 \times 16^1 + 15 \times 16^0$
$(5AF)_{16} = 5 \times 256 + 10 \times 16 + 15 \times 1$
Donc : $\mathbf{(5AF)_{16} = (1455)_{10}}$

1.6 Autres systèmes de codage

1.6.a Code gray ou binaire réfléchi

C'est le système de codage qui, contrairement au code binaire pur est arrangé de manière à ne faire changer d'état qu'une variable à la fois d'une ligne à l'autre. Ce code est très utile pour les codeurs absolus afin d'éviter les erreurs.

Exemple :

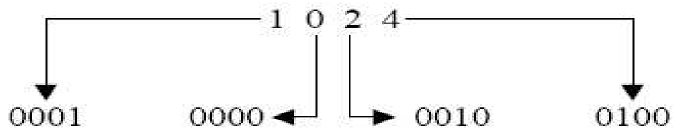
Code binaire pur				
Nombre$_{(10)}$	2^3	2^2	2^1	2^0
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1

Code binaire réfléchi				
Nombre$_{(10)}$	**a**	**b**	**c**	**d**
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	1
3	0	0	1	0
4	0	1	1	0
5	0	1	1	1
6	0	1	0	1
7	0	1	0	0
8	1	1	0	0
9	1	1	0	1

1.6.b Le code BCD

BCD vient de Binary Coded Decimal (en français « Décimal Codé en Binaire »). La représentation d'un nombre décimal en BCD est très simple. Il suffit de transformer chaque chiffre en binaire naturel sur 4 bits, sans faire de calcul.

Exemple : Transformation du nombre N = $(1024)_{10}$



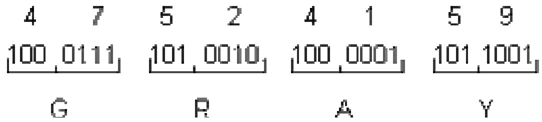
Si maintenant on met bout à bout chaque nombre binaire nous obtenons : $(1024)_{10} = (0001000000100100)_{BCD} = (1000000100100)_{BCD}$

1.6.c Le code ASCII

La mémoire de l'ordinateur conserve toutes les données sous forme numérique. Il n'existe pas de méthode pour stocker directement les caractères. Chaque caractère possède donc son équivalent en code numérique: c'est le **code ASCII** (**A**merican **S**tandard **C**ode for **I**nformation **I**nterchange traduit " Code Americain Standard pour l'Echange d'Informations"). Le code ASCII de base représentait les caractères sur 7 bits (c'est-à-dire 128 caractères possibles, de 0 à 127). Le huitième bit est un bit de parité.

Exemple :

En écrivant GRAY en ASCII nous obtenons :

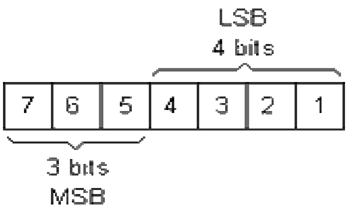


Avec la parité paire le résultat est le suivant :

Parité

L'intérêt particulier des contrôles de parité est de vérifier qu'aucune erreur simple ne se produit lors du transfert d'un mot d'une mémoire à une autre.

Table des codes de caractères ASCII



Exemple : Y = 59 (hexadécimal)

Y = 101 1001

LSB \ MSB		0 000	1 001	2 010	3 011	4 100	5 101	6 110	7 111
0	0000	NUL	DLE	SP	0	@	P	`	p
1	0001	SOH	DC1	!	1	A	Q	a	q
2	0010	STX	DC2	"	2	B	R	b	r
3	0011	ETX	DC3	#	3	C	S	c	s
4	0100	EOT	DC4	$	4	D	T	d	t
5	0101	ENQ	NAK	%	5	E	U	e	u
6	0110	ACK	SYN	&	6	F	V	f	v
7	0111	BEL	ETB	'	7	G	W	g	w
8	1000	BS	CAN	(	8	H	X	h	x
9	1001	HT	EM	)	9	I	Y	i	y
A	1010	LF	SUB	*	:	J	Z	j	z
B	1011	VT	ESC	+	;	K	[	k	}
C	1100	FF	FS	,	<	L	\	l	|
D	1101	CR	GS	-	=	M	]	m	{
E	1110	SO	RS	.	>	N	^	n	~
F	1111	SI	US	/	?	O	_	o	DEL

Les codes 0 à 31 sont des caractères de contrôle car ils permettent de faire des actions telles que le retour à la ligne (CR), un Bip sonore (BEL)...
Les majuscules sont représentées par Les codes 65 à 90 et les minuscules par les codes 97 à 122. En modifiant le 6ème bit nous passons de majuscules à minuscules, c'est-à-dire en ajoutant 32 au code ASCII en base décimale.

Les codes de contrôle ASCII

NUL	Nul
SOH	Début d'entête
STX	Début de texte
ETX	Fin de texte
EOT	Fin de transmission
ENQ	Interrogation
ACK	Acquittement
BEL	Sonnerie ou alarme
BS	Espacement arrière
HT	Tabulation horizontale
LF	Interligne
VT	Tabulation verticale
FF	Présentation de formule
CR	Retour chariot
SO	Hors code
SI	En code
DEL	Oblitération
DLE	Echappement transmission
DC1	Commande d'appareil
DC2	Commande d'appareil
DC3	Commande d'appareil
DC4	Commande d'appareil
NAK	Accusé de réception négatif
SYN	Synchronisation
ETB	Fin de bloc de transmission
CAN	Annulation
EM	Fin de support
SUB	Substitution
ESC	Echappement
FS	Séparateur de fichier
GS	Séparateur de groupe
RS	Séparateur d'article
US	Séparateur de sous article

Le code ASCII a été mis au point pour la langue anglaise, il ne contient donc pas de caractères accentués, ni de caractères spécifiques à une langue. Pour coder ce type de caractère il faut recourir à un autre code. Le code ASCII a donc été étendu à 8 bits (un octet) pour pouvoir coder plus de caractères (on parle d'ailleurs de code ASCII étendu).
Exemple d'une table de code étendu :

LSB \ MSB		8 1000	9 1001	A 1010	B 1011	C 1100	D 1101	E 1110	F 1111
0	0000	Ç	É	á	░	└	ð	Ó	-
1	0001	ü	æ	í	▒	┴	Đ		±
2	0010	é	Æ	ó	▓	┬	Ê	ô	_
3	0011	â	ô	ú	│	├	Ë	ò	¾
4	0100	ä	ö	ñ	┤	─	È	õ	¶
5	0101	à	ò	Ñ	Á	┼	ı	Õ	§
6	0110	å	û	ª	Â	ã	Í	µ	÷
7	0111	ç	ù	º	À	Ã	Î	þ	¸
8	1000	ê	ÿ	¿	©	╚	Ï	Þ	°
9	1001	ë	Ö	®	╣	╔	┘	Ú	¨
A	1010	è	Ü	¬	║	╩	┌	Û	·
B	1011	ï	ø	½	╗	╦	█	Ù	¹
C	1100	î	£	¼	╝	╠	▄	ý	³
D	1101	ì	Ø	¡	¢	═	¦	Ý	²
E	1110	Ä	×	«	¥	╬	Ì	¯	■
F	1111	Å	ƒ	»	┐	¤	▀	´	

Remarque : Mais malgré l'utilisation du code ASCII étendu certains caractères comme les caractères des langues qui n'ont pas d'alphabet latin (comme l'arabe ou le chinois) ne peuvent pas être codé.
Le code ASCII tend à être remplacé par le standard **unicode**. Ce standard code chaque caractère sur 16 bits, ce qui laisse 65536 possibilités. Cela en laisse assez pour coder toutes les langues du mondes (ou presque) ainsi que des caractères spéciaux.

1.7 Tableau récapitulatif des différents codes binaires

Décimal	*Binaire Naturel*	*Hexadécimal*	*Gray ou Binaire Réfléchi*	*BCD*
0	0000	0	0000	0000
1	0001	1	0001	0001
2	0010	2	0011	0010
3	0011	3	0010	0011
4	0100	4	0110	0100
5	0101	5	0111	0101
6	0110	6	0101	0110
7	0111	7	0100	0111
8	1000	8	1100	1000
9	1001	9	1101	1001
10	1010	A	1111	0001 0000
11	1011	B	1110	0001 0001
12	1100	C	1010	0001 0011
13	1101	D	1011	0001 0011
14	1110	E	1001	0001 0100
15	1111	F	1000	0001 0101

2. Changement de base

2.1 Conversion d'un nombre d'une base « b » en un nombre décimal

Avec ce que nous venons de voir, la transformation est relativement facile. Il suffit de suivre les étapes suivantes :

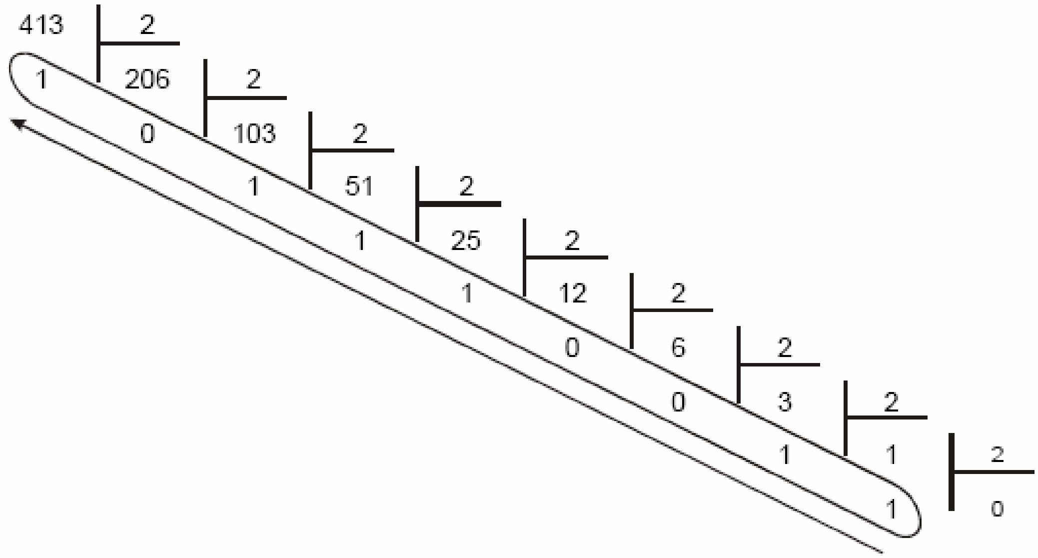
1. Décomposer le nombre dans sa base.
2. Remplacer éventuellement les symboles dans leur équivalent décimal.
3. Effectuer l'opération pour avoir un résultat en base 10.

