

Cadre  
Outils théoriques  
Concepts algorithmiques

# 1 Introduction

*Quand on me contredit, on éveille mon attention, mais non ma colère : je m'avance vers celui qui me contredit, qui m'instruit. La cause de la vérité devrait être la cause commune de l'un et de l'autre.*

MONTAIGNE (1572-1592). Essais, III, 8 [426].

*Selon la méthode cartésienne, pour rendre raison d'un phénomène complexe, il faut le décomposer rationnellement en éléments plus simples, par là même plus faciles à appréhender, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on parvienne aux éléments fondamentaux : c'est l'analyse. Puis, partant de ces éléments, on remonte l'ensemble de la machine, en prenant soin de ne faire aucun « saut », afin d'être toujours à même d'expliquer l'opération qui suit par celles qui précèdent : c'est la synthèse.*

Jean-Marc MANDOSIO (2010). Présentation de la *Grammaire Générale et Raisonnée* d'Antoine Arnauld et Claude Lancelot, 1660 [404].

*Ideally, mathematics should be seen as a thought process, rather than just as a mass of facts to be learned and remembered, which is so often the common view. [...] It's the excitement of discovering new properties and relationships—ones having the intellectual beauty that only mathematics seems able to bring—that keeps me going. I never get tired of it. This process builds its own momentum. New flashes of insight stimulate curiosity more and more.*

R.T. ROCKAFELLAR sur le site [Wikimization](#).

## 1.1 Définition d'un problème d'optimisation

### 1.1.1 Un cadre très général

Dans cet ouvrage, nous nous intéresserons à l'étude et à la résolution des problèmes qui s'énoncent de la manière suivante :

« Trouver  $x_* \in X$  tel que, pour tout  $x \in X$ , on ait  $f(x_*) \leq f(x)$  ».

Dans cet énoncé,  $X$  est un ensemble et  $f$  est une application définie sur  $X$  à valeurs dans la droite achevée  $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ . Il s'agit donc de trouver un point  $x_*$  de l'ensemble  $X$  qui donne à  $f$  sa plus petite valeur sur  $X$ . C'est ce que l'on appelle un *problème d'optimisation*. On notera également ce problème comme suit :

$$(P_X) \quad \begin{cases} \inf f(x) \\ x \in X \end{cases}$$

ou encore

$$\inf_{x \in X} f(x) \quad \text{ou} \quad \inf \{f(x) : x \in X\}.$$

L'*optimisation* est la discipline qui étudie ces problèmes. Elle traite des questions d'existence et d'unicité de solution de ce problème, de l'établissement de ses conditions d'optimalité, de sa dualisation, *etc.* Par ailleurs, une grande partie de cette discipline, et de cet ouvrage, est consacrée aux méthodes numériques qui ont été conçues pour résoudre les problèmes d'optimisation.

### 1.1.2 Vocabulaire

L'optimisation a son propre vocabulaire, dont nous allons dévoiler maintenant les premières bribes. On dit que  $X$  est l'*ensemble admissible* du problème et un point de  $X$  est dit *admissible*. Ces deux notions sont surtout pertinentes lorsque  $X$  est une partie d'un autre ensemble  $\mathbb{E}$  (souvent un espace vectoriel réel), si bien que tout point de  $\mathbb{E}$  n'est pas nécessairement admissible. Lorsque  $X$  est non vide, on dit que le problème est *réalisable*. La fonction  $f$  est appelée *critère*, *fonction coût* ou *fonction objectif* du problème. On appelle *valeur optimale* de  $(P_X)$  la borne inférieure

$$\text{val}(P_X) := \inf \{f(x) : x \in X\}$$

des valeurs prises par  $f$  sur  $X$ . On dit que le problème  $(P_X)$  est *borné* si sa valeur optimale ne vaut pas  $-\infty$ . Dans le cas contraire, on dit qu'il *n'est pas borné* ou qu'il est *non borné*. On a alors

$$\inf_{x \in X} f(x) = -\infty,$$

ce qui se produit s'il existe une suite  $\{x_k\} \subseteq X$  (éventuellement *stationnaire*, c'est-à-dire avec tous les  $x_k$  égaux pour  $k$  grand) telle que  $f(x_k) \rightarrow -\infty$ . Par ailleurs

$$\inf_{x \in X} f(x) = +\infty,$$

si  $f(x) = +\infty$  pour tout  $x \in X$ . Il en sera donc ainsi si  $X = \emptyset$  (l'ensemble vide). On a donc

$$\inf_{x \in \emptyset} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \sup_{x \in \emptyset} f(x) = -\infty. \quad (1.1)$$

Ayant défini un problème d'optimisation, il faut maintenant préciser ce qu'en est une solution. On dit qu'un point  $x_*$  est une *solution* ou un *minimum* ou encore un *minimiseur* du problème  $(P_X)$  si

$$x_* \in X \quad \text{et} \quad \forall x \in X, f(x_*) \leq f(x). \quad (1.2)$$

Il faut donc *deux* conditions : que  $x_*$  soit admissible et qu'il donne à  $f$  une valeur qui n'excède pas (strictement) celle donnée à  $f$  par tout autre point admissible. On dit aussi qu'un tel  $x_*$  est solution/minimum/minimiseur *global* de  $(P_X)$  pour distinguer cette notion des autres qui vont suivre. On note indifféremment par

$$\text{Sol}(P_X) \quad \text{ou} \quad \arg \min_{x \in X} f(x)$$

l'ensemble des solutions de  $(P_X)$ .

**Remarque 1.1** Lorsque le problème  $(P_X)$  a une solution, on écrit

$$\min_{x \in X} f(x),$$

donc avec l'opérateur 'min' plutôt que 'inf'.

Lorsque  $X$  est inclus dans un espace topologique  $\mathbb{E}$ , on peut définir la notion plus faible de *minimum local* de  $(P_X)$ . Il s'agit d'un point  $x_*$  tel qu'il existe un voisinage  $V$  de  $x_*$  dans  $\mathbb{E}$  tel que

$$x_* \in X \quad \text{et} \quad \forall x \in X \cap V, f(x_*) \leq f(x).$$

Une solution globale est aussi une solution locale (on prend  $V = \mathbb{E}$ ). On parlera de solution ou de minimum global ou local *strict* si  $f(x_*) < f(x)$ , pour tout  $x \in X \setminus \{x_*\}$  ou pour tout  $x \in (X \cap V) \setminus \{x_*\}$ , respectivement.

Il est important de pouvoir prendre en compte des problèmes d'optimisation dans lesquels le critère  $f$  peut prendre des valeurs infinies,  $-\infty$  ou  $+\infty$ , parce que ces fonctions sont parfois générées par des procédures qui ne leur assurent pas nécessairement que des valeurs finies (c'est le cas de la dualité au chapitre 14, par exemple). Le *domaine effectif* (ou simplement *domaine*) de  $f$  est l'ensemble des points de  $X$  où elle ne prend pas la valeur  $+\infty$  (mais elle peut y prendre la valeur  $-\infty$ , pour une raison qui sera vue au chapitre 3 sur les fonctions convexes). On le note

$$\text{dom } f := \{x \in X : f(x) < +\infty\}.$$

Il est clair que les problèmes

$$\inf_{x \in X} f(x) \quad \text{et} \quad \inf_{x \in \text{dom } f} f(x) \tag{1.3}$$

ont les mêmes valeurs optimales et les mêmes solutions. Si  $\text{dom } f = \emptyset$ , les valeurs optimales sont  $+\infty$  (à gauche parce que  $f(x) = +\infty$  pour tout  $x \in X$ , à droite parce que  $\text{dom } f = \emptyset$  et que l'on a adopté la convention (1.1) qui s'avère donc essentielle ici); si  $\text{dom } f \neq \emptyset$ , alors on ne modifie pas le problème de gauche en excluant de son ensemble admissible les points où  $f$  prend la valeur  $+\infty$ , comme on le fait à droite. L'équivalence entre les problèmes de (1.3) sera souvent utilisée.

### 1.1.3 Restrictions

*In our opinion, the main fact, which should be known to any person dealing with optimization methods, is that in general optimization problems are unsolvable. This statement, which is usually missing in standard optimization courses, is very important for an understanding of optimization theory and its development in the past and in the future.*

Y. NESTEROV [452].

Présenté comme ci-dessus, le problème  $(P_X)$  peut être très général, mais les méthodes théoriques et algorithmiques étudiées dans ce manuel ne seront efficaces que sur un petit sous-ensemble de ces problèmes, qui contient toutefois beaucoup de ceux qui se posent en pratique, mais en écarte aussi beaucoup d'autres. Les restrictions présentes dans  $(P_X)$  ou que nous nous imposerons, faute de pouvoir tout faire, sont les suivantes.

- L'ensemble d'arrivée de  $f$  est un espace vectoriel de dimension un, ce qui veut dire que l'on ne cherche à minimiser qu'un seul critère. Lorsque l'espace d'arrivée est de dimension supérieure, on parle d'*optimisation multicritère*. Nous n'aborderons pas ces problèmes dans cet ouvrage, bien qu'il soit fait allusion à la notion d'optimalité au sens de Pareto à l'exercice 3.14.
- Même si cela n'apparaît pas dans la formulation générale de  $(P_X)$ , on éliminera également de nos préoccupations une autre classe importante de problèmes, ceux pour lesquels les variables sont entières :  $X$  est une partie de  $\mathbb{N}^n$ . Ces problèmes d'*optimisation en nombres entiers* ou *combinatoire* sont d'une autre nature que ceux qui peuvent être résolus par les algorithmes que nous étudierons (pour une introduction à ces problèmes, voir par exemple [476]). Ces derniers auront besoin d'une certaine régularité des données. Il faudra une topologie sur  $X$  et un critère  $f$  au moins continu, si possible différentiable (éventuellement dans un sens généralisé). Cette restriction à des classes de fonctions particulières permet aussi d'échapper au verdict étonnant et fâcheux, selon lequel tous les algorithmes sont équivalents, si on moyenne leur performance sur l'ensemble des fonctions [627 ; 1997], affirmation qui doit d'ailleurs être nuancée [26 ; 2007].
- Dans le même ordre d'idée, les algorithmes que nous étudierons ne seront efficaces que pour trouver des *minima locaux*. Trouver un minimum global d'une fonction qui a beaucoup de minima locaux s'apparente en effet souvent à un problème combinatoire (par exemple lorsque l'ensemble des minima locaux est discret), lequel a été éliminé de nos préoccupations ci-dessus. Les algorithmes locaux, c'est-à-dire ceux trouvant des minima locaux, sont toutefois utiles, car ils sont souvent très efficaces et sont d'ailleurs parfois utilisés dans certaine méthode d'optimisation globale. On peut en fait souvent montrer que plus les fonctions à minimiser sont régulières et plus rapide sera la convergence *locale* des itérés générés par un algorithme sachant utiliser cette régularité de manière idoine.
- Quand il sera question d'algorithmes, nous travaillerons toujours *en dimension finie*, c'est-à-dire que l'ensemble admissible  $X$  sera une partie d'un espace vectoriel de dimension finie sur  $\mathbb{R}$  (par exemple, l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$  des  $n$ -uplets

$(x_1, \dots, x_n)$  ou l'espace vectoriel  $\mathcal{S}^n$  des matrices réelles d'ordre  $n$  symétriques). Les composantes de  $x$  peuvent alors être vues comme des paramètres servant à rendre optimal un système. En pratique, les problèmes de dimension infinie se rencontrent fréquemment, par exemple lorsqu'il s'agit de déterminer une trajectoire optimale ou une forme optimale. Il s'agit alors de déterminer une fonction plutôt qu'un vecteur. Lorsqu'on veut résoudre ces problèmes, il est nécessaire de passer par une *phase de discrétisation* qui, en utilisant une technique adéquate, construit un problème approché en dimension finie qui pourra être résolu sur ordinateur par les algorithmes vus dans cet ouvrage.

## 1.2 Existence de solution

Si l'ensemble admissible  $X$  de  $(P_X)$  est non vide, que ce problème soit borné ou non, il existe ce que l'on appelle une *suite minimisante*. C'est une suite  $\{x_k\}$  vérifiant les propriétés suivantes :

$$x_k \in X \text{ et } f(x_k) \text{ converge vers } \text{val}(P_X).$$

Il suffit en effet de se donner une suite de réels  $\varepsilon_k \downarrow 0$  (qui converge vers zéro par des valeurs strictement positives) et d'observer que, par définition de la borne inférieure, on peut trouver un point  $x_k \in X$  tel que  $\text{val}(P_X) \leq f(x_k) \leq \text{val}(P_X) + \varepsilon_k$ . On peut même supposer que la suite  $\{f(x_k)\}$  est décroissante et, lorsque  $f$  est  $\mathcal{C}^{1,1}$ , que  $f'(x_k) \rightarrow 0$  (voir le lemme 6.14).

Il faut se garder de confondre la notion d'existence de solution, existence de  $x_*$  vérifiant (1.2), et celle de l'existence d'une borne inférieure  $\text{val}(P_X)$  finie. Par exemple, si  $f$  est la fonction définie sur  $X = \mathbb{R}$  par  $f(x) = e^x$ , le problème  $(P_X)$  n'a pas de solution alors que sa borne inférieure est nulle.

La suite de cette section est formée de variations autour du théorème de Weierstrass ci-dessous. On rappelle que  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  est *semi-continue inférieurement*, s.c.i. en abrégé, si pour tout  $x \in X$  et toute suite  $\{x_k\}$  convergeant vers  $x$ , on a  $f(x) \leq \liminf_k f(x_k)$  (voir la section A.3).

**Théorème 1.2 (Weierstrass, existence d'un minimum)** *Si  $X$  est un compact non vide et si  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  est semi-continue inférieurement, alors  $(P_X)$  a au moins une solution.*

DÉMONSTRATION. Soit  $\{x_k\}$  une suite minimisante :  $x_k \in X$  et  $f(x_k) \rightarrow \text{val}(P_X)$ . Comme  $X$  est compact, on peut en extraire une sous-suite, encore notée  $\{x_k\}$ , convergente, disons vers  $\bar{x} \in X$ . Par le caractère s.c.i. de  $f$ , on a  $f(\bar{x}) \leq \liminf f(x_k) = \text{val}(P_X)$ . Dès lors  $\bar{x}$  est solution de  $(P_X)$ .  $\square$

Comme  $\inf f = -\sup(-f)$  (identité rappelée à la proposition 1.5 ci-dessous), on déduit de ce résultat qu'une fonction *semi-continue supérieurement* atteint sa borne supérieure sur un compact. Une fonction continue étant à la fois semi-continue inférieurement et semi-continue supérieurement, elle atteint ses bornes inférieure et supérieure sur un compact.

En dimension finie un ensemble est compact s'il est fermé et borné. La propriété de compacité est plus difficile à obtenir en dimension infinie, mais le théorème 1.2 est si important que l'on a été amené à affaiblir la topologie des espaces normés de manière à avoir plus de compacts, tout en gardant suffisamment de fonctions s.c.i. (voir [91 ; 1983]).

Supposons que  $X$  soit donné par des contraintes fonctionnelles d'égalité et d'inégalité au sens large, c'est-à-dire qu'il est de la forme :

$$X = \{x \in \mathbb{E} : c_E(x) = 0, c_I(x) \leq 0\},$$

où  $\mathbb{E}$  est une espace topologique et  $c_E : X \rightarrow \mathbb{R}^{m_E}$  et  $c_I : X \rightarrow \mathbb{R}^{m_I}$  sont deux applications ( $m_E$  et  $m_I$  sont deux entiers). L'inégalité  $c_I(x) \leq 0$  signifie que toutes les composantes de  $c_I(x) \in \mathbb{R}^{m_I}$  doivent être négatives. Alors,  $X$  est fermé si  $c_E$  et  $c_I$  sont continues. On peut en effet écrire

$$X = c_E^{-1}(\{0\}) \cap c_I^{-1}(\mathbb{R}_-^{m_I}),$$

où  $c_E^{-1}(\{0\})$  et  $c_I^{-1}(\mathbb{R}_-^{m_I})$  sont fermés comme **images réciproques** par des applications continues des fermés  $\{0\}$  et  $\mathbb{R}_-^{m_I}$  de  $\mathbb{R}^{m_E}$  et  $\mathbb{R}^{m_I}$  respectivement.

L'hypothèse «  $X$  compact » est souvent restrictive, en particulier, elle n'a pas lieu pour les problèmes sans contrainte. Dans le corollaire suivant, on montre que, *en dimension finie* (le résultat est faux en dimension infinie), on peut remplacer dans l'énoncé du théorème de Weierstrass, l'hypothèse «  $X$  compact » par «  $X$  fermé et  $f$  coercive ».

**Définition 1.3 (fonction coercive)** Soit  $\mathbb{E}$  un espace vectoriel normé. Une fonction  $f : \mathbb{E} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  est dite *coercive* sur une partie non bornée  $X$  de  $\mathbb{E}$  si

$$\lim_{\substack{x \in X \\ \|x\| \rightarrow \infty}} f(x) = +\infty \quad (1.4)$$

ou de manière plus précise

$$\forall \nu \in \mathbb{R}, \quad \exists \rho \geq 0 : \quad (x \in X \text{ et } \|x\| \geq \rho) \implies f(x) \geq \nu. \quad (1.5)$$

Si l'on ne spécifie pas la partie  $X$ , il est sous-entendu que  $X = \mathbb{E}$ . □

Insistons bien sur le fait que, lorsque  $X \neq \mathbb{E}$ , la coercivité sur  $X$  est plus faible que le fait de demander que  $f$  tende vers l'infini à l'infini (c'est-à-dire pour  $\|x\| \rightarrow \infty$ ). Ici on demande que cela ne soit vrai que pour des  $x \in X$ . Par ailleurs, l'exercice 1.3 propose une expression équivalente de la coercivité, à savoir que les intersections avec  $X$  des ensembles de sous-niveau de  $f$  sont bornées :

$$\forall \nu \in \mathbb{R}, \quad \{x \in X : f(x) \leq \nu\} \text{ est borné.}$$

L'expression de la coercivité d'une **forme bilinéaire** est examinée à l'exercice 1.4.

**Corollaire 1.4** Soient  $X$  est une partie fermée non vide d'un espace vectoriel de dimension finie et  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  est une fonction *semi-continue inférieurement* et *coercive*. Alors  $(P_X)$  a au moins une solution.

DÉMONSTRATION. Soient<sup>1</sup>  $x_0 \in X$  (non vide) et

$$X_0 := \{x \in X : f(x) \leq f(x_0)\}.$$

Cet ensemble est non vide et compact (il est fermé parce que  $f$  est *semi-continue inférieurement* sur  $X$ , borné grâce à (1.4) et est une partie d'un espace vectoriel de dimension finie). Alors, d'après le théorème, le problème

$$\begin{cases} \min f(x) \\ x \in X_0, \end{cases}$$

a une solution  $x_*$ . Celle-ci est clairement solution de  $(P_X)$ , puisque  $\forall x \in X \setminus X_0$ , on a  $f(x) \geq f(x_0) \geq f(x_*)$ .  $\square$

Les techniques de démonstration d'existence de solutions de problèmes sont nombreuses. Passons en revue celles qui concernent les problèmes d'optimisation et les systèmes d'équations non linéaires et qui seront abordées dans cet ouvrage.

- Les résultats d'existence de solutions de problèmes d'optimisation présentés ci-dessus sont de *nature topologique* et sont fondés sur le comportement de  $f$  à l'infini (pour clarifier ce point, il suffit de remplacer  $f$  par  $f + \mathcal{I}_X$ , où  $\mathcal{I}_X$  est la *fonction indicatrice* de l'ensemble  $X$  ou de se rappeler l'hypothèse de *coercivité* utilisé dans le corollaire 1.4). Cette approche sera systématisée pour les problèmes convexes par l'utilisation de la fonction asymptotique (section 3.3.4), ce qui conduira au résultat d'existence de la proposition 3.29 (voir son point (ii)). Elle s'utilise aussi pour les problèmes non convexes [29], mais nous n'aborderons pas ce sujet ici. On peut rattacher les résultats d'existence de solution d'un problème d'optimisation linéaire (proposition 2.20) ou quadratique (théorème ??) à cette théorie asymptotique, mais cela demande un peu de gymnastique intellectuelle.
- Une autre possibilité est l'*approche analytique*, fondée sur les conditions d'optimalité qui seront établies au chapitre 4 : si l'on peut montrer l'existence d'un point stationnaire (c'est-à-dire une solution des conditions d'optimalité) par une méthode appropriée (pour les problèmes quadratiques sans contrainte d'inégalité, il s'agit d'un simple système linéaire) et si le problème d'optimisation est convexe, alors ce point stationnaire en est une solution.
- Une troisième approche nous viendra de de l'*analyse convexe* (chapitres 2 et 3) et de la *dualité* (chapitre 14). Elle consiste à montrer que le problème d'optimisation

<sup>1</sup> Il faudrait écrire *Soit* au singulier [284 ; §§ 901(d) et 1045(c)], de la même manière que l'on écrit *vive les vacances* et pas *vivent les vacances* [284 ; §§ 901(e) et 1045(c)]. Nous continuerons pourtant d'écrire avec obstination *soit un objet* et *soient deux objets*, maintenant ainsi une tradition qui ne semble plus se perpétuer que chez les mathématiciens, mais qui a sa logique.

considéré est le dual d'un autre problème (section 14.1.1) dont la fonction valeur (définition 4.71) est sous différentiable en zéro (section 3.6). Cette technique sera par exemple utilisée pour établir le théorème 14.14.

- Le lemme de Farkas (proposition 2.45) et les théorèmes de l'alternatives (exercice 2.39) qui en découlent permettent d'assurer l'existence d'un point satisfaisant des contraintes affines ; voir la discussion autour de (2.40). Lorsque des conditions de qualification sont satisfaites, ce lemme permet d'assurer l'existence de multiplicateurs optimaux (section 4.4), qui sont parfois solutions d'un problème d'optimisation dual (chapitre 14).
- Enfin pour montrer l'existence d'un zéro d'un système d'équations non linéaires, nous verrons un résultat (le théorème 10.3 de Kantorovitch) qui est apparenté aux théorèmes d'*existence de point fixe*.

### 1.3 Problèmes d'optimisation équivalents

Un problème d'optimisation peut se formuler de différentes manières. Certaines formulations permettent de mieux comprendre le problème, d'autres se prêtent à une résolution numérique plus efficace. Les codes d'optimisation tentent d'accepter des formulations les plus générales possibles de manière à pouvoir résoudre le plus grand nombre de problèmes avec l'algorithme implémenté. Par ailleurs, pour de multiples raisons (simplification, mise en évidence de la structure, convention, *etc*), l'étude des algorithmes se fait sur des formulations particulières qui doivent toutefois être suffisamment générales pour pouvoir représenter tous les problèmes d'une classe donnée. La question de savoir si deux problèmes sont équivalents ou si une formulation particulière est représentative d'une classe donnée de problèmes se pose donc souvent. Cette notion d'*équivalence entre problèmes* n'a pas de définition précise, mais on veut souvent dire que les solutions d'une formulation peuvent se déduire aisément des solutions de l'autre, si elles en ont, et que les valeurs optimales des deux formulations ont un lien bien défini entre elles. L'équivalence entre deux problèmes d'optimisation est parfois subtile (voir le chapitre 14 sur la dualité), mais on peut dès à présent donner quelques règles générales élémentaires.

Sachant qu'un problème accepte souvent plusieurs formulations, il est naturel (dans un manuel d'optimisation bien sûr) de se demander s'il n'en existe pas une meilleure que les autres. Cela dépend du critère que l'on se donne, de l'objectif que l'on se fixe. Si l'on s'intéresse à l'analyse du problème, les formulations les plus simples et faisant apparaître au mieux la structure seront préférables. Si l'on s'intéresse à la résolution numérique, il peut être utile de savoir que beaucoup de numériciens pensent qu'il existe une espèce de *loi de conservation des ennuis*, selon laquelle certaines difficultés essentielles ne peuvent pas être supprimées en changeant de formulation (pour autant que celle considérée au départ ne soit pas farfelue), comme la combinatoire, le mauvais conditionnement, la difficulté liée aux inégalités, *etc*. Nous y ferons souvent allusion (déjà dans l'exercice 1.7 de ce chapitre).

Cet ouvrage traite essentiellement de problèmes de minimisation, en particulier parce que les *problèmes de maximisation* leur sont équivalents, dans un sens que nous allons préciser. Ceci implique qu'il suffit d'étudier une seule des deux classes de problèmes. Le choix de la minimisation s'impose alors par le fait qu'il est naturel de

minimiser les fonctions convexes et que ces dernières sont bien étudiées en analyse convexe (il n'y a pas d'analyse concave, car la notion d'ensemble concave n'est pas un bon concept). Cet argument est repris dans le chapitre suivant et résumé par la chaîne d'implications (2.1).

**Proposition 1.5 (maximisation)** *Soient  $X$  un ensemble et  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  une application. Alors les problèmes*

$$\inf_{x \in X} f(x) \quad \text{et} \quad \sup_{x \in X} (-f(x))$$

*ont les mêmes solutions et des valeurs optimales qui s'opposent :*

$$\inf_{x \in X} f(x) = - \sup_{x \in X} (-f(x)). \quad (1.6)$$

DÉMONSTRATION. Quel que soit  $x \in X$ , on a  $\inf f \leq f(x)$  et  $-f(x) \leq \sup(-f)$ , donc  $-\inf f \geq -f(x)$  et  $f(x) \geq -\sup(-f)$ . On en déduit que  $-\inf f \geq \sup(-f)$  et  $\inf f \geq -\sup(-f)$ , d'où l'égalité (1.6).

D'après ce qui précède,  $\bar{x}$  est solution de  $\inf f$  si, et seulement si,  $f(\bar{x}) = \inf f$  ou  $-f(\bar{x}) = \sup(-f)$ ; donc si, et seulement si,  $\bar{x}$  est solution de  $\sup(-f)$ .  $\square$

On est souvent amené à transformer un problème d'optimisation par un changement de variables, celles que l'on cherche à optimiser. Quand est-ce qu'il y a équivalence entre les deux problèmes

$$(P_X) \quad \inf_{x \in X} f(x) \quad \text{et} \quad (P_Y) \quad \inf_{y \in Y} g(y)$$

où  $X$  et  $Y$  sont des ensembles et  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  et  $g : Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  sont des fonctions. C'est une question très générale. La proposition suivante y donne une réponse lorsque  $x$  et  $y$  sont liés par un changement de variables, c'est-à-dire par une fonction  $\varphi : X \rightarrow Y : x \mapsto y$  *surjective*.

**Proposition 1.6 (changement de variables)** *Dans le cadre défini ci-dessus, on suppose que  $Y = \varphi(X)$  et  $f = g \circ \varphi$ . Alors,*

- 1) *les problèmes  $(P_X)$  et  $(P_Y)$  ont les mêmes valeurs optimales,*
- 2) *si  $(x_*, y_*) \in X \times Y$  et  $y_* = \varphi(x_*)$ , alors  $x_*$  est solution de  $(P_X)$  si, et seulement si,  $y_*$  est solution de  $(P_Y)$ .*

DÉMONSTRATION. 1) Soit  $\varepsilon > 0$ . Alors on peut trouver  $x_\varepsilon \in X$  tel que  $f(x_\varepsilon) \leq \inf_{x \in X} f(x) + \varepsilon$ . En utilisant  $y_\varepsilon := \varphi(x_\varepsilon) \in Y$ , on obtient

$$\inf_{y \in Y} g(y) \leq g(y_\varepsilon) = (g \circ \varphi)(x_\varepsilon) = f(x_\varepsilon) \leq \inf_{x \in X} f(x) + \varepsilon.$$

Comme  $\varepsilon > 0$  est arbitraire, on a  $\inf_{y \in Y} g(y) \leq \inf_{x \in X} f(x)$ .

Inversement, toujours avec un  $\varepsilon > 0$  arbitraire, on peut trouver  $y_\varepsilon \in Y$  tel que  $g(y_\varepsilon) \leq \inf_{y \in Y} g(y) + \varepsilon$ . Comme  $Y = \varphi(X)$ , on peut trouver  $x_\varepsilon \in X$  tel que  $y_\varepsilon = \varphi(x_\varepsilon)$ . Alors,

$$\inf_{x \in X} f(x) \leq f(x_\varepsilon) = (g \circ \varphi)(x_\varepsilon) = g(y_\varepsilon) \leq \inf_{y \in Y} g(y) + \varepsilon.$$

Comme  $\varepsilon > 0$  est arbitraire, on a  $\inf_{x \in X} f(x) \leq \inf_{y \in Y} g(y)$ .

2) Soit  $(x_*, y_*) \in X \times Y$  et  $y_* = \varphi(x_*)$ .

$\Rightarrow$  Si  $x_*$  est solution de  $(P_X)$ , on a  $g(y_*) = g(\varphi(x_*)) = f(x_*) = \inf_{x \in X} f(x) = \inf_{y \in Y} g(y)$ , grâce au point 1. Donc  $y_*$  est solution de  $(P_Y)$ .

$\Leftarrow$  Si  $y_*$  est solution de  $(P_Y)$ , on a  $f(x_*) = g(\varphi(x_*)) = g(y_*) = \inf_{y \in Y} g(y) = \inf_{x \in X} f(x)$ , grâce au point 1. Donc  $x_*$  est solution de  $(P_X)$ .  $\square$

**Remarque 1.7 (changement variables en pratique)** Souvent, la proposition 1.6 s'utilise lorsqu'on doit résoudre un problème de la forme

$$\inf_{x \in X} g(\varphi(x)),$$

où l'objectif est une composition de fonctions (les notations sont celles de la proposition). On introduit alors la variable  $y := \varphi(x)$  et la proposition 1.6 nous dit dans quel sens ce problème est équivalent au problème

$$\inf_{y \in Y} g(y),$$

où  $Y := \varphi(X)$ . Il y a de nombreuses utilisations de cette technique dans cet ouvrage, en particulier pour résoudre les exercices 1.6 et 4.12(5).  $\square$

Venons-en maintenant aux questions liées à la *minimisation emboîtée*. Si  $X$  est une réunion d'ensembles, est-il équivalent de minimiser le critère sur chacun de ces ensembles et de minimiser les valeurs ainsi obtenues? La réponse est affirmative, même s'il s'agit d'une collection non dénombrable d'ensembles, ayant éventuellement des points communs, mais il faut bien comprendre ce que cela veut dire (la remarque 1.9 ci-dessous va le préciser).

**Proposition 1.8 (minimisation emboîtée I)** Soient  $\{X_i\}_{i \in I}$  une famille quelconque d'ensembles pouvant avoir des points en commun,  $X = \cup_{i \in I} X_i$  leur union et  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  une application. Alors

$$\inf_{x \in X} f(x) = \inf_{i \in I} \left( \inf_{x \in X_i} f(x) \right). \quad (1.7)$$

De plus,  $x_* \in X_{i_*}$  est solution du problème à gauche dans (1.7) si, et seulement si,  $i_*$  est solution du problème à droite dans (1.7) et  $x_*$  est solution du problème  $\inf_{x \in X_{i_*}} f(x)$ .

**Remarques 1.9** 1) Il faut comprendre l'expression  $\inf_{i \in I} (\inf_{x \in X_i} f(x))$  dans (1.7) comme le problème de minimisation en  $i \in I$  de la fonction  $\varphi$  définie par

$$\varphi(i) := \inf_{x \in X_i} f(x). \quad (1.8)$$

Le problème de minimisation dans (1.8) est, quant à lui, appelé le *problème interne* associé à  $i \in I$ .

