Analyse vectorielle, divergence, rotationnel

<u>Exercice 1 : signification physique de div v et de rot v pour un écoulement 2D dans le plan (xOy) de vitesse v (v_x , v_y) en coordonnées cartésiennes ou (v_r , v_θ) en coordonnées polaires</u>

<u>En coordonnées cartésiennes</u> (x, y), on définit avec ∇ ($\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$) opérateur "nabla":

div $\mathbf{v} = \partial v_x/\partial x + \partial v_y/\partial y = \nabla . \mathbf{v}$ et **rot v** $= (\partial v_y/\partial x - \partial v_x/\partial y)\ \mathbf{e_z} = \nabla \Lambda \mathbf{v}$ (orthogonal au plan xOy)

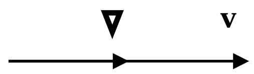
div **v** = caractérise la variation spatiale du champ des vitesses dans sa propre direction;
rot v caractérise la variation spatiale du champ des vitesses dans la direction orthogonale

<u>En coordonnées polaires</u> (r, θ), on a:

div $\mathbf{v} = (1/r)\ \partial(r v_r)/\partial r + (1/r)\ \partial v_\theta/\partial\theta$ et **rot v** $= (1/r)\ [\ \partial(r v_\theta)/\partial r - \partial v_r/\partial\theta]\ \mathbf{e_z}$

div **v** caractérise un mouvement convergent ou divergent;
rot v caractérise un mouvement de rotation.

1) on donne le champ de vitesse suivant: $\mathbf{v} = x\ \mathbf{e_x}$
calculer div **v**, **rot v** et l'équation des lignes du champ des vitesses



2) on donne le champ de vitesse suivant: $\mathbf{v} = y\ \mathbf{e_x}$
calculer div **v**, **rot v** et l'équation des lignes du champ des vitesses

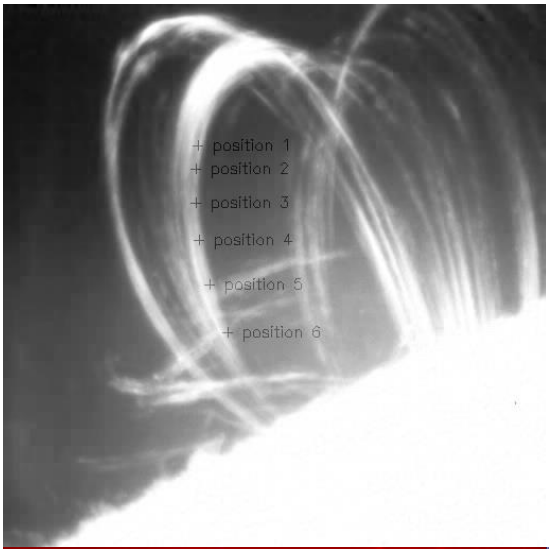
3) en coordonnées polaires, que vaut le rotationnel d'un mouvement <u>radial</u> de vitesse $\mathbf{v} = v(r)\ \mathbf{e_r}$? Quelle est l'équation et la nature des lignes de champ ?
4) en coordonnées polaires, quelle est la dépendance en r du seul mouvement <u>radial</u> de vitesse $\mathbf{v} = v(r)\ \mathbf{e_r}$ qui soit à divergence nulle ?
5) en coordonnées polaires, que vaut la divergence d'un mouvement <u>orthoradial</u> de vitesse $\mathbf{v} = v(r)\ \mathbf{e_\theta}$? Quelle est l'équation et la nature des lignes de champ ?
6) en coordonnées polaires, quelle est la dépendance en r du seul mouvement <u>orthoradial</u> de vitesse $\mathbf{v} = v(r)\ \mathbf{e_\theta}$ qui soit à rotationnel nul (irrotationnel) ?
7) on suppose qu'au point M (x, y) dans un fluide en rotation, $\mathbf{v}(M) = \Omega\ \mathbf{e_z}\ \Lambda\ \mathbf{OM}$ où Ω est la vitesse angulaire (rd/s). Calculer div **v**, **rot v** et l'équation des lignes du champ des vitesses. Préciser le sens de rotation selon le signe de Ω.
8) on suppose qu'au point M (x, y) dans un fluide, $\mathbf{v}(M) = k\ \mathbf{OM}$ où k est une constante. Calculer div **v**, **rot v** et l'équation des lignes du champ des vitesses. Préciser le caractère convergent ou divergent selon le signe de k.

<u>Réponses :</u>
1) div **v** = 2, **rot v = 0**
équation des lignes de champ y = constante (droites parallèles à l'axe Ox)
Remarque: **v** varie dans sa propre direction ($\mathbf{e_x}$) et ne varie pas dans la direction orthogonale ($\mathbf{e_y}$)
2) div **v** = 0, **rot v** $= -\ \mathbf{e_z}$
équation des lignes de champ y = constante (droites parallèles à l'axe Ox)
Remarque: **v** varie dans la direction orthogonale ($\mathbf{e_y}$) et ne varie pas dans sa propre direction ($\mathbf{e_x}$)
3) **rot v = 0**, équation des lignes de champ θ = constante (droites en étoile)
4) v(r) proportionnel à 1/r

5) div $\mathbf{v} = 0$, équation des lignes de champ r = constante (cercles concentriques)
6) v(r) proportionnel à 1/r
7) Avec $\mathbf{v}$ $(-\Omega\, y, \Omega\, x, 0)$, div $\mathbf{v} = 0$, **rot** $\mathbf{v} = 2\, \Omega\, \mathbf{e_z}$ ($\Omega\, \mathbf{e_z}$ vecteur tourbillon)
équation des lignes de champ $x^2 + y^2$ = constante (cercles concentriques).
Rotation dans le sens trigonométrique si $\Omega > 0$, horaire si $\Omega < 0$.
8) Avec $\mathbf{v}$ (kx, ky, 0), div $\mathbf{v} = 2k$ (convergent si $k < 0$, divergent si $k > 0$), **rot** $\mathbf{v} = \mathbf{0}$
équation des lignes de champ $y = \alpha\, x$ (droites en étoile).

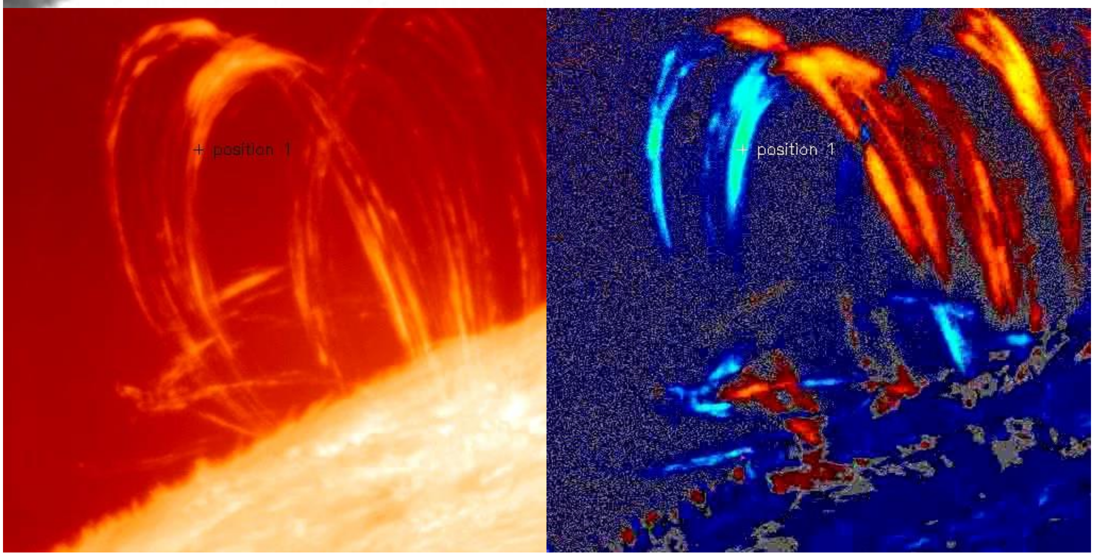
2 – Mesure expérimentale des vitesses, effet Doppler

exercice 2 : cinématique d'une boucle coronale solaire



à gauche: 6 positions d'une particule fluide. 300 s se sont écoulées entre chaque position. L'image couvre un champ de 74752 x 74752 km² (images de 512 x 512 pixels avec 1 pixel = 146 km).