2.2 Conversion d'un nombre décimal en un nombre d'une autre base

Méthode : diviser le nombre décimal à convertir par la base b et conserver le reste de la division. Le quotient obtenu est divisé par b et conserver le reste. Il faut répéter l'opération sur chaque quotient obtenu.

Les restes successifs sont écrits, en commençant par le dernier, de la gauche vers la droite pour former l'expression de $(N)_{10}$ dans le système de base b. Cette méthode est dite **Méthode de la division successives**.

Exemple : Convertir $N = (413)_{10}$ en binaire.



Pour le nombre décimal 413, nous obtenons :
Une « suite des dividendes », 413, 206, 103, 51, 25, 12, 6, 3, 1
Une « suite des quotients », 206, 103, 51, 25, 12, 6, 3, 1, 0
Une « suite des restes », 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1
La méthode classique pour obtenir le codage Binaire Naturel est de juxtaposer les nombres de la suite des restes, prise à l'envers, soit : $\mathbf{(413)_{10} = (110011101)_2}$
On peut aussi considérer la suite des dividendes, prise à l'envers, suite qui commence toujours par 1, soit ici : 1, 3, 6, 12, 25, 51, 103, 206, 413. En remplaçant par 1 les nombres impairs et 0 les nombres pairs, on obtient : 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, une suite de chiffres qui, juxtaposés, donnent le codage Binaire Naturel.

2.3 Conversion d'un nombre hexadécimal en binaire

Chaque symbole du nombre écrit dans le système hexadécimal est remplacé par son équivalent écrit dans le système binaire.

Exemple : $N = (ECA)_{16} = (\underset{E}{\underline{1110}}\ \underset{C}{\underline{1100}}\ \underset{A}{\underline{1010}})_2$.

2.4 Conversion d'un nombre binaire en hexadécimal

C'est l'inverse de la précédente. Il faut donc regrouper les 1 et les 0 du nombre par 4 en commençant par la droite, puis chaque groupe est remplacé par le symbole hexadécimal correspondant.

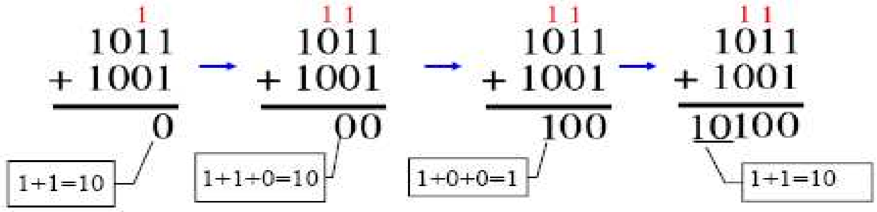
Exemple : $N = (1\ 1000\ 0110\ 1111)_2 = (\underset{0001}{\underline{\ 1\ }}\ \underset{1000}{\underline{\ 8\ }}\ \underset{0110}{\underline{\ 6\ }}\ \underset{1111}{\underline{\ F\ }})_{16}$.

3. Les opérations en binaire

3.1 L'addition

On procède comme en décimal. Quand le résultat de la somme d'une colonne est supérieure à 1 (utilise plus de 1 bit), on passe ce bit au voisin de gauche.

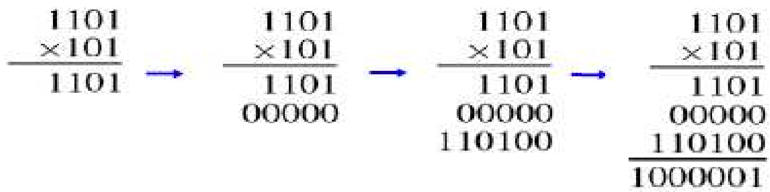
Exemple : 1011 + 1001



3.2 La multiplication

Dans la multiplication binaire, on procède comme en décimal.

Exemple : 1101 × 101



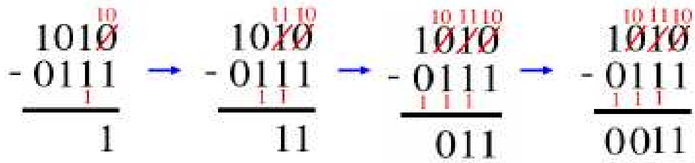
3.3 La soustraction

Dans la soustraction binaire, on peut procéder comme en décimal :

• Quand la quantité à soustraire est supérieure à la quantité dont on soustrait, on « emprunte » 1 au voisin de gauche.

En binaire, le « 1 » emprunté va ajouter « 2 » à la quantité dont on soustrait, tandis qu'en décimal il ajoute « 10 ».

Exemple : 1010 - 0111



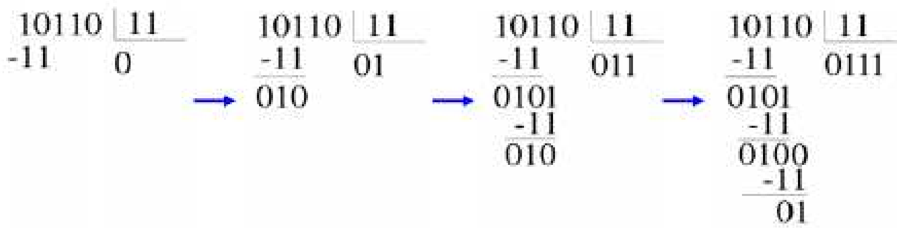
3.4 La division

La division binaire s'effectue à l'aide de soustractions et de décalages, comme la division décimale, sauf que les digits du quotient ne peuvent être que 1 ou 0.

Le bit du quotient est 1 si on peut soustraire le diviseur, sinon il est 0.

Pour l'instant, on ne fait que la division entière.

Exemple : 10110 / 11



4. Représentation des nombres

4.1 Le binaire signé : Représentation d'un entier relatif

Un entier relatif est un entier pouvant être négatif. Il faut donc coder le nombre de telle façon que l'on puisse savoir s'il s'agit d'un nombre positif ou d'un nombre négatif, et il faut de plus que les règles d'addition soient conservées.

4.1.a Représentation Signe - Valeur absolue

Principe :

- Le bit le plus signifiant (bit de gauche) représente le signe : **0** pour "plus" et **1** pour "moins".
- La valeur absolue est donnée par le reste des bits.

Exemple :

Binaire 4 Bits	**Décimal**
0111	+ 7
0110	+ 6
0101	+ 5
0100	+ 4
0011	+ 3
0010	+ 2
0001	+ 1
0000	+ 0
1000	- 0
1001	- 1
1010	- 2
1011	- 3
1100	- 4
1101	- 5
1110	- 6
1111	- 7

Cette méthode semble très simple.

Pour n bits les valeurs extrêmes sont : $\mathbf{2^{(n-1)} - 1}$

On peut écrire autant de positifs que de négatifs.

Cette présentation est appelée **représentation signe-valeur absolue** mais comporte deux inconvénients de taille:

- Il y a manifestement deux zéros (un "zéro positif" un "zéro négatif" !)
- Les opérations ne se font manifestement pas facilement comme le montre l'exemple suivant :

	Binaire 4 Bits	Décimal	
Nombre 1	**0100**	**+ 4**	
Nombre 2	**1011**	**- 3**	
Somme	**1111**	**- 7**	**Faux !**

4.1.b Représentation par complément à 2

• un entier relatif positif ou nul sera représenté en binaire (base 2) comme un entier naturel, à la seule différence que le bit de poids fort représente le signe. Il faut donc s'assurer pour un entier positif ou nul qu'il est à zéro (0 correspond à un signe positif, 1 à un signe négatif). Ainsi si on code un entier naturel sur 4 bits, le nombre le plus grand sera 0111 (c'est-à-dire 7 en base décimale).

D'une manière générale le plus grand entier relatif positif codé sur n bits sera $2^{n-1}-1$.

• un entier relatif négatif grâce au codage complément à deux :

Principe : soit à représenter un nombre négatif.

○ Prenons son opposé (son équivalent en positif)
○ On le représente en base 2 sur n-1 bits
○ On complémente chaque bit (on inverse, c'est-à-dire que l'on remplace les zéros par des 1 et vice-versa)
○ On ajoute 1

On remarquera qu'en ajoutant le nombre et son complément à deux on obtient 0.

Exemple :

On désire coder la valeur -5 sur 8 bits. Il suffit

- d'écrire 5 en binaire: 00000101
- de complémenter à 1: 11111010
- d'ajouter 1: 11111011
- la représentation binaire de -5 sur 8 bits est **11111011**

Remarques:

Le bit de poids fort est 1, on a donc bien un nombre négatif

Si on ajoute 5 et -5 (00000101 et 11111011) on obtient 0 (avec une retenue de 1)

4.1.c Représentation biaisée (par excès)

Une autre possibilité de codage des entiers signés consiste en ce qu'on appelle une représentation biaisée ("biased" en anglais), également appelée **représentation par excès**.

Celle-ci, très simple, consiste à considérer tout nombre codé comme un entier non signé auquel on soustrait une constante, ou biais.

Généralement, ce biais est égal à la médiane de l'ensemble représentable, c'est-à-dire 128 pour une représentation sur un octet.

Exemple :

Base 10	Base 2 signée biaisée par 128
+127	1111 1111
+126	1111 1110
+2	1000 0010
+1	1000 0001
0	1000 0000
-1	0111 1111
-2	0111 1110
-126	0000 0010
-127	0000 0001

4.2 Représentation à "virgule fixe"

A l'instar de la définition des nombres binaires naturels, nous pourrions définir un réel positif par une convention du même type :

Exemple : le nombre 1010,101 peut représenter la somme suivante :

$$1010,101 = 8 + 0 + 2 + 0 + \frac{1}{2} + \frac{0}{4} + \frac{1}{8}$$

Soit, en écriture décimale : 8 + 2+ 0,5 + 0,125 = 10,625

Sous une autre forme :

$$1 \times 2^{3} + 0 \times 2^{2} + 1 \times 2^{1} + 0 \times 2^{0} + 1 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3}$$

On peut rigoureusement démonter que tout nombre réel positif pourrait ainsi écrit de cette manière.