- 2) D'après la proposition, si  $x_* \in X_{i_*}$  est solution du problème à gauche dans (1.7), alors le problème  $\inf_{x \in X_{i_*}} f(x)$  a une solution (par exemple  $x_*$ ), mais il se peut que d'autres problèmes internes  $\inf_{x \in X_i} f(x)$ , avec  $i \neq i_*$ , n'en ait pas.  $\square$

DÉMONSTRATION. Pour tout  $i \in I$ , on a  $X_i \subseteq X$  et donc

$$\inf_{x \in X} f(x) \leq \inf_{x \in X_i} f(x).$$

Comme le membre de gauche ne dépend pas de  $i \in I$ , on a

$$\inf_{x \in X} f(x) \leq \inf_{i \in I} \inf_{x \in X_i} f(x). \quad (1.9a)$$

Inversement, pour tout  $x_0 \in X$ , il existe un  $i_0 \in I$  tel que  $x_0 \in X_{i_0}$ . On en déduit que

$$f(x_0) \geq \inf_{x \in X_{i_0}} f(x) \geq \inf_{i \in I} \inf_{x \in X_i} f(x),$$

où la dernière inégalité est évidente. Le membre de droite est donc une borne inférieure de  $f(x_0)$ , qui est indépendante de  $x_0 \in X$ . Dès lors,

$$\inf_{x \in X} f(x) \geq \inf_{i \in I} \inf_{x \in X_i} f(x). \quad (1.9b)$$

Grâce à (1.9a) et (1.9b), l'identité (1.7) est démontrée.

Par ailleurs, si  $x_* \in X_{i_*}$  est solution du problème à gauche dans (1.7), on a  $f(x_*) \leq f(x)$  pour tout  $x \in X$  et donc certainement pour tout  $x \in X_{i_*}$ , si bien que  $x_*$  est solution du problème interne associé à  $i_*$  et  $f(x_*) = \varphi(i_*)$ , où  $\varphi$  est définie par (1.8). On a aussi, quel que soit  $i \in I$ ,  $f(x_*) \leq f(x)$  pour tout  $x \in X_i$ , donc  $\varphi(i_*) \leq \varphi(i)$  si bien que  $i_*$  est solution du problème à droite dans (1.7). Inversement, on a successivement

$$\begin{aligned} f(x_*) &= \inf_{x \in X_{i_*}} f(x) \quad [x_* \text{ est solution du problème interne } i_*] \\ &= \varphi(i_*) \quad [\text{définition de } \varphi] \\ &= \inf_{i \in I} \varphi(i) \quad [i_* \text{ solution du problème à droite dans (1.7)}] \\ &= \inf_{i \in I} \left( \inf_{x \in X_i} f(x) \right) \quad [\text{définition de } \varphi] \\ &= \inf_{x \in X} f(x) \quad [\text{par (1.7)}]. \end{aligned}$$

Donc  $x_*$  est solution du problème à gauche dans (1.7).  $\square$

Voici deux corollaires bien utiles de la proposition 1.8.

**Corollaire 1.10 (minimisation emboîtée II)** Soient  $X$  et  $Y$  deux ensembles et  $f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  une application. Alors

$$\inf_{(x,y) \in X \times Y} f(x,y) = \inf_{x \in X} \left( \inf_{y \in Y} f(x,y) \right) = \inf_{y \in Y} \left( \inf_{x \in X} f(x,y) \right). \quad (1.10)$$

De plus,  $(x_*, y_*)$  est solution du problème à gauche dans (1.10) si, et seulement si,  $x_*$  est solution du problème du milieu dans (1.10) et  $y_*$  est solution du problème interne  $\inf_{y \in Y} f(x_*, y)$  ou encore, si, et seulement si,  $y_*$  est solution du problème à droite dans (1.10) et  $x_*$  est solution du problème interne  $\inf_{x \in X} f(x, y_*)$ .

DÉMONSTRATION. Il suffit d'écrire  $X \times Y = \cup_{x \in X} (\{x\} \times Y) = \cup_{y \in Y} (X \times \{y\})$  et d'appliquer la proposition 1.8.  $\square$

**Remarque 1.11** Le problème à droite dans (1.10) ne veut pas dire que pour minimiser  $f(x, y)$ , il suffit de minimiser  $y \mapsto f(x_0, y)$ , pour un  $x_0 \in X$  arbitraire, dont la solution serait  $\bar{y}$  (si elle existe!), et ensuite de minimiser  $x \mapsto f(x, \bar{y})$ . Il signifie que minimiser  $(x, y) \mapsto f(x, y)$  équivaut à minimiser  $x \mapsto \varphi(x)$ , où  $\varphi(x) := \inf_{y \in Y} f(x, y)$ . Pour chaque  $x$ , il y a donc un problème de minimisation à résoudre pour déterminer  $\varphi(x)$ .

En outre, l'identité (1.10) nous apprend que l'on peut inverser l'ordre dans lequel sont pris deux minimisations successives (ou deux maximisations successives) sans modifier la valeur optimale. Il en va tout autrement si une minimisation est suivie d'une maximisation (ou inversement), comme le montrera la section 14.1 sur la dualité min-max.  $\square$

**Corollaire 1.12 (minimisation emboîtée III)** Soient  $U$  et  $V$  deux ensembles,  $X$  une partie de  $U \times V$  et  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ . Alors

$$\inf_{x \in X} f(x) = \inf_{u \in U} \left( \inf_{v \in X_u} f(u, v) \right) = \inf_{v \in V} \left( \inf_{u \in X^v} f(u, v) \right), \quad (1.11)$$

où

$$X_u := \{v \in V : (u, v) \in X\} \quad \text{et} \quad X^v := \{u \in U : (u, v) \in X\}.$$

De plus,  $x_* = (u_*, v_*)$  est solution du problème à gauche dans (1.11) si, et seulement si,  $u_*$  est solution du problème du milieu dans (1.11) et  $v_*$  est solution du problème interne  $\inf_{v \in X_{u_*}} f(u_*, v)$  ou encore, si, et seulement si,  $v_*$  est solution du problème à droite dans (1.11) et  $u_*$  est solution du problème interne  $\inf_{u \in X^{v_*}} f(u, v_*)$ .

DÉMONSTRATION. On définit  $\tilde{f} : U \times V \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in X \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

et on applique le corollaire 1.10 à  $\tilde{f}$ .  $\square$

Certains algorithmes s'étudient sur des problèmes dont le critère est linéaire (voir, par exemple, le chapitre 16 sur les points intérieurs). Il n'y a pas de restriction dans ce choix si le problème admet déjà des contraintes non linéaires, car on peut toujours *faire passer un terme du critère en contrainte* par l'équivalence mise en évidence dans la proposition suivante.

**Proposition 1.13 (passage d'un terme du critère en contrainte)** *Soient  $X$  un ensemble et  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  deux fonctions. Alors*

$$\inf_{x \in X} f(x) + g(x) = \inf_{\substack{(x, \gamma) \in X \times \mathbb{R} \\ g(x) \leq \gamma}} f(x) + \gamma. \quad (1.12)$$

*De plus, si  $x_*$  est solution du problème à gauche dans (1.12) et si  $g(x_*)$  est fini, alors  $(x_*, g(x_*))$  est solution du problème à droite. Inversement, si  $(x_*, \gamma_*)$  est solution du problème à droite dans (1.12), alors  $x_*$  est solution du problème à gauche et  $\gamma_* = g(x_*)$ .*

Si  $f = 0$ , le problème à droite dans (1.12) consiste de trouver le couple  $(x, \gamma)$  dans l'épigraphe de  $g$ , qui est l'ensemble

$$\text{epi } g := \{(x, \gamma) \in X \times \mathbb{R} : g(x) \leq \gamma\},$$

avec l'ordonnée  $\gamma$  la plus petite possible.

DÉMONSTRATION. En appliquant le corollaire 1.12, on obtient l'égalité en (1.12) :

$$\inf_{\substack{(x, \gamma) \in X \times \mathbb{R} \\ g(x) \leq \gamma}} f(x) + \gamma = \inf_{x \in X} \left( \inf_{\substack{\gamma \in \mathbb{R} \\ g(x) \leq \gamma}} f(x) + \gamma \right) = \inf_{x \in X} f(x) + g(x). \quad (1.13)$$

Soit  $x_* \in X$  une solution du problème à gauche dans (1.12) telle que  $\gamma_* := g(x_*)$  soit fini. Alors  $(x_*, \gamma_*) \in \text{epi } g$  (admissibilité pour le problème à droite). De plus, pour tout  $(x, \gamma) \in \text{epi } g$ , on a  $f(x_*) + \gamma_* = f(x_*) + g(x_*) \leq f(x) + g(x)$  [car  $x_*$  est solution du problème de gauche]  $\leq f(x) + \gamma$ . Donc  $(x_*, \gamma_*)$  est solution du problème de droite.

Inversement, soit  $(x_*, \gamma_*)$  une solution du problème à droite dans (1.12), c'est-à-dire du problème à gauche dans (1.13). D'après le corollaire 1.12,  $x_*$  est solution du problème du milieu dans (1.13) (c'est-à-dire solution du problème à gauche dans (1.12)) et  $\gamma_*$  est solution du problème interne avec  $x = x_*$  (c'est-à-dire  $\gamma_* = g(x_*)$ ).  $\square$

## Notes

Auslender et Teboulle [29; 2003] dérivent des résultats d'existence de solution de problèmes d'optimisation (convexes ou non) en utilisant une notion de fonction

asymptotique qui étend celle que nous verrons pour les fonctions convexes au chapitre 3. Ils énoncent en particulier des conditions nécessaires et suffisantes d'existence de solution pour des fonctions propres et s.c.i. [29; théorème 3.4.1], bien que celles-ci ne soient pas toujours très simples à utiliser. On peut aussi s'intéresser à des résultats d'existence de solution généraux sur des espaces de Banach (de dimension infinie) ou des espaces métriques complets [91, 640].

Malgré l'étendue du corpus de l'optimisation numérique, on peut trouver des synthèses plus ou moins courtes et détaillées donnant une vue d'ensemble de la discipline; mentionnons [272, 239]. On en apprendra davantage dans les ouvrages généraux d'optimisation numérique, que nous citons par ordre chronologique: le livre de Fiacco et McCormick [207; 1968] a connu une renaissance au moment de l'émergence des méthodes de points intérieurs (chapitres 16, 18 et 20); Ortega et Rheinboldt [463; 1970] ont écrit un ouvrage très classique qui se concentre sur les méthodes itératives de résolution de systèmes d'équations non linéaires, en ayant toutefois une section consacrée à l'optimisation sans contrainte; Gill, Murray et Wright [251; 1981]; Ciarlet [126; 1982]; McCormick [415; 1983]; Fletcher [212; 1987]; Culioli [148; 1994]; Nazareth [450; 1994]; Bertsekas [54; 1995]; Kelley [348; 1995]; Gauvin [233; 1995]; Hiriart-Urruty [315; 1996]; Polak [482; 1997]; Kelley [349; 1999]; Conn, Gould et Toint [138; 2000] sur les régions de confiance; Biegler et coll. [58; 2003] présentent une série de travaux sur l'optimisation de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles; Boyd et Vandenberghe [86; 2004] donnent une introduction bien imagée et très abordable de l'optimisation convexe avec de nombreuses applications intéressantes, sans entrer dans la démonstration des résultats les plus fins; Nesterov [452; 2004]; Nocedal et Wright [460; 2006]; Bonnans, Gilbert, Lemaréchal et Sagastizábal [73; 2006] sur l'optimisation sans contrainte, l'optimisation non différentiable, la programmation quadratique successive et les points intérieurs; Ito et Kunisch [328; 2008] présentent la théorie et les algorithmes de l'optimisation en dimension infinie, Bertsekas [56; 2015].

Voici pour terminer cette introduction quelques sites de la Toile qu'il pourra être intéressant de visiter. Les sites

<http://www-fp.mcs.anl.gov/otc/Guide/SoftwareGuide> et  
<http://plato.asu.edu/guide.html>

proposent des guides de codes d'optimisation. Le site de l'Inria

<http://www-rocq.inria.fr/estime/modulopt/index.html>

contient quelques codes spécialisés qui peuvent s'avérer utiles pour résoudre certains problèmes difficiles ou de très grande taille. À l'adresse

<http://plato.la.asu.edu/bench.html>,

on trouvera un répertoire de bancs d'essai (collection de problèmes-tests) pour les codes d'optimisation. Sur cette question, l'environnement Libopt qui propose une plate-forme permettant de coupler des solveurs à différentes collections de problèmes-tests pourra s'avérer utile:

<http://www-rocq.inria.fr/estime/modulopt/libopt/libopt.html>.

En optimisation non linéaire, signalons les collections de problèmes-tests CUTEST et COPS:

<http://ccpforge.cse.rl.ac.uk/gf/project/cutest/wiki>,  
<http://www-unix.mcs.anl.gov/~more/cops>.

Pour d'autres codes d'analyse numérique et de mathématiques en général, on pourra consulter :

<http://gams.nist.gov>,  
<http://gams.nist.gov/serve.cgi>,  
<http://www.netlib.org>.

## Exercices

### 1.1. Inclusion et adhérence d'ensembles admissibles.

1) Soit  $X_0$  une partie non vide d'un ensemble  $X$  et  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. Alors

$$\inf_{x \in X} f(x) \leq \inf_{x_0 \in X_0} f(x_0).$$

2) Soient  $X$  une partie non vide d'un espace topologique et  $f : \bar{X} \rightarrow \mathbb{R}$  une application **semi-continue supérieurement**. Alors

$$\inf_{x \in \bar{X}} f(x) = \inf_{x \in X} f(x).$$

### 1.2. Minimisation et maximisation d'une somme de fonctions.

Soient  $X$  un ensemble et  $f$  et  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  deux applications. Montrez que

- (i)  $\inf_{x \in X} f(x) + \inf_{x \in X} g(x) \leq \inf_{x \in X} (f(x) + g(x))$ ,
- (ii)  $\sup_{x \in X} f(x) + \sup_{x \in X} g(x) \geq \sup_{x \in X} (f(x) + g(x))$ .

### 1.3. Deux notions de coercivité équivalentes.

Soient  $\mathbb{E}$  un espace vectoriel normé,  $X$  une partie de  $\mathbb{E}$  et  $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. Montrez que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i)  $f$  est **coercive** (au sens de la définition 1.3),
- (ii)  $\forall \nu \in \mathbb{R}$ , l'ensemble  $\{x \in X : f(x) \leq \nu\}$  est borné.

### 1.4. Coercivité d'une forme bilinéaire.

Soient  $\mathbb{E}$  un espace vectoriel normé et  $a : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$  une **forme bilinéaire**. Montrez que  $a$  est **coercive** si, et seulement si,

$$\exists \alpha > 0, \quad \forall x \in \mathbb{E} : \quad a(x, x) \geq \alpha \|x\|^2. \quad (1.14)$$

### 1.5. Optimisation globale par l'optimisation linéaire sur l'espace des mesures [375].

Soient  $X$  une partie mesurable d'un espace vectoriel  $\mathbb{E}$ ,  $\mathcal{M}(X)$  l'ensemble des mesures sur  $X$  et  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. Alors l'infimum de  $f$  sur  $X$  est donné par la valeur optimale d'un problème d'optimisation linéaire sur  $\mathcal{M}(X)$ , à savoir

$$\inf_{x \in X} f(x) = \inf_{\substack{\mu \in \mathcal{M}(X) \\ \mu(X)=1 \\ \mu \geq 0}} \int_X f d\mu. \quad (1.15)$$

**Remarque.** On transforme ainsi le problème potentiellement non convexe de gauche (a priori difficile à résoudre numériquement) en un problème, celui de droite, à la structure très simple (il est linéaire) mais de dimension infinie.

- 1.6.** *Norme de l'inverse d'une matrice par minimisation* ([185] et sans doute beaucoup d'autres articles). Soit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  une matrice carrée inversible et  $\|\cdot\|$  une **norme matricielle subordonnée** à une norme vectorielle, également notée  $\|\cdot\|$ . On sait que  $\|A\|$  peut se calculer en résolvant le problème de maximisation (B.4). Montrez l'identité suivante

$$\min_{\|x\|=1} \|Ax\| = \|A^{-1}\|^{-1}, \quad (1.16a)$$

qui permet de calculer  $\|A^{-1}\|$  en résolvant le problème de minimisation. Montrez également que  $x_*$  résout le problème dans le membre de gauche de (1.16a) si, et seulement si,  $y_* := \|A^{-1}\| Ax_*$  résout le problème dans le membre de gauche de

$$\max_{\|y\|=1} \|A^{-1}y\| = \|A^{-1}\|. \quad (1.16b)$$

- 1.7.** *Problèmes d'optimisation équivalents.* Soient  $X$  un ensemble et  $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$  des applications (pour  $i$  dans un ensemble d'indices quelconque  $I$ ). Montrez que les problèmes ci-dessous ont les mêmes solutions  $x_* \in X$  :

$$\min_{x \in X} \sup_{i \in I} f_i(x) \quad \text{et} \quad \begin{cases} \min \alpha \\ f_i(x) \leq \alpha, \quad \forall i \in I \\ x \in X, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Remarque. Lorsque les  $f_i$  sont différentiables, on a remplacé le problème à gauche, qui est en général non différentiable mais n'a pas de contrainte fonctionnelle, par le problème à droite, qui est différentiable mais présente des contraintes fonctionnelles d'inégalité. On a remplacé la difficulté liée à la non-différentiabilité par celle liée à la présence de contraintes d'inégalité. C'est un exemple où la *loi de conservation des ennuis* se manifeste.

- 1.8.** *Réécritures différentiables.* Récrire sous une forme différentiable les problèmes d'optimisation suivants dans lesquels  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  et  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  sont des fonctions différentiables,  $X$  est une partie de  $\mathbb{R}^n$  (définie par des fonctions différentiables) et une non-différentiabilité est présente du fait de l'utilisation des normes  $\ell_1$ , notée  $\|\cdot\|_1$ , ou  $\ell_\infty$ , notée  $\|\cdot\|_\infty$  :

- 1)  $\inf_x \{f(x) + \|F(x)\|_1 : x \in X\}$ ,
- 2)  $\inf_x \{f(x) + \|F(x)\|_\infty : x \in X\}$ .

## 2 Ensembles convexes

*Convexity is a large subject which can hardly be addressed here, but much of the impetus for its growth in recent decades has come from applications in optimization. [...] In fact the great watershed in optimization isn't between linearity and nonlinearity, but convexity and nonconvexity. Even for problems that aren't themselves of convex type, convexity may enter, for instance, in setting up subproblems as part of an iterative numerical scheme.*

R.T. ROCKAFELLAR [526 ; 1993].

*We now take for granted that convex analysis is a good subject with worthwhile ideas, yet it was not always that way. There was actually a lot of resistance to it in the early days, from individuals who preferred a geometric presentation to one targeting concepts of analysis. Even on the practical plane, it's fair to say that little respect was paid to convex analysis in numerical optimization until around 1990, say.*

R.T. ROCKAFELLAR sur le site [Wikimization](#).

Les chapitres 2 et 3 présentent les éléments d'analyse convexe qui nous seront utiles pour étudier les problèmes d'optimisation et les algorithmes qui les résolvent. Le chapitre 2 s'intéresse aux ensembles convexes ; le chapitre 3 aux fonctions convexes. L'*analyse convexe* est une théorie située entre l'algèbre linéaire et l'analyse non linéaire, dans laquelle les objets étudiés, ensembles et fonctions, bien que non linéaires, sont contraints de vérifier une condition particulière qui leur confère des propriétés remarquables. C'est une théorie assez récente ; certains voient la naissance de sa version « moderne », celle renforçant le rôle de l'analyse, dans l'invention du sous-différentiel (section 3.6), de l'application proximale (section 3.7.1) et de l'inf-convolution (section 3.4.4) dans les années 1962-63 [132].

Cette théorie et ses concepts interviennent en optimisation pour de nombreuses raisons. Par exemple, l'écriture des conditions d'optimalité passe par le linéarisé de l'ensemble admissible, qui est un **cône** ; un objet qui n'appartient pas à l'algèbre linéaire mais à l'analyse convexe. Autre exemple : dans les problèmes d'optimisation convexe (c'est-à-dire avec un critère convexe et un ensemble admissible convexe), tous les points stationnaires sont des minima globaux, ce qui simplifie singulièrement le

problème<sup>1</sup>. Si l'analyse convexe joue un rôle prépondérant en optimisation, la phrase de R.T. Rockafellar donnée en épigraphe parlant de ligne de partage des eaux (*watershed*), nous semble devoir être relativisée ; on sait en effet qu'il existe des problèmes d'optimisation convexe qui sont NP-ardus (l'optimisation copositive [447, 69]) et donc aujourd'hui très difficiles à résoudre lorsque leur dimension est grande.

L'analyse convexe est une théorie très riche et d'une évidente élégance. C'est donc avec regret que nous avons cherché à en dire le moins possible, en ne développant que les concepts et les propriétés qui sont nécessaires à l'étude des quelques problèmes d'optimisation et méthodes de résolution que nous verrons dans cet ouvrage. Le lecteur intéressé pourra approfondir ses connaissances en s'immergeant dans les ouvrages spécialisés cités dans les notes à la fin du chapitre 3. Nous espérons toutefois que l'étude de ces deux chapitres apportera au lecteur une aisance suffisante dans cet univers merveilleux. Si la théorie est parfois difficile, elle contient aussi beaucoup de résultats simples à démontrer pourvu que l'on maîtrise la technique ; leur démonstration est alors proposée en exercice. Mais l'analyse convexe a aussi des affirmations simples à énoncer, qui semblent très naturelles, mais que l'on ne sait pas démontrer. On y prendra garde !

Le fait que l'*Analyse convexe* existe en tant que discipline des mathématiques, et pas l'*Analyse concave*, tient au fait que l'on définit aisément la notion d'ensemble convexe, alors que celle d'*ensemble concave* est moins naturelle, voire pratiquement inexistante. On définit alors les fonctions convexes comme celles ayant un épigraphe convexe (les fonctions concaves ont, elles, un *hypographe* convexe...). Il est normal de minimiser les fonctions convexes, pas de les maximiser, si bien que l'optimisation s'intéressera tout naturellement à la minimisation de fonctions et pas à leur maximisation. La chaîne logique des concepts est donc la suivante :

$$\text{ensemble convexe} \longrightarrow \text{fonction convexe} \longrightarrow \text{minimisation.} \quad (2.1)$$

Mais, on l'a vu (proposition 1.5), les problèmes de maximisation se ramènent aisément à des problèmes de minimisation.

Dans ce chapitre nous introduisons la notion d'ensemble convexe, donnons quelques exemples d'ensembles convexes (en particulier une description assez précise des polyèdres convexes), démontrons leurs principales propriétés (géométriques et topologiques) et décrivons quelques opérations sur les ensembles convexes (projection, séparation, prise du dual). En chemin, nous serons amenés à démontrer un résultat d'existence de solution pour les problèmes d'optimisation linéaire (proposition 2.20) qui nous sera aussi utile au chapitre 17.

Comme c'est le cas dans tout cet ouvrage, l'espace vectoriel sur lequel on travaille, noté  $\mathbb{E}$ , est supposé défini sur le *corps des réels*  $\mathbb{R}$  et de *dimension finie* ; cela ne sera pas toujours précisé dans l'énoncé des résultats. Il n'y a alors pas de restriction à supposer qu'il est euclidien, c'est-à-dire muni d'un produit scalaire que l'on notera  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

<sup>1</sup> Les problèmes d'optimisation à données polynomiales présentent aussi des propriétés remarquables, qui contraignent les possibilités d'une autre manière, mais c'est alors la géométrie algébrique plutôt que l'analyse convexe qui y joue un rôle clé. Nous n'aborderons pas ce domaine qui connaît un essor important depuis le début du XXI<sup>e</sup> siècle [376, 65, 377].

### 2.1 Définition et premières propriétés

Soient  $\mathbb{E}$  un espace vectoriel de dimension finie sur  $\mathbb{R}$  et  $x, y \in \mathbb{E}$ . On appelle *segment* de  $\mathbb{E}$ , un ensemble noté et défini comme suit

$$[x, y] := \{(1-t)x + ty : t \in [0, 1]\}.$$

Lorsque  $x \neq y$ , on définit les segments  $[x, y[$ ,  $]x, y]$  et  $]x, y[$ , en remplaçant dans la formule ci-dessus, l'intervalle  $[0, 1]$  respectivement par les intervalles  $[0, 1[$ ,  $]0, 1]$  et  $]0, 1[$ . Lorsque  $x = y$ , les segments  $[x, y[$ ,  $]x, y]$  et  $]x, y[$  sont vides, par définition.

On dit qu'une partie  $C$  de  $\mathbb{E}$  est *convexe* si pour tout  $x, y \in C$ , le segment  $[x, y]$  est contenu dans  $C$ . On dit aussi que  $C$  est « un convexe ». La figure 2.1 illustre cette

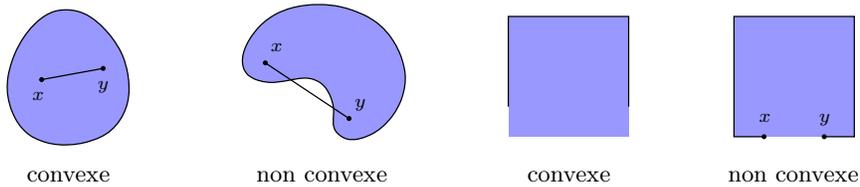


Fig. 2.1. Définition d'un ensemble convexe

notion. L'ensemble de gauche est convexe car il contient tous les segments  $[x, y]$  avec des points  $x$  et  $y$  lui appartenant. Le second ne l'est pas car une partie du segment  $[x, y]$  qui y est représenté n'est pas dans l'ensemble. Le cas des deux carrés à droite est plus délicat car la question se joue sur la frontière (la partie de celle-ci appartenant à l'ensemble est marquée d'un trait continu). Le carré de gauche est convexe, bien qu'il ne contienne pas toute sa frontière. Celui de droite ne l'est pas, car le segment  $]x, y[$  ne lui appartient pas, alors que  $x$  et  $y$  sont supposés appartenir à l'ensemble. Cet exemple du carré n'est pas anodin, mais est destiné à faire prendre conscience au lecteur du fait que la validité d'une propriété (comme la convexité, la *semi-continuité* d'une fonction, sa sous-différentiabilité, *etc*) dépend souvent de ce qui se passe sur la frontière d'un ensemble ; on devra donc toujours traiter avec soin et précision ce qui peut apparaître comme un détail au premier abord.

#### Exemples et propriétés immédiates

Ci-dessous,  $\mathbb{E}$ ,  $\mathbb{E}_1$ ,  $\mathbb{E}_2$  et  $\mathbb{F}$  sont des espaces vectoriels ou euclidiens. Les affirmations se démontrent tous sans difficulté, soit en utilisant la définition de la convexité d'un ensemble, soit à partir des exemples et propriétés énoncés précédemment.

1) Un *hyperplan* d'un espace euclidien  $(\mathbb{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  est un ensemble de la forme

$$H(\xi, \alpha) := \{x \in \mathbb{E} : \langle \xi, x \rangle = \alpha\},$$

où  $\xi \in \mathbb{E}$  est *non nul* et  $\alpha \in \mathbb{R}$ . C'est clairement un convexe de  $\mathbb{E}$ .

2) Un *demi-espace fermé* de  $\mathbb{E}$  est un ensemble de l'une des deux formes suivantes

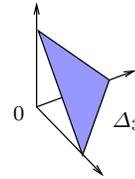
$$H^-(\xi, \alpha) := \{x \in \mathbb{E} : \langle \xi, x \rangle \leq \alpha\}, \quad (2.2a)$$

$$H^+(\xi, \alpha) := \{x \in \mathbb{E} : \langle \xi, x \rangle \geq \alpha\}, \quad (2.2b)$$

où  $\xi \in \mathbb{E}$  est *non nul* et  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On dit que les demi-espaces sont *ouverts* si l'on utilise des inégalités strictes en (2.2a) et (2.2b). Ce sont aussi clairement des convexes de  $\mathbb{E}$ .

- 3) La partie de  $\mathbb{R}^n$  définie par  $\mathbb{R}_+^n := \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0\}$  est un convexe appelé *orthant positif*. La notation  $x \geq 0$  veut dire que  $x_i \geq 0$  pour tout indice  $i \in [1 : n]$ .
- 4) La *somme* (de Minkowski)  $C_1 + C_2 := \{x_1 + x_2 : x_1 \in C_1, x_2 \in C_2\}$  de deux convexes  $C_1$  et  $C_2$  de  $\mathbb{E}$  est un convexe. Le produit  $\alpha C := \{\alpha x : x \in C\}$  d'un scalaire  $\alpha \in \mathbb{R}$  par un convexe  $C$  est un convexe (voir aussi le point 1 de l'exercice 2.1).
- 5) Si  $\{C_i\}_{i \in I}$  est une famille quelconque de convexes de  $\mathbb{E}$ , alors leur intersection  $\bigcap_{i \in I} C_i$  est un convexe (mais pas leur union!).
- 6) Soit  $A : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$  une application *linéaire*. L'image directe  $A(C)$  (resp. l'*image réciproque*  $A^{-1}(C)$ ) d'un convexe  $C$  de  $\mathbb{E}$  (resp. de  $\mathbb{F}$ ) par  $A$  est un convexe.
- 7) Soient  $C_1 \subseteq \mathbb{E}_1$  et  $C_2 \subseteq \mathbb{E}_2$ . Alors  $C_1 \times C_2$  est convexe dans  $\mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2$  si, et seulement si,  $C_1$  et  $C_2$  sont convexes.
- 8) On appelle *polyèdre convexe* de  $\mathbb{E}$  un ensemble de la forme  $\{x \in \mathbb{E} : Ax \leq b\}$ , où  $A : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}^m$  est une application linéaire,  $b \in \mathbb{R}^m$  et l'inégalité  $Ax \leq b$  se comprend composante par composante:  $(Ax)_i \leq b_i$ , pour tout  $i \in [1 : m]$ . C'est donc l'intersection d'un nombre *fini* de *demi-espaces fermés*. D'après ce qui précède, c'est un convexe.
- 9) On appelle *simplexe unitaire* de  $\mathbb{R}^n$  l'ensemble défini par

$$\Delta_n := \{x \in \mathbb{R}^n : e^T x = 1, x \geq 0\},$$



où  $e = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ . C'est un convexe (intersection de deux convexes: un *sous-espace affine* et l'*orthant positif*).

10) On note  $\mathcal{S}^n$  l'espace vectoriel des matrices d'ordre  $n$  symétriques. Il est de dimension  $n(n+1)/2$ . Les ensembles

$$\mathcal{S}_+^n := \{A \in \mathcal{S}^n : A \text{ est semi-définie positive}\}$$

$$\mathcal{S}_{++}^n := \{A \in \mathcal{S}^n : A \text{ est définie positive}\}$$

sont convexes. En effet, si  $A$  et  $B \in \mathcal{S}_+^n$ , alors pour tout  $t \in [0, 1]$  et tout vecteur  $v \in \mathbb{R}^n$ , on a  $v^T((1-t)A + tB)v = (1-t)v^T Av + tv^T Bv \geq 0$ , ce qui montre que  $(1-t)A + tB \in \mathcal{S}_+^n$ . On raisonne de même pour  $\mathcal{S}_{++}^n$ .

11) Si  $\mathcal{A}$  est un *sous-espace affine* de  $\mathcal{S}^n$ , alors

$$\mathcal{S}_+^n \cap \mathcal{A}$$

est évidemment un ensemble convexe (intersection de deux convexes). Beaucoup d'ensembles convexes peuvent se ramener à une telle description, au prix de quelques transformations algébriques. Souvent, le sous-espace affine est vu comme le noyau translaté d'une application linéaire  $L : \mathcal{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  :

$$\mathcal{A} = \{X \in \mathcal{S}^n : L(X) = b\},$$

où  $b$  est fixé dans  $\mathbb{R}^m$ . On peut aussi voir  $\mathcal{A}$  comme l'image d'une application affine  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{S}^n$  :

$$\mathcal{A} = \{A_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i A_i : \alpha \in \mathbb{R}^m\},$$

où les matrices  $A_i$  sont fixées dans  $\mathcal{S}^n$ . Dans le premier ou le second cas,  $X \in \mathcal{S}_+^n \cap \mathcal{A}$  si, et seulement si,  $X$  vérifie les conditions suivantes

$$L(X) = b, \quad X \succcurlyeq 0 \quad \text{ou} \quad X = A_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i A_i, \quad X \succcurlyeq 0.$$

C'est ce qu'on appelle des *inégalités matricielles linéaires* (IML en abrégé, on devrait dire affine plutôt que linéaire).