Ci dessous, les images en intensité et en vitesses radiales de la position 1 (bleu = mouvement d'approche; rouge = mouvement d'éloignement).

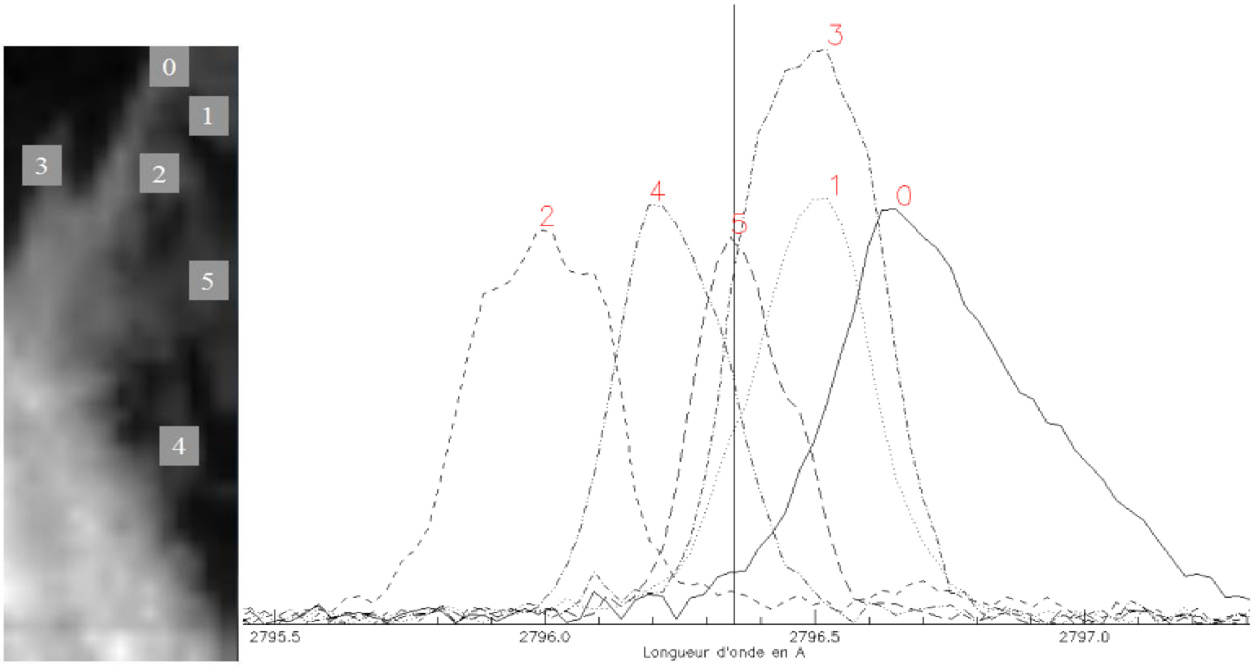


On s'intéresse au mouvement fluide dans une boucle magnétique coronale observée dans la raie Halpha de l'hydrogène à 656.28 nm. 6 positions d'une particule fluide ont été mesurées toutes les 300 s et superposées sur la figure en noir et blanc. En même temps, les vitesses radiales ont été mesurées au spectrographe. Pour la position 1, on montre les images correspondantes.
1) estimer la vitesse de déplacement du fluide en km/s dans le plan du ciel entre les positions 1 et 2, 2 et 3, 3 et 4, 4 et 5, 5 et 6 le plus simplement possible (v = distance parcourue/temps).
2) le mouvement dans le plan du ciel est-il accéléré ou ralenti ?
3) en position 1, le mouvement orthogonal au plan du ciel est-il d'approche ou d'éloignement ?

Réponses :
1) vitesse dans le plan du ciel en km/s
10.8 km/s
15.6 km/s
17.1 km/s
21.0 km/s
23.4 km/s
2) accéléré
3) approche

exercice 3 : cinématique des vitesses radiales d'une protubérance solaire

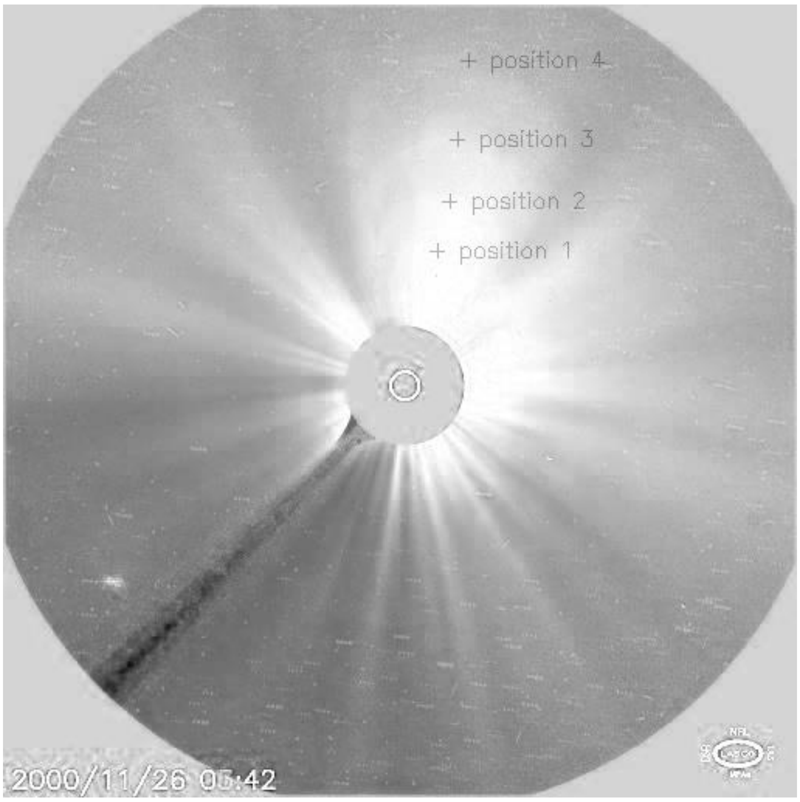
Le satellite IRIS de la NASA est équipé d'un spectrograhe UV qui étudie la raie du magnésium ionisé à 279.635 nm de longueur d'onde centrée sur le trait vertical du graphique ci dessous. On a observé 6 points d'une protubérance numérotés de 0 à 5. Pour chacun des 6 points, dire s'il s'agit d'un mouvement radial d'approche, de repos, ou d'éloignement, et donner la valeur absolue en km/s de la vitesse radiale déduite du décalage Doppler, en prenant la position des pics d'émission pour mesurer ces décalages (méthode approximative, le centre de gravité est préférable).



Réponses :
Point 0: éloignement, 31.8 km/s
Point 1: éloignement, 16.9 km/s
Point 2: approche, 38.2 km/s
Point 3: éloignement, 17.9 km/s
Point 4: approche, 15.9 km/s
Point 5: repos, 0.0 km/s

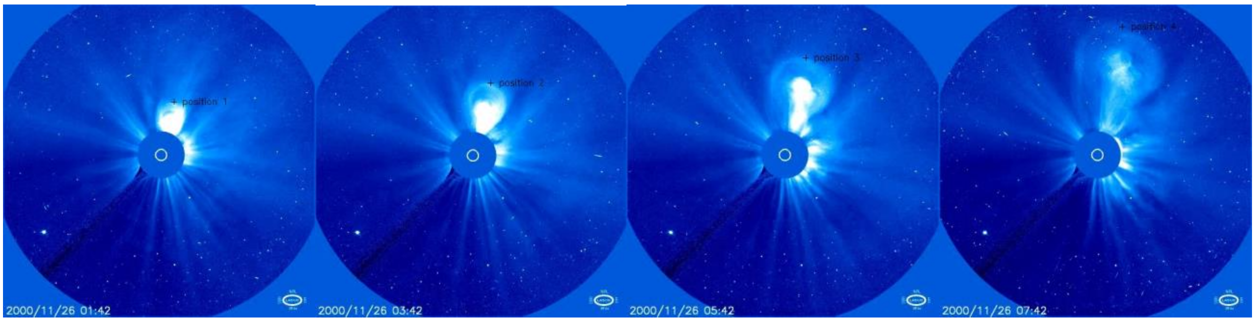
exercice 4 : cinématique d'une éjection de masse coronale solaire

On s'intéresse au mouvement d'une éjection de masse coronale observée par le coronographe C3 du satellite SOHO en lumière blanche (le soleil est le rond blanc au centre, il est occulté par un disque bleu pour éliminer l'éblouissement du capteur). 4 positions d'une particule fluide ont été mesurées toutes les 2 heures et superposées sur la figure en noir et blanc.
1) estimer la vitesse de déplacement du fluide en km/s dans le plan du ciel entre les positions 1 et 2, 2 et 3, 3 et 4 le plus simplement possible (v = distance parcourue/temps).
2) le mouvement dans le plan du ciel est-il accéléré ou ralenti ?