Resterait à décrire le signe, ce qui peut être fait par un bit particulier (bit de signe) ou par une convention de type complément à deux.

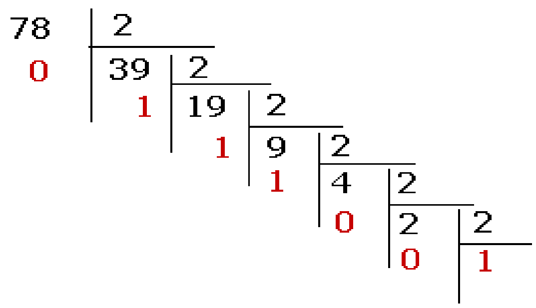
Beaucoup de ces variantes ont été utilisées dans les calculateurs.

Exemple du calcul inverse : traduire en binaire le nombre 78,347

Partie entière : 78

Nous opérons une suite de divisions par 2 et retenons les divers restes.

Ces restes sont repris à l'envers



Résultat : 1001110

Partie non entière : 0,347

0,347 . 2 = 0,694 < 1 je pose 0 : 0,347 = 0,0...
0,694 . 2 = 1,388 > 1 je pose 1 : 0,347 = 0,01...
0,388 . 2 = 0,766 < 1 je pose 0 : 0,347 = 0,010...
0,766 . 2 = 1,552 > 1 je pose 1 : 0,347 = 0,0101...
0,552 . 2 = 1,104 > 1 je pose 1 : 0,347 = 0,01011...
0,104 . 2 = 0,208 < 1 je pose 0 : 0,347 = 0,010110...
0,208 . 2 = 0,416 < 1 je pose 0 : 0,347 = 0,0101100...
0,416 . 2 = 0,832 < 1 je pose 0 : 0,347 = 0,01011000...
0,832 . 2 = 1,664 > 1 je pose 1 : 0,347 = 0,010110001...
0,664 . 2 = 1,328 > 1 je pose 1 : 0,347 = 0,0101100011...

Continuer cette méthode jusqu'à atteindre la précision souhaitée
Ici : 0,347 décimal est arrondi à 0,0101100011 binaire
avec une précision absolue de 2 à la puissance -10

Résultat final :
78,347 écrit en décimal représente **1001110,0101100011** écrit en binaire à moins de 2^{-11} près
Reste cependant que cette méthode est souvent dispendieuse en nombre de bits !

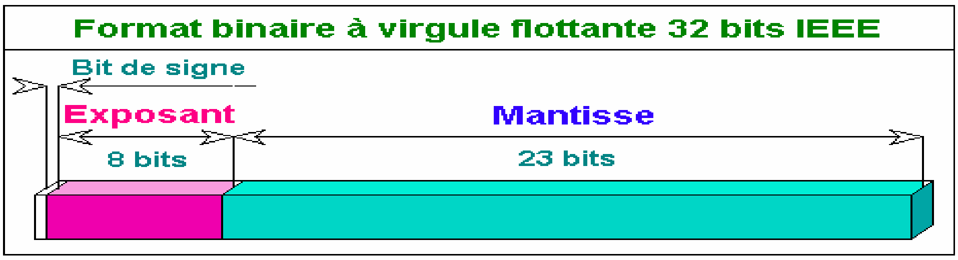
Imaginons que l'on veuille écrire tous les réels de 0 à 65 635.
Le sous-ensemble d'entiers de cet intervalle s'écrit sous 16 bits : 2^{16} = 65 536.
Si la précision maximale que nous voulons atteindre est seulement de $1/2^{16}$-1 = 1/65 535
Nous devrons écrire seize chiffres après la virgule ;
Exemple **1010 0101 1100 1111,0110 1110 1101 0111**
Pour de petits nombres, il y gaspillage de bits à gauche de la virgule : 101,001001100
Pour des nombres à peu de décimales, il y aura gaspillage de bits après la virgule : 1100 1111,01
Néanmoins ce système est réellement employé dans certains types de calculateurs.

4.3 Représentation "à virgule flottante"
Rappelons ce qu'est la notation scientifique des nombres réels :
En "notation scientifique" dite "à virgule flottante" - 0,006234 s'écrit - 6.234 e-3 ou - 6.234 E-3
Cette notation est l'équivalent de : 6,234. 10^{-3}
Notons que :

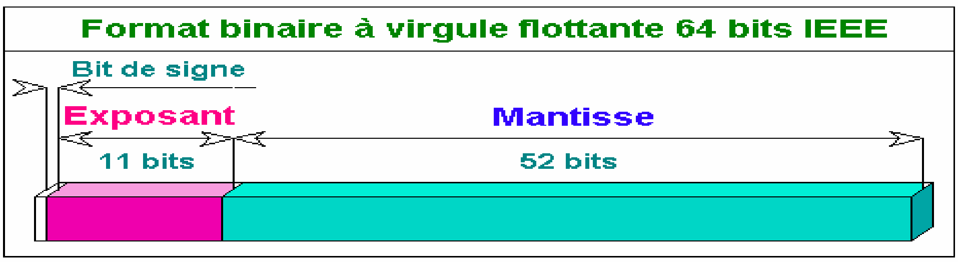
- Le nombre est précédé de son signe (ici -)
- La partie entière (ici 6) en valeur absolue est un nombre d'un seul chiffre **de 1 à 9** (pas zéro)
- La partie décimale (ici 234) est séparée de la partie entière par un point (US) ou une virgule (EU)
- Un exposant décimal **entier relatif** suit la lettre **e** ou **E** : e-3 ou E-3 signifient 10^{-3}

91234.56 s'écrirait 9.123456e4 ; équivalent de 9.123456. 10^4

Quelques exemples de formats binaires à virgule flottante à 32, 64



Utilisé pour le type "float" (simple précision)



Utilisé pour le type "double" (double précision)

Détails d'implémentation des nombres en virgule flottante au niveau de leur représentation binaire

Normes IEEE

Le format adopté est le suivant :

$$(signe) \times 2^{exposant - décalage} \times \mathbf{1,} mantisse$$

Avec :

$$décalage = 2^{n-1} - 1$$

$$n = \text{le nombre de bits attribués à l'exposant}$$

Exemple :

Traduisons en binaire format flottant simple précision 32 bits (float) le nombre : **x = - 6,625** (écrit ici en décimal)

Occupons-nous d'abord de sa valeur absolue 6,625

Traduisons ce nombre en binaire :

$6,625_{\text{décimal}} = 110,1010_{\text{binaire}}$

LIEN

Nous constituons la mantisse : **1, mantisse**

110,1010 = 1,**101010**. 2^2

(2^2 opère un décalage de 2 chiffres vers la droite après la virgule)

Nous étendons la partie fractionnaire à 23 bits

1,101010 = 1,1010 1000 0000 0000 0000 000

Mantisse sur 23 bits = **101 0100 0000 0000 0000 0000**

(On ne mémorise pas le 1 implicite d'avant la virgule)

Nous rappelons le décalage IEEE en simple précision 8 bits : $2^{8-1} - 1 =$ **127**

Nous constituons l'exposant : **exposant** = 2+ décalage = **129**

$129_{\text{décimal}} = 1000\ 0001_{\text{binaire}}$

Voici le résultat : bit de signe - exposant – mantisse

Bits	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

En hexadécimal C0 D4 00 00

Le bit de signe (bit b31) positionné à 1 indique un nombre réel négatif !

L'opposé de - 6,625, soit + 6,625, s'obtient en mettant le bit de signe b31 à 0

+ 6,625 se code 40 D4 00 00 en hexadécimal

PARTIE 2 :
ALGÈBRE DE BOOLE

1. Généralités
De nombreux dispositifs électronique, électromécanique, (mécanique, électrique, pneumatique, etc...) fonctionnement en **TOUT** ou **RIEN**.
Ceci sous-entend qu'ils peuvent prendre 2 états.
Exemple :

- arrêt marche
- ouvert fermé
- enclenché déclenché
- avant arrière
- vrai faux
- conduction blocage

Pour ces raisons, il est beaucoup plus avantageux d'employer un système mathématique n'utilisant que 2 valeurs numériques (exemple O ou 1) pour étudier les conditions de fonctionnement de ces dispositifs. C'est **le système binaire**

L'ensemble des règles mathématiques qui pourront être utilisées avec des variables ne pouvant prendre que 2 valeurs possibles représente : "**L'algèbre de Boole**"

2. Définitions
2.a Variable logique ou variable binaire
La variable logique est une grandeur qui peut prendre 2 valeurs qui sont repérées habituellement **0** ou **1**.
Cette variable binaire se note par une lettre comme en algèbre.
Physiquement, cette variable peut correspondre à l'un des dispositifs cités ci-dessus dont les 2 états représentent les 2 valeurs possibles que peut prendre cette variable.

2.b Fonction logique
Une fonction logique est le résultat de la combinaison d'une ou plusieurs variables logiques reliées entre elles par des opérations mathématiques Booléennes bien définies :
La valeur résultante de cette fonction dépend de la valeur des variables logiques, mais de toute façon cette résultante ne peut être que **0** ou **1**.
Une fonction logique possède donc une ou des **variables logiques d'entrée** et une **variable logique de sortie**.
Cette fonction logique se note par une lettre comme en algèbre.
En réalité ces fonctions sont assurées par des composants électroniques admettant des signaux électriques en entrée, et restituant un signal en sortie. Les signaux électroniques peuvent prendre une valeur de l'ordre de 5 Volts (c'est l'ordre de grandeur général) que l'on représente par un 1, ou 0 V que l'on représente par un 0.

2.c Table de vérité

Table de correspondance entre les variables binaires traitées par une fonction logique et le résultat de la fonction logique.

Exemple de fonction logique : la fonction interrupteur **I** est la valeur de l'interrupteur, 1 pour ouvert, 0 pour fermé. **L** est l'état de la lampe située après l'interrupteur. **f(L)=I**, **L** est fonction de **I**.
La table de vérité est :

I	L
0	0
1	1

Deuxième exemple : éclairage d'une salle. La salle a deux fenêtres, protégés par des volets. Elle n'est éclairée que lorsqu'au moins une fenêtre est ouverte. **a** représente l'ouverture de la première fenêtre (0 pour fermée, 1 pour éclairée). **b** représente l'ouverture de la deuxième fenêtre (0 pour fermée, 1 pour éclairée). **S** représente l'éclairage de la salle (0 pour non éclairée, 1 pour éclairée).
La table de vérité est :

a	b	S
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

S dépend de la valeur des variables binaires **a** et **b**.