## 2.2 Aspects géométriques

En algèbre linéaire, il est naturel de considérer le plus petit sous-espace vectoriel contenant un ensemble donné  $P$  de  $\mathbb{E}$ , ainsi que de son *enveloppe affine* qui est le plus petit *sous-espace affine* contenant cet ensemble (section 2.2.1). L'analyse convexe associe à  $P$  de nouveaux ensembles : son *enveloppe convexe* qui est le plus petit convexe contenant  $P$  (section 2.2.2), son enveloppe convexe fermée qui est le plus petit convexe fermé contenant  $P$  (section 2.5.4), son enveloppe conique qui est le plus petit cône *convexe* contenant  $P$  (section 2.2.3) et, lorsque  $P$  est convexe, son cône asymptotique (section 2.2.4) et ses faces (section 2.2.5).

### 2.2.1 Enveloppe affine

Soit  $P$  une partie d'un espace vectoriel  $\mathbb{E}$ . L'intersection de *sous-espaces affines* étant un sous-espace affine (exercice A.8), on peut parler du plus petit sous-espace affine contenant  $P$ , qui est donc l'intersection de tous les sous-espaces affines de  $\mathbb{E}$  contenant  $P$ . C'est ce que l'on appelle l'*enveloppe affine* de  $P$ . On la note

$$\text{aff } P := \bigcap \{A : A \text{ est un sous-espace affine de } \mathbb{E} \text{ contenant } P\}.$$

On appelle *combinaison affine* de  $\mathbb{E}$ , un élément  $x$  de  $\mathbb{E}$  de la forme

$$x = \sum_{i=1}^m t_i x_i,$$

où  $m \in \mathbb{N}^*$ ,  $t = (t_1, \dots, t_m) \in \mathbb{R}^m$  vérifie  $e^\top t = 1$  et les vecteurs  $x_i \in \mathbb{E}$ .

**Proposition 2.1** 1) Un ensemble est un *sous-espace affine* si, et seulement si, il contient toutes les combinaisons affines de ses éléments.  
 2) Si  $P \subseteq \mathbb{E}$ , alors  $\text{aff } P$  est l'ensemble des combinaisons affines des éléments de  $P$ :

$$\text{aff } P = \left\{ \sum_{i=1}^m t_i x_i : m \in \mathbb{N}^*, t \in \mathbb{R}^m, e^T t = 1, x_i \in P \right\}. \quad (2.3)$$

DÉMONSTRATION. 1) Soit  $A$  un sous-espace affine. Presque par définition (voir l'exercice A.7),  $A$  contient les combinaisons affines formées de deux de ses éléments. On raisonne ensuite par récurrence en supposant qu'un sous-espace affine  $A$  contient les combinaisons affines formées de  $m$  de ses éléments, avec un certain  $m \geq 2$ . Soient alors  $m + 1$  éléments  $x_i \in A$  et des  $t_i \in \mathbb{R}$  vérifiant  $\sum_{i=1}^{m+1} t_i = 1$ . Il y a au moins un des  $t_i \neq 1$ . Supposons que ce soit  $t_1$ . On écrit :

$$\sum_{i=1}^{m+1} t_i x_i = t_1 x_1 + (1-t_1) \left( \sum_{i=2}^{m+1} \frac{t_i}{1-t_1} x_i \right).$$

Cet élément est dans  $A$  car les facteurs de  $t_1$  et de  $1-t_1$  sont dans  $A$  (par récurrence pour le second). Réciproquement, on savait déjà qu'un ensemble contenant les combinaisons formées de deux de ses éléments est un sous-espace affine.

2) Soit  $X$  l'ensemble à droite dans (2.3). On vérifie facilement que cet ensemble contient  $P$  (prendre  $m = 1$ ) et est affine, donc  $\text{aff } P \subseteq X$ . Inversement,  $X$  est contenu dans l'ensemble défini comme à droite dans (2.3), mais avec des  $x_i$  pris dans  $\text{aff } P$  plutôt que dans  $P$ . D'après la première partie de la proposition, ce dernier ensemble est  $\text{aff } P$ . Donc  $X \subseteq \text{aff } P$ .  $\square$

On dit que les vecteurs  $x_0, x_1, \dots, x_p$  de  $\mathbb{E}$  sont *affinement indépendants* si  $p = 0$  ou si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

- (A<sub>1</sub>)  $\sum_{i=0}^p \alpha_i x_i = 0$  et  $\sum_{i=0}^p \alpha_i = 0 \implies$  tous les  $\alpha_i$  sont nuls,
- (A<sub>2</sub>) les vecteurs  $\{x_i - x_0 : i \in [1:p]\}$  sont linéairement indépendants,
- (A<sub>3</sub>) quel que soit  $j \in [0:p]$ , les vecteurs  $\{x_i - x_j : i \in [0:p], i \neq j\}$  sont linéairement indépendants.

On parle parfois de la *dimension d'un ensemble convexe*  $C$  : c'est la dimension de son enveloppe affine  $\text{aff}(C)$ . Si  $\dim C = p$ ,  $C$  contient au moins et au plus  $p + 1$  vecteurs affinement indépendants.

### 2.2.2 Enveloppe convexe

Soit  $P$  une partie d'un espace vectoriel  $\mathbb{E}$ . L'intersection de convexes étant convexe, on peut parler du plus petit convexe contenant  $P$ , qui est donc l'intersection de tous les convexes contenant  $P$ . C'est ce que l'on appelle l'*enveloppe convexe* de  $P$ . On la note

$$\text{co } P := \bigcap \{C : C \text{ est un convexe contenant } P\}.$$

On appelle *combinaison convexe* de  $\mathbb{E}$ , un élément  $x$  de  $\mathbb{E}$  de la forme

$$x = \sum_{i=1}^m t_i x_i,$$

où  $m \in \mathbb{N}^*$ ,  $t = (t_1, \dots, t_m) \in \Delta_m$  (**simplexe unitaire** de  $\mathbb{R}^m$ , c'est-à-dire  $t \geq 0$  et  $\sum_{i=1}^m t_i = 1$ ) et les vecteurs  $x_i \in \mathbb{E}$ .

**Proposition 2.2** 1) *Un ensemble est convexe si, et seulement si, il contient toutes les combinaisons convexes de ses éléments.*

2) *Si  $P \subseteq \mathbb{E}$ , alors  $\text{co } P$  est l'ensemble des combinaisons convexes des éléments de  $P$ :*

$$\text{co } P = \left\{ \sum_{i=1}^m t_i x_i : m \in \mathbb{N}^*, t \in \Delta_m, x_i \in P \right\}. \quad (2.4)$$

DÉMONSTRATION. 1) Soit  $C$  un convexe. Par définition,  $C$  contient les combinaisons convexes formées à partir de deux éléments de  $C$  ( $m = 2$ ). On raisonne ensuite par récurrence en supposant que  $C$  contient les combinaisons convexes formées de  $m$  éléments de  $C$  ( $m \geq 2$ ). Alors pour une combinaison convexe de  $m + 1$  éléments de  $C$ , on écrit (on peut supposer que  $t_1 \neq 1$ , sinon le résultat est évident) :

$$\sum_{i=1}^{m+1} t_i x_i = t_1 x_1 + (1 - t_1) \left( \sum_{i=2}^{m+1} \frac{t_i}{1 - t_1} x_i \right).$$

Cet élément est dans  $C$  car les facteurs de  $t_1$  et de  $1 - t_1$  sont dans  $C$  (par récurrence pour le second). Réciproquement, si  $C$  contient toutes les combinaisons convexes de ses éléments, il contient les combinaisons convexes formées de deux éléments. Donc  $C$  est convexe.

2) Il est facile de voir que l'ensemble des combinaisons convexes des éléments de  $P$  est un convexe. Il contient donc  $\text{co } P$  qui est le plus petit convexe contenant  $P$ . Inversement, par la première partie,  $\text{co } P$  étant un convexe, il contient toutes les combinaisons convexes des éléments de  $\text{co } P$  donc de  $P$ .  $\square$

À droite dans (2.4), on ne peut pas se contenter de prendre  $m = 2$ . Par exemple, si  $P$  est formé des trois sommets d'un triangle non dégénéré, cet ensemble serait alors la frontière du triangle, qui n'est pas convexe. Cependant, si  $P = C_1 \cup \dots \cup C_m$  est l'union de  $m$  convexes  $C_i$ ,  $\text{co } P$  est l'ensemble des combinaisons convexes de  $m$  points  $x_i$ , chacun des  $x_i$  étant pris dans un convexe  $C_i$  différent (voir l'exercice 2.5). Le théorème de Carathéodory ci-dessous s'inscrit dans le même esprit, celui de limiter le nombre de termes à prendre dans la somme de (2.4). Il affirme qu'en dimension  $n$ , il suffit de prendre  $m = n + 1$  dans (2.4). Ce majorant sur le nombre d'éléments à prendre dans la somme à droite dans (2.4) est utile pour passer à la limite dans des combinaisons convexes, comme le montre le corollaire qui suit.

**Théorème 2.3 (Carathéodory [106 ; 1907])** *Soit  $P$  une partie d'un espace vectoriel  $\mathbb{E}$  de dimension  $n$ . Alors tout élément de  $\text{co } P$  peut s'écrire comme une combinaison convexe de  $n + 1$  éléments de  $P$ .*

DÉMONSTRATION. Supposons que  $x \in \text{co } P$  s'écrive comme combinaison convexe de  $m > n + 1$  éléments  $x_i$  de  $P$  :  $x = \sum_{i=1}^m t_i x_i$ , avec  $t := (t_1, \dots, t_m) \in \Delta_m$ . Il suffit de montrer que l'on peut écrire  $x$  comme combinaison convexe de  $m - 1$  des  $x_i$ . On peut supposer que tous les  $t_i > 0$  (sinon le travail est fait).

En nombre  $m > n + 1$ , les  $x_i$  sont affinement dépendants, si bien que l'on peut trouver  $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \neq 0$ , tel que

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^m \alpha_i = 0.$$

Comme  $\alpha \neq 0$ , il existe un indice  $k$  tel que  $\alpha_k > 0$  (cet indice  $k$  sera mieux choisi par la suite). On peut donc écrire

$$x_k = - \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ i \neq k}} \frac{\alpha_i}{\alpha_k} x_i \quad \text{et} \quad x = \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ i \neq k}} \left( t_i - t_k \frac{\alpha_i}{\alpha_k} \right) x_i.$$

On voit que  $\sum_{1 \leq i \leq m, i \neq k} (t_i - t_k \alpha_i / \alpha_k) = 1$ , si bien que le résultat sera démontré si  $t_i - t_k \alpha_i / \alpha_k \geq 0$  pour tout  $i \neq k$ . Ceci s'écrit encore (on se rappelle que les  $t_i$  et  $\alpha_k$  sont  $> 0$ ) :

$$\frac{\alpha_k}{t_k} \geq \frac{\alpha_i}{t_i}, \quad \text{pour tout } i \neq k.$$

Cette condition spécifie comment choisir l'indice  $k \in \arg \max\{\alpha_i / t_i : 1 \leq i \leq m\}$ , qui fournit bien un  $\alpha_k > 0$ .  $\square$

**Corollaire 2.4** *L'enveloppe convexe d'une partie compacte d'un espace vectoriel de dimension finie est compacte.*

DÉMONSTRATION. Il est clair que  $\text{co } P$  est borné (on utilise la proposition 2.2) ; il reste donc à montrer qu'il est fermé. Soit  $\{x_k\} \subseteq \text{co } P$ , avec  $x_k \rightarrow x$  et montrons que  $x \in \text{co } P$ . D'après le théorème de Carathéodory,

$$x_k = \sum_{i=1}^{n+1} t_{k,i} x_{k,i}, \tag{2.5}$$

avec  $(t_{k,1}, \dots, t_{k,n+1}) \in \Delta_{n+1}$  et  $x_{k,i} \in P$ . Comme  $\Delta_{n+1}$  et  $P$  sont compacts, on peut extraire de  $\{t_{k,i}\}_k$  et de  $\{x_{k,i}\}_k$  des sous-suites convergentes, dont les limites sont dans  $\Delta_{n+1}$  et  $P$  respectivement. En passant à la limite dans (2.5), on voit que  $x \in \text{co } P$ .  $\square$

La démonstration de la proposition suivante est proposée à l'exercice 2.4.

**Proposition 2.5 (calcul d'enveloppe convexe)** Soient  $\mathbb{E}$  et  $\mathbb{F}$  deux espaces vectoriels.

- 1) Si  $P \subseteq \mathbb{E}$  et  $a : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$  est affine, alors  $\text{co}(a(P)) = a(\text{co } P)$ .
- 2) Si  $P$  et  $Q \subseteq \mathbb{E}$ , alors  $\text{co}(P + Q) = \text{co } P + \text{co } Q$ .
- 3) Si  $P \subseteq \mathbb{E}$  et  $Q \subseteq \mathbb{F}$ , alors  $\text{co}(P \times Q) = (\text{co } P) \times (\text{co } Q)$ .

### 2.2.3 Enveloppe conique

On note

$$\mathbb{R}_+ := \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\} \quad \text{et} \quad \mathbb{R}_{++} := \{t \in \mathbb{R} : t > 0\}.$$

On dit qu'une partie  $K$  d'un espace vectoriel  $\mathbb{E}$  est un *cône* si  $\mathbb{R}_{++}K \subseteq K$ , c'est-à-dire si  $tx \in K$  chaque fois que  $t > 0$  et  $x \in K$ . On dit qu'un cône  $K$  est

- *saillant* si  $K \cap (-K) \subseteq \{0\}$ , ce qui revient à dire qu'il ne contient pas de droite (sous-espace affine de dimension 1),
- *pointé* si  $0 \in K$  (et *épointé* dans le cas contraire).

On a pris soin de ne pas imposer qu'un cône contienne l'origine (on ne demande pas que  $\mathbb{R}_+K \subseteq K$ ), de manière à pouvoir parler de cônes ouverts, tels que  $\mathcal{S}_{++}^n$ .

Soit  $P$  une partie de  $\mathbb{E}$ . L'intersection de cônes convexes étant un cône convexe, on peut parler du plus petit cône convexe contenant  $P$ , qui est donc l'intersection de tous les cônes convexes contenant  $P$ . C'est ce que l'on appelle l'*enveloppe conique* de  $P$  (on devrait dire son *enveloppe conique convexe*). On la note

$$\text{cone } P := \bigcap \{K : K \text{ est un cône convexe contenant } P\}.$$

On appelle *combinaison conique* de  $\mathbb{E}$ , un élément  $x$  de  $\mathbb{E}$  de la forme

$$x = \sum_{i=1}^m t_i x_i,$$

où  $m \in \mathbb{N}^*$ , les  $t_i \in \mathbb{R}$  avec  $t_i \geq 0$  et les vecteurs  $x_i \in \mathbb{E}$ . La démonstration de la proposition suivante est proposée à l'exercice 2.8.

**Proposition 2.6** 1) Un ensemble est un cône convexe si, et seulement si, il contient toutes les combinaisons coniques de ses éléments.

2) Si  $P \subseteq \mathbb{E}$ , alors  $\text{cone } P$  est l'ensemble des combinaisons coniques des éléments de  $P$  :

$$\text{cone } P = \left\{ \sum_{i=1}^m t_i x_i : m \in \mathbb{N}^*, t_i \in \mathbb{R} \text{ avec } t_i \geq 0, x_i \in P \right\}. \quad (2.6)$$

### 2.2.4 Cône asymptotique

Soit  $C$  un ensemble *convexe fermé non vide* d'un espace vectoriel  $\mathbb{E}$  de dimension finie. Le *cône asymptotique* de  $C$  est l'ensemble défini par

$$C^\infty := \{d \in \mathbb{E} : C + \mathbb{R}_+ d \subseteq C\} = \{d \in \mathbb{E} : C + d \subseteq C\}.$$

Un élément de  $C^\infty$  est appelé une *direction asymptotique*<sup>2</sup>. De façon imagée et à une translation près, le cône asymptotique est l'apparence que prend  $C$  lorsqu'on le voit d'infiniment loin. Il apparaît alors comme un cône, réduit éventuellement à zéro (si, et seulement si, il est borné ; c'est ce que nous allons montrer).

La proposition 2.7 ci-dessous donne dans son point (i) une autre expression du *cône asymptotique*, qui sert parfois à étendre ce concept à des ensembles  $C$  non convexes [29], et montre dans son point (ii) que le cône asymptotique peut aussi s'écrire

$$C^\infty(x) := \{d \in \mathbb{E} : x + \mathbb{R}_+ d \subseteq C\} = \bigcap_{t>0} \frac{C-x}{t},$$

quel que soit le point  $x$  choisi dans  $C$  (le caractère fermé de  $C$  est essentiel pour avoir cette propriété). Dans l'expression ci-dessus,  $(C-x)/t = \{(y-x)/t : y \in C\}$ .

**Proposition 2.7 (autres expressions du cône asymptotique)** *Soit  $C$  un ensemble convexe fermé non vide. Alors  $C^\infty$  est un cône convexe fermé contenant zéro. De plus*

- (i)  $C^\infty = \{d \in \mathbb{E} : \text{il existe } \{x_k\} \subseteq C \text{ et } \{t_k\} \rightarrow \infty \text{ tels que } x_k/t_k \rightarrow d\}$ ,
- (ii)  $C^\infty = C^\infty(x)$ , quel que soit  $x \in C$ .

DÉMONSTRATION. Pour tout  $t > 0$ ,  $(C-x)/t$  est un convexe fermé. Il en est donc de même de  $C^\infty(x)$  et donc de  $C^\infty = \bigcap_{x \in C} C^\infty(x)$ . D'autre part, il est clair que  $C^\infty$  est un cône ( $d \in C^\infty$  et  $t > 0$  impliquent que  $td \in C^\infty$ ) et qu'il contient zéro.

Désignons par  $K$  l'ensemble dans le membre de droite de (i). Soit  $x \in C$ . Pour démontrer (i) et (ii), il suffit de montrer que  $C^\infty(x) = K$ .

Soit  $d \in C^\infty(x)$ . Avec  $\{t_k\} \rightarrow \infty$  et  $x_k = x + t_k d$ , on a  $x_k \in C$  et  $x_k/t_k \rightarrow d$ . Donc  $d \in K$ . Inversement, soient  $\{x_k\} \subseteq C$  et  $\{t_k\} \rightarrow \infty$  tels que  $x_k/t_k \rightarrow d$ . Fixons  $t > 0$ . Dès que  $t_k \geq t$ ,

$$x + \frac{t}{t_k}(x_k - x) \in C$$

et ce point converge vers  $x + td \in C$  (fermé). Donc  $d \in C^\infty(x)$ . □

Si  $C$  n'est pas fermé,  $C^\infty(x)$  peut dépendre de  $x$ . Par exemple, si  $C = \{x \in \mathbb{R}^2 : x > 0\} \cup \{(0, 0)\}$ ,  $C^\infty(x)$  est l'*orthant positif* si  $x \neq 0$ , mais  $C^\infty(0) = C$ .

<sup>2</sup> Certains auteurs [517 ; page 61] préfèrent utiliser les appellations *cône de récession* (alors noté  $0^+C$ , en évitant le signe  $\infty$ ) et *direction de récession* à *cône asymptotique* et *direction asymptotique*, parce que la notion n'a pas de rapport direct avec celle d'asymptote. Le qualificatif *asymptotique* est en réalité utilisé ici comme dans les locutions *comportement asymptotique* et *développement asymptotique*, comme un substitut de l'expression « à l'infini ».

D'après le point (i) de la proposition précédente,  $C^\infty \subseteq \text{adh}(\mathbb{R}_+ C)$ , mais on n'a pas l'égalité en général. Par exemple si  $C = \{1\} \subseteq \mathbb{R}$ ,  $C^\infty = \{0\}$  alors que  $\text{adh} \mathbb{R}_+ C = \mathbb{R}_+$ .

Le corollaire suivant exprime à sa manière qu'un ensemble convexe fermé est borné si, et seulement si, il ne contient pas de *demi-droite*, c'est-à-dire d'ensemble de la forme  $x + \mathbb{R}_+ d$ , où  $x \in \mathbb{E}$  et  $d \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$ .

**Corollaire 2.8 (cône asymptotique d'un convexe borné)** *Soit  $C$  un ensemble convexe fermé non vide. Alors  $C$  est borné si, et seulement si,  $C^\infty = \{0\}$ .*

DÉMONSTRATION. D'après la proposition 2.7 (i), si  $C$  est borné,  $C^\infty = \{0\}$ . Inversement, si  $C$  n'est pas borné, il existe une suite de points  $\{x_k\} \subseteq C$  telle que  $t_k := \|x_k\| \rightarrow \infty$  et  $x_k/\|x_k\| \rightarrow d \neq 0$ . D'après la proposition 2.7 (i),  $d \in C^\infty$ .  $\square$

D'autres propriétés du *cône asymptotique* sont données dans la proposition ci-dessous, dont la démonstration est proposée à l'exercice 2.9 ; pour d'autres propriétés, voir les exercices 2.20 et 2.21 (cas d'un polyèdre convexe).

**Proposition 2.9 (calcul de cône asymptotique)**

- 1) (cône)  $K$  est un cône convexe fermé si, et seulement si,  $K^\infty = K$ .
- 2) (inclusion) Si  $C_1$  et  $C_2$  sont deux convexes fermés non vides, on a

$$C_1 \subseteq C_2 \quad \implies \quad C_1^\infty \subseteq C_2^\infty.$$

- 3) (intersection) Si  $\{C_i\}_{i \in I}$  est une famille quelconque d'ensembles convexes fermés, d'intersection non vide, on a

$$(\bigcap_{i \in I} C_i)^\infty = \bigcap_{i \in I} C_i^\infty. \quad (2.7)$$

- 4) (produit cartésien) Si  $C_1$  (resp.  $C_2$ ) est un convexe fermé non vide d'un espace vectoriel  $\mathbb{E}_1$  (resp.  $\mathbb{E}_2$ ), alors  $C_1 \times C_2$  est un convexe fermé non vide de  $\mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2$  et

$$(C_1 \times C_2)^\infty = C_1^\infty \times C_2^\infty.$$

- 5) (préimage linéaire) Soient  $\mathbb{E}$  et  $\mathbb{F}$  deux espaces vectoriels de dimension finie,  $A : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$  une application linéaire et  $C$  un convexe fermé non vide de  $\mathbb{F}$  tel que  $\mathcal{R}(A) \cap C \neq \emptyset$ . Alors l'image *réciproque*  $A^{-1}(C)$  de  $C$  par  $A$  est un convexe fermé de  $\mathbb{E}$  et

$$[A^{-1}(C)]^\infty = A^{-1}(C^\infty).$$

- 6) (image linéaire) Soient  $\mathbb{E}$  et  $\mathbb{F}$  deux espaces vectoriels de dimension finie,  $A : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$  une application linéaire et  $C$  un convexe fermé non vide de  $\mathbb{E}$ . Alors  $A(C)$  est convexe et

$$\text{adh}(A(C^\infty)) \subseteq (\text{adh } A(C))^\infty.$$

Si, de plus,  $\mathcal{N}(A) \cap C^\infty$  est un sous-espace vectoriel, alors  $A(C)$  est fermé et

$$A(C^\infty) = A(C)^\infty. \tag{2.8}$$

### 2.2.5 Faces et points extrêmes

**Définitions 2.10 (face, arête)** Soit  $C$  un convexe. On dit que  $F \subseteq C$  est une *face* de  $C$  si  $F$  est convexe et si tout segment  $[x, y]$  de  $C$  tel que  $]x, y[$  intersecte  $F$  est entièrement dans  $F$ . On dit qu'une face de  $C$  est *propre* si elle est différente de  $C$ . Une face de  $C$  dont l'enveloppe affine est de dimension un est appelée une *arête*.  $\square$

Une partie convexe  $F$  d'un convexe  $C$  sera donc une face de  $C$  si l'on peut écrire

$$\forall x, y \in C, \quad \forall t \in ]0, 1[ : \quad (1-t)x + ty \in F \implies x, y \in F. \tag{2.9}$$

On peut aussi ne considérer que le cas  $t = \frac{1}{2}$  :

$$\forall x, y \in C : \quad \frac{1}{2}(x + y) \in F \implies x, y \in F. \tag{2.10}$$

Une intersection quelconque de faces étant une face, on peut parler de la plus petite face de  $C$  contenant une partie  $A \subseteq C$ , que l'on appelle la *face engendrée* par  $A$ . C'est donc l'intersection de toutes les faces de  $C$  contenant  $A$ . On la note

$$F(A) := \bigcap \{F : F \text{ est une face de } C \text{ contenant } A\}.$$

On notera  $F(x)$  la face engendrée par le singleton  $\{x\} \subseteq C$ .

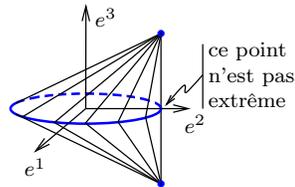
**Définition 2.11 (point extrême)** Un *point extrême* d'un convexe  $C$  est une face de  $C$  réduite à un seul point. L'ensemble des points extrêmes de  $C$  est noté

$$\text{ext}(C). \quad \square$$

Un point extrême est donc caractérisé par le fait qu'il ne peut pas s'écrire comme la demi-somme de deux points *distincts* de  $C$  ou encore par le fait que  $C \setminus \{x\}$  est encore convexe.

Nécessairement  $\text{ext}(C) \subseteq \partial C$  (la frontière de  $C$ ). Par ailleurs, l'ensemble des points extrêmes n'est pas nécessairement un fermé comme le montre l'exemple suivant :

$$\begin{aligned} P &:= \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 0\} \\ &\quad \cup \{(0, 1, 1)\} \cup \{(0, 1, -1)\}, \\ C &:= \text{co } P. \end{aligned}$$



En effet,  $\text{ext}(C) = P \setminus \{(0, 1, 0)\}$ , qui n'est pas fermé.

Tout ensemble convexe fermé non vide n'a pas nécessairement un point extrême (l'espace  $\mathbb{E}$  lui-même, qui est convexe, n'en a pas). En réalité, un ensemble convexe a un point extrême si, et seulement si, il ne contient pas de droite, c'est-à-dire d'ensemble de la forme  $x + \mathbb{R}d$ , où  $x \in \mathbb{E}$  et  $d \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$ ; nous verrons cela plus loin (proposition 2.35).

Voici quelques propriétés permettant de calculer  $\text{ext}(C)$ , dont la démonstration est proposée à l'exercice 2.10.

**Proposition 2.12 (calcul de points extrêmes)**

- 1) (produit cartésien) Si  $C_1$  (resp.  $C_2$ ) est un convexe non vide d'un espace vectoriel  $\mathbb{E}_1$  (resp.  $\mathbb{E}_2$ ), alors

$$\text{ext}(C_1 \times C_2) = (\text{ext}C_1) \times (\text{ext}C_2).$$

- 2) (image linéaire) Soient  $\mathbb{E}$  et  $\mathbb{F}$  deux espaces vectoriels,  $A : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$  une application linéaire *injective*,  $C$  un convexe non vide de  $\mathbb{E}$  et  $x \in C$ . Alors

$$x \in \text{ext}(C) \iff Ax \in \text{ext}(A(C)).$$

Sous l'hypothèse d'injectivité de  $A$ , cette équivalence est identique à l'identité  $A(\text{ext}(C)) = \text{ext}(A(C))$ .

On notera qu'aucune des implications du point 2 n'est vraie en l'absence d'injectivité de  $A$ . Ainsi, l'implication " $\Rightarrow$ " n'a pas lieu si  $C$  est la boule unité fermée de  $\mathbb{R}^2$  pour la norme  $\ell_1$ ,  $A$  est le projecteur orthogonal sur la première coordonnée et  $x = (0, 1)$  (0 n'est pas un point extrême de  $[-1, 1]$ ). L'implication " $\Leftarrow$ " n'a pas lieu si  $C = \mathbb{R}$  et  $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est l'application nulle (0 est un point extrême du singleton  $\{0\}$  mais aucun point de  $C$  n'est extrême).

## 2.3 Aspects topologiques

Soit  $P$  une partie d'un espace vectoriel  $\mathbb{E}$ . En analyse convexe, on rencontre souvent des ensembles convexes dont l'intérieur dans  $\mathbb{E}$  est vide: c'est le cas des faces d'un polyèdre convexe (celles différentes du polyèdre lui-même). Il est donc utile d'introduire la notion d'*intérieur relatif* d'un ensemble  $P$  (non nécessairement convexe), qui est son intérieur dans son *enveloppe affine*  $\text{aff } P$ , munie de la topologie induite de celle de  $\mathbb{E}$ . On le note<sup>3</sup>  $P^\circ$  ou  $\text{intr } P$ . On a

$$P^\circ \equiv \text{intr } P = \{x \in P : \text{il existe } r > 0 \text{ tel que } (B(x, r) \cap \text{aff } P) \subseteq P\}.$$

<sup>3</sup> La notation  $P^\circ$  nous est propre. Elle est formée du symbole  $^\circ$  qui rappelle qu'il s'agit d'un intérieur (dans la notation française) et de  $-$  qui évoque l'enveloppe affine (plate) dans lequel celui-ci est pris. La notation anglo-saxonne est  $\text{ri } P$ , mais «ri» (*relative interior*) n'est pas très évocateur en français, si bien que nous avons préféré  $\text{intr } P$  comme expression littérale.

On dit qu'une partie  $P$  de  $\mathbb{E}$  est un *ouvert relatif* de  $\mathbb{E}$  ou est *relativement ouverte* dans  $\mathbb{E}$  si  $P^\circ = P$ .

La *frontière relative* d'un ensemble  $P \subseteq \mathbb{E}$  est l'ensemble des points de son adhérence  $\bar{P}$  qui ne sont pas dans son intérieur relatif  $P^\circ$ . On la note

$$\partial_{\text{rel}} P = \bar{P} \setminus P^\circ, \quad (2.11)$$

où  $\bar{P}$  désigne l'adhérence de  $P$  (dans  $\mathbb{E}$  ou  $\text{aff } P$ ; c'est la même chose, car  $\text{aff } P$  est un fermé; il n'y a donc pas de notion d'adhérence relative).