à gauche: 4 positions d'une particule fluide. 2 heures se sont écoulées entre chaque position. L'image couvre un champ de 40 x 40 millions de km² (images de 512 x 512 pixels avec 1 pixel = 77778 km).

Ci dessous, les images en intensité des positions 1 à 4 .



Réponses :

1) vitesses en km/s:

356

435

556

2) accéléré

3 - Cinématique des fluides

exercice 5 : tourbillon de Rankine stationnaire

On considère un tourbillon fluide en rotation autour de l'axe Oz. On se place en coordonnées cylindriques (r,θ,z); la vitesse du fluide **v** est orthoradiale et ne dépend que de r. La vorticité du tourbilon est définie par **rot(v)** = $2\ \Omega\ \mathbf{e_z}$ avec:

$r < R$: Ω = constante, R est le rayon du tourbillon

$r > R$: $\Omega = 0$

Exprimer la vitesse du fluide v_θ en fonction de r, R et Ω en utilisant le "théorême d'Ampère" de la cinématique des fluides dans les deux régions:

1) $r < R$

2) $r > R$

Aide: la relation $\iint$ **rot(v).dS** = $\int$ **v.dl** constitue le théorême d'Ampère. La circulation du vecteur vitesse **v** sera prise sur un contour circulaire fermé de rayon r, et le flux de la vorticité **rot(v)** sera calculé sur le disque de surface πr^2 enlacé par ce contour.

3) que peut-on dire de div(**v**) ?

aide: div(**v**) = $(1/r)\, \partial v_\theta/\partial\theta$ pour un écoulement orthoradial

4) en déduire la nature compressible/incompressible de l'écoulement

5) existe t-il un potentiel des vitesses Φ tel que **v** = **grad** Φ pour $r < R$?

6) donner le potentiel des vitesses Φ pour $r > R$ en fonction de Ω, R et θ

aide: gradΦ = [$\partial\Phi/\partial r$, $(1/r)\, \partial\Phi/\partial\theta$, $\partial\Phi\partial z$] en coordonnées cylindriques

Réponses :

1) $r < R$

$2\,\Omega\,\pi r^2 = v_\theta\, 2\pi r$ d'où $v_\theta(r) = \Omega\, r$

2) $r > R$

$2\,\Omega\,\pi R^2 = v_\theta\, 2\pi r$ d'où $v_\theta(r) = \Omega\, R^2/r$

3) div(**v**) = 0 car la vitesse de dépend pas de θ

4) incompressible car div(**v**) = 0

5) non (car la vorticité est non nulle)

6) $\Phi(\theta) = \Omega\, R^2\, \theta$

exercice 6 : tourbillon dans un plan

Soit un tourbillon de vecteur vitesse **v** = (k/r) $\mathbf{e}_\theta$ en coordonnées polaires (r,θ) où k est une constante positive ou négative selon le sens de rotation du tourbillon; si z est le nombre complexe x + i y, on rappelle que $z = x + i\,y = r\, e^{i\theta}$ où $r^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$, et $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

1) exprimer les composantes v_x et v_y du vecteur vitesse **v** dans le repère (xOy) dérivant du potentiel complexe $f(z) = -\,i\,k\,\ln(z)$ en fonction de r et de θ

Aide: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ et $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$

2) En déduire v_r projection du vecteur vitesse $\mathbf{v}(v_x, v_y)$ dans la direction radiale $\mathbf{e}_r$ et v_θ projection dans la direction orthoradiale $\mathbf{e}_\theta$

Aide: $\mathbf{e}_r = (\cos\theta, \sin\theta)$ et $\mathbf{e}_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta)$ dans le repère (xOy); $v_r = \mathbf{v}.\mathbf{e}_r$ et $v_\theta = \mathbf{v}.\mathbf{e}_\theta$

3) Déduire de $f(z) = \varphi + i\,\psi$ les fonctions $\varphi(r,\theta)$ et $\psi(r,\theta)$,

4) puis l'équation des lignes équipotentielles et leur nature géométrique,

5) et enfin l'équation des lignes de champ et leur nature géométrique.

Réponses :

1) $df/dz = v_x - i\,v_y = -\,i\,k / z = -\,i\,(k/r)\, e^{-i\theta} = -\,i\,(k/r)\,(\cos\theta - i\sin\theta)$

d'où

$v_x = -\,(k/r)\sin\theta$

$v_y = (k/r)\cos\theta$

2) $v_r = v_x\cos\theta + v_y\sin\theta = 0$

et $v_\theta = -v_x\sin\theta + v_y\cos\theta = k/r$

3) $f(z) = -\,i\,k\,\ln(r\, e^{i\theta}) = -\,i\,k\,\ln(r) + k\,\theta = \varphi + i\,\psi$

d'où $\varphi(r,\theta) = k\,\theta$ et $\psi(r,\theta) = -\,k\ln(r)$

4) lignes équipotentielles: $\varphi(r,\theta)$ = constante, donc θ = constante (droites passant par l'origine O)

5) lignes de champ: $\psi(r,\theta)$ = constante, donc r = constante (cercles de centre O)

exercice 7 : puits ou source dans un plan

Soit **v** = (k/r) $\mathbf{e}_r$ un champ de vitesses en coordonnées polaires (r,θ) où k est une constante positive ou négative selon que l'on a affaire à une source ou à un puits; si z est le nombre complexe x + i y, on rappelle que $z = x + i\,y = r\, e^{i\theta}$ où $r^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$ et $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

1) exprimer les composantes v_x et v_y du vecteur vitesse **v** dans le repère (xOy) dérivant du potentiel complexe $f(z) = k \ln(z)$ en fonction de r et de θ

Aide: $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$ et $e^{-i\theta} = \cos\theta - i \sin\theta$

2) En déduire v_r projection du vecteur vitesse $\mathbf{v}(v_x, v_y)$ dans la direction radiale $\mathbf{e_r}$ et v_θ projection dans la direction orthoradiale $\mathbf{e_\theta}$

Aide: $\mathbf{e_r} = (\cos\theta, \sin\theta)$ et $\mathbf{e_\theta} = (-\sin\theta, \cos\theta)$ dans le repère (xOy); $v_r = \mathbf{v.e_r}$ et $v_\theta = \mathbf{v.e_\theta}$

3) Déduire de $f(z) = \varphi + i\,\psi$ les fonctions $\varphi(r,\theta)$ et $\psi(r,\theta)$,

4) puis l'équation des lignes équipotentielles et leur nature géométrique,

5) et enfin l'équation des lignes de champ et leur nature géométrique.

Réponses :

1) $df/dz = v_x - i\, v_y = k / z = (k / r)\, e^{-i\theta} = (k / r)\, (\cos\theta - i \sin\theta)$

d'où

$v_x = (k / r) \cos\theta$

$v_y = (k / r) \sin\theta$

2) $v_r = v_x \cos\theta + v_y \sin\theta = k / r$

et $v_\theta = -v_x \sin\theta + v_y \cos\theta = 0$

3) $f(z) = k \ln(r\, e^{i\theta}) = k \ln(r) + i\, k\, \theta = \varphi + i\, \psi$

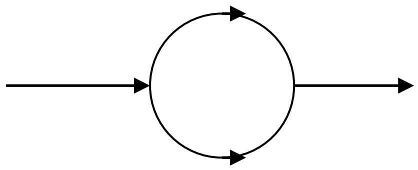
d'où $\varphi(r,\theta) = k \ln(r)$ et $\psi(r,\theta) = k\, \theta$

4) lignes équipotentielles: $\varphi(r,\theta)$ = constante, donc r = constante (cercles de centre O)

5) lignes de champ: $\psi(r,\theta)$ = constante, donc θ = constante (droites passant par l'origine O)

exercice 8 : écoulement plan avec obstacle circulaire (plus difficile)

On considère le potentiel complexe des vitesses suivant: $f(z) = v_0\, (z + R^2/z) = \varphi + i\, \psi$ caractérisant l'écoulement autour d'un obstacle circulaire de rayon R et centre O. On se place en coordonnées polaires (on rappelle que $z = x + i\, y = r\, e^{i\theta}$). A l'infini, $\mathbf{v} = v_0\, \mathbf{e_x}$.