2.d Forme canonique

Pour écrire l'équation de S (dans le 2$^{\text{éme}}$ exemple ci-dessus) en fonction des 2 variables il faut dire :

S=1 si a=1 et b=1
ou a=1 et b=0
ou a=0 et b=1

Autant de termes que de fois que la fonction est égale à 1.
Ce qui donne une écriture "algébrique" en notant :
la variable par sa lettre si elle vaut 1 (ex : **si a vaut <u>1</u>** nous écrirons **a**)
la variable par sa lettre surlignée si elle vaut 0. (**si a vaut 0** nous écrirons **a** et nous lirons **a barre**)
Pour la table de vérité ci-dessus, cela nous donne

$$S = a.b + a.\overline{b} + \overline{a}.b$$

Cette forme d'écriture est appelée **forme canonique**.

3 Les fonctions logiques fondamentales

3.a Fonction NON ou "NO"

La fonction NON est obtenue avec une seule variable.

Table de vérité :

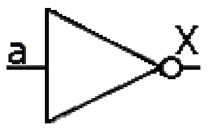
a	X
0	1
1	0

La valeur de la fonction est toujours la valeur inverse (complémentaire) de celle de la variable.

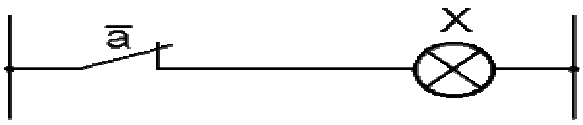
Nous l'écrivons : $X = \bar{a}$

Cette fonction est aussi appelée : Fonction Inversion ou Fonction complémentation.

Symbolisation :



Réalisation électrique :



3.b Fonction OU ou "OR"

On obtient la fonction OU avec un minimum de deux variables.

Table de vérité :

b	a	X
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

La fonction X prend la valeur 1 quand l'une ou l'autre ou les 2 variables sont à 1.

Nous l'écrivons : $X = a + b$ ==> addition ou somme logique

(Ou encore : $X = a \vee b$ ==> disjonction : a ou b (ou les deux))

Nous lirons X égale a ou b.

Propriétés particulières :

$a + 1 = 1$

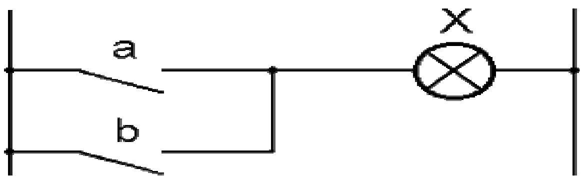
$a + 0 = a$

$a + a = a$

Symbolisation:

Forme canonique :
X = a + b

Réalisation électrique :



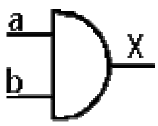
3.c Fonction ET ou "AND"
Cette fonction est obtenue avec au moins deux variables.
Table de vérité :

b	a	X
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

La fonction X prend la valeur 1 quand l'une et l'autre variables sont à 1.
Nous l'écrivons : X = a . b ==> produit logique
(Ou encore : $X = a \wedge b$ ==> conjonction : a et b)
Nous lirons X égale a et b.

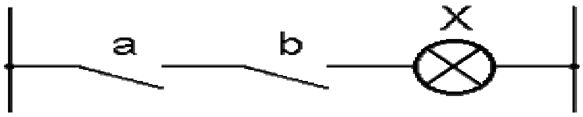
Propriétés particulières :
a . 1 = a
a . 0 = 0
a . a = a

Symbolisation :



Forme canonique :
X = a . b

Réalisation électrique :



4. Lois de l'algèbre de Boole

Pour simplifier des circuits logiques, on a besoin de connaître les lois de Boole.

Pour trouver ces lois on utilise les tables de vérité des opérateurs ET, OU, NON (certains sont proches de l'algèbre traditionnelle)

Loi	Opérateur ET	Opérateur OU
Identité	**1. A=A**	**0+A=A**
Nullité	**0. A=0**	**1+A=1**
Associativité	**(A.B).C=A. (B.C)**	**(A+B)+C=A+ (B+C)**
Commutativité	**A.B=B.A**	**A+B=B+A**
Distributivité	**A. (B+C)=A.B+A.C**	
Idempotence	**A.A=A**	**A+A=A**
Inversion	$A.\overline{A}=0$	$A+\overline{A}=1$
Absorption	**A. (A+B)=A**	**A+A.B=A**
Loi de Morgan	$\overline{(A.B)}=\overline{A}+\overline{B}$	$\overline{(A+B)}=\overline{A}.\overline{B}$

PARTIE D :
DÉNOMBREMENT

1. Principes de base du dénombrement

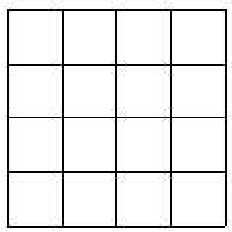
On rappelle que le cardinal d'un ensemble fini E, noté Card(E), représente son nombre d'éléments.
Par exemple avec E = {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}, on a : Card(E) = 11

1.a Principe de la somme

Si des ensembles A1, A2, ..., Ap constituent une partition d'un ensemble fini E, alors : $\text{Card}(A_1) + \text{Card}(A_2) + ... + \text{Card}(A_p) = \text{Card}(E)$

Exemple :

Combien y a-t-il de carrés dont les côtés sont matérialisés sur la figure ci-contre ?



Soit E l'ensemble de tous les carrés. Notons A1, A2, A3 et A4 l'ensemble de ces carrés ayant pour côtés respectifs 1, 2, 3 et 4 carreaux. Les sous-ensembles A1, A2, A3 et A4 constituent une partition de E (puisqu'ils n'ont aucun élément en commun et que leur réunion est E).
D'après le principe de la somme :
Card(E) = Card(A1) + Card(A2) + Card(A3) + Card(A4)
= 16 + 9 + 4 + 1 = 30
Il y a donc, au total 30 carrés dont les côtés sont matérialisés sur la figure ci-contre

Conséquences :

Soient A et B deux parties d'un ensemble fini E. On a les relations suivantes : 1) Lien entre le cardinal de l'union et le cardinal de l'intersection : $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$ 2) Dans le cas où A et B sont disjoints (c'est-à-dire tels que $A \cap B = \varnothing$) alors : $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$ 3) Lien entre le cardinal d'une partie et celui de son complémentaire : $\text{Card}(\overline{A}) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A)$

1.b Principe du produit (ou principe multiplicatif)

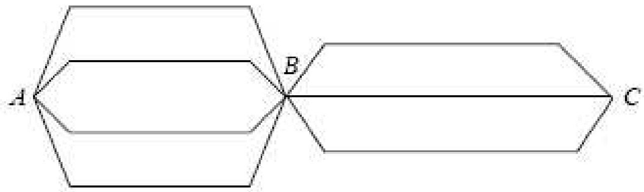
Si une situation comporte p étapes offrant respectivement n1, n2, ... , np possibilités alors le nombre total d'issues est : $n1 \times n2 \times ... \times np$

Exemples :

• Un code comporte deux lettres distinctes suivies d'un chiffre non nul. Combien peut-on former de codes distincts ?
Les trois étapes : choix de la première lettre, de la deuxième, puis du chiffre offrent respectivement 26, 25 et 9 possibilités. Le nombre cherché est donc $26 \times 25 \times 9 = 5850$ codes distincts.

• Nombre d'itinéraires distincts menant de A à C ? Nombre d'itinéraires "aller retour" A-C-A n'empruntant que des chemins distincts ?

Aller simple *A-C* : $4 \times 3 = 12$
Aller retour *A-C-A* : $4 \times 3 \times 2 \times 3 = 72$



Du principe multiplicatif, découle le cardinal du produit cartésien :
Rappel : le produit cartésien de p ensembles E1, E2, ..., Ep, noté $E1 \times E2 \times ... \times Ep$, représente l'ensemble des p-uplets (e1, e2, ... , ep) où $e1 \in E1$, $e2 \in E2$, ... , $ep \in Ep$.

Si E1, E2, ..., Ep sont p ensembles de cardinal fini, alors :
$\mathrm{Card}(E1 \times E2 \times ... \times Ep) = \mathrm{Card}(E1) \times \mathrm{Card}(E2) \times ... \times \mathrm{Card}(Ep)$

2. Dénombrement des p-listes

Définition
Soient $n \in IN^*$ et E un ensemble de cardinal n. Soit $p \in IN$.
Une **p-liste** (ou liste de longueur p) de E est un p-uplet d'éléments de E.
C'est donc un élément du produit cartésien $E^P = E \times ... \times E$ (p facteurs)

Exemples :
• E = {0 ; 1 ; 2 ; ... ; 99}. Une 5-liste de E est par exemple (21, 12, 12, 15, 98).
• E = {a ; b ; c ; ... ; z}. Le 6-uplet (o, f, p, p, t) est une 5-liste de E.
Remarques :
• On précise parfois p-liste "avec répétition" pour les distinguer des arrangements qui seront évoqués au paragraphe suivant.
• On suppose que la 0-liste existe, c'est la liste qui ne comporte aucun élément.

Théorème
Soit E un ensemble de cardinal fini n. Le cardinal de l'ensemble E^P des p listes de E est n^P.

Exemple :
Combien y a-t-il de numéro de téléphone commençant par 03557... ?
Les 4 numéros qui suivent sont des 4-listes de l'ensemble {0 ; 1 ; ... ; 9}. Il y en a $10^4 = 10000$.

3. Dénombrement des Arrangements et des Permutations

Définition
Soit E un ensemble de cardinal fini n et p un entier naturel tel que $0 \leq p \leq n$.
Un **p-arrangement** (ou arrangement de p éléments) de E une p-liste d'éléments **distincts** de E.
Une **permutation** de E est un arrangement des n éléments de E.

Un arrangement est donc une p-liste dans laquelle il n'y a pas de répétitions.