Si  $P$  est réduit à un point,  $\text{aff } P = P$  et donc  $P^\circ = P$ , puis  $\partial_{\text{rel}} P = \emptyset$ . Par ailleurs, on gardera à l'esprit que l'opération  $(\cdot)^\circ$  ne préserve pas l'inclusion, même pour des ensembles convexes :

$$C_1, C_2 \text{ convexes et } C_1 \subseteq C_2 \quad \not\Rightarrow \quad C_1^\circ \subseteq C_2^\circ.$$

Par exemple,  $C_1 := \{0\} \subseteq C_2 := [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ , mais  $C_1^\circ = \{0\} \not\subseteq C_2^\circ = ]0, 1[$ . Toutefois, pour des parties  $P_1$  et  $P_2$  ayant la même *enveloppe affine*, on a bien sûr :

$$\left. \begin{array}{l} P_1 \subseteq P_2 \\ \text{aff } P_1 = \text{aff } P_2 \end{array} \right\} \implies P_1^\circ \subseteq P_2^\circ. \quad (2.12)$$

**Proposition 2.13 (intérieur relatif non vide)** *Soit  $C$  un convexe non vide. Alors son intérieur relatif  $C^\circ$  est non vide et  $\text{aff}(C^\circ) = \text{aff } C$ .*

DÉMONSTRATION. Soit  $n := \dim(\text{aff } C)$ . On peut supposer que  $n \geq 1$ , car le résultat est évident pour  $n = 0$  ( $C$  est un singleton). On peut trouver  $n + 1$  points  $x_0, x_1, \dots, x_n$  de  $C$  qui sont affinement indépendants. Alors tout point  $x \in \text{aff } C$  peut s'écrire

$$x = x_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i (x_i - x_0),$$

avec des coefficients  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  déterminés de manière unique. L'application

$$\varphi : \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mapsto x = \sum_{i=0}^n \alpha_i x_i, \quad \text{avec } \alpha_0 := 1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

est un homéomorphisme de  $\mathbb{R}^n \rightarrow \text{aff } C$ . Dès lors, l'image par  $\varphi$  de l'ouvert

$$\Omega_n := \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n \alpha_i < 1, \alpha_i > 0 \text{ pour tout } i \right\}$$

est un ouvert dans  $\text{aff } C$ . Il suffit maintenant de constater que l'ouvert  $\varphi(\Omega_n)$  de  $\text{aff } C$  est inclus dans  $C$  (car  $\varphi(\alpha)$  est une combinaison convexe des points  $x_0, \dots, x_n$  de  $C$  lorsque  $\alpha \in \Omega_n$ ), pour conclure que l'intérieur relatif de  $C$  est non vide.

Les inclusions  $\varphi(\Omega_n) \subseteq C^\circ \subseteq C$  conduisent à  $\text{aff } \varphi(\Omega_n) \subseteq \text{aff } C^\circ \subseteq \text{aff } C$ . On obtient alors  $\text{aff } \varphi(\Omega_n) = \text{aff } C^\circ$  en notant que  $\text{aff } \varphi(\Omega_n) = \text{aff } C$  parce que  $\varphi(\Omega_n)$  est un ouvert dans  $\text{aff } C$ .  $\square$

Le lemme suivant est souvent utile pour traiter des questions d'intériorité relative des ensembles convexes.

**Lemme 2.14 (critères d'intériorité relative)** *Soit  $C$  un convexe non vide.*

*Alors*

$$x \in C^\circ \text{ et } y \in \overline{C} \implies [x, y[ \subseteq C^\circ.$$

*Dès lors, pour un point  $x \in \mathbb{E}$ , on a*

$$x \in C^\circ \iff \forall x_0 \in C, \exists t > 1 : (1-t)x_0 + tx \in C. \quad (2.13)$$

DÉMONSTRATION. Considérons la première partie lorsque  $x \neq y$  (sinon  $[x, y[ = \emptyset$  et il n'y a rien à démontrer). On peut aussi supposer que  $\text{aff } C = \mathbb{E}$ . Soient  $t \in [0, 1[$  et  $B$  la boule-unité ouverte. Il faut montrer que  $z_t = (1-t)x + ty \in C^\circ$  ou que  $z_t + \varepsilon B \in C$  pour un  $\varepsilon > 0$  assez petit. Comme  $y \in \overline{C}$ , quel que soit  $\varepsilon > 0$ ,  $y \in C + \varepsilon B$ . Alors

$$\begin{aligned} z_t + \varepsilon B &= (1-t)x + ty + \varepsilon B \\ &\subseteq (1-t)x + t(C + \varepsilon B) + \varepsilon B \quad [y \in C + \varepsilon B] \\ &= tC + (1-t) \left( x + \frac{1+t}{1-t} \varepsilon B \right) \\ &\subseteq tC + (1-t)C \quad [\text{pour } \varepsilon > 0 \text{ assez petit}] \\ &= C \quad [C \text{ convexe}]. \end{aligned} \quad (2.14)$$

En (2.14), on a utilisé le fait que  $x \in C^\circ$ .

Venons-en à la démonstration de (2.13). Si  $x \in C^\circ$ , il existe un  $\varepsilon > 0$  tel que  $B(x, \varepsilon) \cap \text{aff } C \subseteq C$ . Alors, pour un  $t > 1$  proche de 1,  $z := (1-t)y + tx \in B(x, \varepsilon)$ , quel que soit  $y \in \mathbb{E}$ . Comme  $z \in \text{aff } C$  lorsque  $y \in \text{aff } C$ , on en déduit que  $z \in C$ .

Réciproquement, comme  $C$  est non vide, il en est de même de  $C^\circ$  et on peut choisir  $y \in C^\circ$ . De deux choses l'une. Soit  $y = x$ , auquel cas  $x \in C^\circ$  et c'est terminé. Soit  $y \neq x$ . Dans ce cas, par hypothèse, il existe un  $t > 1$  tel que  $z := (1-t)y + tx \in C$ . Alors  $x \in [y, z[$ , si bien que par la première partie du lemme,  $x \in C^\circ$ .  $\square$

Nous avons écrit le résultat précédent comme une équivalence facilement mémorisable. En réalité, la preuve a montré que l'on avait en fait les implications plus fortes suivantes :

$$\begin{aligned} x \in C^\circ &\implies \forall x_0 \in \text{aff } C, \exists t > 1 : (1-t)x_0 + tx \in C, \\ x \in C^\circ &\iff \exists x_0 \in C^\circ, \exists t > 1 : (1-t)x_0 + tx \in C. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Parfois, on ne connaît pas  $C^\circ$ , mais on cherche à le spécifier ; dans ce cas, l'implication droite-gauche du critère (2.13) est plus utile que (2.15).

On pourra s'entraîner à utiliser ce lemme en démontrant le corollaire suivant et en faisant les exercices 2.12 et 2.13 (ceux-ci utilisent la proposition 2.16 qui est également fondamentale).

On dit que  $x$  est un *point absorbant* de  $C$  si pour tout  $d \in \mathbb{E}$ , il existe un  $t > 0$  tel que  $x + td \in C$ . La troisième propriété ci-dessous fait le lien avec le cône des directions admissibles.

**Corollaire 2.15 (convexe avec point absorbant)** Soit  $C$  un convexe non vide d'un espace vectoriel  $\mathbb{E}$ . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i)  $x \in C^\circ$ ,
- (ii)  $x$  est un point absorbant de  $C$ ,
- (iii)  $\mathbb{E} = \mathbb{R}_+(C - x)$ .

**Proposition 2.16** Soit  $C$  un convexe non vide d'un espace vectoriel  $\mathbb{E}$ . Alors

- 1) son intérieur relatif  $C^\circ$  est convexe,
- 2) son adhérence  $\overline{C}$  est un convexe non vide et  $\text{aff } \overline{C} = \text{aff } C$ .
- 3)  $\overline{C^\circ} = \overline{C}$  et  $(\overline{C})^\circ = C^\circ$ .
- 4) Les ensembles  $C^\circ$ ,  $C$  et  $\overline{C}$  ont la même *enveloppe affine*, le même intérieur relatif, la même adhérence et la même frontière relative.

DÉMONSTRATION. 1) Si  $x, y \in C^\circ$ ,  $[x, y] \subseteq C^\circ$  d'après le lemme 2.14 ; donc  $C^\circ$  est convexe.

2) Soient  $x, y \in \overline{C}$  et  $t \in [0, 1]$  ; il faut montrer que  $(1-t)x + ty \in \overline{C}$ . Il existe alors des suites  $\{x_k\} \rightarrow x$  et  $\{y_k\} \rightarrow y$  avec  $x_k$  et  $y_k \in C$ . Le point  $(1-t)x_k + ty_k \in C$  (par convexité de  $C$ ) et converge vers  $(1-t)x + ty$ , qui appartient donc à  $\overline{C}$ .

Certainement  $\text{aff } C \subseteq \text{aff } \overline{C}$  (car  $C \subseteq \overline{C}$ ). Réciproquement,  $\overline{C} \subseteq \text{aff } C$  (car  $\text{aff } C$  est un fermé contenant  $C$ ), donc  $\text{aff } \overline{C} \subseteq \text{aff } C$ .

La démonstration des autres propriétés est proposée à l'exercice 2.13.  $\square$

On trouvera à l'exercice 2.13 d'autres informations sur la topologie des ensembles convexes, qui sont déduites des résultats ci-dessus. Voici pour terminer cette section quelques règles de calcul d'intérieurs relatifs et d'adhérences. Ces règles sont fondamentales. En particulier, les conditions pour avoir l'égalité joueront un rôle essentiel en optimisation convexe où elles prennent le nom de *conditions de qualification*, lesquels permettent d'écrire des conditions d'optimalité de problèmes d'optimisation (chapitre 4).

**Proposition 2.17 (calcul d'intérieurs relatifs et d'adhérences)** Soient  $\mathbb{E}$ ,  $\mathbb{E}_1$ ,  $\mathbb{E}_2$  et  $\mathbb{F}$  des espaces vectoriels et  $A : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$  une application linéaire.

- 1) (produit cartésien) Si  $C_1 \subseteq \mathbb{E}_1$  et  $C_2 \subseteq \mathbb{E}_2$  sont deux convexes, alors

$$(C_1 \times C_2)^\circ = C_1^\circ \times C_2^\circ \quad \text{et} \quad \overline{C_1 \times C_2} = \overline{C_1} \times \overline{C_2}.$$

- 2) (intersection) Si  $(C_i)_{i \in I}$  est une famille de convexes de  $\mathbb{E}$  telle que  $\bigcap_{i \in I} C_i^\circ \neq \emptyset$ , alors

$$(\bigcap_{i \in I} C_i)^\circ \subseteq \bigcap_{i \in I} C_i^\circ \quad \text{et} \quad \overline{\bigcap_{i \in I} C_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{C_i}, \quad (2.16)$$

avec égalité à gauche si  $I$  est fini.

- 3) (image linéaire) Si  $C \subseteq \mathbb{E}$  est convexe, alors

$$(A(C))^\circ = A(C^\circ) \quad \text{et} \quad \overline{A(C)} \supseteq A(\overline{C}), \quad (2.17)$$

avec égalité à droite si  $A(\overline{C})$  est fermé.

- 4) (préimage linéaire) Si  $C \subseteq \mathbb{F}$  est convexe et si l'image réciproque  $A^{-1}(C^\circ) \neq \emptyset$ , alors

$$(A^{-1}(C))^\circ = A^{-1}(C^\circ) \quad \text{et} \quad \overline{A^{-1}(C)} = A^{-1}(\overline{C}).$$

- 5) (multiplication) Si  $C \subseteq \mathbb{E}$  est convexe et  $\alpha \in \mathbb{R}$ , alors

$$(\alpha C)^\circ = \alpha C^\circ \quad \text{et} \quad \overline{\alpha C} = \alpha \overline{C}.$$

- 6) (somme) Si  $C_1 \subseteq \mathbb{E}$  et  $C_2 \subseteq \mathbb{E}$  sont deux convexes, alors

$$(C_1 + C_2)^\circ = C_1^\circ + C_2^\circ \quad \text{et} \quad \overline{C_1 + C_2} \supseteq \overline{C_1} + \overline{C_2},$$

avec égalité à droite si  $\overline{C_1} + \overline{C_2}$  est fermé.

DÉMONSTRATION. Nous utiliserons les résultats énoncés à l'exercice 2.13.

1) La proposition 2.1 montre que  $\text{aff}(C_1 \times C_2) = (\text{aff } C_1) \times (\text{aff } C_2)$ . Par définition de l'intérieur relatif et de la topologie produit,  $(x_1, x_2) \in (C_1 \times C_2)^\circ$  si, et seulement si, il existe des ouverts  $\theta_i \in \mathbb{E}_i$  contenant  $x_i$  ( $i = 1, 2$ ), tels que

$$\begin{aligned} C_1 \times C_2 &\supseteq (\theta_1 \times \theta_2) \cap \text{aff}(C_1 \times C_2) \\ &= (\theta_1 \times \theta_2) \cap (\text{aff } C_1 \times \text{aff } C_2) \\ &= (\theta_1 \cap \text{aff } C_1) \times (\theta_2 \cap \text{aff } C_2). \end{aligned}$$

Ceci revient à dire que  $(\theta_i \cap \text{aff } C_i) \subseteq C_i$  ou encore que  $x_i \in C_i^\circ$ . La relation  $\text{adh}(C_1 \times C_2) = (\text{adh } C_1) \times (\text{adh } C_2)$  est vraie, même si les  $C_i$  ne sont pas convexes.

2) Soit  $x \in \bigcap_{i \in I} \overline{C_i}$ . Comme il existe un  $x_0 \in \bigcap_{i \in I} C_i^\circ$ ,  $x_t := (1-t)x_0 + tx \in C_i^\circ$ , pour tout  $t \in [0, 1[$  et tout  $i \in I$  (lemme 2.14). Alors  $x_t \in \bigcap_{i \in I} C_i^\circ$  pour tout  $t \in [0, 1[$ . À la limite en  $t \uparrow 1$ , on trouve que  $x = x_1$  est dans l'adhérence de  $\bigcap_{i \in I} C_i^\circ$ . Enfin, puisqu'une intersection de fermés est fermée, on trouve finalement

$$\bigcap_{i \in I} \overline{C_i} \subseteq \overline{\bigcap_{i \in I} C_i^\circ} \subseteq \overline{\bigcap_{i \in I} C_i} \subseteq \bigcap_{i \in I} \overline{C_i}.$$

On a donc égalité partout, ce qui démontre l'identité sur les adhérences. On en déduit aussi que  $\bigcap_{i \in I} C_i^\circ$  et  $\bigcap_{i \in I} C_i$  ont la même adhérence et donc le même intérieur relatif (point 4 de l'exercice 2.13), ce qui conduit à l'inclusion sur les intérieurs relatifs :

$$(\bigcap_{i \in I} C_i)^\circ = (\bigcap_{i \in I} C_i^\circ)^\circ \subseteq \bigcap_{i \in I} C_i^\circ.$$

Supposons à présent que  $I$  est fini et que  $x \in \bigcap_{i \in I} C_i^\circ$ . Soit  $y \in \bigcap_{i \in I} C_i^\circ$ . Pour tout  $i \in I$ , on peut trouver un  $t_i > 1$  tel que  $y_{t_i} = (1-t_i)y + t_i x \in C_i$ . Comme  $I$  est fini, il existe un  $t > 1$  tel que que  $y_t \in \bigcap_{i \in I} C_i$ . Ceci montre que  $x \in (\bigcap_{i \in I} C_i)^\circ$  (lemme 2.14).

3) L'inclusion  $\overline{A(C)} \supseteq A(\overline{C})$  découle de la continuité de  $A$  et a lieu même sans la convexité de  $C$  et sans la linéarité de  $A$ . De même pour le cas où il y a égalité. Pour démontrer l'identité sur les intérieurs relatifs, on observe d'abord que

$$\overline{A(C^\circ)} \supseteq A(\overline{C^\circ}) = A(\overline{C}) \supseteq A(C) \supseteq A(C^\circ).$$

On en déduit que  $A(C)$  et  $A(C^\circ)$  ont la même adhérence, si bien qu'ils ont aussi le même intérieur relatif (exercice 2.13) :  $(A(C))^\circ = (A(C^\circ))^\circ \subseteq A(C^\circ)$ . Pour montrer l'inclusion inverse, on utilise le lemme 2.14. Soient  $y \in A(C^\circ)$  et  $y_0 \in (A(C))^\circ \subseteq A(C)$ . Alors il existe  $x \in C^\circ$  et  $x_0 \in C$  tels que  $y = Ax$  et  $y_0 = Ax_0$ . Il existe aussi un  $t > 1$  tel que  $(1-t)x_0 + tx \in C$ . En appliquant  $A$  :  $(1-t)y_0 + ty \in A(C)$ . On en déduit que  $y \in (A(C))^\circ$ .

4) On introduit deux ensembles dans  $\mathbb{E} \times \mathbb{F}$  :

$$X := \mathbb{E} \times C \quad \text{et} \quad L := \{(x, Ax) : x \in \mathbb{E}\}.$$

Par hypothèse, il existe un  $x \in \mathbb{E}$  tel que  $Ax \in C^\circ$ . Comme  $X^\circ = \mathbb{E} \times C^\circ$ , ceci s'écrit  $X^\circ \cap L \neq \emptyset$ . On note aussi  $P_{\mathbb{E}} : \mathbb{E} \times \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{E} : (x, y) \mapsto x$  le projecteur sur  $\mathbb{E}$ . Observons que

$$\begin{aligned} A^{-1}(C) &= \{x \in \mathbb{E} : Ax \in C\} = P_{\mathbb{E}}(X \cap L) \\ A^{-1}(C^\circ) &= \{x \in \mathbb{E} : Ax \in C^\circ\} = P_{\mathbb{E}}((\mathbb{E} \times C^\circ) \cap L) = P_{\mathbb{E}}((X \cap L)^\circ) \\ A^{-1}(\overline{C}) &= \{x \in \mathbb{E} : Ax \in \overline{C}\} = P_{\mathbb{E}}((\mathbb{E} \times \overline{C}) \cap L) = P_{\mathbb{E}}(\overline{X \cap L}). \end{aligned}$$

Comme  $P_{\mathbb{E}}$  est une application linéaire, on en déduit que  $(A^{-1}(C))^\circ = A^{-1}(C^\circ)$  et que  $\text{adh}(A^{-1}(C)) \supseteq A^{-1}(\text{adh } C)$ . L'égalité a lieu dans la dernière relation, car  $\text{adh}(A^{-1}(C)) \subseteq A^{-1}(\text{adh } C)$ , par continuité de  $A$ .

5) Les identités sont claires si  $\alpha = 0$ . Si  $\alpha \neq 0$ , l'application  $x \mapsto \alpha x$  est linéaire bijective et les identités sont des conséquences du point 3 (pour l'adhérence on utilise  $\overline{\alpha C} \supseteq \alpha \overline{C}$  et  $\alpha \overline{C} = \overline{\alpha C}$ ).

6) On applique le point 3 avec  $C = C_1 \times C_2 \subseteq \mathbb{E}^2$  et  $A : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}$  définie par  $A(x_1, x_2) = x_1 + x_2$  ; puis le point 1.  $\square$

Les identités de la proposition 2.17 sont fondamentales et les hypothèses qu'elles requièrent se retrouveront sous des formes diverses dans d'autres résultats d'analyse convexe. Pour s'imprégner des raisons de leur présence, voici quelques contre-exemples, tous très simples.

- Point 2. L'identité de gauche est fautive pour les ensembles  $[0, 1]$  et  $[1, 2]$  dans  $\mathbb{R}$  : on trouve  $\{1\} \not\subseteq \emptyset$ . Elle n'a pas lieu avec égalité pour la collection infinie d'intervalles  $C_i = [0, 1+1/i]$  avec  $i$  entier non nul : on a  $(\cap_i C_i)^\circ = [0, 1]^\circ = ]0, 1[$ , tandis que  $\cap_i C_i^\circ = ]0, 1[$ . L'identité de droite est fautive pour les ensembles  $]0, 1[$  et  $]1, 2[$  dans  $\mathbb{R}$  : on trouve  $\emptyset \neq \{1\}$ .
- Point 3. L'exercice 2.23 donne un exemple d'image de cône convexe fermé par une application linéaire, qui n'est pas fermée. On peut donc ne pas avoir égalité à droite. Cependant on a toujours

$$\overline{A(C)} = \overline{A(\overline{C})}. \quad (2.18)$$

- Point 4. On considère l'application linéaire  $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 0$ . L'identité de gauche n'a pas lieu si  $C = [0, 1]$  : on trouve  $(A^{-1}(C))^\circ = \mathbb{R}$  et  $A^{-1}(C^\circ) = \emptyset$ . Celle de droite n'a pas lieu si  $C = ]0, 1[$  : on trouve  $\text{adh } A^{-1}(C) = \emptyset$  tandis que  $A^{-1}(\text{adh } C) = \mathbb{R}$ .

- Point 6. La somme des convexes fermés  $C_1 = \mathbb{R}_+ \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$  et  $C_2 = \{(x_1, x_2) : x_2 \geq \exp(x_1)\} \subseteq \mathbb{R}^2$  est l'ensemble  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++}$ , qui n'est pas un fermé.

Il ne faut pas manquer de contempler la beauté de l'identité  $(C_1 + C_2)^\circ = C_1^\circ + C_2^\circ$  (point 6), qui n'a plus lieu si l'on remplace les intérieurs *relatifs* par des intérieurs (par exemple dans le cas où  $C_1 = [0, 1] \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$  et  $C_2 = \{0\} \times [0, 1] \subseteq \mathbb{R}^2$ ). Cette sympathique relation devrait contribuer à convaincre de l'utilité du concept d'intériorité relative.

## 2.4 Polyèdre convexe

### 2.4.1 Représentations primale et duale

On rappelle qu'un *polyèdre convexe* d'un espace vectoriel  $\mathbb{E}$  est un ensemble  $P$  de la forme

$$P = \{x \in \mathbb{E} : Ax \leq b\}, \quad (2.19)$$

où  $A : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}^m$  est une application linéaire ( $m \in \mathbb{N}$ ; si  $m = 0$ ,  $P = \mathbb{E}$ ),  $b \in \mathbb{R}^m$  et l'inégalité  $Ax \leq b$  se lit composante par composante dans  $\mathbb{R}^m : (Ax)_i \leq b_i$ , pour tout  $i \in [1 : m]$ . Si l'ensemble se présente avec des égalités linéaires  $Cx = d$ , on pourra se ramener à la forme (2.19) en les remplaçant par deux inégalités opposées  $Cx \leq d$  et  $-Cx \leq -d$ . Géométriquement, un polyèdre convexe est donc l'intersection d'un nombre *fini* de [demi-espaces fermés](#) de  $\mathbb{E}$ .

Un *polytope* est un polyèdre convexe borné.

Si  $\mathbb{E}$  est de dimensions finie, il n'y a pas de restriction à supposer que  $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$  et que  $A$  est une matrice  $m \times n$  (il suffit de se donner une base de  $\mathbb{E}$ ). Par ailleurs, dans certaines circonstances (par exemple en optimisation linéaire, voir le chapitre 17), il est avantageux de représenter un polyèdre de  $\mathbb{R}^n$  sous la forme dite *standard* suivante :

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}. \quad (2.20)$$

Il n'y a aucune perte de généralité dans cette représentation. Tout polyèdre de la forme (2.19) se représente sous la forme (2.20) en introduisant des *variables d'écart*  $s \in \mathbb{R}^m$  et en décomposant  $x = u - v$ , avec  $u, v \in \mathbb{R}_+^n$  :

$$\{(u, v, s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : (A - A \ I)(u^\top \ v^\top \ s^\top)^\top = b, (u, v, s) \geq 0\}.$$

Il faut toutefois noter qu'il faut alors travailler dans un espace de dimension plus grande. D'autre part, un polyèdre de la forme (2.20) s'écrit comme en (2.19) en remplaçant  $Ax = b$  par les deux inégalités  $Ax \leq b$  et  $-Ax \leq -b$ .

Les représentations (2.19) et (2.20) d'un polyèdre sont dites *duales*, car elles font intervenir des applications linéaires (éléments du dual de  $\mathbb{E}$ ). Dans la *représentation primale* d'un polyèdre convexe, on écrit celui-ci comme une somme de combinaisons convexe et conique d'éléments de  $\mathbb{E}$ . Si on se donne  $x^1, \dots, x^p \in \mathbb{E}$  et  $y^1, \dots, y^q \in \mathbb{E}$  (on peut prendre les  $y^j = 0$ ), l'ensemble

$$P = \text{co}\{x^1, \dots, x^p\} + \text{cone}\{y^1, \dots, y^q\} \quad (2.21)$$

est un polyèdre convexe. C'est ce qu'affirme la proposition 2.23, que nous ne démontrerons qu'à la fin de cette section. Le choix de la représentation dépendra du type de résultat que l'on veut obtenir (voir les exercices 2.20 et 2.21).

Des caractérisations primale et duale de la bornitude ou de la réduction à un point d'un polyèdre décrit par (2.19) sont données à la section 2.5.5.

### 2.4.2 Image linéaire

Cette section s'intéresse à la description de l'image d'un polyèdre convexe par une application linéaire. Nous allons montrer que si le polyèdre convexe est écrit sous forme duale (2.19), son image par une application linéaire est également un polyèdre convexe écrit sous forme duale (2.19). Cette affirmation serait plus simple à démontrer si l'on savait déjà qu'un ensemble de la forme (2.21) avec des  $x^1, \dots, x^p \in \mathbb{E}$  et des  $y^1, \dots, y^q \in \mathbb{E}$ , est un polyèdre convexe (cette démonstration est proposée à l'exercice 2.21), mais nous utiliserons précisément le résultat de la proposition 2.18 ci-dessous pour établir ce fait !

La démonstration que nous proposons repose sur l'*élimination de Fourier* [219; 1827]: trouver  $x \in \mathbb{R}^n$  tel que

$$Ax \leq b. \quad (2.22)$$

Elle s'apparente à l'*élimination gaussienne* dans le sens où à chaque étape elle transforme le système d'inégalités affines courant en un système d'inégalités affines *équivalent*, mais avec une inconnue de moins. Cependant, contrairement à l'élimination gaussienne, qui, à chaque étape, *enlève* une équation, l'élimination de Fourier *ajoute* de nombreuses inégalités, si bien que cette dernière n'est guère exploitable en pratique car le nombre d'opérations, peut croître très rapidement au cours des éliminations.

Voyons comment la méthode de Fourier élimine  $x_n$ ; elle procède de la même manière pour les autres variables. On note  $a_{ij}$  l'élément  $(i, j)$  de  $A$ . Le vecteur  $x = (x_1, \dots, x_n)$  est solution du système d'inégalités (2.22) si, et seulement si,

- pour tout  $i_1$  tel que  $a_{i_1 n} > 0$ , on a  $x_n \leq \frac{1}{a_{i_1 n}} \left( b_{i_1} - \sum_{j=1}^{n-1} a_{i_1 j} x_j \right)$ ,
- pour tout  $i_2$  tel que  $a_{i_2 n} < 0$ , on a  $x_n \geq \frac{1}{a_{i_2 n}} \left( b_{i_2} - \sum_{j=1}^{n-1} a_{i_2 j} x_j \right)$ ,
- pour tout  $i_3$  tel que  $a_{i_3 n} = 0$ , on a  $0 \leq b_{i_3} - \sum_{j=1}^{n-1} a_{i_3 j} x_j$ .

On peut à présent éliminer  $x_n$ :  $x$  est solution de (2.22) si, et seulement si, pour tout  $i_1$  tel que  $a_{i_1 n} > 0$ , pour tout  $i_2$  tel que  $a_{i_2 n} < 0$  et pour tout  $i_3$  tel que  $a_{i_3 n} = 0$ ,  $\tilde{x} := (x_1, \dots, x_{n-1})$  vérifie

$$\frac{1}{a_{i_2 n}} \left( b_{i_2} - \sum_{j=1}^{n-1} a_{i_2 j} x_j \right) \leq \frac{1}{a_{i_1 n}} \left( b_{i_1} - \sum_{j=1}^{n-1} a_{i_1 j} x_j \right) \quad (2.23a)$$

$$0 \leq b_{i_3} - \sum_{j=1}^{n-1} a_{i_3 j} x_j. \quad (2.23b)$$

et  $x_n$  est choisi dans l'intervalle défini par le jeu d'inégalités dans (2.23a) (la borne inférieure de l'intervalle est le maximum des quantités à gauche des inégalités pour les  $i_2$  tels que  $a_{i_2 n} < 0$  et la borne droite de l'intervalle est le minimum des quantités à droite des inégalités pour les  $i_1$  tels que  $a_{i_1 n} > 0$ ; la borne gauche est bien inférieure à la borne droite, car le premier jeu d'inégalités dans (2.23a) doit être vérifié pour tous les indices  $i_1$  et  $i_2$  désignés précédemment). On obtient ainsi un nouveau système d'inégalités affines ne portant plus que sur  $\tilde{x}$ . On peut ensuite éliminer  $x_{n-1}$  jusqu'à  $x_2$ , pour finalement obtenir un dernier jeu d'inégalités ne portant que sur  $x_1$ . Le nombre d'inégalités croît rapidement puisqu'après la première élimination, on peut en avoir jusqu'à  $(\lfloor m/2 \rfloor)^2$ , après la seconde jusqu'à  $(\lfloor (\lfloor m/2 \rfloor)^2 / 2 \rfloor)^2$ , etc.

L'opération permettant de passer de  $x$  vérifiant (2.22) à  $\tilde{x}$  vérifiant (2.23a) est une projection cartésienne, puisque  $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_{n-1})$  vérifie (2.23a) si, et seulement si, il existe un  $x_n$  tel que  $x = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$  vérifie (2.22). Dès lors, si l'on introduit le projecteur

$$\Phi_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1} : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}),$$

l'ensemble défini par le jeu d'inégalités (2.23a) n'est autre que  $\Phi_n(P)$ , où  $P$  est le polyèdre convexe défini par le jeu d'inégalités (2.22). On vient donc de démontrer que  $\Phi_n(P)$  est un polyèdre convexe. La proposition suivante utilise ce fait pour aller un peu plus loin.

**Proposition 2.18 (image d'un polyèdre convexe par une application linéaire)** Soient  $\mathbb{E}$  et  $\mathbb{F}$  deux espaces vectoriels,  $T : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$  une application linéaire et  $P$  un polyèdre convexe de  $\mathbb{E}$ . Alors  $T(P)$  est un polyèdre convexe de  $\mathbb{F}$ .

DÉMONSTRATION. On peut supposer que  $\mathbb{E}$  et  $\mathbb{F}$  sont les espaces vectoriels  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^p$ . Nous donnons ci-dessous une démonstration dans le cas où  $P$  est de la forme  $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ , avec une matrice  $A$  de type  $m \times n$  et  $b \in \mathbb{R}^m$ . Le fait que le résultat est aussi valable pour des polyèdres convexes sous représentation primale (2.21) sera une conséquence de la proposition 2.23, qui n'utilisera que le résultat démontré ci-dessous.

Observons d'abord que le projecteur  $\Pi_{p,p+n} : (y, x) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n \mapsto y \in \mathbb{R}^p$  peut s'écrire

$$\Pi_{p,p+n} = \Phi_{p+1} \circ \dots \circ \Phi_{p+n}.$$

où les  $\Phi_k$  réalisent l'élimination de Fourier de la  $k$ -ième variable. Ensuite, il suffit d'observer que

$$\begin{aligned} T(P) &= \{Tx : Ax \leq b\} \\ &= \{y : y = Tx \text{ et } Ax \leq b\} \\ &= \Pi_{p,p+n} \{(y, x) : y = Tx \text{ et } Ax \leq b\} \\ &= (\Phi_{p+1} \circ \dots \circ \Phi_{p+n}) \{(y, x) : y = Tx \text{ et } Ax \leq b\}. \end{aligned}$$

Comme l'ensemble  $\{(y, x) : y = Tx \text{ et } Ax \leq b\}$  est un polyèdre convexe et comme chaque élimination de Fourier transforme un polyèdre convexe en un autre, on voit que  $T(P)$  est un polyèdre convexe.  $\square$

**Remarque 2.19** La proposition précédente a un corollaire que nous utiliserons quelque fois : pour une matrice  $A$  et des vecteurs  $x$  de dimensions appropriées,

$$\{Ax : x \geq 0\} \text{ est un cône convexe fermé.} \quad (2.24)$$

Le fait que ce soit un cône convexe peut se vérifier facilement en utilisant les définitions. Le caractère fermé résulte du fait que l'orthant positif est un polyèdre convexe ; donc, par la proposition précédente, il en est de même de  $\{Ax : x \geq 0\}$  qui, comme polyèdre convexe, est fermé. On notera, qu'en général, l'image par une application linéaire d'un cône convexe fermé quelconque n'est pas nécessairement fermée (exercice 2.23). D'autre part, il faut se garder de confondre (2.24) avec le fait, trivial lui, que l'ensemble  $\{x : Ax \geq 0\}$  est un cône convexe fermé non vide (il est fermé parce qu'il est l'image réciproque de l'orthant positif par l'application continue  $A$ ). L'affirmation (2.24) peut se voir avec un point de vue plus géométrique : l'enveloppe conique d'un nombre fini de vecteurs (les colonnes de  $A$ ) est un fermé. De ce point de vue, la seconde partie de la proposition 2.23 est un peu plus riche.  $\square$

### 2.4.3 Optimisation linéaire

Voici une conséquence importante de la proposition 2.18, qui concerne l'existence de solution d'un problème d'optimisation linéaire, c'est-à-dire d'un problème qui consiste à minimiser une fonction linéaire sur un polyèdre convexe  $P$  d'un espace euclidien  $(\mathbb{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ . La fonction linéaire peut s'écrire  $x \in \mathbb{E} \mapsto \langle c, x \rangle \in \mathbb{R}$ , où  $c \in \mathbb{E}$ . Dès lors, un problème d'optimisation linéaire est de la forme

$$(P_L) \quad \inf_{x \in P} \langle c, x \rangle.$$

**Proposition 2.20 (existence de solution de  $(P_L)$ )** *Le problème  $(P_L)$  ci-dessus a une solution si, et seulement si, sa valeur optimale est finie.*

**DÉMONSTRATION.**  $[\Rightarrow]$  Si  $\bar{x}$  est solution de  $(P_L)$ , la valeur optimale du problème s'écrit  $\langle c, \bar{x} \rangle$  et est donc finie (c'est un élément de  $\mathbb{R}$ ).