1) Donner les fonctions φ et ψ en fonction de (r,θ)

2) montrer que la ligne de courant $\psi = 0$ correspond à l'axe Ox et au contour de l'obstacle.

3) Exprimer les composantes (v_x, v_y) du vecteur vitesse **v** en fonction de (r,θ).

4) Donner les composantes (v_x, v_y) de **v** sur l'axe Ox $(\theta = 0)$

5) Donner les composantes (v_x, v_y) de **v** sur l'axe Oy $(\theta = \pi/2)$.

6) Donner les composantes (v_x, v_y) du vecteur vitesse **v** sur l'obstacle (r = R); que vaut sa norme $\|\mathbf{v}\|$ en fonction de θ ? Qu'obtient t-on lorsque $\theta = \pi/2$?

Aide: la vitesse complexe est donnée par $df/dz = v_x - i\, v_y$

$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$ et $e^{-i\theta} = \cos\theta - i \sin\theta$

$\mathbf{e_r} = (\cos\theta, \sin\theta)$ et $\mathbf{e_\theta} = (-\sin\theta, \cos\theta)$ dans le repète (x0y); $v_r = \mathbf{v.e_r}$ et $v_\theta = \mathbf{v.e_\theta}$

Réponses :

1) $f(z) = v_0\, [\, r\, e^{i\theta} + (R^2/ r)\, e^{-i\theta}\,]$

$= v_0\, [\, r\, (\cos\theta + i \sin\theta) + (R^2/ r)\, (\cos\theta - i \sin\theta)\,]$

$= v_0\, [\, (r + R^2/ r) \cos\theta + i\, (r - R^2/ r) \sin\theta\,]$

$= \varphi + i\, \psi$

d'où $\varphi(r,\theta) = v_0\, (r + R^2/ r) \cos\theta$

et $\psi(r,\theta) = v_0\, (r - R^2/ r) \sin\theta$

2) $\psi(r,\theta) = v_0\, (r - R^2/ r) \sin\theta = 0$ a deux solutions possibles:

a) r = R soit le contour de l'obstacle

b) $\theta = 0$ ou π soit l'axe Ox

3) $df/dz = v_x - i\, v_y = v_0\, (1 - R^2/z^2)$ avec $z^2 = r^2\, e^{2i\theta}$

$df/dz = v_x - i\, v_y = v_0 (1 - e^{-2i\theta} R^2/r^2)$

$df/dz = v_x - i\, v_y = v_0 [1 - (\cos 2\theta - i \sin 2\theta) R^2/r^2]$

d'où $v_x = v_0 [1 - \cos 2\theta \; (R^2/r^2)]$ et $v_y = - v_0 [\sin 2\theta \; (R^2/r^2)]$

4) $\theta = 0$ donne $v_x = v_0 [1 - R^2/r^2]$ et $v_y = 0$

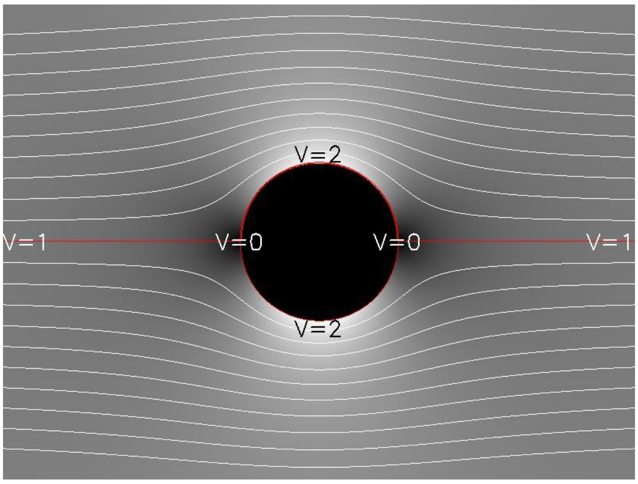
5) $\theta = \pi/2$ donne $v_x = v_0 [1 + R^2/r^2]$ et $v_y = 0$

6) si r = R, on obtient

$v_x = v_0 [1 - \cos 2\theta] = 2 v_0 \sin^2\theta$ et $v_y = - v_0 \sin 2\theta = - 2 v_0 \sin\theta \cos\theta$

On en déduit $||\mathbf{v}|| = 2 v_0 |\sin\theta|$

Pour $\theta = \pi/2$, $||\mathbf{v}|| = 2 v_0$ soit le double de la vitesse de l'écoulement à l'infini (voir figure)



En niveaux de gris: la norme $||\mathbf{v}||$ du vecteur vitesse $\mathbf{v}$, normalisée à v_0

Les lignes blanches sont les lignes du champ des vitesses données par l'équation $\psi(r,\theta)$ = constante

Les lignes rouges correspondent à l'équation $\psi(r,\theta) = 0$

4 – Hydrostatique

exercice 9 : statique des fluides compressibles et incompressibles

L'équation de la statique des fluides est $\mathrm{d}P = -\rho g \mathrm{d}z$ où z est l'altitude (axe O_z dirigé vers le haut). On désigne par P_0 la pression atmosphérique au niveau du sol en $z = 0$.

Liquide incompressible

1. Donner $P(z)$ en fonction de ρ, g, z et P_0.
2. Applications numériques : pour l'eau on a $\rho = 1000$ kg.m^{-3}, $g = 10$ m.s^{-2}, $P_0 = 1$ bar $= 10^5$ Pa. Que vaut la pression P en bars à $z = -10$ m et $z = -5000$ m (fond des mers) ?

Gaz compressible isotherme

On considère un gaz parfait de pression $P = \rho RT/M$ avec T la température (invariable), $R = 8,32$ J.mole^{-1}.K^{-1} la constante des gaz parfaits et M la masse molaire du gaz.

1. Donner $P(z)$ en fonction de P_0, z et $h = RT/(gM)$ l'échelle de hauteur.
2. Applications numériques :
   a) pour l'air : $T = 300$ K, $M = 29$ g, $g = 10$ m.s^{-2}. Calculer h et la pression P en bars à $z = 1000$ m.
   b) pour l'atmosphère solaire : $T = 6000$ K, $M = 1$ g (hydrogène), $g = 275$ m.s^{-2}. Calculer h.

Gaz compressible avec loi en $T(z) = T_0 - \alpha z$

Dans l'atmosphère terrestre on a approximativement $\alpha = 6 \times 10^{-3}$ K.m^{-1} et on considère que l'air obéit à la loi des gaz parfaits $P = \rho RT/M$.

1. Exprimer $P(z)$ en fonction de P_0, α, z, T_0, M, g et R.
2. Applications numériques :
   a) pour l'air : $T_0 = 300$ K, $M = 29$ g, $g = 10$ m.s^{-2}, $P_0 = 1$ bar. Donner la valeur de la pression à $z = 9000$ m.
   b) Comparer à la valeur qu'on aurait obtenue dans le cas de l'atmosphère isotherme à $T_0 = 300$ K.

Corrections

Liquide incompressible

1. $P = P_0 - \rho g z$
2. Pour $z = -10$ m, $P = 2$ bars. Pour $z = -5000$ m, $P = 500$ bars.