Exemples :
• E = {a ; b ; c ; ... ; z}. Les listes suivantes : *i s t a* , *t r i* sont deux arrangements de 4 et 3 éléments de E. Par contre, *a r r a n g e m e n t* n'est pas un arrangement de 11 éléments de E car ses éléments ne sont pas distincts.
• Soit E = {s ; u ; c ; r ; e}. Les anagrammes du mot s u c r e sont des permutations de E.

Dans tout ce qui suit, nous noterons $n!$ le produit $1 \times 2 \times 3 \times ... \times n$, ce produit s'appelle "factorielle n".
On convient que 0! = 1.

Théorème
Soit E un ensemble fini de cardinal n et p un entier naturel tel que $0 \leq p \leq n$.
· Le nombre d'arrangements de p éléments de E est :

$$A_n^p = n(n-1)\,...(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Le nombre de permutations de E est :

$$A_n^n = n!$$

Applications :
• De combien de façons peut-on repartir 7 stagiaires sur 7 ordinateurs ?
Désignons par p1, p2, ..., p7 les 7 stagiaires et posons E = {p1 ; p2 ; ... ; p7}. Une répartition peut se voir comme un arrangement des 7 éléments de E c'est-à-dire une permutation de E, il y en a 7! = 5040.
• Un porte manteau comporte 5 patères. De combien de façons peut-on y accrocher 3 manteaux différents ? (Au plus un manteau par patère)
Notons P1, ..., P5 les 5 patères. Chaque rangement peut se voir comme un 3-arrangement de l'ensemble {P1, ..., P5}. Par exemple, P2P1P4 signifie "manteau n°1 sur P2, manteau n°2 sur P1 et manteau n°3 sur P4".

Il y a donc A_5^3 = 60 rangements possibles.

• Nombre de mots (ayant un sens ou non) de 5 lettres distinctes de l'alphabet français : A_{26}^5
• Tirages ordonnés : Une urne contient 10 boules numérotées 0, 1, ..., 10. On en tire successivement trois sans remise. Combien de tirages différents ? A_{10}^3

4. Dénombrement des Combinaisons

Définition
Soit E un ensemble fini de cardinal n et p un entier naturel tel que $0 \leq p \leq n$.
Une **p-combinaison** (ou combinaison de p éléments) de E est une partie de E ayant p éléments.

Exemple :
E = {a ; b ; c} et p = 2. Les combinaisons de deux éléments de E sont les parties : {a ; b}, {a ; c} et {b ; c}.

Il est essentiel de noter que :
• Dans une partie, les éléments sont deux à deux distincts.
• Deux parties qui contiennent les mêmes éléments sont égales.
Ainsi {a ; b} = {b ; a}. (L'ordre dans lequel on écrit les éléments n'a pas d'importance)

Théorème
Soit E un ensemble fini de cardinal n et p un entier naturel tel que 0≤ p≤ n.
Le nombre de combinaisons de p éléments de E est :

$$\binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

(Ce nombre est aussi noté C_n^p)

Les coefficients $\binom{n}{p}$ sont encore appelés coefficient binomiaux.

Remarque : bien que les coefficients $\binom{n}{p}$ soient définis sous la forme d'une fraction, ils sont bien des entiers.

Interprétation importante
C_n^p représente le nombre de façons de choisir p objets parmi n (l'ordre n'important pas).

Applications :
Nombre de comités de 3 personnes que l'on peut élire dans une assemblée de 20 personnes :
$\binom{20}{3}$ = 1140.
Tirages simultanés ou non ordonnés : une urne contient 10 boules numérotées 0, 1, ... , 10. On en tire simultanément trois. Combien de tirages différents ? $\binom{10}{3}$ = 120.

Propriétés :
Soit n un entier supérieur ou égal à 1.
• $\binom{n}{0} = 1$ • $\binom{n}{n} = 1$ • $\binom{n}{1} = n$ • $\binom{n}{n-1} = n$
• $\binom{n}{p} = 0$ lorsque $p > n$ • $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ $(0 \leq p \leq n)$
• $\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p}$ $(1 \leq p \leq n)$

Triangle de Pascal

L'idée du triangle de Pascal est de présenter les $\binom{n}{p}$ ou C_n^p sous forme de tableau à double-entrées.
En colonne, les valeurs de p et en ligne les valeurs de n.
Les colonnes et les lignes sont numérotées à partir de 0, et la case correspond à la $p^{\text{ème}}$ colonne et $n^{\text{ème}}$ ligne est le coefficient $\binom{n}{p}$ ou C_n^p.

Or les formules précédentes montrent deux choses.

1: Il y a une symétrie dans ce tableau car $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$

2: Si on connaît les éléments de la ligne (n-1), on connaît automatiquement ceux de la ligne n par la formule $\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p}$

D'où le Triangle de Pascal:

	0	1	2	3	4		p-1	p
0	1	0						
1	1	1	0					
2	1	2	1	0				
3	1	3	3	1	0			
4	1	4	6	4	1			
n-1							C_{n-1}^{p-1}	C_{n-1}^{p}
n								C_n^p

Théorème Formule du binôme de Newton :
Pour tous nombres complexes a et b et tout entier naturel n non nul :

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p$$

Exemples : à l'aide de cette formule et du triangle de Pascal, on retrouve des relations très utiles :

Avec $n = 2$ la formule donne : $(a+b)^2 = \binom{2}{0} a^2 b^0 + \binom{2}{1} a^1 b^1 + \binom{2}{2} a^0 b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Avec $n = 3$ la formule donne : $(a+b)^3 = \ldots = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Notons qu'il n'est pas inutile de savoir substituer (-b) à b dans la formule pour obtenir :

$$(a-b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p} (-b)^p = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{n}{p} a^{n-p} b^p$$

Il est aussi utile de savoir utiliser la formule avec des valeurs particulières de a et b :

Lorsque a = b = 1 :

$$2^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{p} + \ldots + \binom{n}{n}$$

Lorsque a = 1 et b = - 1 :

$$0 = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} (-1)^p$$

Partie 4 : Probabilité

1. Vocabulaire

Langage des probabilités	Exemple
Considérons une expérience aléatoire : C'est une expérience dont les résultats dépendent du hasard	On lance un dé
Les résultats possibles sont des événements élémentaires	{1},{2},{3},{4},{5},{6}
L'ensemble des résultas possibles est appelé l'univers Ω	Ω = {1,2,3,4,5,6}
Un événement est une partie de l'univers	A = {2,4,6}
Evénement certain : c'est l'univers	A = Ω
Evénement impossible : c'est l'ensemble vide	A = $\emptyset$
L'événement contraire de A, noté $\bar{A}$ contient tous les événements élémentaires qui ne sont pas dans A	Si A = {1,3}, alors $\bar{A}$= {2,4,5,6}
La réunion de deux événements A et B, notée **A U B**, est l'événement qui contient tous les événements élémentaires de A ou de B	Si A={1,3,5} et B={1,2,3} Alors A U B={1,2,3,5}
L'intersection de deux événements A et B, notée A∩B, est l'événement qui contient tous les événements élémentaires communs à A et B	Si A={1,3,5} et B={1,2,3} Alors A∩B = {1,3}
Si A∩B=$\emptyset$, on dit que les événements A et B sont incompatibles	Si A ={1,3,5} et B = {4,6}

2. Calcul des probabilités de base
2.a Loi de probabilité sur un univers Ω

Définition
Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire. Définir une loi de probabilité P sur Ω, c'est associer, à chaque événement élémentaire ω_i, des nombres $p_i \in [0 ; 1]$ tels que :

$$\sum_i p_i = 1$$

Les nombres p_i sont alors appelés probabilités. On note aussi : $p_i = P(\omega_i)$.
Le principe suivant permet de calculer la probabilité d'un événement quelconque :
Principe fondamental : la probabilité P(E) d'un événement E est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.

Exemple : soit un dé truqué dont les probabilités d'apparitions des faces sont données par le tableau suivant :

Issue ω	1	2	3	4	5	6
Probabilité *P*(ω)	0,05	0,05	0,1	0,1	0,2	inconnue

Calculer la probabilité de l'événement *A* = "obtenir un résultat inférieur ou égal à 4" :

On note l'événement élémentaire "obtenir 1" est noté abusivement 1. Idem pour les autres.
D'après le principe, P(A) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4) = 0,3
Calculer la probabilité d'obtenir 6 :
D'après la définition, P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1, donc P(6) = 0,5.

2.b l'équiprobabilité

Définition
Lorsque toutes les issues d'une expérience aléatoire ont même probabilité, on dit qu'il y a équiprobabilité ou que la loi de probabilité est équirépartie**.**

Dans ce cas, la règle de calcul de la probabilité d'un événement *A* est la suivante :

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre d'issues possibles}} = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$

Dans le cas d'un événement élémentaire ω, on a : **P(ω) = 1/N** où N est le nombre d'issues possibles (N = Card(Ω))

Exemple :
On lance un dé (non truqué) ; Ω = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6} : situation d'équiprobabilité.
- Calculons la probabilité d'obtenir 5 : P(5) = 1/6. (5 est un événement élémentaire)
- Calculons la probabilité d'obtenir un nombre pair ; P("obtenir un nombre pair") = 3/6 = 1/2.

2.c Calcul de la probabilité de A ∪ B

Propriété 1 (cas général) : la probabilité de la réunion de deux événements est :

P(A ∪ B) = P(A) + P(B) – P(A ∩ B)

Exemple : dans une classe, 10% des stagiaires ne jouent que le football, 20% des stagiaires ne jouent que le basket-ball et 5% des stagiaires jouent le football et le basket-ball. On choisit un stagiaire au hasard. Quelle est la probabilité qu'il joue le football ou le basket-ball ?
Notons F l'événement : "le stagiaire joue le football" et B : " le stagiaire joue le basket-ball"
D'après les données, on a : P(F) = 0,1 ; P(B) = 0,2 et P(F ∩ B) = 0,05.
D'après la propriété 1, on obtient : P(F ∪ B) = P(F) + P(B) – P(F ∩ B) = 0,25.

Propriété 2 (Cas particulier) : si deux événements sont incompatibles, alors la probabilité de leur union est égale à la somme de leurs probabilités :

Si A ∩ B = ∅, alors P(A ∪ B) = P(A) + P(B)

Conséquences (de la propriété 2) :
- La probabilité de l'événement contraire $\overline{A}$ de *A* est $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$. En particulier, La probabilité d'un événement impossible (par exemple : "obtenir 7 en lançant un dé") est nulle : **P(∅) = 0**.
- Si A ⊂ B alors P(A) ≤ P(B)
- **P(A \ B) = P(A) - P(A ∩ B)**

2.d Probabilités conditionnelles et Indépendance

Définition

Soit A et B deux événements.