$[\Leftarrow]$  Par la proposition 2.18, l'ensemble  $I := \{\langle c, x \rangle : x \in P\}$  est un polyèdre convexe de  $\mathbb{R}$ , donc un intervalle fermé.

Si la valeur optimale  $\text{val}(P_L)$  de  $(P_L)$  est finie,  $P \neq \emptyset$  (voir (1.1)) et on peut trouver une suite minimisante du problème, c'est-à-dire une suite  $\{x_k\} \subseteq P$  telle que  $\langle c, x_k \rangle \rightarrow \text{val}(P_L)$  (par définition de l'infimum). Clairement,  $\langle c, x_k \rangle \in I$ . Comme  $I$  est fermé et  $\langle c, x_k \rangle \rightarrow \text{val}(P_L) \in \mathbb{R}$ , on a nécessairement que  $\text{val}(P_L) \in I$ , ce qui veut dire qu'il existe un point  $\bar{x} \in P$  tel que  $\text{val}(P_L) = \langle c, \bar{x} \rangle$ . Ce point  $\bar{x}$  est manifestement une solution de  $(P_L)$ .  $\square$

Une autre manière, sans doute plus expressive, d'exprimer le résultat de la proposition 2.20 est de dire que *le problème  $(P_L)$  a une solution si, et seulement si, il est réalisable* (sa valeur optimale n'est pas  $+\infty$ , voir (1.1)) *et borné* (sa valeur optimale n'est pas  $-\infty$ ).

### 2.4.4 Faces et sommets

On rappelle qu'une arête d'un convexe est une *face* de dimension 1 et qu'un point extrême est une face de dimension 0. Un point extrême d'un polyèdre convexe  $P$  est aussi appelé un *sommet*. On note  $\text{ext}(P)$  l'ensemble des sommets de  $P$ . La figure 2.2 illustre les différents types de faces d'un polyèdre convexe dans  $\mathbb{R}^2$ .

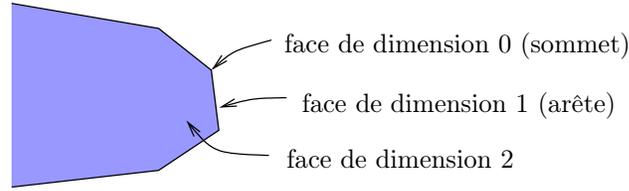


Fig. 2.2. Faces d'un polyèdre convexe

Si  $P$  est donné dans la représentation primale (2.21),

$$\text{ext}(P) \subseteq \{x^1, \dots, x^p\},$$

sans que l'on ait nécessairement l'égalité (exercice 2.21). La représentation duale (2.20) fournit une description plus précise des sommets d'un polyèdre. Pour  $x \in \mathbb{R}^n$ , on note

$$I^+(x) := \{i : x_i > 0\} \quad \text{et} \quad I^0(x) := \{i : x_i = 0\}.$$

**Proposition 2.21 (faces et sommets d'un polyèdre convexe)** *Considérons un polyèdre  $P$  représenté par (2.20) et un point  $x \in P$ , dont on note  $F(x)$  la face qu'il engendre. Alors*

$$\dim F(x) = \dim \mathcal{N}(A_{:I^+(x)}),$$

où  $A_{:I^+(x)}$  est la matrice formée des colonnes  $A^j$  de  $A$  avec indices  $j \in I^+(x)$ . En particulier,  $x \in P$  est un sommet de  $P$  si, et seulement si, les colonnes  $\{A^j : x_j > 0\}$  de  $A$  sont linéairement indépendantes.

DÉMONSTRATION. Simplifions les écritures en notant  $B := I^+(x)$  et  $N := I^0(x)$ . On note alors  $A_{:B}$  (resp.  $A_{:N}$ ) la matrice extraite de  $A$  formée de ses colonnes avec indices dans  $B$  (resp.  $N$ ). On fait de même pour les vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ , si bien que  $x_B > 0$  et  $x_N = 0$ . Le résultat découle des équivalences suivantes, dans lesquelles  $k \geq 1$ :

$\dim \mathcal{N}(A : B) \geq k$ ,

$\iff$  on peut trouver des directions  $d^1, \dots, d^k$  linéairement indépendantes telles que, pour tout  $i$ ,  $Ad^i = 0$  et  $d_N^i = 0$ ,

$\iff$  on peut trouver des directions  $d^1, \dots, d^k$  linéairement indépendantes telles que, pour tout  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k$  voisin de zéro, on a  $x + \sum_{i=1}^k \alpha_i d^i \in P$ ,

$\implies$  on a  $A(x + \sum_i \alpha_i d^i) = b$ ,  $(x + \sum_i \alpha_i d^i)_N = 0$  et  $(x + \sum_i \alpha_i d^i)_B = x_B + \sum_i \alpha_i d_B^i \geq 0$  pour  $\alpha$  petit (car  $x_B > 0$ ),

$\impliedby$  en prenant  $\alpha = (0, \dots, 0, \alpha_i, 0, \dots, 0)$  avec  $|\alpha_i|$  petit non nul, la relation  $A(x + \sum_i \alpha_i d^i) = b$  implique que  $Ad^i = 0$ ; d'autre part, la relation  $(x + \sum_i \alpha_i d^i)_N \geq 0$  implique que  $\alpha_i d_N^i \geq 0$  pour  $|\alpha_i|$  petit, ou encore que  $d_N^i = 0$ ,

$\iff \dim F(x) \geq k$ .

On en déduit que  $\dim \mathcal{N}(A : B) = \dim F(x)$ .  $\square$

**Corollaire 2.22** *Un polyèdre non vide représenté par (2.20) a au plus  $\binom{n}{r}$  sommets, où  $r$  est le rang de  $A$ .*

DÉMONSTRATION. Soit

$$\mathcal{B} := \{B : A : B \text{ est injective et } \mathcal{R}(A : B) = \mathcal{R}(A)\}.$$

Observons que les  $A : B$  avec  $B \in \mathcal{B}$  sont des sous-matrices extraites de  $A$ , de type  $m \times r$ , si bien que  $|\mathcal{B}| \leq \binom{n}{r}$ . D'autre part, si l'on introduit l'application  $\varphi : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^n$  qui à  $B \in \mathcal{B}$  fait correspondre l'unique  $x \in \mathbb{R}^n$  tel que  $Ax = b$  et  $x_i = 0$  pour  $i \notin B$ , on voit que tout sommet est de la forme  $\varphi(B)$ , avec  $B \in \mathcal{B}$  (proposition 2.21 et théorème B.1 de la base incomplète). Le nombre de sommets est donc  $\leq |\varphi(\mathcal{B})| \leq |\mathcal{B}| \leq \binom{n}{r}$ .  $\square$

Le nombre de sommets d'un polyèdre convexe représenté sous forme standard peut augmenter exponentiellement avec  $n$ . Par exemple, le polyèdre convexe de  $\mathbb{R}^{2n}$  écrit sous forme standard (on note  $e$  un vecteur dont toutes les composantes valent 1)

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} : x + y = e, x \geq 0, y \geq 0\} \text{ a } 2^n \text{ sommets.}$$

En effet, ce polyèdre  $P$  est une réécriture sous forme standard du polyèdre  $P_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x \leq e\}$ . On voit facilement que  $(x, y)$  est un sommet de  $P$  si, et seulement si,  $x$  est un sommet de  $P_0$  et  $y = e - x$ , si bien que  $P$  et  $P_0$  ont le même nombre de sommets. Comme  $P_0 = \frac{1}{2}(B_\infty + 1)$  est un translaté-contracté de la boule unité de  $\mathbb{R}^n$  pour la norme  $\ell_\infty$ , il a  $2^n$  sommets (exercice 2.17); il en est donc de même de  $P$ .

Un cône polyédrique convexe est un cône qui est aussi un polyèdre convexe. Comme polyèdre convexe, il peut s'écrire sous la forme standard (2.20) et pour que celui-ci soit un cône, il faut que  $b = 0$  (prendre un point de la forme  $tx$  avec  $t \downarrow 0$ ). Sous sa forme standard, un cône polyédrique convexe s'écrit donc comme suit :

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0, x \geq 0\}. \quad (2.25)$$

Ce cône est d'ailleurs le **cône asymptotique** du polyèdre convexe (2.20) :  $K = P^\infty$  (exercice 2.20). Évidemment 0 est un sommet de  $K$  et on démontre facilement qu'il n'y en a pas d'autre. Quant aux arêtes de  $K$ , nécessairement de la forme  $\mathbb{R}_+x$  avec  $x \neq 0$ , elles sont repérées par le fait que  $\dim \mathcal{N}(A_{:I^+(x)}) = 1$  (proposition 2.21).

#### 2.4.5 Équivalence des représentations

**Proposition 2.23 (résolution d'un polyèdre convexe)** *Un polyèdre convexe  $P$  écrit sous la forme standard (2.20) peut aussi s'écrire*

$$P = \text{co}\{x^1, \dots, x^p\} + \text{cone}\{y^1, \dots, y^q\}, \quad (2.26)$$

où les vecteurs  $x^1, \dots, x^p$  ( $p \geq 1$ ) sont les sommets de  $P$  et les **demi-droites**  $\mathbb{R}_+y^1, \dots, \mathbb{R}_+y^q$  ( $q \geq 1$ ) associées à des  $y^j$  non nuls sont les arêtes de  $P^\infty$ ; en particulier, un polyèdre convexe écrit sous la forme standard (2.20) a au moins un sommet. Inversement, tout ensemble de la forme (2.26) est un polyèdre convexe.

DÉMONSTRATION. 1) Montrons qu'un polyèdre convexe  $P$  écrit sous forme standard (2.20) peut s'écrire sous la forme (2.26).

[ $\supseteq$ ] Soient des  $x^i \in P$  (c'est-à-dire  $Ax^i = b$  et  $x^i \geq 0$ ), des  $y^j \in P^\infty$  (c'est-à-dire  $Ay^j = 0$  et  $y^j \geq 0$ ), des  $\alpha_i \geq 0$  vérifiant  $\sum_i \alpha_i = 1$  et des  $\beta_j \geq 0$ . Alors  $x = \sum_i \alpha_i x^i + \sum_j \beta_j y^j$  est clairement dans  $P$  (c'est-à-dire  $Ax = b$  et  $x \geq 0$ ).

[ $\subseteq$ ] Commençons par montrer que  $P \subseteq \text{co}\{x^1, \dots, x^p\} + P^\infty$ , où les  $x^i$  sont les sommets de  $P$ , en nombre  $p \geq 1$ . Soit  $x \in P$ . On procède par récurrence sur  $\dim \mathcal{N}(A_{:I^+(x)})$ .

- Si  $\dim \mathcal{N}(A_{:I^+(x)}) = 0$ ,  $x$  est un sommet (proposition 2.21) et le résultat est clairement démontré.
- Supposons que le résultat soit démontré pour les  $x \in P$  tels que  $\dim \mathcal{N}(A_{:I^+(x)}) = 0, \dots, k-1$ , avec  $k \geq 1$ , et démontrons le lorsque  $x$  vérifie  $\dim \mathcal{N}(A_{:I^+(x)}) = k$ . Comme  $k \geq 1$ , on peut trouver une direction  $d$  telle que

$$d \neq 0, \quad d_{I^0(x)} = 0 \quad \text{et} \quad Ad = 0.$$

On envisage trois cas, selon le signe des composantes de  $d$ , illustrés à la figure 2.3.

- Cas 1 :  $d \leq 0$ . Prenons le plus grand  $\alpha' > 0$  tel que  $x' := x + \alpha'd \geq 0$ . Alors  $x' \in P$  et  $I^+(x') \subsetneq I^+(x)$ . Remarquons que

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(A_{:I^+(x')}) \times 0_{I^+(x) \setminus I^+(x')} &\subseteq \mathcal{N}(A_{I^+(x)}) \\ d_{I^+(x)} \in \mathcal{N}(A_{:I^+(x)}), \text{ mais } d_{I^+(x)} &\notin \mathcal{N}(A_{:I^+(x')}) \times 0_{I^+(x) \setminus I^+(x')}. \end{aligned}$$

La dernière non-appartenance vient du fait que  $d$  a nécessairement une composante non nulle avec indice  $i \in I^+(x) \setminus I^+(x')$  (un indice  $i \in I^+(x)$  tel que  $x'_i = 0$ , alors que  $x_i > 0$ ). Dès lors  $\dim \mathcal{N}(A_{:I^+(x')}) = \dim \mathcal{N}(A_{:I^+(x)}) \times$

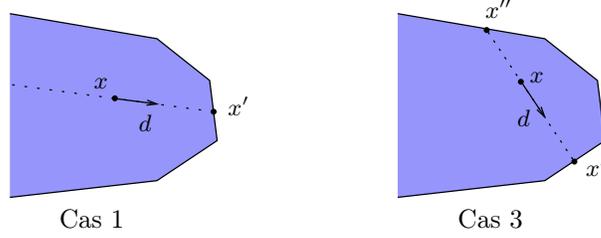


Fig. 2.3. Deux cas de la démonstration de la proposition 2.23

$0_{I^+(x) \setminus I^+(x')} \leq \dim \mathcal{N}(A_{:I^+(x)}) - 1$ . Par récurrence, on a  $x' \in \text{co}\{x^1, \dots, x^p\} + P^\infty$ . Comme d'autre part,  $-d \in P^\infty$ , le résultat est démontré pour  $x = x' + \alpha'(-d)$  qui est alors aussi dans  $\text{co}\{x^1, \dots, x^p\} + P^\infty$ .

- Cas 2 :  $d \geq 0$ . On s'y prend de la même manière, avec  $\alpha'' > 0$  le plus grand possible tel que  $x'' := x - \alpha''d \geq 0$ .
- Cas 3 :  $d \not\geq 0$  et  $d \not\leq 0$ . On définit  $x' := x + \alpha'd$  et  $x'' := x - \alpha''d$ , avec  $\alpha' > 0$  et  $\alpha'' > 0$  les plus grands possibles tels que  $x' \geq 0$  et  $x'' \geq 0$ . On a

$$x = \frac{\alpha''}{\alpha' + \alpha''} x' + \frac{\alpha'}{\alpha' + \alpha''} x''.$$

Comme ci-dessus,  $x'$  et  $x'' \in \text{co}\{x^1, \dots, x^p\} + P^\infty$ , et donc il en est de même de  $x$  qui est une combinaison convexe de  $x'$  et de  $x''$ .

Il reste à montrer que  $P^\infty \subseteq \text{cone}\{y^1, \dots, y^q\}$ , où les  $y^j$  non nuls engendrent les arêtes de  $P^\infty$ . Ce résultat est clair si  $P^\infty = \{0\}$ . Dans le cas contraire, on considère le polyèdre convexe  $P_1 := \{y : Ay = 0, e^\top y = 1, y \geq 0\}$ , qui est obtenu en normalisant les éléments de  $P^\infty$  ( $e$  est un vecteur dont les éléments valent tous 1) et qui est non vide. Clairement  $P_1^\infty = \{0\}$  et donc  $P_1$  est borné (corollaire 2.8). Par ce que l'on vient de démontrer,  $P_1 = \text{co}\{y^1, \dots, y^q\}$ , où les  $y^j$  sont les sommets de  $P_1$ . Alors  $P^\infty = \mathbb{R}_+ P_1 = \text{cone}\{y^1, \dots, y^q\}$ . Il reste à montrer que les  $y^j$  engendrent les arêtes de  $P^\infty$  ou encore, d'après la proposition 2.21, que  $\dim \mathcal{N}(A_{:I^+(y^j)}) = 1$ . D'une part  $\dim \mathcal{N}(A_{:I^+(y^j)}) \geq 1$  car  $(y^j)_{I^+(y^j)}$  est non nul et dans  $\mathcal{N}(A_{:I^+(y^j)})$  (du fait que  $e^\top y^j = 1$  et  $Ay^j = 0$ ). D'autre part, comme  $y^j$  est un sommet de  $P_1$ ,

$$\mathcal{N} \left( \begin{array}{c} A_{:I^+(y^j)} \\ e_{I^+(y^j)}^\top \end{array} \right) = \{0\}.$$

Ceci implique que  $\dim \mathcal{N}(A_{:I^+(y^j)}) \leq 1$  (exercice B.2).

2) Montrons la réciproque. Un ensemble  $P$  de la forme (2.26) peut aussi s'écrire  $T(Q)$ , où

$$Q = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q : \alpha \geq 0, \sum_{i=1}^p \alpha_i = 1, \beta \geq 0 \right\}$$

et  $T : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q : (\alpha, \beta) \mapsto \sum_i \alpha_i x^i + \sum_j \beta_j y^j$ . Clairement, l'ensemble  $Q$  est un polyèdre convexe (écrit sous forme standard) et  $T$  est une application linéaire. Par la proposition 2.18 (démontrée pour les polyèdres convexes écrits sous forme standard),  $P = T(Q)$  est un polyèdre convexe.  $\square$

Le passage d'une représentation (primale ou duale) à l'autre est une opération difficile. Un algorithme a été proposé par Motzkin et al. [445] et redécouvert par Chernikova [119, 120, 121]. La complexité pire cas de ces transformations est exponentielle en la dimension [32, 88], ce qui les rend inutilisables dès que les dimensions ne sont pas très petites.

## 2.5 Opérations

### 2.5.1 Projection

Soit  $\mathbb{E}$  un espace vectoriel euclidien, dont le produit scalaire est noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et la norme associée  $\| \cdot \|$ . On sait bien ce qu'est le projeté d'un point  $x$  de  $\mathbb{E}$  sur un sous-espace vectoriel  $\mathbb{F}$  de  $\mathbb{E}$  : c'est le point  $\bar{x} \in \mathbb{F}$  tel que  $x - \bar{x}$  est orthogonal à tout vecteur de  $\mathbb{F}$  ; mais c'est aussi le point  $\bar{x} \in \mathbb{F}$  le plus proche de  $x$ . Cette dernière caractérisation peut être utilisée pour définir le projeté d'un point sur certaines parties de  $\mathbb{E}$  qui ne sont pas des sous-espaces vectoriels.

On appelle *projection orthogonale* sur une partie  $C$  de  $\mathbb{E}$ , l'opération qui à un point  $x \in \mathbb{E}$  associe toute solution éventuelle des problèmes équivalents (ils ont les mêmes solutions) suivants :

$$d_C(x) := \inf_{y \in C} \|y - x\| \quad \text{et} \quad e_C(x) := \inf_{y \in C} \frac{1}{2} \|y - x\|^2. \quad (2.27)$$

La valeur optimale  $d_C(x)$  du premier problème est la *distance de  $x$  à  $C$*  et  $e_C(x) = \frac{1}{2}[d_C(x)]^2$ . Toute solution de ces problèmes est appelée *projeté* de  $x$  sur  $C$ . Clairement,  $x$  est le projeté de  $x$  si  $x \in C$ . La proposition 2.25 ci-dessous nous montrera que ces problèmes ont une solution et une seule si  $C$  est un convexe fermé non vide le résultat ne serait pas vrai pour une norme arbitraire, qui n'est pas associée à un produit scalaire ; le qualificatif *orthogonal* est là pour rappeler cette propriété de la norme utilisée dans la projection. On note alors  $P_C(x)$  cette solution et l'opérateur  $P_C : \mathbb{E} \rightarrow C$  est alors appelé le *projecteur orthogonal* sur  $C$ .

Donnons en premier lieu des propriétés qui caractérisent un projeté orthogonal. La première, (2.28a), est la plus souvent utilisée ; elle le sera déjà dans la démonstration du résultat d'existence et d'unicité de la proposition 2.25.

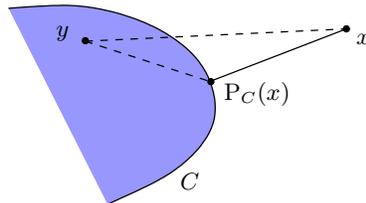


Fig. 2.4. Illustration de la proposition 2.24

**Proposition 2.24 (caractérisation d'un projeté orthogonal)** *Soit  $C$  un convexe non vide de  $\mathbb{E}$ . Un point  $\bar{x} \in C$  est un projeté de  $x \in \mathbb{E}$  sur  $C$  si, et seulement si, l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :*

$$\forall y \in C, \quad \langle y - \bar{x}, \bar{x} - x \rangle \geq 0, \quad (2.28a)$$

$$\forall y \in C, \quad \langle y - \bar{x}, y - x \rangle \geq 0, \quad (2.28b)$$

$$\forall y \in C, \quad \langle y - x, \bar{x} - x \rangle \geq \|\bar{x} - x\|^2. \quad (2.28c)$$

DÉMONSTRATION. [ $\bar{x}$  est caractérisé par (2.28a)] Soit  $y \in C$ . Par convexité de  $C$ ,  $z_t = \bar{x} + t(y - \bar{x}) \in C$  pour tout  $t \in [0, 1]$ . Comme  $\bar{x}$  est solution de (2.27), on a

$$\|\bar{x} - x\|^2 \leq \|z_t - x\|^2 = \|\bar{x} - x\|^2 + 2t\langle \bar{x} - x, y - \bar{x} \rangle + t^2\|y - \bar{x}\|^2.$$

Après retranchement de  $\|\bar{x} - x\|^2$ , division par  $t > 0$  et passage à la limite lorsque  $t \downarrow 0$ , on obtient (2.28a). Inversement, en écrivant  $y - x = (y - \bar{x}) + (\bar{x} - x)$  et en utilisant (2.28a), on obtient

$$\|y - x\|^2 = \|y - \bar{x}\|^2 + 2\langle y - \bar{x}, \bar{x} - x \rangle + \|\bar{x} - x\|^2 \geq \|\bar{x} - x\|^2.$$

Donc  $\bar{x}$  est solution de (2.27).

[(2.28a)  $\Leftrightarrow$  (2.28b)] Si (2.28a) est vérifiée, on a pour  $y \in C$  :

$$\langle y - \bar{x}, y - x \rangle = \|y - \bar{x}\|^2 + \langle y - \bar{x}, \bar{x} - x \rangle \geq 0,$$

c'est-à-dire (2.28b). Inversement, si  $y \in C$  et  $t \in ]0, 1]$ , on a  $z_t := \bar{x} + t(y - \bar{x}) \in C$ . Donc, d'après (2.28b) :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle z_t - \bar{x}, z_t - x \rangle \\ &= t\langle y - \bar{x}, (\bar{x} - x) \rangle + t\langle y - \bar{x}, y - \bar{x} \rangle \\ &= t\langle y - \bar{x}, \bar{x} - x \rangle + t^2\|y - \bar{x}\|^2. \end{aligned}$$

En divisant par  $t > 0$ , puis en faisant tendre  $t$  vers 0, on trouve (2.28a).

[(2.28a)  $\Leftrightarrow$  (2.28c)] L'équivalence s'obtient en observant que  $\langle y - x, \bar{x} - x \rangle = \langle y - \bar{x}, \bar{x} - x \rangle + \|\bar{x} - x\|^2$ .  $\square$

Avec l'apport du chapitre 4, on comprendra que (2.28a) n'est autre que la condition nécessaire et suffisante d'optimalité (4.13). Ce point de vue permettrait de simplifier la démonstration.

**Proposition 2.25 (existence et unicité du projeté orthogonal)** *Soient  $C$  une partie convexe fermée non vide d'un espace euclidien  $\mathbb{E}$  et  $x$  un point de  $\mathbb{E}$ . Alors il existe un unique élément  $\bar{x} \in C$  tel que*

$$\forall y \in C, \quad \|\bar{x} - x\| \leq \|y - x\|.$$

DÉMONSTRATION. Il s'agit de montrer que le problème (2.27) a une solution et une seule.

*Existence* : elle découle du corollaire 1.4 ;  $C$  est un fermé non vide et le critère de (2.27) est coercif.

*Unicité* : soient  $\bar{x}_1$  et  $\bar{x}_2$  deux projetés de  $x$  sur  $C$  ; par (2.28a), on a

$$\langle \bar{x}_2 - \bar{x}_1, \bar{x}_1 - x \rangle \geq 0 \quad \text{et} \quad \langle \bar{x}_1 - \bar{x}_2, \bar{x}_2 - x \rangle \geq 0 ;$$

en sommant ces deux inégalités, on trouve que  $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$ . □

**Proposition 2.26 (propriétés de la projection)** *Le projecteur orthogonal  $P_C$  sur un convexe fermé non vide  $C$  est fortement monotone dans le sens suivant*

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{E} : \quad \langle P_C(x_2) - P_C(x_1), x_2 - x_1 \rangle \geq \|P_C(x_2) - P_C(x_1)\|^2 \quad (2.29a)$$

*et contractant dans le sens suivant*

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{E} : \quad \|P_C(x_1) - P_C(x_2)\| \leq \|x_1 - x_2\|. \quad (2.29b)$$

DÉMONSTRATION. 1) D'après la caractérisation (2.28a) du projeté, on a

$$\begin{aligned} \langle P_C(x_2) - P_C(x_1), P_C(x_1) - x_1 \rangle &\geq 0, \\ \langle P_C(x_1) - P_C(x_2), P_C(x_2) - x_2 \rangle &\geq 0. \end{aligned}$$

En sommant ces inégalités, on trouve

$$\langle P_C(x_2) - P_C(x_1), x_2 - x_1 - (P_C(x_2) - P_C(x_1)) \rangle \geq 0.$$

On en déduit (2.29a).

2) On a ensuite

$$\begin{aligned} \|P_C(x_2) - P_C(x_1)\|^2 &\leq \langle P_C(x_2) - P_C(x_1), x_2 - x_1 \rangle && [(2.29a)] \\ &\leq \|P_C(x_2) - P_C(x_1)\| \|x_2 - x_1\| && [\text{Cauchy-Schwarz}]. \end{aligned}$$

On en déduit (2.29b). □

Si la projection  $P_C$  est lipschitzienne par (2.29), elle n'est généralement pas différentiable. Elle a toutefois des dérivées directionnelles en un point de  $C$ , mais pas nécessairement en un point n'appartenant pas à  $C$  (voir Kruskal [366 ; 1969] pour un contre-exemple dans  $\mathbb{R}^3$  et Shapiro [547 ; 1994] pour un contre-exemple simple dans  $\mathbb{R}^2$ ).

### 2.5.2 Cône normal et hyperplan d'appui

#### Normale

**Définition 2.27** Soient  $(\mathbb{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien et  $C \subseteq \mathbb{E}$  un ensemble convexe fermé. Le cône normal à  $C$  en un point  $x \in C$  est l'ensemble noté et défini par

$$\mathbf{N}_x C \equiv \mathbf{N}_C(x) := \{\nu \in \mathbb{E} : \langle \nu, y - x \rangle \leq 0, \forall y \in C\}.$$

Par convention,  $\mathbf{N}_C(x) = \emptyset$  si  $x \notin C$ . Les éléments de  $\mathbf{N}_C(x)$  sont appelés des *normales* à  $C$  en  $x$ .  $\square$

**Proposition 2.28** Soient  $C$  un convexe fermé non vide d'un espace euclidien  $\mathbb{E}$ . Alors  $\mathbf{N}_c C$  est un cône convexe fermé non vide.

DÉMONSTRATION. Le cône normal peut en effet s'écrire comme une intersection de demi-espaces fermés (des convexes) :

$$\mathbf{N}_x C = \bigcap_{y \in C} \{\nu \in \mathbb{E} : \langle \nu, y - x \rangle \leq 0\}. \quad \square$$

Il est clair que l'orthogonal  $\mathbb{E}_0^\perp$  du sous-espace vectoriel  $\mathbb{E}_0$  parallèle à  $\text{aff } C$  est dans  $\mathbf{N}_C(x)$ ; ce dernier contient donc un élément non nul si  $\text{aff } C \neq \mathbb{E}$ . Par ailleurs, il est également clair que  $0 \in \mathbf{N}_C(x) \cap \mathbb{E}_0$ . La proposition suivante en dit un peu plus : si  $x \in \partial_{\text{rel}} C$ , la *frontière relative* de  $C$ ,  $\mathbf{N}_C(x) \cap \mathbb{E}_0$  n'est pas réduit à l'élément nul. Il y a une hypothèse implicite dans le fait que  $\partial_{\text{rel}} C \neq \emptyset$ , à savoir que  $C$  n'est ni réduit à un point (auquel cas,  $\mathbb{E}_0 = \{0\}$ ,  $C$  n'a pas de frontière, le cône normal en ce point est  $\mathbb{E}$ , mais  $\mathbf{N}_C(x) \cap \mathbb{E}_0$  est réduit à  $\{0\}$ ), ni  $\mathbb{E}$  tout entier (auquel cas, le cône normal en tout point est réduit à  $\{0\}$ ).

**Proposition 2.29 (existence d'une normale non nulle)** Soient  $C$  un convexe fermé non vide d'un espace euclidien  $\mathbb{E}$ ,  $\mathbb{E}_0$  le sous-espace vectoriel parallèle à  $\text{aff } C$  et  $x \in \partial_{\text{rel}} C$ . Alors  $\mathbf{N}_C(x) \cap \mathbb{E}_0$  contient un élément non nul.

DÉMONSTRATION. On peut supposer que  $\text{aff } C = \mathbb{E}$ . Si  $x$  est sur la frontière de  $C$ , alors  $C \neq \mathbb{E}$  et il existe une suite  $\{x_k\}_{k \geq 1} \subseteq \mathbb{E} \setminus C$  qui converge vers  $x$ . Soit  $y_k = P_C(x_k)$ . Comme  $y_k \neq x_k$ , on peut définir la vecteur unitaire  $\nu_k := (x_k - y_k) / \|x_k - y_k\|$ . Par caractérisation (2.28a) du projeté, on a

$$\forall y \in C : \langle y - y_k, \nu_k \rangle \leq 0.$$

La suite  $\{y_k\} \rightarrow x$ , par la propriété de contraction (2.29) de la projection :  $\|y_k - x\| \leq \|x_k - x\| \rightarrow 0$ . Par ailleurs, la suite  $\{\nu_k\}$  étant bornée, on peut en extraire une sous-suite convergente, encore notée  $\{\nu_k\} \rightarrow \nu$ , avec  $\nu$  de norme un. En passant à la limite

dans l'inégalité ci-dessus, on obtient quel que soit  $y \in C$  :  $\langle y - x, \nu \rangle \leq 0$ . Ceci montre que  $\nu$  est une normale non nulle.  $\square$

La démonstration des quelques règles de calcul de cônes normaux données ci-dessous est proposée à l'exercice 2.41 (la démonstration de l'égalité dans (2.30) est difficile à démontrer) et celle de la proposition 2.31 est proposée à l'exercice 2.42.