Gaz compressible isotherme

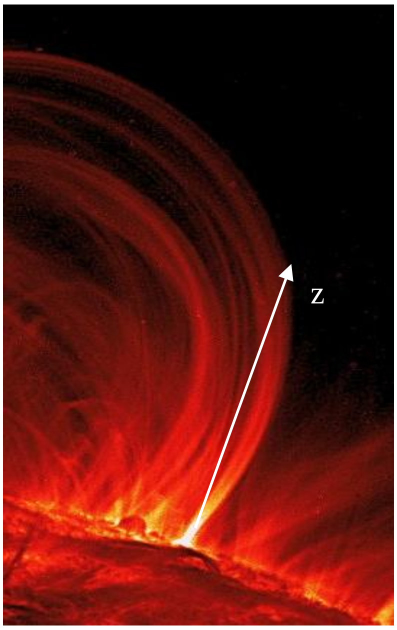
1. $P = P_0 e^{-z/h}$ avec $h = RT/(gM)$ puisque $\mathrm{d}P = -\rho g \mathrm{d}z = -P\mathrm{d}z/h$ d'où après intégration $\ln(P/P_0) = -z/h$.
2. a) $h = 8,6$ km, $P(z = 1000) = 0,89$ bars.
   b) $h = 185$ km, il s'agit de l'épaisseur de la photosphère, couche visible à l'œil nu.

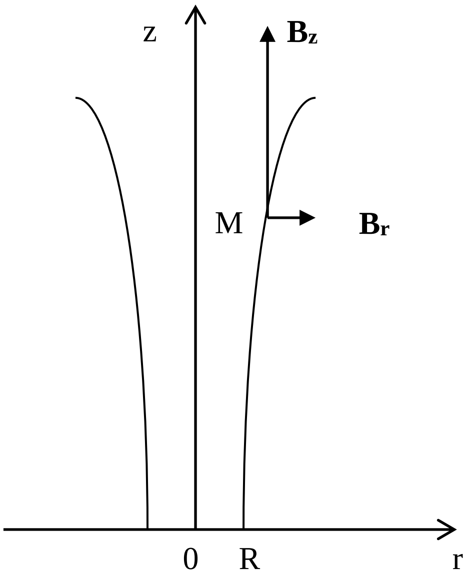
Gaz compressible avec loi en $T(z) = T_0 - \alpha z$

1. $P(z) = P_0(1 - \alpha z/T_0)^{Mg/(R\alpha)}$ car $\mathrm{d}P/P = -Mg\mathrm{d}z/[(T_0 R)(1 - \alpha z/T_0)]$, en posant $x = \alpha z/T_0$ on a $\mathrm{d}P/P = Mg\mathrm{d}x/[(\alpha R)(x - 1)]$. Après intégration, $\ln(P/P_0) = Mg \ln(1 - \alpha z/T_0)/(\alpha R)$ soit $\ln(P/P_0) = \ln\left[(1 - \alpha z/T_0)^{Mg/(\alpha R)}\right]$.
2. $P(z = 9000) = 0,82^{5,81} = 0,31$ bar. Dans le cas de l'atmosphère isotherme, on a $\alpha \to 0$ d'où $P(z) \to P_0 e^{-Mgz/(RT_0)}$ ce qui donnerait $P(z = 9000) = 0,35$ bar. On ne fait donc pas de grosse erreur puisque la valeur obtenue est proche de celle trouvée précédemment.

<u>exercice 10 : évasement statique des tubes magnétiques dans la couronne solaire</u>

On considère un tube magnétique vertical d'axe Oz à symétrie cylindrique de rotation atour de Oz. La section de ce tube augmente avec l'altitude, mais cependant, au point M, la composante radiale B_r du champ magnétique reste faible devant la composante verticale B_z.





1) le tube s'évase dans la couronne solaire qu'on assimile à un gaz parfait isotherme de température $T = 10^6$ K obéissant à la loi $P = 2 \rho R T / M$, M étant la masse molaire de l'hydrogène; le facteur 2 provient de l'ionisation (autant de protons, qui font la masse volumique ρ, que d'électrons). En partant de l'équilibre hydrostatique $dP = - \rho g dz$, et en posant $h = 2 RT / gM$, comment varie la pression P en fonction de z, h et P_0 pression au sol ?
2) que vaut l'échelle de hauteur h (en km) pour $R = 8.314$, $T = 10^6$ K, $M = 10^{-3}$ kg, $g = 275$ ms^{-2} ?
3) l'équilibre latéral des forces entre la pression magnétique interne au tube et la pression gazeuse extérieure impose $B_z^2/2\mu_0 = P(z)$. Exprimer alors $B_z(z)$ en fonction de z et des constantes h, μ_0 et P_0.

4) Quelle est l'échelle de hauteur H de B_z en fonction de h (donner l'expression littérale puis numérique) ?
5) l'équation de Maxwell div(**B**) = 0 permet de calculer la composante radiale du champ magnétique, par la relation $(1/r)\ \partial(rB_r)/\partial r + dB_z/dz = 0$. En intégrant, sachant que $B_r(0,z) = 0$, exprimer $B_r(r,z)$ en fonction de r, z et des constantes h, μ_0 et P_0.
6) déterminer l'équation des lignes de champ z(r) en fonction de h et de (r/R) où R est le rayon du tube à sa base. Aide: les lignes de champ sont solution de $dz/dr = B_z/B_r$ (à intégrer)
7) à quelle altitude le rayon du tube a t-il doublé (donner l'expression littérale en fonction de h puis numérique) ?

Réponses :
1) $P(z) = P_0\ e^{-z/h}$
2) h = 60465 km
3) $B_z(z) = (2\mu_0\ P_0)^{1/2}\ e^{-z/2h}$
4) H = 2 h = 120930 km
5) $B_r(r,z) = (r/4h)\ (2\mu_0\ P_0)^{1/2}\ e^{-z/2h}$
6) z = 4 h ln(r/R)
7) z = 4 h ln2 = 167650 km

exercice 11 : aplatissement d'un corps sphérique homogène en rotation (planète, étoile)

On considère l'équilibre d'un corps sphérique homogène autogravitant, de masse volumique ρ, de rayon R et centre O, en rotation autour de l'axe polaire Oz à la vitesse angulaire Ω. Sous l'effet de la rotation, le corps s'aplatit légèrement de sorte que son rayon équatorial devient R + ΔR avec ΔR<<R, R étant le rayon polaire.

Préambule
Le champ de gravitation au sein d'un corps sphérique homogène s'obtient par le théorème de Gauss du champ de gravitation sur une sphère de Gauss de rayon r < R:

$\iint \mathbf{G}.\mathbf{dS} = -\ 4\ \pi\ K\ M_{intérieure}$

où $K = 6.67\ 10^{-11}$ est la constante de gravitation. On obtient :

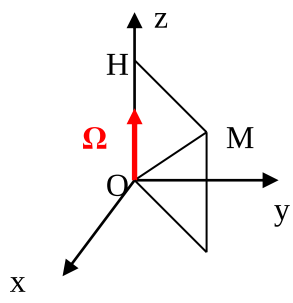
$G(r)\ 4\ \pi\ r^2 = -\ 4\ \pi\ K\ (4/3\ \pi\ r^3\ \rho)$ d'où $G(r) = -\ 4/3\ \pi\ K\ \rho\ r$

Au point M de coordonnées (x, y, z), le champ vectoriel est $\mathbf{G}(M) = -\ 4/3\ \pi\ K\ \rho\ \mathbf{OM}$

L'équation de l'équilibre hydrostatique en M est:

$-\ \mathbf{grad}\ P + \rho\ \mathbf{G}(M) + \rho\ \Omega^2\ \mathbf{HM} = 0$

où P(x,y,z) est la pression et $\rho\ \Omega^2\ \mathbf{HM}$ la force d'inertie centrifuge par unité de volume. H est la projection de M sur l'axe Oz de rotation.



1) écrire **G**(M) sous la forme d'un gradient en fonction de π K ρ et des coordonnées (x, y, z) du vecteur **OM**
2) écrire **HM** de coordonnées (x, y, 0) sous la forme d'un gradient
3) à partir des expressions obtenues aux questions 1 et 2, mettre l'équation d'équilibre sous la forme **grad**(f) = 0 où f est une fonction des coordonnées (x, y, z) du point M, de K, ρ, Ω² et de la pression locale P. Cette fonction est constante. Donner son expression.