La probabilité que l'événement A se réalise sachant que B est réalisé est notée $P_B(A)$ ou $P(A|B)$ et est définie par :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Remarque : on alors la formule : $\mathbf{P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)}$

Exemple :

Le tiers d'une population a été vacciné contre une maladie. Au cours d'une épidémie, on constate que, sur quinze malades, il y a deux personnes vaccinées. Le vaccin est-il efficace ?

Pour le savoir, on compare la probabilité d'être malade P(M) avec celle d'être malade sachant que l'on a été vacciné P(M|V).

On a :

$P(V) = 1/3$ et $P(V|M) = 2/15$

$P(M|V) = P(M \cap V)/P(V) = P(V|M) \times P(M)/P(V) = 2/15 \times 3\ P(M) = 2/5\ P(M)$

On a $P(M|V) < P(M)$. Le vaccin est donc efficace.

On suppose de plus que sur cent personnes vaccinées, huit sont malades. Quelle est la proportion de malades dans la population ?

On a donc : $P(M|V) = 8/100 = 2/25$

Or, $P(M|V) = 2/5 \times P(M)$ d'où : $P(M) = 1/5$

Il y a donc 20% de malades.

Définition

On dit que deux événements A et B sont indépendants lorsque $P_B(A) = P(A)$ ou $P_A(B) = P(B)$.

Remarque : on a alors la formule : $\mathbf{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$.

Exemple :

On lance deux dés et on désigne par A l'événement "le premier dé amène un nombre pair", par B l'événement "le deuxième dé amène un nombre impair" et par C l'événement "les deux dés amènent un nombre pair".

On a: $P(A) = 1/2$; $P(B) = 1/2$; $P(C) = 1/4$; $P(A \cap B) = 1/4$; $P(A \cap C) = 1/2$; $P(B \cap C) = 0$.

On conclut : A et B sont indépendants ; A et C sont dépendants ; B et C sont dépendants.

Formule de Bayes:

Si $\{A_1 ; A_2 ; \ldots ; A_n\}$ est une partition d'un univers Ω muni d'un probabilité P, alors pour tout événement B , on a :

$$P_B(A_k) = \frac{P_{A_k}(B)P(A_k)}{P_{A_1}(B)P(A_1) + P_{A_k}(B)P(A_k) + \cdots + P_{A_n}(B)P(A_n)} = \frac{P_{A_k}(B)}{\sum_{k=1}^{n} P_{A_k}(B)P(A_k)}$$

Un contexte d'utilisation de la formule de Bayes est la "vérification", après une expérience, d'une hypothèse. Si un événement peut avoir plusieurs causes avec des probabilités connues, on peut, par la formule de Bayes, avoir une idée si l'hypothèse formulée sur les probabilités de ces causes est plausible ou non.

Exemple:

On estime qu'une personne ayant correctement révisé ses cours pour cet examen a une probabilité de 20% d'échouer à l'examen. En revanche, on estime qu'une personne n'ayant pas révisé ses cours a une probabilité de 60% d'échouer à cet examen. On sait aussi que 50% des personne ont correctement révisé leurs cours et 50% n'ont pas correctement révisé leurs cours Une personne passe deux fois de suite cet examen et échoue par deux fois mais affirme pourtant avoir parfaitement réviser. Est-ce plausible?

Appelons E l'événement "échouer 2 fois" , A l'événement "la personne a révisé ses cours " et B l'événement contraire de A.

La probabilité de "E sachant A" est $(0,20)^2 = 0,04$.

La probabilité de "E sachant B" est $(0,60)^2 = 0,36$.

A priori, on suppose que la personne qui a échoué 2 fois à l'examen a correctement révisé avec une probabilité de 0,50.

On a donc P(A) = P(B) = 0,50

La formule de Bayes donne alors :

$$P_E(A) = \frac{0,04 \times 0,50}{0,04 \times 0,50 + 0,36 \times 0,50} = 0,10$$

Probabilité d'avoir réviser sachant que l'on a échoué 2 fois = 0,10.

Probabilité de ne pas avoir réviser sachant que l'on a échoué 2 fois = 0,90.

Il y a donc une probabilité de 0,90 que la personne n'a pas révisé. Ce qu'elle dit est peu plausible!

3. Variables aléatoires

3.a Caractéristiques des variables aléatoires

Définition 1

– Une variable aléatoire est une fonction qui à chaque événement élémentaire d'une expérience aléatoire associe un nombre réel.

– Soit X une variable aléatoire et k un réel, l'événement noté (X = k) est l'antécédent de k par la fonction X : c'est l'ensemble de tous les événements élémentaires dont l'image par X est égale à k. La probabilité de cet événement est notée P(X = k).

– La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est la fonction qui, à tout réel k, associe la probabilité de l'événement (X = k). On représente une loi de probabilité par un tableau :

k	k_1	k_2	$\ldots$	k_n	Total
$P(X = k)$	p_1	p_2	$\ldots$	p_n	1

Exemple :

On lance une pièce de monnaie trois fois de suite. L'univers Ω associé à cette expérience aléatoire est constitué de 8 événements élémentaires (nombre de 3-listes de l'ensemble {P ; F}) :

Ω = {PPP ; PPF ; PFP ; FPP ; PFF ; FPF ; FFP ; FFF}

Ces huit issues sont équiprobables.

Désignons par X le nombre de "face" obtenus. X est une variable aléatoire qui prend les valeurs 0 ; 1 ; 2 ou 3

On notera, par exemple "X = 2" l'événement "face est sorti deux fois". Plus précisément :

"X = k" = $\{\omega \in \Omega$ tels que $X(\omega) = k\} = X^{-1}(k)$

Posons cette fois

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{si deux faces identiques apparaissent successivement} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a :

Valeurs k de Y	0	1
$P(Y=k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

Définition 2

On considère une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est représentée par le tableau ci-dessus.

– L'espérance mathématique de X (ou moyenne) est le nombre noté E(X) défini par :

$$E(X) = k_1p_1 + k_2p_2 + \ldots + k_np_n = \sum_{i=1}^{n} k_ip_i$$

.

– La variance de X est le nombre noté V (X) défini par :

$$V(X) = (k_1 - E(X))^2p_1 + (k_2 - E(X))^2p_2 + \ldots + (k_n - E(X))^2p_n = \sum_{i=1}^{n}(k_i - E(X))^2p_i$$

– L'écart type de X est le nombre noté σx défini par : $\sigma_X = \sqrt{X}$

Remarque : dans la pratique, pour calculer la variance "`a la main", on utilise plutôt la formule : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$, où $E(X^2) = k_1^2p_1 + k_2^2p_2 + \ldots + k_n^2p_n$.

Exemple :

Reprenons l'exemple de la pièce de monnaie lancée trois fois de suite. *X* désigne le nombre de "face" obtenu.

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$$

$$V(X) = (0 - \frac{3}{2})^2 \times \frac{1}{8} + (1 - \frac{3}{2})^2 \times \frac{3}{8} + (2 - \frac{3}{2})^2 \times \frac{3}{8} + (3 - \frac{3}{2})^2 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{4}$$

$$\sigma(X) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Interprétation : lorsque X représente le gain à un jeu de hasard, E(X) représente l'espoir de gain moyen par partie,

Lorsqu'on joue un grand nombre de fois. Si E(X) > 0 (resp. E(X) < 0) alors le jeu est avantageux (resp. désavantageux). Si E(X) = 0 alors le jeu est dit équitable.

L'écart type est une caractéristique de la dispersion des valeurs de X.

Définition 3
On dit qu'une variable aléatoire est centrée réduite lorsque son espérance mathématique est nulle (E(X) = 0) et lorsque son écart type est égal à 1 ($\sigma x = 1$).

3.b Indépendance de deux variables aléatoires

Définition 4
Soit X et Y deux variables aléatoires. On dit que X et Y sont indépendantes lorsque tous les événements du type (X = k) et (Y = k′) sont indépendants.

3.c Opérations sur les variables aléatoires

Soit X et Y deux variables aléatoires et a et b deux réels.

Opération	Espérance	Variance
$aX + b$	$E(aX + b) = aE(X) + b$	$V(aX + b) = a^2V(X)$
$X + Y$	$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$	$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ seulement si X et Y sont indépendantes !!!
$X - Y$	$E(X - Y) = E(X) - E(Y)$	$V(X - Y) = V(X) + V(Y)$ seulement si X et Y sont indépendantes !!!

Conséquence 1
Soit X une variable aléatoire d'espérance mathématique m et d'écart type σ non nul, alors la variable aléatoire : $X^* = (X-m)/\sigma$ est centrée réduite.

Conséquence 2
Soit X1, X2, . . ., Xn, n variables aléatoires indépendantes de même espérance mathématique m et de même écart type σ .
Soit S la variable aléatoire définie par : S = X1 + X2 + . . . + Xn. On a alors :
$E(S) = nm$ et $\sigma_S = \sigma\sqrt{n}$.

4. Loi binomiale & Loi de Poisson

4.a Loi binomiale

On considère une expérience aléatoire qui a deux issues possibles : réussite ou échec. On notera p la probabilité de réussite et q la probabilité d'échec. On a alors p+q = 1. Une telle expérience est appelée épreuve de Bernoulli.

Exemple : une épreuve consiste à lancer un dé. On gagne si l'on obtient un 6.
On a donc p =1/2 et q =1/2
On répète maintenant n fois la même épreuve de Bernoulli, de façon à ce que chaque épreuve soit Indépendante des autres. On note alors X la variable aléatoire égale au nombre total de succès. La loi de probabilité de X est appelée loi binomiale de paramètres n et p, et notée B(n, p).

Définition 1
Soit n € IN, p € [−1; 1] et X une variable aléatoire.
On dit que la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres n et p, et on note **X ⇝B(n, p)**,
lorsque :
– L'ensemble des valeurs prises par X est : X(Ω) = {0; 1; 2; . . . ; n}.
– Pour tout k € {0; 1; 2; . . . ; n}, on a :
$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, avec $q = 1 - p$.