**Proposition 2.30 (calcul de cône normal)**

- 1) (intersection) Si  $C_1$  et  $C_2$  sont deux ensembles convexes fermés et  $x \in C_1 \cap C_2$ , alors

$$N_x(C_1 \cap C_2) \supseteq N_x C_1 + N_x C_2, \quad (2.30)$$

avec égalité si  $0 \in (C_1 - C_2)^\circ$  ou si  $C_1^\circ \cap C_2^\circ \neq \emptyset$ .

- 2) (produit cartésien) Si  $C_1$  (resp.  $C_2$ ) est un convexe fermé non vide d'un espace vectoriel  $\mathbb{E}_1$  (resp.  $\mathbb{E}_2$ ), alors  $C_1 \times C_2 := \{(x_1, x_2) : x_1 \in C_1, x_2 \in C_2\}$  est un convexe fermé non vide de  $\mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2$  et en  $(x_1, x_2) \in C_1 \times C_2$ , on a

$$N_{(x_1, x_2)}(C_1 \times C_2) = N_{x_1} C_1 \times N_{x_2} C_2.$$

**Proposition 2.31 (semi-continuité supérieure)** Soit  $S := \{x \in \mathbb{E} : \|x\| = 1\}$  la sphère unité de  $\mathbb{E}$  et  $N_C : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E} : x \mapsto N_C(x)$  la multifonction cône normal. Alors la multifonction  $N_C \cap S$  est semi-continue supérieurement.

### Hyperplan d'appui

Une notion étroitement liée à celle de normale est celle d'hyperplan d'appui. Le résultat d'existence de la proposition 2.33 se déduit d'ailleurs directement de celui sur l'existence d'une normale non nulle (proposition 2.29).

**Définition 2.32** Soient  $(\mathbb{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien et  $C \subseteq \mathbb{E}$  un ensemble convexe. Un hyperplan d'appui de  $C$  est un hyperplan contenant  $C$  dans un de ses demi-espaces fermés et contenant un point de la frontière de  $C$ . C'est donc un ensemble qui doit pouvoir s'écrire  $H(\xi, \alpha) := \{x \in \mathbb{E} : \langle \xi, x \rangle = \alpha\}$  avec  $\xi \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$  et vérifie  $C \subseteq H^-(\xi, \alpha)$  et  $\overline{C} \cap H(\xi, \alpha) \neq \emptyset$ .

Un hyperplan d'appui de  $C$  en  $x \in \overline{C}$  est un hyperplan d'appui de  $C$  qui contient  $x$ .  $\square$

Si  $\text{aff } C \neq \mathbb{E}$ , alors  $\text{aff } C$  est un hyperplan d'appui trivial, mais rarement intéressant. La proposition suivante donne dans ce cas un hyperplan d'appui souvent plus utile, pourvu que sa frontière relative  $\partial_{\text{rel}} C$  soit non vide.

**Proposition 2.33 (existence d'un hyperplan d'appui)** Soient  $C$  un convexe non vide d'un espace euclidien  $\mathbb{E}$ ,  $\mathbb{E}_0$  le sous-espace vectoriel parallèle à  $\text{aff } C$  et  $x \in \partial_{\text{rel}} C$ . Alors il existe un hyperplan d'appui  $H(\xi, \alpha)$  de  $C$  en  $x$  tel que  $\xi \in \mathbb{E}_0$ .

DÉMONSTRATION. Comme  $\text{aff } \overline{C} = \text{aff } C$  et  $(\overline{C})^\circ = C^\circ$  (proposition 2.16),  $\mathbb{E}_0$  est aussi l'espace vectoriel parallèle au convexe fermé non vide  $\overline{C}$  et  $x \in \partial_{\text{rel}} \overline{C} = \partial_{\text{rel}} C$ . Soit  $\xi \in \mathbf{N}_{\overline{C}}(x) \cap \mathbb{E}_0$  la normale au convexe fermé non vide  $\overline{C}$  en  $x$ , dont l'existence est assurée par la proposition 2.29. Alors  $\langle \xi, y - x \rangle \leq 0$  pour tout  $y \in C$ , ce qui montre que  $C \subseteq H^-(\xi, \alpha)$  avec  $\alpha = \langle \xi, x \rangle$ . De plus  $x \in H(\xi, \alpha) \cap \partial_{\text{rel}} C \subseteq H(\xi, \alpha) \cap \partial C$ . Donc  $H(\xi, \alpha)$  est un hyperplan d'appui de  $C$  en  $x$ , avec  $\xi \in \mathbb{E}_0$ .  $\square$

### Existence de point extrême

Tout ensemble convexe fermé non vide n'a pas nécessairement un point extrême. On peut démontrer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi (proposition 2.35) en se fondant sur le lemme suivant.

**Lemme 2.34** Soient  $C$  un ensemble convexe et  $H$  un hyperplan d'appui de  $C$ . Alors tout point extrême de  $C \cap H$  est aussi un point extrême de  $C$ .

DÉMONSTRATION. Soit  $z$  un point extrême de  $C \cap H$  et supposons qu'il s'écrive  $z = (1-t)x + ty$  avec  $t \in ]0, 1[$  et  $x, y \in C$ . Il s'agit de montrer que  $x = y = z$ .

Il suffit en réalité de montrer que  $x, y \in H$ , car alors  $x, y \in C \cap H$  et  $z \in \text{ext}(C \cap H)$  impliquent que  $x = y = z$ . Soit  $H \equiv H(\xi, \alpha)$  une représentation de  $H$  telle que  $C \subseteq H^-(\xi, \alpha)$ . On a  $\langle \xi, x \rangle \leq \alpha$  ou  $\langle \xi, y \rangle \leq \alpha$ , parce que  $x, y \in C \subseteq H^-(\xi, \alpha)$ . Mais, on doit avoir  $\langle \xi, x \rangle = \alpha$  et  $\langle \xi, y \rangle = \alpha$ , sinon  $\langle \xi, x \rangle = (1-t)\langle \xi, x \rangle + t\langle \xi, y \rangle < \alpha$  ( $t \in ]0, 1[$ ) et  $z$  n'appartiendrait pas à  $H$ . On a démontré que  $x, y \in H$ , comme souhaité.  $\square$

On appelle *droite*, un sous-espace affine de dimension un. C'est donc un ensemble de la forme  $x + \mathbb{R}d$ , où  $x \in \mathbb{E}$  et  $d \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$ .

**Proposition 2.35 (CNS d'existence de point extrême)** Un ensemble convexe fermé non vide a un point extrême si, et seulement si, il ne contient pas de droite.

DÉMONSTRATION. Soit  $C$  le convexe fermé non vide considéré.

[ $\Rightarrow$ ] On raisonne par l'absurde en supposant que  $C$  contient la droite  $x_0 + \mathbb{R}d$  avec  $d \neq 0$ . Nécessairement  $x_0 \in C$  et  $d$  et  $-d \in C^\circ$ . Alors pour tout  $x \in C$ , on a  $x + \mathbb{R}d \in C$  (proposition 2.7(ii)). Comme  $x = \frac{1}{2}((x+d) + (x-d))$ , avec deux points  $(x+d)$  et  $(x-d)$  distincts de  $C$ , on en déduit que  $x \notin \text{ext}(C)$ . Donc  $C$  n'a pas de point extrême.

[ $\Leftarrow$ ] On raisonne par récurrence sur la dimension de  $\text{aff } C$  (ou dimension de  $C$ ), quel que soit la dimension de  $\mathbb{E}$ . La propriété est vraie si  $\dim(\text{aff } C) = 1$  car alors  $C := \{x + td : t \in I\}$  où  $x \in \mathbb{E}$ ,  $d \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$  et  $I$  est un intervalle fermé différent de  $\mathbb{R}$ , donc de la forme  $[a, b]$  ou  $[a, +\infty[$  ou  $] - \infty, a]$ . Clairement,  $x + ad$  est un point extrême de  $\mathbb{E}$ .

Supposons maintenant que l'implication soit vraie lorsque  $\dim(\text{aff } C) \leq m < \dim \mathbb{E}$  et démontrons la lorsque  $\dim(\text{aff } C) = m + 1$ . Si  $C$  ne contient pas de droite, on peut trouver un point  $x \in \partial_{\text{rel}} C$  (on prend un  $x_0 \in C$ , une direction  $d \neq 0$  et  $x_0 + \mathbb{R}d$  rencontre  $\partial_{\text{rel}} C$ ). Par la proposition 2.33, on peut trouver un hyperplan d'appui  $H$  de  $C$  en  $x$ . Alors  $C \cap H$  est un convexe fermé de dimension  $\leq m$ , qui ne contient pas de droite. Par récurrence,  $C \cap H$  a un point extrême et, par le lemme 2.34, ce point extrême de  $C \cap H$  est aussi un point extrême de  $C$ .  $\square$

### 2.5.3 Séparation

Dans cette section, on suppose que l'espace vectoriel  $\mathbb{E}$  est de dimension finie, muni d'un produit scalaire, noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

Une notion essentielle d'analyse convexe est celle de la séparation des ensembles convexes. La séparation des deux convexes se fait géométriquement dans  $\mathbb{E}$  en utilisant un hyperplan  $H(\xi, \alpha)$ . On dit que cet hyperplan *sépare* deux convexes  $C_1$  et  $C_2$ , ou que ceux-ci sont *séparables* par cet hyperplan, si l'on a

$$\forall x_1 \in C_1, \quad \forall x_2 \in C_2 : \quad \langle \xi, x_1 \rangle \leq \alpha \leq \langle \xi, x_2 \rangle,$$

ce qui est équivalent à l'existence d'un vecteur  $\xi$  *non nul* dans  $\mathbb{E}$  tel que

$$\sup_{x_1 \in C_1} \langle \xi, x_1 \rangle \leq \inf_{x_2 \in C_2} \langle \xi, x_2 \rangle. \tag{2.31}$$

On dit que cet hyperplan *sépare strictement* ces deux convexes, ou que ceux-ci sont *strictement séparables* par cet hyperplan, s'il existe deux scalaires  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  tels que  $\alpha_1 < \alpha_2$  et

$$\forall x_1 \in C_1, \quad \forall x_2 \in C_2 : \quad \langle \xi, x_1 \rangle \leq \alpha_1 < \alpha_2 \leq \langle \xi, x_2 \rangle,$$

ce qui est équivalent à l'existence d'un vecteur  $\xi$  (nécessairement non nul) dans  $\mathbb{E}$  tel que

$$\sup_{x_1 \in C_1} \langle \xi, x_1 \rangle < \inf_{x_2 \in C_2} \langle \xi, x_2 \rangle. \tag{2.32}$$

La figure 2.5 illustre ces notions de séparation. On y a utilisé le produit scalaire

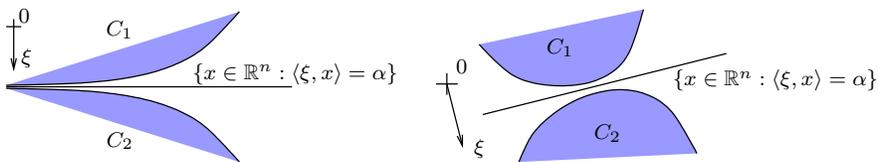


Fig. 2.5. séparation de deux convexes : non stricte à gauche et stricte à droite

euclidien sur  $\mathbb{R}^2$ . L'hyperplan  $\{x \in \mathbb{R}^2 : \langle \xi, x \rangle = \alpha\}$  sépare les convexes  $C_1$  et  $C_2$ , non strictement à gauche et strictement à droite. Cet hyperplan est déterminé par un vecteur  $\xi$  qui lui est orthogonal et un scalaire  $\alpha$ .

Nous donnons ci-dessous deux résultats de séparation. Le premier (théorème 2.36) énonce des conditions équivalentes à la séparation stricte de  $C_1$  et  $C_2$  en termes de  $C_1 - C_2$  et de la distance de  $C_1$  à  $C_2$ . Son corollaire 2.37 énonce un certain nombre de cas où cette séparation stricte peut être réalisée. Signalons le cas où les convexes disjoints sont l'un fermé et l'autre compact, qui est utilisé lorsqu'on veut montrer qu'un ensemble convexe fermé est inclus dans un autre ensemble convexe fermé (en raisonnant par l'absurde). Le second (théorème 2.38) exprime que l'on peut séparer (non strictement cette fois) deux ensembles convexes quelconques (en dimension finie).

**Théorème 2.36 (séparation stricte de convexes)** *Soient  $C_1$  et  $C_2$  deux convexes non vides d'un espace euclidien  $\mathbb{E}$ . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) on peut séparer  $C_1$  et  $C_2$  strictement,
- (ii)  $0 \notin \text{adh}(C_1 - C_2)$ ,
- (iii)  $\inf\{\|x_1 - x_2\| : x_1 \in C_1, x_2 \in C_2\} > 0$ .

DÉMONSTRATION. [(i)  $\Rightarrow$  (ii)] Il existe donc  $\xi \in \mathbb{E}$  tel que l'on ait (2.32). Alors

$$0 < \inf_{\substack{x_1 \in C_1 \\ x_2 \in C_2}} \langle \xi, x_1 - x_2 \rangle = \inf_{x \in C_1 - C_2} \langle \xi, x \rangle = \inf_{x \in \text{adh}(C_1 - C_2)} \langle \xi, x \rangle.$$

Donc  $0 \notin \text{adh}(C_1 - C_2)$ .

[(ii)  $\Rightarrow$  (iii)] Le problème dans (iii) s'écrit  $\inf\{\|x\| : x \in C_1 - C_2\} = \inf\{\|x\| : x \in \text{adh}(C_1 - C_2)\} > 0$  grâce à (ii).

[(iii)  $\Rightarrow$  (i)] Comme le convexe fermé non vide  $C := \text{adh}(C_1 - C_2)$  ne contient pas zéro, le projeté  $\xi$  de zéro sur  $C$  est non nulle et, d'après (2.28a), vérifie pour tout  $x \in C$  :  $0 \leq \langle \xi, x - \xi \rangle$ . Alors pour tout  $x_i \in C_i$ ,  $0 < \|\xi\|^2 \leq \langle \xi, x_1 - x_2 \rangle$  ou encore

$$\forall x_1 \in C_1, \quad \forall x_2 \in C_2 : \quad \langle \xi, x_2 \rangle + \|\xi\|^2 \leq \langle \xi, x_1 \rangle.$$

On en déduit (i). □

**Corollaire 2.37 (séparation stricte de convexes)** *On peut séparer strictement deux convexes fermés non vides disjoints  $C_1$  et  $C_2$  d'un espace euclidien  $\mathbb{E}$  dans chacune des situations suivantes :*

- 1)  $C_1 - C_2$  est fermé,
- 2)  $C_1^\infty \cap C_2^\infty = \{0\}$ ,
- 3)  $C_1$  ou  $C_2$  est compact,
- 4)  $C_1$  et  $C_2$  sont polyédriques.

DÉMONSTRATION. 1) Il suffit d'utiliser l'implication (ii)  $\Rightarrow$  (i) de la proposition 2.36, après avoir constaté que  $0 \notin C_1 - C_2$ , car  $C_1$  et  $C_2$  sont disjoints.

2) D'après le point 1, il suffit de montrer que  $C := C_1 - C_2$  est fermé. Soit  $x_k^1 - x_k^2 \rightarrow x$ , avec  $\{x_k^i\} \subseteq C_i$ ,  $i = 1, 2$ . Les suites  $\{x_k^i\}$  sont bornées (en effet, si  $\{x_k^1\}$  n'est pas bornée, alors, avec  $t_k := \|x_k^1\|$ , on aurait une sous-suite de  $x_k^1/t_k$  qui convergerait vers un  $d \in C_1^\infty$  non nul et pour la même sous-suite  $x_k^2/t_k \rightarrow d$ ; donc  $d \in C_1^\infty \cap C_2^\infty = \{0\}$ , ce qui contredirait le fait que  $d \neq 0$ ). En extrayant des sous-suites convergentes des  $\{x_k^i\}$ , on voit que  $x \in C$ . Donc  $C$  est fermé.

3) Si  $C_1$  est compact,  $C_1^\infty = \{0\}$  (corollaire 2.8) et le résultat se déduit du point 2.

4) Si les  $C_i$  sont polyédriques,  $C_1 - C_2$  est polyédrique (exercice 2.20 ou 2.21), donc fermé. On applique alors le point 1.  $\square$

On ne peut pas se libérer de la condition  $C_1^\infty \cap C_2^\infty = \{0\}$  du point 2 du corollaire précédent sans en modifier la conclusion. Par exemple, les deux convexes fermés  $C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq e^x\}$  et  $C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 0\}$  sont disjoints dans  $\mathbb{R}^2$ , mais ne peuvent pas être séparés strictement (observons que dans ce cas  $C_1^\infty \cap C_2^\infty = \mathbb{R}_- \times \{0\}$ ).

Le point 3 du corollaire précédent s'utilise souvent pour montrer qu'un point  $x$  appartient à un convexe fermé non vide  $C$ . On raisonne par l'absurde en supposant que ce n'est pas le cas. Alors  $\{x\}$  et  $C$  sont deux convexes fermés disjoints, dont l'un est fermé et l'autre (le singleton  $\{x\}$ ) est compact. On les sépare et on démontre que cela conduit à une contradiction. Cet argument est utilisé dans la démonstration des propositions 2.40 et 2.45.

Le point 3 du corollaire précédent reste vrai en dimension infinie. On peut l'obtenir à partir d'un résultat de prolongement d'application linéaire continue et c'est l'existence d'un projeté qui s'en déduit [91; 1983].

En dimension infinie, il y a un autre résultat permettant de séparer deux convexes, non strictement cette fois. Il faut pour cela que l'un des deux soit d'intérieur non vide. En dimension finie, cette hypothèse n'est pas nécessaire: on peut toujours séparer deux convexes quelconques disjoints par un [hyperplan](#). C'est ce qu'affirme le théorème suivant.

**Théorème 2.38 (séparation de convexes)** *On peut séparer deux convexes non vides disjoints d'un espace euclidien.*

DÉMONSTRATION. On considère  $C := C_2 - C_1$ , qui est convexe (car  $C_1$  et  $C_2$  sont convexes), non vide (car  $C_1$  et  $C_2$  sont non vides) et ne contient pas zéro (car  $C_1$  et  $C_2$  sont disjoints). Montrons que l'on peut trouver un vecteur non nul  $\xi \in \mathbb{E}$  tel que

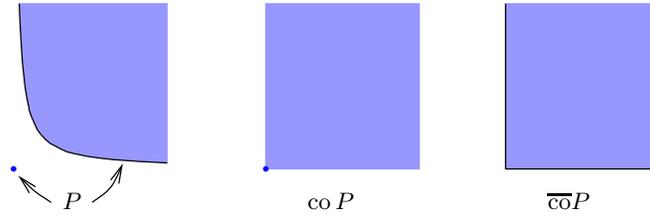
$$\forall (x_1, x_2) \in C_1 \times C_2 : \langle x_2 - x_1, \xi \rangle \geq 0, \tag{2.33}$$

relation qui implique immédiatement que l'on peut séparer  $C_1$  et  $C_2$ .

- Si  $0 \notin \overline{C}$ , on prend pour  $\xi$  le projeté de zéro sur  $C$ , qui vérifie par (2.28a):  $\langle (x_2 - x_1) - \xi, \xi - 0 \rangle \geq 0$ , quels que soient  $x_i \in C_i$ . On en déduit (2.33).
- Dans le cas contraire,  $0 \notin \overline{C} \setminus C \subseteq \partial_{\text{rel}} C$  et on prend pour  $\xi$  l'opposé d'une normale non nulle à  $C$  en zéro (proposition 2.29), qui satisfait  $\langle (x_2 - x_1) - 0, -\xi \rangle \leq 0$ , quels que soient  $x_i \in C_i$ . On en déduit (2.33).  $\square$

### 2.5.4 Enveloppe convexe fermée

L'*enveloppe convexe* d'un ouvert relatif est un ouvert relatif (exercice 2.32); l'*enveloppe convexe* d'un compact est un compact (corollaire 2.4); mais l'enveloppe convexe d'un fermé n'est pas nécessairement fermée. C'est le cas par exemple de la partie fermée de  $\mathbb{R}^2$  union de l'origine et de  $\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 x_2 \geq 1\}$ , dont l'enveloppe convexe  $\{(0,0)\} \cup \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 > 0\}$  n'est pas fermée (voir la figure 2.6). La notion suivante a donc tout son sens.



**Fig. 2.6.** Un ensemble  $P$  dont l'enveloppe convexe  $\text{co } P$  diffère de l'enveloppe convexe fermée  $\overline{\text{co } P}$

Soit  $P$  une partie de  $\mathbb{E}$ . L'intersection de convexes fermés étant un convexe fermé, on peut parler du plus petit convexe fermé contenant  $P$ , qui est donc l'intersection de tous les convexes fermés contenant  $P$ . C'est ce que l'on appelle l'*enveloppe convexe fermée* de  $P$ . On la note

$$\overline{\text{co } P} := \bigcap \{C : C \text{ est un convexe fermé contenant } P\}. \quad (2.34)$$

Évidemment, si  $C$  est un convexe fermé,  $\overline{\text{co } C} = C$ . La proposition suivante donne, en particulier, une autre manière de définir l'enveloppe convexe fermée: c'est aussi l'adhérence de l'*enveloppe convexe*, mais nous avons préféré la définition (2.34) du fait de l'idée de minimalité qu'elle contient.

**Proposition 2.39** *On a*

$$\begin{aligned} P_1 \subseteq P_2 &\implies \overline{\text{co } P_1} \subseteq \overline{\text{co } P_2}, \\ P \subseteq \text{co } P \subseteq \text{co } \overline{P} \subseteq \overline{\text{co } P} &= \overline{\text{co } \overline{P}} = \overline{\text{co } P}. \end{aligned}$$

**DÉMONSTRATION.** 1) Évidemment,  $P_1 \subseteq P_2 \subseteq \overline{\text{co } P_2}$ . Donc,  $\overline{\text{co } P_2}$  est un convexe fermé contenant  $P_1$ , si bien que  $\overline{\text{co } P_1} \subseteq \overline{\text{co } P_2}$ .

2) Les deux premières inclusions sont claires. En notant que  $\overline{P}$  est contenu dans tout convexe fermé contenant  $P$ , on a  $\overline{P} \subseteq \overline{\text{co } P}$  (par définition de  $\overline{\text{co } P}$ ) et donc aussi  $\text{co } \overline{P} \subseteq \overline{\text{co } P}$  (car  $\overline{\text{co } P}$  est convexe). L'égalité  $\overline{\text{co } P} = \overline{\text{co } \overline{P}}$  se déduit des observations suivantes:  $P \subseteq \overline{P}$  implique  $\overline{\text{co } P} \subseteq \overline{\text{co } \overline{P}}$  (première partie de la proposition); inversement  $\overline{P} \subseteq \overline{\text{co } P}$  ( $\overline{\text{co } P}$  est fermé), donc  $\overline{\text{co } \overline{P}} \subseteq \overline{\text{co } P}$ . Pour montrer  $\overline{\text{co } P} = \overline{\text{co } \overline{P}}$ , on observe

d'abord que  $\overline{\text{co}P} \subseteq \overline{\text{co}\overline{P}}$ , parce que ce dernier ensemble est un convexe fermé contenant  $P$  (proposition 2.16). Inversement,  $\text{co}P \subseteq \overline{\text{co}P}$  et comme ce dernier ensemble est fermé, on a  $\overline{\text{co}P} \subseteq \overline{\text{co}P}$ .  $\square$

Voici une autre manière de décrire l'enveloppe convexe fermée. La proposition suivante exprime le fait qu'à droite dans (2.34), on peut ne sélectionner que les **demi-espaces fermés**.

**Proposition 2.40 (description externe d'un convexe fermé)** *L'enveloppe convexe fermée d'une partie  $P \subseteq \mathbb{E}$  est l'intersection de tous les **demi-espaces fermés** contenant  $P$ .*

DÉMONSTRATION. Soit  $C$  l'intersection de tous les **demi-espaces fermés** contenant  $P$ . Comme  $C$  est un convexe fermé, on a certainement  $\overline{\text{co}(P)} \subseteq C$ . Inversement, si  $x_0 \in C \setminus \overline{\text{co}(P)}$ , on peut séparer strictement le convexe compact  $\{x_0\}$  et le convexe fermé  $\overline{\text{co}(P)}$  (point 3 du corollaire 2.37) : il existe  $\xi \in \mathbb{E}$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$  tels que

$$\forall x \in \overline{\text{co}(P)}, \quad \langle \xi, x \rangle \leq \alpha < \langle \xi, x_0 \rangle.$$

On en déduit deux conséquences contradictoires :

- par les inégalités de gauche,  $P \subseteq H^-(\xi, \alpha)$ , c.-à-d.,  $H^-(\xi, \alpha)$  est un **demi-espace fermé** contenant  $P$ ; alors  $x_0 \in H^-(\xi, \alpha)$  (car  $x_0$  est dans  $C$  et donc dans tous les **demi-espaces fermés** contenant  $P$ );
- par l'inégalité de droite,  $x_0 \notin H^-(\xi, \alpha)$ .

On a démontré que  $C \subseteq \overline{\text{co}(P)}$ .  $\square$

**Corollaire 2.41** *Soit  $C$  un ensemble convexe. L'intersection de tous les **demi-espaces fermés** contenant  $C$  est  $\overline{C}$ .*

**Corollaire 2.42**  *$C$  est un convexe fermé si, et seulement si, il est l'intersection de tous les **demi-espaces fermés** contenant  $C$ .*

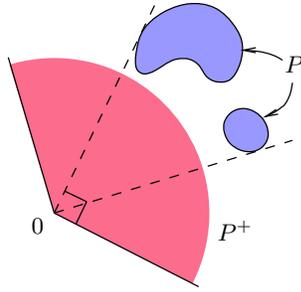
### 2.5.5 Cône dual

#### Définition

Soient  $\mathbb{E}$  un espace vectoriel euclidien, dont le produit scalaire est noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , et  $P$  une partie de  $\mathbb{E}$ . On appelle *cône dual* de  $P$  l'ensemble  $P^+$  défini par

$$P^+ := \{x \in \mathbb{E} : \langle x, y \rangle \geq 0, \forall y \in P\}.$$

La notion de cône dual est illustrée à la figure 2.7, dans laquelle on a utilisé le produit



**Fig. 2.7.** Cône dual  $P^+$  d'un ensemble  $P$  de  $\mathbb{R}^2$  pour le produit scalaire euclidien (les demi-droites formant le bord du cône  $P^+$  sont orthogonales aux demi-droites en trait discontinu qui délimitent le secteur angulaire contenant l'ensemble  $P$ )

scalaire euclidien de  $\mathbb{R}^2$ . Le *cône bidual*  $P^{++}$  de  $P$  est l'ensemble  $(P^+)^+$ , le dual du dual. On définit aussi le *cône dual négatif*  $P^-$  de  $P$  comme l'opposé de son cône dual, c'est-à-dire

$$P^- := \{d \in \mathbb{E} : \langle d, x \rangle \leq 0, \forall x \in P\} = -P^+.$$

Enfin, un cône  $K$  de  $\mathbb{E}$  est dit *autodual* si  $K^+ = K$ ; on en trouvera des exemples à l'exercice 2.35.

**Proposition 2.43 (premières propriétés)** Soient  $\mathbb{E}$  un espace euclidien,  $P$ ,  $P_1$  et  $P_2$  des parties non vides de  $\mathbb{E}$  et  $(P_i)_{i \in I}$  une famille quelconque de parties  $P_i$  non vides de  $\mathbb{E}$ . Alors

- 1)  $P^+$  est un cône convexe fermé non vide,
- 2)  $P_1 \subseteq P_2 \implies P_1^+ \supseteq P_2^+$  et  $P_1^{++} \subseteq P_2^{++}$ ,
- 3)  $P^+ = (\mathbb{R}_+ P)^+$ ,  $P^+ = (\text{co } P)^+$ ,  $P^+ = (\text{adh } P)^+$ ,
- 4)  $P^{++} = \overline{\text{co}}(\mathbb{R}_+ P)$ , en particulier  $P \subseteq P^{++}$ ,
- 5)  $P^{++} = P$  si, et seulement si,  $P$  est un cône convexe fermé,
- 6)  $(P_1 + P_2)^+ \supseteq P_1^+ \cap P_2^+$ , avec égalité si  $0 \in \text{adh}(P_1) \cap \text{adh}(P_2)$ ,
- 7)  $(\cup_{i \in I} P_i)^+ = \cap_{i \in I} P_i^+$ .
- 8)  $(Q_1 \times Q_2)^+ \supseteq Q_1^+ \times Q_2^+$ , si  $\emptyset \neq Q_1 \subseteq \mathbb{E}_1$  et  $\emptyset \neq Q_2 \subseteq \mathbb{E}_2$ ,  $(\mathbb{E}_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$  et  $(\mathbb{E}_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$  sont deux espaces euclidiens et  $\mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2$  est muni du produit scalaire  $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle_1 + \langle x_2, y_2 \rangle_2$ , avec égalité si  $0 \in \text{adh}(Q_1) \cap \text{adh}(Q_2)$ .

DÉMONSTRATION. 1)  $P^+$  est clairement non vide (il contient 0). D'autre part, on peut écrire  $P^+$  comme une intersection de cônes convexes fermés :

$$P^+ = \bigcap_{y \in P} \{x \in \mathbb{E} : \langle x, y \rangle \geq 0\}.$$

2) Évident.

3) Par le point 2,  $P^+ \supseteq (\text{adh } P)^+$ . Inversement, si  $d \in P^+$  et  $x \in \text{adh } P$ , il existe une suite  $\{x_k\} \subseteq P$  telle que  $x_k \rightarrow x$ . En passant à la limite dans  $\langle d, x_k \rangle \geq 0$ , on trouve  $\langle d, x \rangle \geq 0$ . Donc  $d \in (\text{adh } P)^+$ . Les autres identités se démontrent aisément.

4) D'après la proposition 2.40,  $\overline{\text{co}}(\mathbb{R}_+P)$  est l'intersection de tous les **demi-espaces fermés**  $H^-(\xi, \alpha)$  contenant  $\mathbb{R}_+P$ . De par la structure de  $\mathbb{R}_+P$ ,  $H^-(\xi, \alpha) \supseteq \mathbb{R}_+P$  implique que  $H^-(\xi, \alpha) \supseteq H^-(\xi, 0) \supseteq \mathbb{R}_+P$ , si bien que  $\overline{\text{co}}(\mathbb{R}_+P)$  est l'intersection de tous les **demi-espaces fermés**  $H^-(\xi, 0) = \{-\xi\}^+$  contenant  $\mathbb{R}_+P$  ou  $P$ . Mais  $\{-\xi\}^+$  contient  $P$  revient à dire que  $-\xi \in P^+$ . Dès lors  $\overline{\text{co}}(\mathbb{R}_+P) = \bigcap_{-\xi \in P^+} \{-\xi\}^+ = \{x \in \mathbb{E} : \langle d, x \rangle \geq 0, \text{ pour tout } d \in P^+\} = P^{++}$ .

5) Conséquence directe du point 4.

6)  $[\supseteq]$  Soient  $d \in P_1^+ \cap P_2^+$ ,  $x_1 \in P_1$  et  $x_2 \in P_2$ . Alors  $\langle d, x_1 + x_2 \rangle \geq 0$ , car les  $\langle d, x_i \rangle \geq 0$ . Donc  $d \in (P_1 + P_2)^+$ .  $[\subseteq]$  Soient  $d \in (P_1 + P_2)^+$ ,  $x \in P_1$  et  $\{x'_k\} \subseteq P_2$  avec  $x'_k \rightarrow 0$  (0 adhère à  $P_2$ ). Alors  $x + x'_k \in P_1 + P_2$  et donc  $\langle d, x + x'_k \rangle \geq 0$ . À la limite lorsque  $k \rightarrow \infty$ , on trouve  $\langle d, x \rangle \geq 0$ , ce qui montre que  $d \in P_1^+$ .