4) la surface libre du corps en rotation a pour équation P(x,y,z) = constante; mettre l'équation de la surface libre sous la forme a $(x^2+y^2) + b\, z^2 = c$ où c est une constante positive et où a et b sont des quantités positives fonction de K, ρ et Ω^2. Exprimer a et b en fonction de K, ρ et Ω^2.
5) cette équation est celle d'un ellipsoïde de révolution autour de l'axe de rotation Oz. écrire l'équation aux pôle Nord pour x = y = 0 et z = R, ce qui détermine la constante c.
6) Ecrire l'équation à l'équateur pour $x^2 + y^2 = (R + \Delta R)^2$ et z = 0.
7) sachant que la force centrifuge est faible devant la gravitation, donc que $\Omega^2 << K\, \rho$, déduire des questions 5 et 6 l'expression de l'applatissement ΔR/R (petit nombre devant 1) en fonction de K, ρ et Ω^2.
8) application numérique à la Terre
$\rho = 5500$ kg m^{-3}, $\Omega = 7.27\ 10^{-5}$ rd/s, en déduire l'applatissement ΔR/R
9) application numérique au Soleil
$\rho = 1400$ kg m^{-3}, $\Omega = 2.8\ 10^{-6}$ rd/s, en déduire l'applatissement ΔR/R

Réponses :
1) $\mathbf{G}(M) = -\ 2/3\ \pi\ K\ \rho\ \mathbf{grad}(x^2+y^2+z^2)$
2) $HM = \mathbf{grad}(x^2 + y^2)/2$
3) $f(x,y,z) = -\ P - 2/3\ \pi\ K\ \rho^2\ (x^2+y^2+z^2) + \rho\ \Omega^2\ (x^2 + y^2)/2$
4) $(x^2+y^2)\ (2/3\ \pi\ K\ \rho^2 - \rho\ \Omega^2\ /2) + 2/3\ \pi\ K\ \rho^2\ z^2 = c$
   $a = 2/3\ \pi\ K\ \rho^2 - \rho\ \Omega^2\ /2$
   $b = 2/3\ \pi\ K\ \rho^2$
5) $2/3\ \pi\ K\ \rho^2\ R^2 = c$
6) $(2/3\ \pi\ K\ \rho^2 - \rho\ \Omega^2\ /2)\ (R + \Delta R)^2 = c$
7) $\Delta R/R = 3\ \Omega^2\ /\ (8\ \pi\ K\ \rho)$
8) 0.0017
9) 10^{-5}

exercice 12 : corps sphérique homogène (planète, étoile) : effet de marée

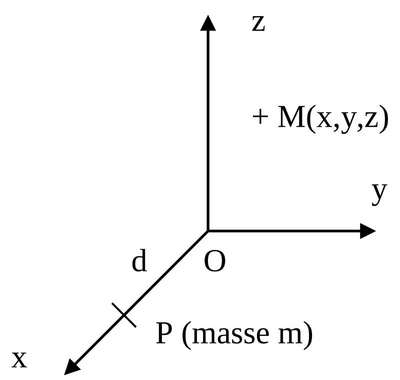
On considère l'équilibre d'un corps sphérique homogène autogravitant, de masse volumique ρ, de rayon R et centre O, soumis à l'attraction d'un corps distant de masse m situé en P de coordonnées (d, 0, 0). Sous l'effet de marée, le corps autogravitant subit un renflement dans la direction et à l'opposé du corps distant de sorte que son rayon y devient R + ΔR avec ΔR<<R, R étant le rayon polaire.

Préambule
Le champ de gravitation au sein d'un corps sphérique homogène s'obtient par le théorème de Gauss du champ de gravitation sur une sphère de Gauss de rayon r < R:

$$\iint \mathbf{G.dS} = -\ 4\ \pi\ K\ M_{intérieure}$$

où $K = 6.67\ 10^{-11}$ est la constante de gravitation. On obtient :

$$G(r)\ 4\ \pi\ r^2 = -\ 4\ \pi\ K\ (4/3\ \pi\ r^3\ \rho) \text{ d'où } G(r) = -\ 4/3\ \pi\ K\ \rho\ r$$



Au point M de coordonnées (x, y, z), le champ vectoriel est
$\mathbf{G}(M) = -\ 4/3\ \pi\ K\ \rho\ \mathbf{OM} = -\ 2/3\ \pi\ K\ \rho\ \mathbf{grad}(x^2+y^2+z^2)$

L'équation de l'équilibre hydrostatique en M est:

$$-\ \mathbf{grad}\ P + \rho\ \mathbf{G}(M) + \rho\ K\ m\ \mathbf{grad}(1/MP) = 0$$

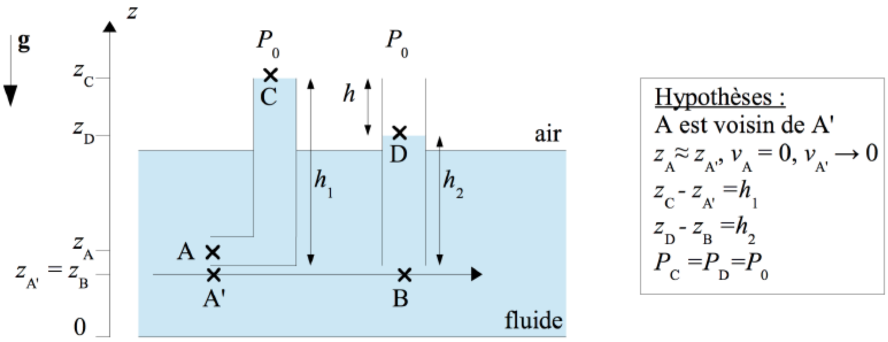
où $P(x,y,z)$ est la pression et ρ **grad (**$K m /MP$) la force d'attraction du corps distant placé en P.

1) écrire **G**(M) sous la forme d'un gradient en fonction de $\pi K \rho$ et des coordonnées (x, y, z) du vecteur **OM**
2) exprimer la distance MP en fonction de d, x, y, z sous la forme $MP = d\, f(x/d, y/d, z/d)$ où f est une fonction de $(x/d, y/d, z/d) << 1$, le corps attractif étant placé à grande distance.
3) par un développement limité, exprimer 1/MP sous la forme $1/MP = (1/d)\, g(x/d, y/d, z/d)$ où g est une fonction de $(x/d, y/d, z/d)$; on ira jusqu'au second ordre.
Aide: pour $|x| << 1$, on a au second ordre $(1+x)^{-1/2} = 1 - x/2 + 3/8\, x^2$
4) exprimer alors **grad** P sous la forme d'une somme de deux gradients de potentiels dépendant de x, y, z et des constantes K, m, d et ρ.
5) le corps attractif distant fait apparaître le potentiel $\rho K m [\, 1/d + x/d^2 + 1/2\, (2x^2 - y^2 - z^2)/d^3\,]$ dont on ne retiendra que le terme de marée $\rho K m$ **grad**$[\, 1/2\, (2x^2 - y^2 - z^2)/d^3\,]$.
Exprimer grad P sous la forme du gradient d'un potentiel $V(x, y, z)$ qu'on exprimera en fonction de x, y, z et des constantes K, m, d et ρ.
6) la surface libre a pour équation $V(x,y,z) = \text{constante}$.
Mettre cette équation sous la forme $a\, (y^2 + z^2) + b\, x^2 = c$, où a, b et c sont des constantes positives. On exprimera a et b en fonction de K, m, d et ρ.
7) cette équation est celle d'un ellipsoïde de révolution autour de Ox, axe liant le corps sphérique au corps attractif distant. Soit R le rayon polaire. En se plaçant en $x = 0$, $y^2 + z^2 = R^2$, trouver l'expression de la constante c en fonction de R, K, m, d et ρ.
8) en se plaçant en $y = z = 0$, $x = R + \Delta R$, trouver une autre expression de la constante c en fonction de $R + \Delta R$, K, m, d et ρ.
9) sachant que l'effet de marée est petit, donc que $\rho >> m/d^3$, en déduire le renflement $\Delta R/R$ du corps autogravitant en fonction de ρ, m et d^3.
10) application numérique aux marées terrestres. On donne $m = 7.4\ 10^{22}$ kg masse de la Lune et d = 384000 km distance Terre Lune. On prend $\rho = 5500$ kg m^{-3}. Calculer le renflement $\Delta R/R$ puis ΔR en m pour R = 6400 km (rayon terrestre). Il va de soi que ce modèle est très simpliste: l'amplitude des marées dépend des continents et des formes des côtes.
11) On donne $m = 2\ 10^{30}$ kg masse du Soleil et $d = 150\ 10^6$ km distance Terre Soleil. On prend $\rho = 5500$ kg m^{-3}. Calculer le renflement $\Delta R/R$ puis ΔR en m pour R = 6400 km (rayon terrestre). Les marées solaires sont deux fois moins importantes que les marées lunaires.