Théorème 1
Soit n € IN, p € [−1; 1] et X une variable aléatoire. On note q = 1 − p.
Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p, alors :

$$E(X) = np \qquad V(X) = npq \qquad \sigma_X = \sqrt{npq}$$

Critères permettant d'utiliser la loi binomiale
Il faut savoir justifier l'utilisation d'une loi binomiale dans une situation donnée. Pour cela, on vérifiera les points suivants :
– on a affaire à une épreuve de Bernoulli comportant deux issues possibles réussite et échec, de probabilités p et q respectivement.
– On répète n fois cette épreuve et les n réalisations sont indépendantes (c'est notamment le cas des tirages avec remise).
– La variable aléatoire X est égale au nombre de réussites.
Dans ces conditions, on peut conclure que X suit la loi binomiale de paramètres n et p.

4.b Loi de Poisson
La loi de Poisson est utilisée lorsqu'on étudie un phénomène rare dans certaines conditions.
Exemples typiques d'utilisation de la loi de Poisson : X est le nombre de voitures qui passent à un péage par tranche de 15 min ; X est le nombre de fautes de frappe par page de cours de maths (il s'agit l`a d'événements très rares).

Définition 2
Soit λ un réel strictement positif et X une variable aléatoire.
On dit que la variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre λ, et on note $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$
lorsque :
– L'ensemble des valeurs prises par X est l'ensemble de tous les entiers naturels : X(Ω) = IN.
– Pour tout k € IN, on a :

$$P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

Théorème 2
Soit λ un réel strictement positif et X une variable aléatoire.
Si X suit une loi de Poisson de paramètre λ, alors :

$$E(X) = \lambda \qquad V(X) = \lambda \qquad \sigma_X = \sqrt{\lambda}$$

5. Loi normale

5.a Variables aléatoires continues

Définition 1
Soit X une variable aléatoire.
On dit que X est une variable aléatoire continue lorsqu'il existe une fonction f définie sur IR telle que :
– pour tout réel x, $f(x) \geqslant 0$;
– $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$;
– pour tout réel t, $P(X \leqslant t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx.$
Cette fonction f est appelée densité de probabilité de la variable aléatoire X.

5.b Définition et propriétés de la loi normale

Définition 2
Soit m un réel et σ un réel strictement positif et X une variable aléatoire continue.
On dit que la variable aléatoire X suit la loi normale de paramètres m et σ , et on note $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(m, \sigma)$
lorsque :
– L'ensemble des valeurs prises par X est l'ensemble de tous les réels : X(Ω) = IR.
– La densité de probabilité de X est la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$$

Remarque : la loi normale est aussi appelée loi de Laplace-Gauss.
La courbe représentative de la fonction f est nommée courbe de Gauss.

Conséquence
Pour tout réel t, $P(X \leqslant t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx.$

5.c Paramètres de aX + b, X + Y , X − Y

On a vu dans partie 3.c les règles relatives au calcul de l'espérance, de la variance et de l'écart type de aX + b, de X + Y et de X − Y . Si on applique ces règles dans le cas de variables aléatoires suivant des lois normales, on obtient les résultats suivants :

Théorème 2
Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(m, \sigma)$ et Y une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(m', \sigma')$.
Soit a et b deux réels, avec a ≠ 0.
– La variable aléatoire aX + b suit la loi $\mathcal{N}(am + b, |a|\sigma)$.
– Si X et Y sont indépendantes, alors la variable aléatoire X + Y suit la loi $\mathcal{N}(m + m', \sqrt{\sigma^2 + \sigma'^2})$

– Si X et Y sont indépendantes, alors la variable aléatoire X – Y suit la loi $\mathcal{N}(m - m', \sqrt{\sigma^2 + \sigma'^2})$

5.d Calcul pratique

Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$. Soit t € IR. Pour calculer P(X ≤ t), il faut calculer l'intégrale :

$$P(X \leqslant t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} dx$$

Or on ne sait pas calculer cette intégrale de manière exacte, on utilise donc des valeurs approchées.

Dans un premier temps, on se ramène à la loi normale centrée réduite N(0, 1).

Théorème 3

Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$.

La variable aléatoire X* définie par X* = (X – m)/σ suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

On a alors :

$$X \leqslant t \Leftrightarrow X - m \leqslant t - m \Leftrightarrow \frac{X - m}{\sigma} \leqslant \frac{t - m}{\sigma} \Leftrightarrow X^* \leqslant \frac{t - m}{\sigma}$$

On utilise enfin une table donnant des valeurs approchées des probabilités P(X*≤ t), notées $\Pi(t)$, pour t compris entre 0 et 4,5.

Dans la cas où t est négatif, on utilise l'égalité $\Pi(-t) = 1 - \Pi(t)$ pour conclure.

PARTIE 5 :
STATISTIQUES

1. Vocabulaire

Définition 1 :
L'ensemble sur lequel on travaille en statistique est appelé **population**.
Si cet ensemble est trop vaste, on en restreint l'étude à une partie appelée **échantillon**.
Un élément de cet ensemble est appelé **individu**.

Définition 2 :
La particularité commune que l'on étudie est appelée **caractère**.
L'effectif d'une « valeur » d'un caractère est le nombre d'individus ayant cette valeur.
Les valeurs prises par le caractère sont aussi appelées les **modalités**.

(1) si la particularité s'exprime par un nombre, il s'agit d'un **caractère quantitatif**. (Dans ce cas, le nombre se note en général x_i)
Si les valeurs du nombre exprimé en (1) sont isolées, il s'agit d'un caractère **discret**.
Par contre, si ces valeurs sont prises dans tout un intervalle de IR, il s'agit d'un **caractère continu**.

Exemples :
Le nombre de frère et sœur d'un stagiaire de la filière TRI est un caractère **quantitatif discret**.
il peut prendre les valeurs 0, 1, 2, 3, 4 .....
La taille des stagiaires de la filière TRI est un caractère **quantitatif continu**. il peut prendre toutes les valeurs entre 1,50 m et 1,95 m.

(2) si la particularité étudiée ne s'exprime pas par un nombre, il s'agit d'un caractère **qualitatif**.

Exemple :
Dans une population, être marié(e) est un caractère qualitatif à deux valeurs : oui ou non.

Définition 3 :
Une **série statistique** est l'ensemble des résultats d'une étude : valeurs du caractère et effectifs correspondants.
On représente souvent une série statistique sous forme d'un tableau.

Définition 4 :
Le nombre d'individus (n_i) d'une modalité est appelé **effectif**.
Le nombre total d'individus (N) de la population est appelé effectif total.
Le rapport $f_i = \frac{n_i}{N}$ est appelé **fréquence**.

Remarques :
f_i est un nombre toujours compris entre 0 et 1.
Souvent, les nombres f_i s'expriment par un pourcentage.
La somme des nombres f_i est toujours égale à 1.

2. Etude d'un caractère discret

2.a Moyenne

Définition : On se donne une série statistique :

Valeur	x_1	x_2	…	x_p
effectif	n_1	n_2	…	n_p

La moyenne de cette série est le nombre réel, noté $\overline{x}$, tel que :

$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i$. où N est l'effectif total ; $N = n_1 + n_2 + \ldots + n_p$.

Exemple : Voici les notes à un contrôle continu de 23 stagiaires TRI.
0–12 – 9 – 10,5 – 2,5 – 8 – 3 – 8 – 3 – 14 – 6 – 2,5 – 6 – 16,5 – 14 – 6 – 9 – 3 – 6 – 14 – 12 –3– 9
On va ranger ces valeurs dans un tableau :

note	0	2,5	3	6	8	9	10,5	12	14	16,5
effectif	1	2	4	4	2	3	1	2	3	1

La moyenne des notes à ce contrôle est :

$$\overline{x} = \frac{0\times 1 + 2,5\times 2 + 3\times 4 + 6\times 4 + 8\times 2 + 9\times 3 + 10,5\times 1 + 12\times 2 + 14\times 3 + 16,5\times 1}{24} \approx 7,7$$

Propriété 1
Si pour tout i, on peut opérer un changement de variable affine du type : $x_i = aX_i + b$ alors $\overline{x} = a\overline{X} + b$.

Propriété 2
On se donne la série statistique :

Valeurs	x_1	x_2	…	x_p
effectif	n_1	n_2	…	n_p
fréquence	f_1	f_2	…	f_p

La moyenne de cette série peut être calculée par :

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{p} x_i f_i$$

Exemple :
Reprenons l'exemple précédent :

notes	0	2,5	3	6	8	9	10,5	12	14	16,5
effectif	1	2	4	4	2	3	1	2	3	1
fréquence	0,043	0,087	0,174	0,174	0,087	0,131	0,043	0,087	0,131	0,043

La moyenne est alors $\overline{x} \approx 0\times 0,043 + 2,5\times 0,087 + 3\times 0,174 + \ldots \approx 7,7$.

2.b Variance et écart type

Définition

On se donne une série statistique :

Valeur	x_1	x_2	…	x_p
effectif	n_1	n_2	…	n_p

La variance **V** de cette série est :

$$V = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i(x_i - \bar{x})^2$$

L'écart type σ est défini par : $\sigma = \sqrt{V}$

2.c Médiane

Définition :

La médiane d'une série statistique partage cette série en deux parties de telle sorte que :
- au moins la moitié des valeurs sont inférieures ou égales à la médiane ;
- au moins la moitié des valeurs sont supérieures ou égales à la médiane.

Exemple : Considérons les 5 nombres rangés dans l'ordre croissant : 2 ; 3 ; 5 ; 10 ; 12.
Il y a autant de nombres supérieurs à 5 que de nombres inférieurs à 5.
La médiane de cette suite est 5.

Méthode : Si la série contient *n* valeurs rangées dans l'ordre croissant :

- si *n* est impair, on prend la $\frac{n+1}{2}$ ème valeur pour médiane.

- si *n* est pair, on prend pour médiane la moyenne entre la $\frac{n}{2}$ ème et la $\frac{n}{2} + 1$ ème valeur.

Dans la série de notes des stagiaires TRI, on a 23 valeurs.

On prend alors la $\frac{23+1}{2}$ ème, c'est à dire la 12$^{\text{ème}}$ valeur.

La médiane de cette série est alors 8.

2.d Mode et étendue

Définition

On appelle **mode** d'une série statistique une valeur du caractère dont l'effectif associé est le plus grand.