7)  $d \in \bigcap_{i \in I} P_i^+ \iff \forall i \in I : d \in P_i^+ \iff \forall i \in I, \forall x \in P_i : \langle d, x \rangle \geq 0 \iff \forall x \in \bigcup_{i \in I} P_i : \langle d, x \rangle \geq 0 \iff d \in (\bigcup_{i \in I} P_i)^+$ .

8) L'inclusion  $\supseteq$  est immédiate. On a l'égalité lorsque  $0 \in \overline{Q_1} \cap \overline{Q_2}$ , car si  $(d_1, d_2) \in \mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2$  vérifie  $\langle (d_1, d_2), (x_1, x_2) \rangle \geq 0$  pour tout  $x_i \in \mathbb{E}_i$ , on obtient  $d_1 \in Q_1^+$  en prenant  $\{x_2^k\}_k \subseteq Q_2$  avec  $x_2^k \rightarrow 0$  (de même pour  $d_2 \in Q_2^+$ ).  $\square$

La démonstration du corollaire suivant est proposée à l'exercice 2.36.

**Corollaire 2.44 (dual d'une somme et d'une intersection de cônes)**

1) Si  $K_1$  et  $K_2$  sont des cônes non vides, alors

$$(K_1 + K_2)^+ = K_1^+ \cap K_2^+.$$

2) Si  $K_1$  et  $K_2$  sont des cônes convexes fermés non vides, alors

$$(K_1 \cap K_2)^+ = \overline{K_1^+ + K_2^+}. \quad (2.35)$$

**Le lemme de Farkas et ses conséquences**

La notion de cône dual généralise celle de sous-espace vectoriel orthogonal, puisque si  $P$  est un sous-espace vectoriel,  $P^+ = P^\perp$ . On connaît bien la relation  $\mathcal{N}(A^\top)^\perp = \mathcal{R}(A)$ , rappelée en (A.6), qui nous apprend ce qu'est le cône dual d'un ensemble défini par des équations linéaires homogènes. Une question naturelle est alors de se demander ce qu'est le cône dual d'un ensemble donné par des *inégalités* linéaires homogènes. La réponse à cette question sera un corollaire du résultat plus général suivant. Dans celui-ci, on note  $A^* : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{E}$  l'application linéaire adjointe de l'application linéaire  $A : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$  et  $A(K) := \{Ax : x \in K\}$  l'image du cône  $K$  par  $A$ . On notera que le cône  $K$  de la proposition ne doit pas être fermé.

**Proposition 2.45 (Farkas généralisé)** Soient  $\mathbb{E}$  et  $\mathbb{F}$  deux espaces euclidiens,  $A : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$  une application linéaire et  $K$  un cône convexe non vide de  $\mathbb{E}$ . Alors

$$\{y \in \mathbb{F} : A^*y \in K^+\}^+ = \overline{A(K)}. \quad (2.36)$$

DÉMONSTRATION. On note  $D := \{y \in \mathbb{F} : A^*y \in K^+\}$ .

[ $\supseteq$ ] Comme  $D^+$  est fermé, il suffit de montrer que  $A(K) \subseteq D^+$ . Soit  $x \in K$  et montrons que  $Ax \in D^+$ . Pour cela on prend  $y \in D$  et on constate que

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle \geq 0,$$

car  $x \in K$  et  $A^*y \in K^+$ .

[ $\subseteq$  (par l'absurde)] Supposons qu'il existe un vecteur  $b \in D^+ \setminus \overline{A(K)}$ . On peut alors séparer strictement le convexe compact  $\{b\}$  et le convexe fermé  $\overline{A(K)}$  (point 3 du corollaire 2.37) : il existe  $y_0 \in \mathbb{F}$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ , tels que

$$\forall x \in K : \langle y_0, b \rangle < \alpha \leq \langle y_0, Ax \rangle. \quad (2.37)$$

Exploitions cela pour mettre en évidence une contradiction. En prenant  $x \rightarrow 0$ , on trouve

$$\langle y_0, b \rangle < 0. \quad (2.38)$$

Par ailleurs, on peut prendre  $x$  de la forme  $tx$  avec  $t > 0$  et  $x \in K$  dans (2.37). En divisant l'inégalité de droite par  $t$  et en passant à la limite lorsque  $t \rightarrow \infty$ , on trouve  $\langle y_0, Ax \rangle \geq 0$  ou  $\langle A^*y_0, x \rangle \geq 0$  ou  $A^*y_0 \in K^+$  (car  $x$  est arbitraire dans  $K$ ). Dès lors  $y_0 \in D$  et, comme  $b \in D^+$ , on obtient  $\langle y_0, b \rangle \geq 0$ , ce qui contredit (2.38).  $\square$

Comme un cône dual est fermé (point 1 de la proposition 2.43), on pourra ôter l'adhérence dans (2.36) si, et seulement si,  $A(K)$  est fermé.

L'identité (2.36) peut s'interpréter géométriquement comme suit (voir la figure 2.8). Elle signifie qu'un vecteur  $b \notin \overline{A(K)}$  si, et seulement si,  $b \notin \{y \in \mathbb{F} :$

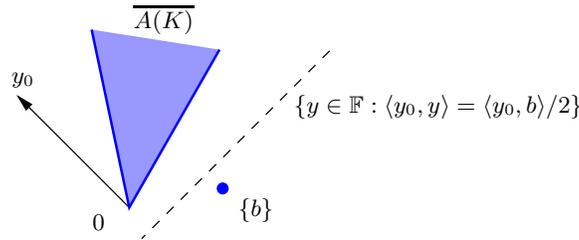


Fig. 2.8. Illustration du lemme de Farkas généralisé (proposition 2.45)

$A^*y \in K^+\}^+$ , ce qui revient à dire qu'il existe un vecteur  $y_0 \in \mathbb{F}$  tel que  $\langle y_0, b \rangle < 0$  et  $A^*y_0 \in K^+$  (ou  $\langle y_0, Ax \rangle \geq 0$  pour tout  $x \in K$ ). Cette propriété exprime donc le fait que l'hyperplan  $\{y \in \mathbb{F} : \langle y_0, y \rangle = \langle y_0, b \rangle / 2\}$  sépare strictement le singleton  $\{b\}$  de l'adhérence du cône  $A(K)$ . C'est d'ailleurs cet argument de séparation de ces ensembles qui a été utilisé dans la démonstration de la proposition 2.45.

Observons que  $\{y \in \mathbb{F} : A^*y \in K^+\} = (A^*)^{-1}(K^+)$  est l'image réciproque par l'application linéaire (continue)  $A^*$  du cône convexe fermé  $K^+$  ; il s'agit donc d'un cône convexe fermé. D'après le point 5 de la proposition 2.43, il est égal à son bidual. Dès lors, par le lemme de Farkas généralisé :

$$(A(K))^+ = \{y \in \mathbb{F} : A^*y \in K^+\}, \quad (2.39)$$

sans que l'on ait besoin de prendre d'adhérence à gauche (point 3 de la proposition 2.43).

L'identité (2.36) permet de donner une condition nécessaire pour que le système linéaire  $Ax = b$  ait une solution  $x$  dans  $K$ . Il faut en effet que  $b \in A(K) \subseteq \overline{A(K)}$  et donc que

$$\text{pour tout } y \text{ tel que } A^*y \in K^+ \text{ on ait } \langle y, b \rangle \geq 0. \quad (2.40)$$

Si  $A(K)$  est fermé, cette condition sur  $A$  et  $b$  est aussi suffisante. Si  $A(K)$  n'est pas fermé, on peut trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour que  $b \in A(K)$ , qui renforcent (2.40), voir [374]. Lorsque  $K$  est l'orthant positif de  $\mathbb{R}^n$ ,  $A(K)$  est fermé (remarque 2.19) et le résultat, exprimé sous une forme différente, est alors connu sous le nom de *théorème de l'alternative*. Diverses variantes sont considérées à l'exercice 2.39.

Voici un corollaire de la proposition 2.45, plus proche de la contribution originale de Farkas.

**Corollaire 2.46 (Farkas)** *Soient  $A_1$  et  $A_2$  deux matrices ayant le même nombre de lignes. Alors*

$$\{y : A_1^\top y = 0, A_2^\top y \geq 0\}^+ = \{A_1x_1 + A_2x_2 : x_1 \text{ quelconque}, x_2 \geq 0\},$$

où  $\{\cdot\}^+$  désigne le cône dual pour le produit scalaire euclidien.

DÉMONSTRATION. Supposons que  $A_i$  ( $i = 1, 2$ ) soit de type  $m \times n_i$ . On applique la proposition 2.45 avec  $\mathbb{E} = \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ ,  $\mathbb{F} = \mathbb{R}^m$ , tous deux munis du produit scalaire euclidien,  $A = (A_1 \ A_2)$ ,  $K = \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}_+^{n_2}$ . On calcule aisément

$$A^* = \begin{pmatrix} A_1^\top \\ A_2^\top \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad K^+ = \{0\} \times \mathbb{R}_+^{n_2}.$$

La proposition 2.45 conduit alors au résultat puisque  $\{A_1x_1 + A_2x_2 : x_2 \geq 0\} = \{A_1x'_1 - A_1x''_1 + A_2x_2 : x'_1 \geq 0, x''_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$  est un fermé (remarque 2.19).  $\square$

Terminons cette section par d'autres propriétés des cônes duaux et quelques règles de calcul.

**Corollaire 2.47 (polyédricité d'un cône dual)** *Soit  $P$  un polyèdre convexe d'un espace euclidien  $\mathbb{E}$ . Alors  $P^+$  est un polyèdre convexe.*

DÉMONSTRATION. Par le point 3 de la proposition 2.43,  $P^+ = K^+$ , où  $K = \text{cône } P$ . Par le point 4 de l'exercice 2.21,  $K$  est un cône polyédrique, qui est donc de la forme  $K = \{x \in \mathbb{E} : Ax \geq 0\}$ , où  $A : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}^m$  est linéaire. Par la proposition 2.45, son dual s'écrit  $K^+ = A^*(\mathbb{R}_+^m)$ . Comme image par  $A^*$  du cône polyédrique  $\mathbb{R}_+^m$ ,  $K^+$  est un cône polyédrique (proposition 2.18).  $\square$

**Lemme 2.48 (somme fermée de cônes duaux)**

- 1)  $P_1^+ + \dots + P_m^+$  est un polyèdre convexe (donc un fermé), si les  $P_i$  sont des polyèdres convexes,
- 2)  $K_1^+ + \dots + K_m^+$  est fermé, si les  $K_i$  sont des cônes convexes et si  $K_1^\circ \cap \dots \cap K_m^\circ \neq \emptyset$ .

DÉMONSTRATION. 1) Si les  $P_i$  sont polyédriques, les  $P_i^+$  sont aussi polyédriques (corollaire 2.47) et donc aussi leur somme  $P_1^+ + \dots + P_m^+$  (exercice 2.20 ou 2.21), qui est donc fermée.

2) Supposons à présent qu'il existe un point  $\tilde{x} \in K_1^\circ \cap \dots \cap K_m^\circ$  et que, pour  $i \in [1:m]$ , on ait des suites  $\{d_k^i\} \subseteq K_i^+$  telles que  $d_k^1 + \dots + d_k^m \rightarrow d$ . Il s'agit de montrer que  $d \in K_1^+ + \dots + K_m^+$ .

On note  $P_i$  est le projecteur orthogonal sur le sous-espace vectoriel  $\mathbb{E}_i := \text{vect } K_i$  et  $Q_i := I - P_i$  le projecteur orthogonal sur  $\mathbb{E}_i^\perp$ . Montrons d'abord que les suites  $\{P_i d_k^i\}$  sont bornées. Par hypothèse, il existe un  $\varepsilon > 0$  tel que  $\bar{B}(\tilde{x}, \varepsilon) \cap (\text{vect } K_i) \subseteq K_i$ . Alors  $\langle d_k^i, \tilde{x} - \varepsilon P_i d_k^i / \|P_i d_k^i\| \rangle \geq 0$ , d'où l'on déduit que  $\langle d_k^i, \tilde{x} \rangle \geq \varepsilon \|P_i d_k^i\|$  et  $\langle \sum_i d_k^i, \tilde{x} \rangle \geq \varepsilon \sum_i \|P_i d_k^i\|$ . Comme  $\sum_i d_k^i \rightarrow d$ , on voit que les  $\{P_i d_k^i\}$  sont bornées.

On peut alors trouver une sous-suite d'indices  $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{N}$  telle que chaque  $\{P_i d_k^i\}_{k \in \mathcal{K}}$  converge vers un  $\bar{d}^i \in \mathbb{E}_i$ . Comme pour tout  $x \in K_i$ , on a  $0 \leq \langle d_k^i, x \rangle = \langle P_i d_k^i, x \rangle \rightarrow \langle \bar{d}^i, x \rangle$ , il vient que  $\bar{d}^i \in K_i^+$ .

On déduit de ce qui précède que  $\{\sum_i Q_i d_k^i\}_{k \in \mathcal{K}}$  converge vers  $d - \sum_i \bar{d}^i$  dans le sous-espace vectoriel  $\sum_i \mathbb{E}_i^\perp$ , qui est un fermé. Dès lors  $d - \sum_i \bar{d}^i \in \sum_i \mathbb{E}_i^\perp$  et on peut trouver des  $\hat{d}^i \in \mathbb{E}_i^\perp$  tel que  $d - \sum_i \bar{d}^i = \sum_i \hat{d}^i$ . Observons maintenant que pour tout  $x \in K_i$ , on a  $\langle \hat{d}^i, x \rangle = 0$ .

On a donc montré que  $\bar{d}^i + \hat{d}^i \in K_i^+$  et donc que  $d = \sum_i (\bar{d}^i + \hat{d}^i) \in \sum_i K_i^+$ .  $\square$

**Corollaire 2.49 (dual d'une intersection)** Si  $K_i$ ,  $i \in [1:m]$ , sont des cônes convexes fermés d'un espace euclidien  $\mathbb{E}$ , alors

$$(K_1 \cap \dots \cap K_m)^+ = \overline{K_1^+ + \dots + K_m^+}.$$

On peut enlever l'adhérence si les  $K_i$  sont polyédriques ou si  $K_1^\circ \cap \dots \cap K_m^\circ \neq \emptyset$ .

DÉMONSTRATION. Soient  $A : \mathbb{E}^m \rightarrow \mathbb{E} : (x_1, \dots, x_m) \mapsto x_1 + \dots + x_m$  et  $K = K_1^+ \times \dots \times K_m^+$ . On vérifie aisément que  $A^* : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}^m : x \mapsto (x, \dots, x)$ , que  $K$  est un cône convexe fermé et que  $K^+ = K_1 \times \dots \times K_m$ . L'identité se déduit alors du lemme

de Farkas généralisé (proposition 2.45). Par le lemme 2.48,  $K_1^+ + \dots + K_m^+$  est fermé si les  $K_i$  sont polyédriques ou si  $K_1^\circ \cap \dots \cap K_m^\circ \neq \emptyset$ .  $\square$

On ne peut pas se passer de l'adhérence dans le résultat précédent, même si  $K_1 \cap K_2^\circ \cap \dots \cap K_m^\circ \neq \emptyset$ . Par exemple, dans  $\mathbb{R}^3$ , si  $m = 2$ ,  $K_1 = \mathbb{R}_\nabla^3$  et  $K_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_2 = x_3\}$ , on a  $K_1^+ = \mathbb{R}_\nabla^3$  (autodualité du cône),  $K_2^+ = \{d \in \mathbb{R}^3 : d_1 = 0, d_2 + d_3 = 0\}$ ,  $K_1 \cap K_2^\circ = K_1 \cap K_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 0, x_2 = x_3 \geq 0\} \neq \emptyset$ , alors que  $K_2^+ + K_3^+ = \{d : d_2 + d_3 > 0\} \cup \{d \in \mathbb{R}^3 : d_1 = 0, d_2 + d_3 = 0\}$  n'est pas fermé.

### Polyèdre borné et singleton

La caractérisation de la bornitude du polyèdre  $P$  donné par (2.19) s'obtient aisément par l'examen de son cône asymptotique  $P^\infty$ . Les caractérisations obtenues montrent que la propriété de bornitude ne dépend pas de  $b$  (mais pour certains  $b$ ,  $P$  pourra être vide, ce qui ne contredit pas sa bornitude).

**Proposition 2.50 (polyèdre borné)** Soient  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  et  $P := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i)  $P$  est borné,
- (ii) tout vecteur  $d \in \mathbb{R}^n$  vérifiant  $Ad \leq 0$  est nul,
- (iii)  $A^\top(\mathbb{R}_+^m) = \mathbb{R}^n$ .

DÉMONSTRATION. [(i)  $\Leftrightarrow$  (ii)] D'après la proposition 2.8,  $P$  est borné si, et seulement si,  $P^\infty = \{0\}$ . L'équivalence se déduit alors du fait que  $P^\infty = \{d : Ad \leq 0\}$ .

[(ii)  $\Leftrightarrow$  (iii)] (ii)  $\Leftrightarrow \{d : Ad \leq 0\} = \{0\} \Leftrightarrow \mathbb{R}^n = \{d : Ad \leq 0\}^+ = A^\top(\mathbb{R}_+^m)$  (lemme de Farkas [proposition 2.45],  $(\mathbb{R}_+^m)^+ = \mathbb{R}_+^m$  [point 1 de l'exercice 2.35] et  $A^\top(\mathbb{R}_+^m)$  fermé [(2.24)])  $\Leftrightarrow$  (iii).  $\square$

Lorsqu'on considère le système linéaire  $Ax = b$ , avec  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $b \in \mathbb{R}^n$ , il est naturel de se demander si celui-ci a une solution  $x$  unique. On sait qu'il en sera ainsi, quel que soit  $b \in \mathbb{R}^n$ , si, et seulement si,  $A$  est inversible. On cherche ici des conditions similaires pour que le système d'inégalités affines  $Ax \leq b$  ait une unique solution  $x$ , autrement dit, pour que le polyèdre convexe  $P$  défini par (2.19) soit un singleton. Pour ce cas, une condition nécessaire et suffisante ne peut s'exprimer qu'en terme de la matrice  $A$ , car si  $b$  devient « grand », le polyèdre  $P$  est « grand » aussi. Pour pouvoir utiliser les conditions nécessaires et suffisantes du résultat suivant, il faut aussi connaître un point du polyèdre convexe.

**Proposition 2.51 (polyèdre singleton)** Soient  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  vérifiant  $Ax \leq b$ ,  $I := \{i \in [1 : m] : (Ax - b)_i = 0\}$ ,  $m_I := |I|$  et  $A_I$  la sous-matrice de  $A$  formée de ses lignes avec indices dans  $I$ . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i)  $x$  est l'unique solution de  $Ax \leq b$ ,

- (ii) tout vecteur  $d \in \mathbb{R}^n$  vérifiant  $A_I d \leq 0$  est nul,  
 (iii)  $A_I^T(\mathbb{R}_+^{m_I}) = \mathbb{R}^n$ .

DÉMONSTRATION. [(i)  $\Rightarrow$  (ii)] Avec un vecteur  $d$  vérifiant les conditions données, on peut trouver  $t > 0$  tel que  $x' = x + td$  vérifie  $Ax' \leq b$ . En effet, si  $(Ax - b)_i < 0$ , on a  $(Ax')_i = (Ax)_i + t(Ad)_i \leq b_i$  si  $t > 0$  est assez petit car  $(Ax)_i < b_i$  (et il y a un nombre fini de tels indices  $i$ ); si  $(Ax - b)_i = 0$ , on a  $(Ax')_i = (Ax)_i + t(Ad)_i = b_i + t(Ad)_i \leq b_i$ , car  $(Ad)_i \leq 0$  par hypothèse. L'unicité de  $x$  implique que  $x' = x$ , donc  $d = 0$ .

[(ii)  $\Rightarrow$  (i)] Soit  $x'$  tel que  $Ax' \leq b$ . On pose  $d := x' - x$ . Si  $(Ax - b)_i = 0$ , on a  $(Ad)_i = (Ax')_i - (Ax)_i = (Ax')_i - b_i \leq 0$ . Par (ii),  $d = 0$  et donc  $x' = x$ .

[(ii)  $\Leftrightarrow$  (iii)] Voir la démonstration de l'équivalence (ii)  $\Leftrightarrow$  (iii) de la proposition 2.50.  $\square$

La condition (ii) (resp. (iii)) de la proposition 2.51 est plus forte (moins souvent vérifiée) que la condition (i) (resp. (iii)) de la proposition 2.50, ce qui est consistant avec le fait qu'un singleton est borné!

### 2.5.6 Cône tangent

Soit  $\mathbb{E}$  est un espace vectoriel de dimension finie et  $C$  est un convexe non vide de  $\mathbb{E}$ , que l'on ne suppose pas nécessairement fermé.

**Définitions 2.52** On dit que  $d \in \mathbb{E}$  est une *direction admissible* de  $C$  en  $x \in \mathbb{E}$  si  $x + td \in C$  pour tout  $t > 0$  petit. L'ensemble des directions admissibles forme un cône, noté

$$\mathbb{T}_x^a C := \{d \in \mathbb{E} : x + td \in C \text{ pour tout } t > 0 \text{ petit}\},$$

que l'on appelle le *cône des directions admissibles*.  $\square$

La conicité de  $\mathbb{T}_x^a C$  ne fait aucun doute. Par ailleurs, la définition montre que

$$x \notin \overline{C} \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{T}_x^a C = \emptyset. \quad (2.41)$$

Enfin, par la convexité de  $C$ , on voit que

$$x \in C \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{T}_x^a C = \{d \in \mathbb{E} : x + td \in C \text{ pour un } t > 0\}, \quad (2.42)$$

$$= \bigcup_{t>0} \frac{C - x}{t}, \quad (2.43)$$

$$= \mathbb{R}_{++}(C - x), \quad (2.44)$$

$$= \mathbb{R}_+(C - x). \quad (2.45)$$

Le cas où  $x \in \overline{C} \setminus C$  est moins aisé à décrire, si bien que certains auteurs préfèrent supposer d'emblée que  $C$  est fermé [317]. On notera que  $\mathbb{T}_x^a C$  n'est pas nécessairement fermé, même si  $C$  est fermé et  $x \in C$ ; ainsi pour le disque  $C := \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 1\}$  et le point  $x = 0$  puisque l'on a  $\mathbb{T}_x^a C = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\} \cup \{0\}$ . La définition suivante a donc bien un sens.

**Définition 2.53** On appelle *cône tangent* à  $C$  en  $x \in \mathbb{E}$  l'adhérence de  $\mathbf{T}_x^a C$ . On le note

$$\mathbf{T}_x C := \overline{\mathbf{T}_x^a C}. \quad \square$$

On déduit de (2.41), (2.44) et (2.45) que

$$\begin{aligned} x \notin \overline{C} &\implies \mathbf{T}_x C = \emptyset, \\ x \in C &\implies \mathbf{T}_x C = \overline{\mathbb{R}_{++}(C-x)} = \overline{\mathbb{R}_+(C-x)}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Le cas où  $x \in \overline{C} \setminus C$  ne posera pas de difficulté d'expression du cône tangent, grâce aux formulations en termes de suites données dans la proposition suivante.

**Proposition 2.54 (autres expressions du cône tangent)** *Si  $C$  est une partie convexe d'un espace vectoriel de dimension finie  $\mathbb{E}$  et  $x \in \overline{C}$ , alors*

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_x C &= \left\{ d \in \mathbb{E} : \exists \{x_k\} \subseteq C, \exists \{t_k\} \downarrow 0 \text{ telles que } \frac{x_k - x}{t_k} \rightarrow d \right\} \\ &= \left\{ d \in \mathbb{E} : \exists \{x_k\} \subseteq C^\circ, \exists \{t_k\} \downarrow 0 \text{ telles que } \frac{x_k - x}{t_k} \rightarrow d \right\}. \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Désignons par  $\mathbf{T}'_x C$  la première nouvelle expression du cône tangent et par  $\mathbf{T}''_x C$  la seconde.

$[\mathbf{T}_x C \subseteq \mathbf{T}'_x C]$  Soit  $d \in \mathbf{T}_x C$ . Par la définition 2.53, il existe une suite  $\{d_k\} \subseteq \mathbf{T}_x^a C$  telle que  $d_k \rightarrow d$ . Par conséquent, pour tout  $k$ , on peut trouver un  $t_k > 0$  tel que  $x_k := x + t_k d_k \in C$ . Comme les  $t_k$  peuvent être pris arbitrairement petits, on peut s'arranger pour que  $t_k \rightarrow 0$ . Alors  $(x_k - x)/t_k = d_k \rightarrow d$  montre que  $d \in \mathbf{T}'_x C$ .

$[\mathbf{T}'_x C \subseteq \mathbf{T}''_x C]$  Soit  $d \in \mathbf{T}'_x C$ , si bien qu'il existe des suites  $\{x_k\} \subseteq C$  et  $\{t_k\} \subseteq \mathbb{R}_{++}$  telles que  $t_k \rightarrow 0$  et  $(x_k - x)/t_k \rightarrow d$ . Soit  $\tilde{x} \in C^\circ$  qui est non vide (point 1 de la proposition 2.16). On peut supposer que  $t_k \leq 1$ . Alors  $x'_k = (1 - t_k^2)x_k + t_k^2 \tilde{x} \in C^\circ$  par le lemme 2.14. Comme  $(x'_k - x)/t_k = (1 - t_k^2)(x_k - x)/t_k + t_k(\tilde{x} - x) \rightarrow d$ , on a montré que  $d \in \mathbf{T}''_x C$  comme limite d'éléments de  $\mathbf{T}_x^a C$ .

$[\mathbf{T}''_x C \subseteq \mathbf{T}_x C]$  Soit  $d \in \mathbf{T}''_x C$ , si bien qu'il existe des suites  $\{x_k\} \subseteq C^\circ$  et  $\{t_k\} \subseteq \mathbb{R}_{++}$  telles que  $t_k \rightarrow 0$  et  $d_k := (x_k - x)/t_k \rightarrow d$ . Par le lemme 2.14,  $x + t d_k = (1 - (t/t_k))x + (t/t_k)x_k \in C^\circ \subseteq C$  pour tout  $t \in ]0, t_k]$ , si bien que  $d_k \in \mathbf{T}_x^a C$ . Donc  $d \in \mathbf{T}_x C$ .  $\square$

Comme  $C$  et  $\overline{C}$  ont les mêmes intérieurs relatifs (point 3 de l'exercice 2.13), on déduit de la seconde expression du cône tangent dans la proposition précédente que, quel que soit  $x \in \mathbb{E}$ :

$$\mathbf{T}_x \overline{C} = \mathbf{T}_x C. \quad (2.47)$$

Si  $x \notin \overline{C}$  les deux cônes ci-dessus sont vides.

La démonstration de la proposition suivante est proposée à l'exercice 2.34.

**Proposition 2.55 (propriétés des cônes  $\mathbf{T}_x^a C$  et  $\mathbf{T}_x C$ )** Si  $C$  est une partie convexe d'un espace vectoriel de dimension finie  $\mathbb{E}$  et  $x \in C$ , alors

- 1)  $\mathbf{T}_x^a C$  est un cône convexe *pointé* et  $\mathbf{T}_x C$  est un cône convexe fermé *pointé*,
- 2)  $\text{aff}(\mathbf{T}_x C) = \text{aff}(\mathbf{T}_x^a C) = (\text{aff } C) - x$ ,
- 3)  $(\mathbf{T}_x C)^\ominus = (\mathbf{T}_x^a C)^\ominus = R_{++}(C^\ominus - x)$ ,
- 4)  $\mathbf{T}_x C = (\mathbf{N}_x C)^-$  et  $\mathbf{N}_x C = (\mathbf{T}_x C)^-$ .

**Proposition 2.56 (calcul de cône tangent)** Soient  $\mathbb{E}_1$  et  $\mathbb{E}_2$  des espaces vectoriels.

- 1) Si  $C_1 \subseteq \mathbb{E}_1$  et  $C_2 \subseteq \mathbb{E}_2$  sont deux convexes, alors

$$\mathbf{T}_{(x_1, x_2)}(C_1 \times C_2) = \mathbf{T}_{x_1} C_1 \times \mathbf{T}_{x_2} C_2.$$

- 2) Si  $\{C_i\}_{i \in I}$  est une famille de parties convexes fermées de  $\mathbb{E}$  et  $x \in \bigcap_{i \in I} C_i$ , alors

$$\mathbf{T}_x^a(\bigcap_{i \in I} C_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} (\mathbf{T}_x^a C_i), \text{ avec égalité si } I \text{ est fini,}$$

$$\mathbf{T}_x(\bigcap_{i \in I} C_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} (\mathbf{T}_x C_i), \text{ avec égalité si } I \text{ est fini et si } \bigcap_{i \in I} C_i^\ominus \neq \emptyset.$$

DÉMONSTRATION. 1) On a successivement

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{(x_1, x_2)}(C_1 \times C_2) &= \text{adh}(\mathbb{R}_+(C_1 \times C_2 - (x_1, x_2))) \\ &= \text{adh}(\mathbb{R}_+((C_1 - x_1) \times (C_2 - x_2))) \\ &= \text{adh}(\mathbb{R}_+(C_1 - x_1) \times \mathbb{R}_+(C_2 - x_2)) \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} &= \text{adh}(\mathbb{R}_+(C_1 - x_1)) \times \text{adh}(\mathbb{R}_+(C_2 - x_2)) \quad (2.49) \\ &= \mathbf{T}_{x_1} C_1 \times \mathbf{T}_{x_2} C_2. \end{aligned}$$

L'inclusion  $\subseteq$  en (2.48) ne pose pas de difficulté et l'inclusion réciproque repose sur l'identité

$$\left( t_1(x'_1 - x_1), t_2(x'_2 - x_2) \right) = t_2 \left( (1 - t_1/t_2)x_1 + (t_1/t_2)x'_1 - x_1, x'_2 - x_2 \right),$$

qui permet de conclure lorsque  $0 \leq t_1 \leq t_2$  (non restrictif) et les  $x'_i$  sont arbitraires dans les  $C_i$ . Pour (2.49), on utilise le fait que  $\text{adh}(P_1 \times P_2) = (\text{adh } P_1) \times (\text{adh } P_2)$ , quels que soient les ensembles  $P_i \subseteq \mathbb{E}_i$ .

$$2) \text{ On a } \mathbf{T}_x^a(\bigcap_{i \in I} C_i) = \mathbb{R}_+((\bigcap_{i \in I} C_i) - x) = \mathbb{R}_+(\bigcap_{i \in I} (C_i - x)) \subseteq \bigcap_{i \in I} (\mathbb{R}_+(C_i - x)) = \bigcap_{i \in I} (\mathbf{T}_x^a C_i).$$

Si  $I = [1 : m]$  est fini, la dernière inclusion devient une égalité. En effet, si un point  $y \in \bigcap_{i \in I} (\mathbb{R}_+(C_i - x))$ , il peut s'écrire  $y = t_i(x_i - x)$  avec  $t_i \geq 0$  et  $x_i \in C_i$ , quel que soit  $i \in [1 : m]$ . On peut supposer que  $t_m = \max_i t_i$ . Si  $t_m = 0$ , alors  $y = 0$  qui est clairement dans  $\mathbb{R}_+((\bigcap_{i \in I} C_i) - x)$ . Si  $t_m > 0$ , on introduit  $\bar{x} := x + y/t_m$ . On a

$\bar{x} = x + (t_i/t_m)(x_i - x) = (1 - t_i/t_m)x + (t_i/t_m)x_i \in C_i$ , par convexité de  $C_i$ . Donc  $\bar{x} \in \cap_i C_i$ . Alors  $y = t_m(\bar{x} - x)$  est dans  $\mathbb{R}_+(\cap_{i \in I} C_i - x)$ .