Réponses :
1) $\mathbf{G}(M) = - 2/3\, \pi K \rho\, \mathbf{grad}(x^2+y^2+z^2)$
2) $MP^2 = (d - x)^2 + y^2 + z^2 = d^2 - 2\, d\, x + x^2 + y^2 + z^2$
d'où $MP = d\, [\, 1 - 2\, x/d + (x^2 + y^2 + z^2)/d^2\,]^{1/2}$
3) $1/MP = 1/d\, [\, 1 - 2\, x/d + (x^2 + y^2 + z^2)/d^2\,]^{-1/2}$
$= 1/d\, [\, 1 + x/d - 1/2\, (x^2 + y^2 + z^2)/d^2 + 3/8\, (4x^2/d^2)\,]$
$= 1/d\, [\, 1 + x/d + 1/2\, (2x^2 - y^2 - z^2)/d^2\,]$
4) **grad** P = $- 2/3\, \pi K \rho^2\, \mathbf{grad}(x^2+y^2+z^2) + \rho K m\, \mathbf{grad}[\, 1/d + x/d^2 + 1/2\, (2x^2 - y^2 - z^2)/d^3\,]$
5) $V(x,y,z) = - 2/3\, \pi K \rho^2\, (x^2+y^2+z^2) + \rho K m\, (2x^2 - y^2 - z^2) / (2d^3)$
6) $(y^2+z^2)\, [2/3\, \pi K \rho^2 + \rho K m / (2d^3)] + x^2\, [2/3\, \pi K \rho^2 - \rho K m /d^3] = c$
$a = 2/3\, \pi K \rho^2 + \rho K m / (2d^3)$
$b = 2/3\, \pi K \rho^2 - \rho K m /d^3$
7) $c = R^2\, [2/3\, \pi K \rho^2 + \rho K m /(2d^3)]$
8) $c = (R + \Delta R)^2\, [2/3\, \pi K \rho^2 - \rho K m /d^3]$
9) $\Delta R/R = 9\, m / (8\, \pi\, \rho\, d^3)$
10) $\Delta R/R = 8.5\ 10^{-8}$
$\Delta R = 0.55$ m
11) $\Delta R/R = 3.8\ 10^{-8}$ donc $\Delta R = 0.25$ m

5 – Dynamique des fluides, loi de Bernoulli

exercice 13 : Tube de Pitot



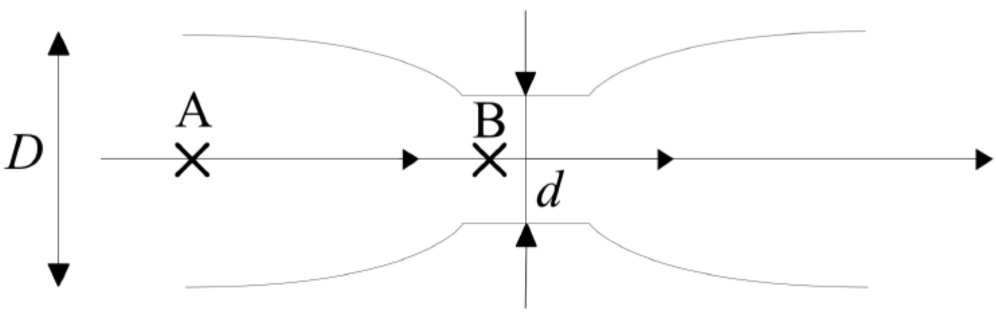
Un fluide de masse volumique ρ se déplace à la vitesse v dans un tuyau. Ce dernier contient deux tubes permettant de relier le fluide à l'extérieur (voir Fig. ??). L'objectif de cet exercice est de déterminer la vitesse v du fluide à l'aide de ces deux tubes.

1. Déterminer la différence de pression $P_{A'} - P_B$ en utilisant la loi de Bernoulli entre les points A' et B. On utilisera pour cela le fait que $v_{A'} \approx 0$.
2. a) Déterminer l'expression de P_A dans le tube de gauche en fonction de ρ, g, h_1 et P_0.
   b) Déterminer l'expression de P_B dans le tube de droite en fonction de ρ, g, h_2 et P_0.
   c) On suppose que $P_A \approx P_{A'}$, donner la différence de pression $P_{A'} - P_B$ à l'aide des réponses obtenues aux questions a) et b).
3. En utilisant les réponses aux question 1. et 2c), déterminer la vitesse v du fluide en fonction de g et h.
   Note : on a $v = v_B$.

Corrections

1. $P_{A'} + \rho g z_{A'} + 1/2\rho v_{A'}^2 = P_B + \rho g z_B + 1/2\rho v_B^2$ or $z_{A'} = z_B$ et $v_{A'} = 0$ d'où $P_{A'} - P_B = 1/2\rho v_B^2$.
2. a) Dans le tube de droite on a : $P_A = \rho g h_1 + P_0$.
   b) Dans le tube de gauche on a : $P_B = \rho g h_2 + P_0$.
   c) On a $P_A \approx P_{A'}$ d'où $P_{A'} - P_B = \rho g(h_1 - h_2) = \rho g h$.
3. $P_{A'} - P_B = 1/2\rho v_B^2 = \rho g h$ d'où $v = v_B = \sqrt{2gh}$.

exercice 14 : débitmètre à effet Venturi



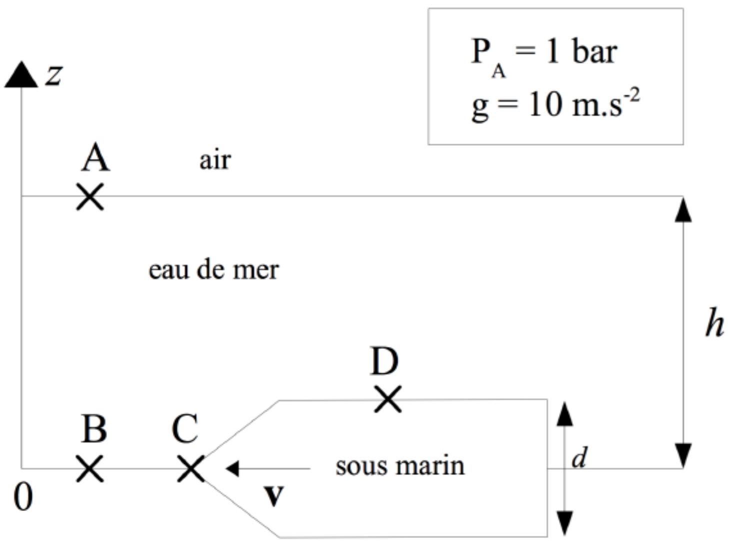
On considère une canalisation de diamètre $D = 20$ cm comportant un étranglement de diamètre $d = 5$ cm. On mesure entre les points A et B une dépression équivalente à 10 cm de Mercure ($\rho_{Hg} = 13\ 600$ kg.m^{-3}), c'est l'effet Venturi. Le fluide est incompressible (eau de masse volumique $\rho = 1000$ kg.m^{-3}).

1. Que vaut la dépression $P_A - P_B$ (en Pa) ? On prendra $g = 10$ m.s^{-2}.
2. Déterminer la vitesse du fluide en B (en m.s^{-1}).
3. En déduire la vitesse du fluide en A (en m.s^{-1}).
4. Que vaut le débit en m^3.s^{-1} et en litres.s^{-1}.