La série de notes des stagiaires TRI admet deux modes : 3 et 6.

Définition

On appelle **étendue** d'une série statistique la différence entre la plus grande valeur du caractère et la plus petite

L'étendue de la série de notes des stagiaires TRI est : 16,5 – 0 = 16,5.

3. Cas d'un regroupement par classes de valeurs

Le tableau suivant donne la distance entre le domicile et l'ISTA pour les stagiaires d'une classe.

distance (en km)	[0 ; 1[	[1 ; 5[	[5 ; 11[
nombre de stagiaire	8	16	12

3.a Moyenne

Pour calculer la moyenne, on se ramène à un caractère discret en remplaçant **chaque classe par son centre**.

Dans notre exemple, on obtient : $\overline{x} = \dfrac{0{,}5 \times 8 + 3 \times 16 + 8 \times 12}{36} \approx 4{,}1$.

La distance moyenne est environ 4,1 km.

3.b Médiane

On construit tout d'abord le tableau des effectifs cumulés croissants (ou celui des fréquences cumulées croissantes)

distance (en km)	[0 ; 1[	[1 ; 5[	[5 ; 11[
effectifs cumulés	8	24	36
fréquences cumulées (en %)	22,2	66,7	100

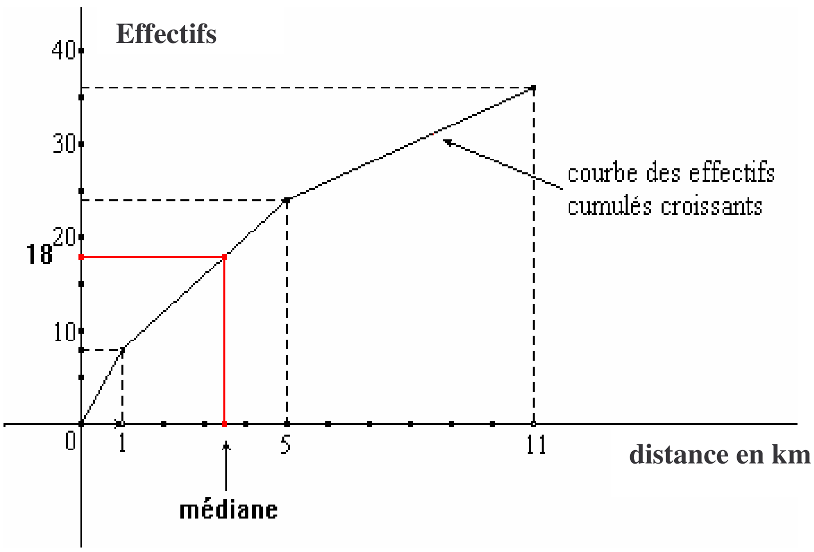
On place dans un repère orthogonal les points (0 ; 0), puis (1 ; 8), (5 ; 24) et (11 ; 36).

On admet que la répartition dans chaque classe est uniforme, ainsi on joint ces points par des segments.

$\dfrac{36}{2} = 18$.

La médiane est l'abscisse du point de la courbe d'ordonnée 18.

Ici, la distance médiane est environ 3,5 km.



3.c Classe modale

On appelle **classe modale** d'une série statistique, une classe dont l'effectif associé est le plus grand.

Dans notre exemple, la classe modale est la classe [1 ; 5[.

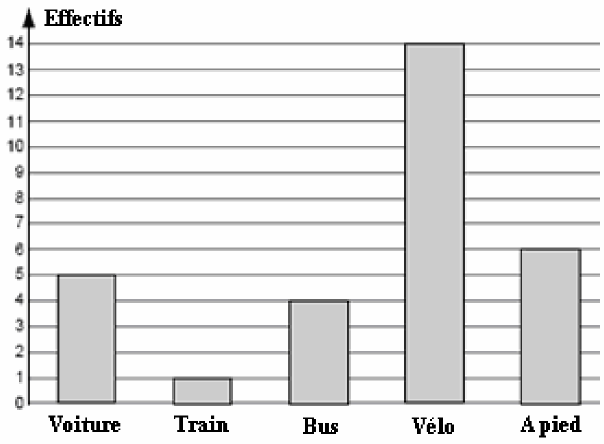
4. Représenter graphiquement des données statistiques

4.a Cas des données non numériques

Exemple : Le moyen de transport utilisé par les stagiaires.

	Voiture	Train	Bus	Vélo	A pied
Effectif	5	1	4	14	6

Diagramme en « tuyaux d'orgues »

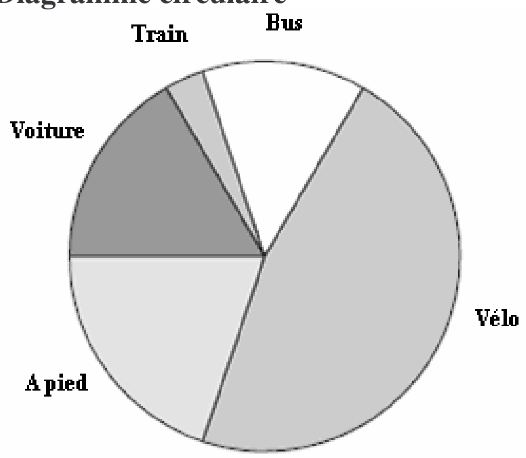


Particularités :

● La hauteur d'un tuyau est proportionnelle à l'effectif (ou à la fréquence)

● L'axe des abscisses n'est pas gradué donc la largeur des tuyaux n'a pas de signification

Diagramme circulaire



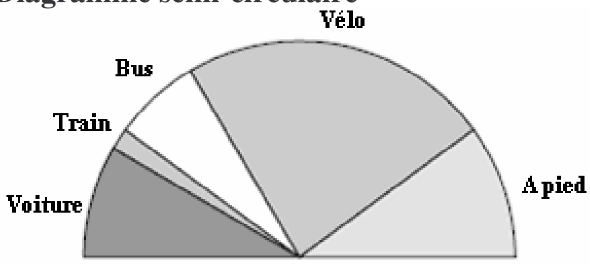
Particularités :

● L'angle d'un secteur est proportionnel à l'effectif :

	Voiture	Train	Bus	Vélo	A pied	Total
Effectif	5	1	4	14	6	30
Angle	60	12	48	168	72	360

● Ce type de diagramme permet notamment de comparer chaque effectif par rapport à l'effectif total : ici on voit bien que près de la moitié de la classe vient en vélo.

Diagramme semi-circulaire

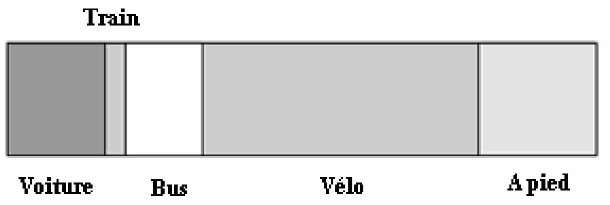


Particularité :

● Variante du diagramme circulaire : l'angle total est de 180°

	Voiture	Train	Bus	Vélo	A pied	Total
Effectif	5	1	4	14	6	30
Angle	30	6	24	84	36	180

Diagramme en bande (ou linéaire)



Particularité :

● Autre variante du diagramme circulaire : la longueur de chaque rectangle est proportionnelle à l'effectif.

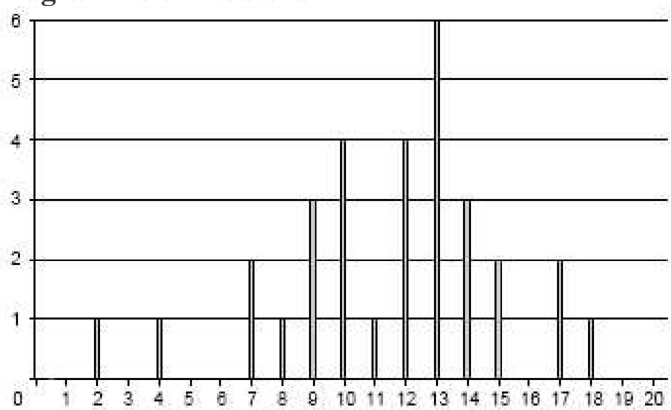
	Voiture	Train	Bus	Vélo	A pied	Total
Effectif	5	1	4	14	6	30
Longueur	1,2	0,2	0,9	3,3	1,4	7

4.b Cas des données numériques non regroupées en classes

Exemple : Les notes obtenues à la dernière interrogation.

Note (/20)	2	4	7	8	9	10	11	12	13	14	15	17	18
Effectif	1	1	2	1	3	4	1	4	6	3	2	2	1

Diagramme en « bâtons »



Particularité :

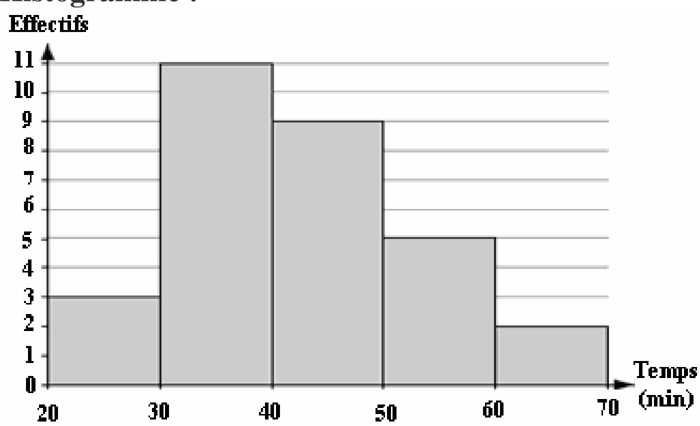
● L'axe des abscisses est gradué donc les rectangles sont remplacés par des bâtons très fins (ou des segments) situés aux bonnes abscisses

4.c Cas des données numériques regroupées en classes

Exemple : Le temps mis par les stagiaires lors d'une course à pied.

Temps (min)	$20 \leqslant t < 30$	$30 \leqslant t < 40$	$40 \leqslant t < 50$	$50 \leqslant t < 60$	$60 \leqslant t < 70$
Effectif	3	11	9	5	2

Histogramme :



Particularités :

● L'axe des abscisses est gradué donc la largeur des rectangles correspond à l'amplitude des classes

● Si les classes ont toutes la même amplitude, la hauteur des rectangles est proportionnelle à l'effectif