La seconde inclusion s'obtient en prenant l'adhérence des deux membres de la première inclusion, car  $\text{adh}(\cap_i P_i) \subseteq \cap_i(\text{adh } P_i)$ .

Si  $I = [1 : m]$  est fini, la première identité du point 2 nous apprend que

$$\mathbf{T}_x^a(\cap_{i \in I} C_i) = \cap_{i \in I}(\mathbf{T}_x^a C_i) \quad \text{et} \quad \mathbf{T}_x^a(\cap_{i \in I} C_i^\ominus) = \cap_{i \in I}(\mathbf{T}_x^a(C_i^\ominus)). \quad (2.50)$$

Maintenant, si  $\cap_{i \in I} C_i^\ominus \neq \emptyset$ , on peut y trouver un point  $x_0$ . Clairement,  $x_0 - x \in \mathbf{T}_x^a(\cap_{i \in I} C_i^\ominus)$ , si bien que  $\cap_{i \in I}(\mathbf{T}_x^a(C_i^\ominus)) \neq \emptyset$  par (2.50)<sub>2</sub>.

En prenant l'adhérence des deux membres de cette identité, on obtient  $\mathbf{T}_x(\cap_{i \in I} C_i) = \cap_{i \in I}(\mathbf{T}_x C_i)$ , grâce au point 2 de la proposition 2.17 et à l'hypothèse de qualification  $\cap_{i \in I} C_i^\ominus \neq \emptyset$ .  $\square$

## Notes

Hermann Minkowski (1864-1909) fut l'un des premiers à avoir étudié systématiquement les ensembles convexes [421 ; 1896]. Au départ, ce fut dans le but de résoudre des problèmes en théorie des nombres, alors que notre présentation est davantage de nature qualitative, orientée vers l'analyse. On lui doit par exemple la proposition 2.23 sur la « résolution » d'un polyèdre convexe.

L'*élimination de Fourier* [219 ; 1827] a été redécouverte plus d'un siècle plus tard par Motzkin [444 ; 1936]. Celle-ci a été reconsidérée à maintes reprises en vue de son amélioration [381, 380, 324, 339, 113], mais l'obtention d'une description explicite du projeté d'un polytope est un problème NP-ardu [588 ; 2008].

La proposition 2.18 a été étendue à des cas beaucoup plus généraux. Ainsi, on peut montrer que l'image par une application linéaire d'un ensemble de la forme  $c^{-1}(0)$ , où  $c : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  a ses composantes convexes et « *als* » (*asymptotically level stable*), est fermée [29 ; corollaire 3.7.1]. Cette classe de fonctions  $c_i$  inclut celles qui sont convexes et quadratiques par morceaux (leur domaine est une union finie de polyèdres convexes, sur chacun desquels la fonction est quadratique [29 ; proposition 3.3.3]).

Le lemme de Farkas a été énoncé la première fois dans [202 ; 1902] .

## Exercices

**2.1.** *Ensembles convexes.* On note  $\mathbb{E}$  un espace vectoriel ou euclidien au besoin.

- 1) Soient  $A$  un intervalle non vide de  $\mathbb{R}_+$  et  $C$  un convexe de  $\mathbb{E}$ . Alors  $AC := \{\lambda x : \lambda \in A, x \in C\}$  est convexe.
- 2) Si  $C \subseteq \mathbb{E}$  est un convexe, alors  $C + C = 2C$ .
- 3) Si  $K \subseteq \mathbb{E}$  est un cône, alors  $K$  est convexe si, et seulement si,  $K + K = K$ .
- 4) *Diagramme de Voronoï.* Soient  $p$  un point de  $\mathbb{E}$  et  $Q$  une partie arbitraire et non vide de  $\mathbb{E}$ . On note  $d_P$  la distance à un ensemble  $P$  de  $\mathbb{E}$ . Alors  $V_{p,Q} := \{x \in \mathbb{E} : d_{\{p\}}(x) \leq d_Q(x)\}$  est convexe.

**2.2.** *Calcul d'enveloppe affine.* Soient  $P$  et  $Q$  des parties d'un espace vectoriel  $\mathbb{E}$  et  $C$  une partie convexe.

- 1)  $P \subseteq Q \implies \text{aff } P \subseteq \text{aff } Q$ .
  - 2)  $\text{aff}(P \cap Q) \subseteq (\text{aff } P) \cap (\text{aff } Q)$ .
  - 3)  $\text{aff}(P + Q) = (\text{aff } P) + (\text{aff } Q)$ .
  - 4)  $\text{aff } \overline{P} = \text{aff } P$ .
  - 5)  $0 \in \overline{P} \implies \text{aff } P = \text{aff}(\mathbb{R}_{++}P) = \text{aff}(\mathbb{R}_+P) = \text{vect } P$ .
  - 6)  $\text{aff}(\text{cone } P) = \text{vect } P$ .
  - 7)  $C$  convexe  $\implies \text{aff } C = \{tx + (1-t)y : t \in \mathbb{R}, x, y \in C\}$  (comparez avec (2.3)).
- Si  $P$  et  $Q$  sont des parties des espaces vectoriels  $\mathbb{E}$  et  $\mathbb{F}$  respectivement, alors
- 8)  $\text{aff}(P \times Q) = (\text{aff } P) \times (\text{aff } Q)$ .

**2.3.** *Maximum d'une combinaison convexe de valeurs.* Soient  $\{v_i\}_{i \in [1:p]} \subseteq \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  un nombre fini  $p$  de valeurs et  $\Delta_p$  le **simplexe unité** de  $\mathbb{R}^p$ . Alors

$$\max_{\alpha \in \Delta_p} \left( \sum_{\substack{i \in [1:p] \\ \alpha_i \neq 0}} \alpha_i v_i \right) = \max_{i \in [1:p]} v_i.$$

**2.4.** *Calcul d'enveloppe convexe.* Démontrez la proposition 2.5.

**2.5.** *Enveloppe convexe d'un nombre fini de convexes.* Si  $P = C_1 \cup \dots \cup C_m$ , où les  $C_i$  sont convexes, alors  $\text{co } P = \{\sum_{i=1}^m t_i x_i : (t_1, \dots, t_m) \in \Delta_m, x_i \in C_i \text{ pour tout } i\}$  (comparez avec la proposition 2.2).

**2.6.** *Exemples d'enveloppes convexes.*

- 1) Soient  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  une partie d'un espace vectoriel  $\mathbb{E}$  formée de  $n$  points et  $k \in [1:n]$ . Alors  $\text{co}\{x_{i_1} + \dots + x_{i_k} : 1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n\} = k(\text{co } X)$ .
- 2) Soient  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  une partie d'un espace vectoriel  $\mathbb{E}$  formée de  $n$  points et  $k \in [1:n]$ . Alors  $\text{co}\{x_{i_1} + \dots + x_{i_k} : 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\} = \{\sum_{i=1}^n t_i x_i : t_i \in [0, 1] \text{ pour tout } i \text{ et } \sum_{i=1}^n t_i = k\}$ .

**2.7.** *Enveloppe conique d'une somme.* Soient  $P$  et  $Q$  deux ensembles d'un même espace vectoriel. Montrez que

$$\text{cone}(P + Q) \subseteq \text{cone } P + \text{cone } Q \subseteq \text{cone}(\mathbb{R}_+P + \mathbb{R}_+Q).$$

En déduire que si  $P$  et  $Q$  sont des cônes convexes, alors  $P + Q$  est un cône convexe.

**2.8.** *Enveloppe conique.* Démontrez la proposition 2.6.

**2.9.** *Calcul de cône asymptotique.* Démontrez la proposition 2.9. De plus, donnez un exemple dans lequel (2.7) n'a pas lieu parce que l'intersection des  $C_i$  est vide. Donnez également un exemple dans lequel (2.8) n'a pas lieu parce que  $\mathcal{N}(A) \cap C^\infty$  n'est pas un sous-espace vectoriel.

**2.10.** *Calcul de points extrêmes.* Démontrez la proposition 2.12.

**2.11.** *Face exposée d'un convexe.* Soit  $C$  un convexe d'un espace euclidien  $\mathbb{E}$ . On dit qu'une partie  $E$  de  $C$  est *exposée* s'il existe  $\xi \in \mathbb{E}$  tel que  $E = \text{arg min } \{\langle \xi, x \rangle : x \in C\}$ . Montrez que toute partie exposée d'un convexe est une **face**, mais que la réciproque n'est pas nécessairement vraie (elle est vraie dans le cas d'un polyèdre convexe, voir l'exercice 2.20).

**2.12.** *Autour du lemme 2.14 d'intériorité relative.* Soit  $\mathbb{E}$  un espace vectoriel.

- 1) Démontrez le corollaire 2.15.
- 2) Si  $C_1$  et  $C_2$  sont deux convexes de  $\mathbb{E}$  tels que  $C_1 \cap C_2^\circ \neq \emptyset$ , alors  $(C_1 \cap \text{aff } C_2)^\circ \cap C_2^\circ \neq \emptyset$ .
- 3) *Ensemble convexe dense.* Si  $C$  est un convexe **dense** de  $\mathbb{E}$ , alors  $C = \mathbb{E}$ .

**2.13.** *Topologie des ensembles convexes.* Soit  $P$  une partie d'un espace vectoriel  $\mathbb{E}$ . On note  $F(x)$  la face d'un convexe  $C$  engendrée par un point  $x \in C$ .

- 1)  $\text{aff } P^\circ \subseteq \text{aff } P$ , avec égalité si  $P^\circ \neq \emptyset$  (c'est le cas si  $P$  est convexe).
- 2)  $A$  affine et  $C^\circ \subseteq A \subseteq C$  impliquent que  $C = A$ .
- 3)  $\overline{P^\circ} \subseteq \overline{P}$  et  $P^\circ \subseteq (\overline{P})^\circ$ , avec des égalités si  $P$  est convexe.
- 4) Si  $C$  est convexe, alors  $C^\circ$ ,  $C$  et  $\overline{C}$  ont la même **enveloppe affine**, le même intérieur relatif, la même adhérence et la même frontière relative.
- 5) Deux convexes ont le même intérieur relatif si, et seulement si, ils ont la même adhérence.
- 6) Pour tout  $x \in C$ ,  $x \in F(x)^\circ$ .

**2.14.** *Propriété topologique des cônes.* Soit  $K$  un cône. Alors son adhérence  $\overline{K}$  et son intérieur relatif  $K^\circ$  sont également des cônes.

**2.15.** *Conditions de qualification équivalentes.* Si  $C_1$  et  $C_2$  sont deux convexes, alors

$$0 \in (C_1 - C_2)^\circ \iff C_1^\circ \cap C_2^\circ \neq \emptyset.$$

**2.16.** *Face d'un convexe.* Soient  $C$  un convexe et  $F$  une face non vide de  $C$ .

- 1) Si  $F_0$  est une face de  $F$ , alors  $F_0$  est une face de  $C$ .
- 2)  $\text{ext}(F) \subseteq \text{ext}(C)$ .
- 3) Si  $C$  est fermé, alors  $\text{ext}(F) \neq \emptyset \iff \text{ext}(C) \neq \emptyset$ .

**2.17.** *Points extrêmes des boules unités  $\ell_1$  et  $\ell_\infty$ .* Dans  $\mathbb{R}^n$ , la boule-unité pour la norme  $\ell_1$  a  $2n$  points extrêmes et la boule-unité pour la norme  $\ell_\infty$  en a  $2^n$ .

**2.18.** *Théorème de Birkhoff [60, 364].* On dit qu'une matrice  $G$  est *doublement stochastique* si ses éléments sont positifs ( $G_{ij} \geq 0$  pour tout  $i$  et  $j$ ) et si la somme des éléments de chaque ligne et de chaque colonne vaut 1 ( $\sum_i G_{ij} = 1$  pour tout  $j$  et  $\sum_j G_{ij} = 1$  pour tout  $i$ ). On note  $\mathbb{G}^n$  l'ensemble des matrices d'ordre  $n$  doublement stochastiques. Calculez  $\text{ext}(\mathbb{G}^n)$ .

**2.19.** *Cônes convexes.* Soit  $K$  un cône d'un espace vectoriel  $\mathbb{E}$ .

- 1)  $K$  est convexe ssi pour tout  $\forall x, y \in K$  et  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ , on a  $\alpha x + \beta y \in K$ .
- 2) Si  $K$  est convexe,  $x \in K^\circ$ ,  $y \in K$ ,  $\alpha > 0$  et  $\beta \geq 0$ , alors  $\alpha x + \beta y \in K^\circ$ .
- 3) Si  $K = \text{cone}\{x_1, \dots, x_p\}$ , alors  $\text{aff } K = \text{vect}\{x_1, \dots, x_p\}$  et  $K^\circ = \{\sum_{i=1}^p \alpha_i x_i : \alpha_i > 0 \text{ pour tout } i\}$ .

**2.20.** *Polyèdre convexe sous représentation duale.* Soit  $P := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = a, Bx \leq b\}$  un polyèdre convexe de  $\mathbb{R}^n$  (on suppose les dimensions consistantes).

- 1) L'ensemble  $F$  est une face de  $P$  si, et seulement si, il existe un ensemble d'indices  $I$  tel que  $F = \{x \in P : (Bx - b)_I = 0\}$ .
- 2) Toute face de  $P$  est une partie exposée (on sait que la réciproque est vraie pour un convexe quelconque: toute partie exposée d'un convexe est une face, voir l'exercice 2.11).
- 3) Le point  $x \in P$  est un sommet de  $P$  si, et seulement si, la matrice  $(A^T \ B_I^T)^T$  formée de la matrice  $A$  et des lignes de  $B$  d'indices dans  $I := \{i : (Bx - b)_i = 0\}$  est injective.
- 4)  $P^\infty = \{d \in \mathbb{R}^n : Ad = 0, Bd \leq 0\}$ .
- 5) Si  $I$  est l'ensemble des indices  $i$  tels que  $\{x \in P : B_i x < b_i\} \neq \emptyset$  et  $I^c$  son complémentaire, alors  $\text{aff } P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = a, B_{I^c} x = b_{I^c}\}$  et  $P^\circ = \{x \in P : B_I x < b_I\}$  ( $= P$  si  $I = \emptyset$ ).
- 6) La somme de deux polyèdres convexes est un polyèdre convexe (donnez la représentation duale de cette somme).

- 7) L'image réciproque d'un polyèdre convexe par une application linéaire est un polyèdre convexe.
- 8) Le produit cartésien de deux polyèdres convexes est un polyèdre convexe.

**2.21.** *Polyèdre convexe sous représentation primale.* Soit  $P$  un polyèdre convexe d'un espace vectoriel  $\mathbb{E}$ , donné sous la forme  $P = \text{co}\{x_1, \dots, x_p\} + \text{cone}\{y_1, \dots, y_q\}$ , avec des  $x_i$  et des  $y_j \in \mathbb{E}$ .

- 1)  $\text{ext}(P) \subseteq \{x_1, \dots, x_p\}$  sans que l'on ait nécessairement l'égalité.
- 2)  $P^\circ = \text{cone}\{y_1, \dots, y_q\}$ .
- 3)  $P^\circ = \{\sum_i \alpha_i x_i + \sum_j \beta_j y_j : \sum_i \alpha_i = 1, \alpha > 0, \beta > 0\}$ .
- 4)  $\text{cone } P = \text{cone}\{x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q\}$ , qui est donc un cône polyédrique.
- 5) La somme de deux polyèdres convexes est un polyèdre convexe (donnez la représentation primale de cette somme).
- 6) L'image d'un polyèdre convexe par une application linéaire est un polyèdre convexe.

**2.22.** *Projeté d'un polyèdre convexe.* On considère le polyèdre convexe  $P := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} : A_1 x_1 + A_2 x_2 \leq b\}$ , où les matrices  $A_i$  sont de type  $m \times n_i$  et  $b \in \mathbb{R}^m$ . Montrez que le projeté de  $P$  sur  $\mathbb{R}^{n_1}$ , qui est l'ensemble  $\{x_1 \in \mathbb{R}^{n_1} : \text{il existe un } x_2 \in \mathbb{R}^{n_2} \text{ tel que } (x_1, x_2) \in P\}$ , est le polyèdre convexe  $P_1 := \{x_1 \in \mathbb{R}^{n_1} : y^\top A_1 x_1 \leq y^\top b, \text{ pour tout } y \in \mathbb{R}_+^m \cap \mathcal{N}(A_2^\top)\}$ .

**2.23.** *Image d'un cône convexe fermé par une application linéaire.* On considère le cône convexe fermé  $K := \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \leq x_3^2, x_3 \geq 0\}$  (voir l'exercice 2.35) et l'application linéaire  $A : x \in \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 : x \mapsto (x_1, x_2 + x_3)$ . Montrez que le cône  $\{Ax : x \in K\}$  n'est pas fermé dans  $\mathbb{R}^2$ .

Conséquence. L'image par une application linéaire d'un cône convexe fermé n'est pas nécessairement fermée.

**2.24.** *Somme d'un cône convexe fermé et d'un sous-espace vectoriel.* Montrez que la somme d'un cône convexe fermé et d'un sous-espace vectoriel n'est pas nécessairement fermée.

**2.25.** *Propriétés variationnelles de la projection.* Soit  $\mathbb{E}$  un espace vectoriel euclidien (produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et norme associée  $\|\cdot\|$ ). Soient  $C$  une partie convexe fermée non vide de  $\mathbb{E}$  et  $x$  un point de  $\mathbb{E}$ . On note  $\bar{x}$  le projeté de  $x$  sur  $C$ . Montrez que

$$\forall y \in C : \langle y - x, \bar{x} - x \rangle \geq 0 \quad \text{et} \quad \|y - \bar{x}\| \leq \|y - x\|.$$

Montrez par un exemple qu'aucune de ces propriétés ne caractérise le projeté  $\bar{x}$ .

**2.26.** *Projection sur un cône convexe fermé.* polyedre convexe@polyèdre convexe!projection d'un - Soit  $\mathbb{E}$  un espace vectoriel euclidien (produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ). Soient  $K$  un cône convexe fermé non vide de  $\mathbb{E}$  et  $x \in \mathbb{E}$ . Montrez que  $\bar{x} \in K$  est le projeté de  $x$  sur  $K$  si, et seulement si,

$$\langle \bar{x} - x, \bar{x} \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \forall y \in K : \langle \bar{x} - x, y \rangle \geq 0. \tag{2.51}$$

**2.27.** *Décomposition de Moreau [441].* Soient  $\mathbb{E}$  un espace euclidien (produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ),  $K$  un cône convexe fermé de  $\mathbb{E}$  et  $K^-$  son cône dual négatif. On note  $P_K$  et  $P_{K^-}$  les projecteurs orthogonaux sur  $K$  et  $K^-$  respectivement. Montrez que, pour  $x, y$  et  $z$  donnés dans  $\mathbb{E}$ , les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i)  $z = x + y, x \in K, y \in K^-$  et  $\langle x, y \rangle = 0$ ,
- (ii)  $x = P_K(z)$  et  $y = P_{K^-}(z)$ .

En déduire que

$$P_K(z) = 0 \quad \iff \quad z \in K^-. \tag{2.52}$$

La décomposition de  $z$  en  $x+y$  comme en (i) est appelée la *décomposition de Moreau*.

**2.28.** *Projection sur  $\mathcal{S}_+^n$ .* Soit  $A = V\Lambda V^T$  la factorisation spectrale d'une matrice  $A \in \mathcal{S}^n$  ( $\Lambda = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  est la matrice diagonale des valeurs propres  $\lambda_i$  de  $A$ ). Montrez que le projeté de  $A$  sur le cône  $\mathcal{S}_+^n$  des matrices semi-définies positives est la matrice  $V\Lambda^+V^T$ , où  $\Lambda^+ = \text{Diag}(\lambda_1^+, \dots, \lambda_n^+)$  et  $\lambda_i^+ = \max(0, \lambda_i)$ .

**2.29.** *Projection sur une somme de sous-espaces affines.* Soient  $A_1$  et  $A_2$  deux sous-espaces affines d'un espace euclidien  $\mathbb{E}$ . Si  $\bar{x}$  est le projeté d'un point  $x \in \mathbb{E}$  sur  $A_1 + A_2$ , alors  $x - \bar{x}$  est orthogonal aux sous-espaces vectoriels parallèles aux sous-espaces affines.

**2.30.** *Projection en deux temps.* Soit  $\mathbb{E}$  un espace euclidien,  $\mathcal{A}$  un sous-espace affine de  $\mathbb{E}$  et  $C$  un convexe fermé non vide de  $\mathbb{E}$  contenu dans  $\mathcal{A}$ . On note  $P_C$  (resp.  $P_{\mathcal{A}}$ ) le projecteur orthogonal sur  $C$  (resp. sur  $\mathcal{A}$ ). Montrez que  $P_C = P_C \circ P_{\mathcal{A}}$ .

**2.31.** *Réalisation de la distance entre deux ensembles.* Soient  $P_1$  et  $P_2$  deux ensembles non vides d'un espace euclidien  $\mathbb{E}$  tels que  $P_1 - P_2$  soit un convexe fermé. Alors il existe des points  $\bar{x}_1 \in P_1$  et  $\bar{x}_2 \in P_2$  réalisant la distance entre  $P_1$  et  $P_2$ , c'est-à-dire tels que

$$\|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\| = \inf_{\substack{x_1 \in P_1 \\ x_2 \in P_2}} \|x_1 - x_2\|.$$

**2.32.** *L'enveloppe convexe ouverte.* L'enveloppe convexe d'une partie relativement ouverte est relativement ouverte.

**2.33.** *Minimisation d'une fonction linéaire sur une enveloppe convexe fermée.* Soient  $\mathbb{E}$  un espace euclidien,  $c \in \mathbb{E}$  et  $X \subseteq \mathbb{E}$ . Alors

$$\inf_{x \in X} \langle c, x \rangle = \inf_{x \in \overline{\text{co}} X} \langle c, x \rangle \tag{2.53}$$

et

$$\overline{\text{co}} \left( \arg \min_{x \in X} \langle c, x \rangle \right) \subseteq \arg \min_{x \in \overline{\text{co}} X} \langle c, x \rangle, \tag{2.54}$$

avec égalité en (2.54) si  $X$  est compact, mais pas nécessairement autrement.

**2.34.** *Propriétés des cônes  $T_x^a C$  et  $T_x C$ .* Démontrez la proposition 2.55.

**2.35.** *Exemples de cônes duaux.*

- 1)  $\mathbb{R}_+^n$  (orthant positif de  $\mathbb{R}^n$ ) est autodual pour le produit scalaire euclidien de  $\mathbb{R}^n$ .
- 2) Le cornet ou cône du second ordre ou cône de Lorentz

$$\mathbb{R}_V^{n+1} := \{(x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \|x\|_2 \leq z\}$$

est autodual pour le produit scalaire euclidien de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

- 3) L'ensemble des matrices d'ordre  $n$  symétriques semi-définies positives

$$\mathcal{S}_+^n := \{A \in \mathcal{S}^n : x^T A x \geq 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n\}$$

est autodual pour le produit scalaire  $\langle A, B \rangle = \text{tr} AB$  de  $\mathcal{S}^n$ .

- 4) Le simplexe ordonné de  $\mathbb{R}^n$ , défini par

$$\mathbb{R}_{\leq}^n := \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \leq \dots \leq x_n\},$$

a pour cône dual

$$(\mathbb{R}_{\leq}^n)^+ = \{d \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^j d_i \leq 0, \text{ pour } j = 1, \dots, n-1, \text{ et } \sum_{i=1}^n d_i = 0\}.$$

- 5) L'ensemble des matrices *symétriques copositives*  $\mathcal{C}^n$  et l'ensemble des matrices *complètement positives*  $\mathcal{C}^{n+}$ , définis par

$$\begin{aligned}\mathcal{C}^n &:= \{A \in \mathcal{S}^n : x^\top A x \geq 0 \text{ pour tout } x \geq 0\}, \\ \mathcal{C}^{n+} &:= \{A \in \mathcal{S}^n : A = BB^\top, B \geq 0\},\end{aligned}$$

où  $B \geq 0$  signifie que  $B$  est *positive* (c'est-à-dire que tous ses éléments  $B_{ij}$  sont positifs), sont des cônes convexes fermés non vides, duaux l'un de l'autre, et on a

$$\mathcal{C}^{n+} \subseteq \mathcal{S}_+^n \subseteq \mathcal{C}^n.$$

**2.36.** *Dual d'une somme et d'une intersection de cônes.* Démontrez le corollaire 2.44.

**2.37.** *Intérieur et intérieur relatif du cône dual.* Soient  $\mathbb{E}$  un espace euclidien (produit scalaire et norme associés notés  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et  $\|\cdot\|$  respectivement),  $P \subseteq \mathbb{E}$  et  $P_{(\text{aff}(P^+))}$  le projecteur orthogonal sur le sous-espace vectoriel  $\text{aff}(P^+)$ , qui est l'*enveloppe affine* du cône dual  $P^+$  de  $P$ . Montrez que

$$d \in \text{int}(P^+) \iff \exists \varepsilon > 0, \forall x \in P, \text{ on a } \langle d, x \rangle \geq \varepsilon \|x\|. \quad (2.55)$$

$$d \in \text{intr}(P^+) \iff \exists \varepsilon > 0, \forall x \in P, \text{ on a } \langle d, x \rangle \geq \varepsilon \|P_{(\text{aff}(P^+))} x\|. \quad (2.56)$$

**2.38.** *Autour du lemme de Farkas.*

- 1) *Ajout d'un cône convexe à l'image.* Soient  $\mathbb{E}$  et  $\mathbb{F}$  deux espaces euclidiens,  $A : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$  une application linéaire,  $K$  un cône convexe non vide de  $\mathbb{E}$  et  $L$  un cône convexe non vide de  $\mathbb{F}$ . Alors  $\{y \in L^+ : A^*y \in K^+\}^+ = \overline{A(K) + L}$ .
- 2) *Effet d'une translation.* Quel que soit  $x_0$ , on a  $Ax_0 + \{y : A^\top y \geq 0\}^+ = \{Ax : x \geq x_0\}$ .

**2.39.** *Théorèmes de l'alternative.* Voir aussi l'exercice 17.9.

- 1) *Théorème de l'alternative de Farkas* [202 ; 1902]. Soient  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $b \in \mathbb{R}^m$ . Alors, des deux affirmations suivantes, une et une seule est vraie :
  - (i)  $\exists x \in \mathbb{R}_+^n : Ax = b$ ,
  - (ii)  $\exists y \in \mathbb{R}^m : A^\top y \geq 0$  et  $b^\top y < 0$ .
- 2) *Théorème de l'alternative de Motzkin homogène* (1936). Soient  $A \in \mathbb{R}^{m_A \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{m_B \times n}$  et  $C \in \mathbb{R}^{m_C \times n}$  des matrices ayant un même nombre de colonnes. Alors, des deux affirmations suivantes, une et une seule est vraie :
  - (i)  $\exists x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0, Bx \leq 0$  et  $Cx < 0$ ,
  - (ii)  $\exists (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^{m_A} \times \mathbb{R}_+^{m_B} \times \mathbb{R}_+^{m_C} : A^\top \alpha + B^\top \beta + C^\top \gamma = 0$  et  $\gamma \neq 0$ .

Remarque. Cette alternative peut s'utiliser sans les matrices  $A$  et  $B$  (on obtient alors l'*alternative de Gordan* [270 ; 1873]), mais pas sans la matrice  $C$  (dans ce dernier cas, (i) et (ii) sont tous les deux trivialement vrais). Elle permet d'avoir des conditions duales exprimant la *compatibilité d'égalités et d'inégalités linéaires* (strictes et non strictes) homogènes.

- 3) *Théorème de l'alternative de Motzkin non-homogène* [295 ; théorème 3.17]. Soient  $A \in \mathbb{R}^{m_A \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{m_B \times n}$  et  $C \in \mathbb{R}^{m_C \times n}$  des matrices ayant un même nombre de colonnes et  $a \in \mathbb{R}^{m_A}$ ,  $b \in \mathbb{R}^{m_B}$  et  $c \in \mathbb{R}^{m_C}$  des vecteurs. Alors, des deux affirmations suivantes, une et une seule est vraie :
  - (i)  $\exists x \in \mathbb{R}^n : Ax = a, Bx \leq b$  et  $Cx < c$ ,
  - (ii)  $\exists (\alpha, \beta, \gamma, \gamma_0) \in \mathbb{R}^{m_A} \times \mathbb{R}_+^{m_B} \times \mathbb{R}_+^{m_C} \times \mathbb{R}_+ : A^\top \alpha + B^\top \beta + C^\top \gamma = 0, a^\top \alpha + b^\top \beta + c^\top \gamma + \gamma_0 = 0$  et  $(\gamma_0, \gamma) \neq 0$ .
- 4) *Théorème de l'alternative de Ville* [609 ; 1938]. Soit  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Alors, des deux affirmations suivantes, une et une seule est vraie :

$$(i) \exists x \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{0\} : Ax \leq 0,$$

$$(ii) \exists y \in \mathbb{R}_+^m : A^\top y > 0.$$

5) *Variations.*

a) Il existe un  $x \in \mathbb{R}^n$  tel que  $Ax \leq b$  si, et seulement si,  $b^\top y \geq 0$  pour tout  $y \in \mathbb{R}_+^m$  tel que  $A^\top y = 0$ .

b) Il existe un  $x \in \mathbb{R}^n$  tel que  $a \leq Ax \leq b$  si, et seulement si,  $a^\top y \leq b^\top z$  pour tout  $(y, z) \in \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^m$  tel que  $A^\top y = A^\top z$ .

**2.40.** *Sous-système d'inégalités affines incompatibles [125].* Soit  $A$  une matrice de **type**  $m \times n$ . Si le système d'inégalités affines  $Ax \leq b$  n'a pas de solution, alors il existe un sous-ensemble d'indices  $I \subseteq \{1, \dots, m\}$  tel que  $|I| \leq n + 1$  et  $A_I x \leq b_I$  n'a pas non plus de solution (on a noté  $A_I$  la sous-matrice de  $A$  formée des lignes d'indices dans  $I$ , de même pour  $b_I$ ).

**2.41.** *Calcul de cônes normaux.* Démontrez la proposition 2.30.

**2.42.** *Semi-continuité supérieure du cône normal unitaire.* Démontrez la proposition 2.31.

**2.43.** *Cône tangent à un polyèdre convexe.* Soient  $P := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$  un polyèdre convexe de  $\mathbb{R}^n$  ( $A$  est de **type**  $m \times n$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  et  $\mathbb{R}^n$  est muni du produit scalaire euclidien) et  $x \in P$ . Alors le cône tangent et le **cône des directions admissibles** sont identiques :

$$T_x P = T_x^\alpha P.$$

Par ailleurs, si on note  $I := \{i \in [1 : m] : (Ax - b)_i = 0\}$ , on a

$$T_x P = \{d \in \mathbb{R}^n : (Ad)_I \leq 0\} \quad \text{et} \quad N_x P = \text{cone}\{A_i^\top : i \in I\},$$

où les  $A_i$  désignent les lignes de  $A$ , ce qui montre en particulier que  $T_x P$  et  $N_x P$  sont des cônes polyédriques.

**2.44.** *Cônes tangent et normal à  $\mathcal{S}_+^n$ .* Montrez que les cônes **tangent** et **normal** à  $\mathcal{S}_+^n$  en  $S \in \mathcal{S}_+^n$  s'écrivent

$$T_S \mathcal{S}_+^n = \{D \in \mathcal{S}^n : v^\top D v \geq 0, \text{ pour tout } v \in \mathcal{N}(S)\} \quad (2.57)$$

$$N_S \mathcal{S}_+^n = \{N \in \mathcal{S}_-^n : \langle S, N \rangle = 0\}. \quad (2.58)$$