Corrections

1. $P_A - P_B = 13600 \times 10 \times 0,1 = 13\ 600$ Pa.
2. $P_A + 1/2\rho v_A^2 = P_B + 1/2\rho v_B^2$ d'où $P_A - P_B = 1/2\rho(v_B^2 - v_A^2)$. On a également $(\pi D^2/4)v_A = (\pi d^2/4)v_B$ d'où $v_A = (d/D)^2 v_B$. On a ainsi $P_A - P_B = 1/2\rho v_B^2[1 - (d/D)^4]$ d'où $v_B = \sqrt{2(P_A - P_B)/[\rho(1 - d^4/D^4)]} = 5,2$ m.s^{-1}.
3. $v_A = (d/D)^2 v_B = 0,3$ m.s^{-1}.
4. Le débit vaut $(\pi D^2/4)v_A = 0,01$ m^3.s^{-1} $= 10$ litres.s^{-1}.

exercice 15 : écoulement de Bernoulli autour d'un sous marin



On considère un sous-marin circulant à la vitesse $v = 15$ km.h^{-1} dans l'eau de mer ($\rho = 1040$ kg.m^{-3}) à la profondeur $h = 18$ m (voir Fig. ??).

1. Que vaut la pression statique en B, notée P_B ? On donnera la valeur en bars. *Indication* : on utilisera la loi de Bernoulli entre les points A et B.
2. Que vaut la pression d'arrêt sur le nez du sous-marin, c'est-à-dire en C, notée P_C ? On donnera la valeur en bars. *Indication* : on utilisera la loi de Bernoulli entre les points B et C.
3. On mesure sur les flancs du sous-marin, en D, $P_D = 1,5$ bars. On précise par ailleurs que le diamètre d du sous-marin est de 7 m. Que vaut la vitesse v_D de l'eau de mer en D en km.h^{-1} ? *Indication* : on utilisera la loi de Bernoulli entre les points C et D.

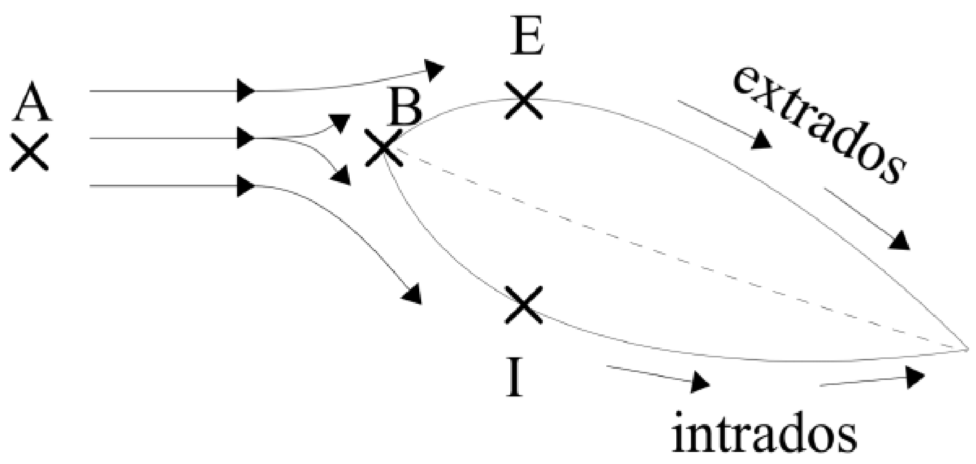
Corrections

1. $P_B = 2,8$ bars (car en utilisant la loi de Bernoulli on a, entre A et B, $P_A + \rho g h = P_B$).

2. $P_C = 3,0$ bars (car en utilisant la loi de Bernoulli on a, entre B et C, $P_B + 1/2\rho v^2 = P_C$).
3. $v_D = 15$ m.s^{-1} $= 54$ km.h^{-1} (car en utilisant la loi de Bernoulli on a, entre C et D, $P_C = P_D + \rho g d/2 + 1/2\rho v_D^2$).

exercice 16 : effet Coanda, portance

Effet Coanda : le gradient de pression est dirigé du centre de courbure de l'écoulement vers l'extérieur autour de l'aile (voir cours).



On étudie le comportement d'une aile d'avion en soufflerie (voir Fig. ??). À grande distance de l'aile en A, $P_A = 10^5$ Pa, $v_A = 40$ m.s^{-1}. On considère l'air comme incompressible de masse volumique $\rho = 1,225$ kg.m^{-3}. On précise que $g = 10$ m.s^{-2}.

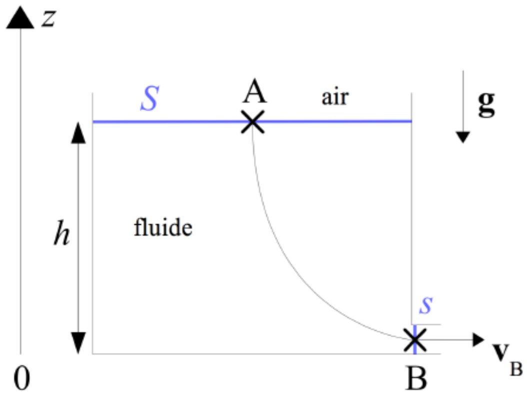
1. Que vaut la pression d'arrêt en B ?
2. Sur l'extrados en E (centre de courbure en dessous de E), on mesure une dépression équivalente à $h = 300$ mm d'eau (rappel : $\rho_{eau} = 1000$ kg.m^{-3}) ; calculer P_E (en Pa).
3. Sur l'intrados en I (centre de courbure en dessous de I), on mesure une surpression équivalente à $h = 50$ mm d'eau ; calculer P_I (en Pa).
4. Que vaut la portance par mètre carré de surface (en N.m^{-2}) ?
5. À l'aide de l'équation de Bernoulli entre A et E puis A et I, donner l'expression de v_E, v_I puis calculer les valeurs (en m.s^{-1}). Comparer à v_A.
   Note : l'épaisseur de l'aile est négligeable de sorte que le voisinage de l'aile est à pression atmosphérique P_A.

Corrections

1. $1/2\rho v_A^2 + P_A = P_B$ d'où $P_B = 101\ 000$ Pa.
2. $P_E = P_A - \rho_{eau} g h_{eau} = 97\ 000$ Pa.
3. $P_I = P_A + \rho_{eau} g h_{eau} = 100\ 500$ Pa.
4. $P_I - P_E = 3500$ N.m^{-2}.
5. $P_A + 1/2\rho v_A^2 = P_E + 1/2\rho v_E^2$ d'où $v_E = \sqrt{v_A^2 + 2(P_A - P_E)/\rho}$, on a donc $v_E = 80$ m.s^{-1}. De même pour v_I où on trouve 28 m.s^{-1}. L'écoulement est plus rapide sur l'extrados que sur l'intrados. On voit que $v_E > v_A$ et que $v_I < v_A$.

exercice 17 : vidange d'un réservoir, équation de Bernoulli

On considère un réservoir de hauteur h et de section S percé d'un trou à sa base en B de section $s \ll S$ (voir Fig. ??). Le fluide qu'il contient est incompressible de masse volumique ρ.



1. Écrire en régime stationnaire l'équation de Bernoulli entre A et B et en déduire la vitesse v_B de sortie du fluide en fonction de g et h. Comme $s \ll S$, on supposera $v_A \approx 0$.
2. Appliquer la conservation du débit entre A et B et exprimer v_A en fonction de v_B, S et s.
3. a) En faisant l'approximation que l'expression de v_A trouvée à la question 1. reste valable en régime quasi-stationnaire (si $s \ll S$), trouver la loi qui régit la hauteur d'eau $z(t)$ en fonction de h (hauteur initiale), g, S, s et t.
   Indication : on a $v_A = -\mathrm{d}z/\mathrm{d}t$.
   b) Exprimer le temps de vidange.
4. Application numérique : on donne $h = 1$ m, $S/s = 1000$ et $g = 10$ m.s^{-2}. Calculer le temps de vidange.

Corrections

1. $P_A + \rho g h = P_B + 1/2\rho v_B^2$ or $P_A = P_B =$ pression atmosphérique d'où $\rho g h = 1/2\rho v_B^2$ et donc $v_B = \sqrt{2gh}$. Il s'agit de la loi de Torricelli.
2. $s v_B = S v_A$ d'où $v_A = (s/S) v_B$.
3. a) On a $v_A = -\mathrm{d}z/\mathrm{d}t$ d'où $\mathrm{d}z/\mathrm{d}t = -(s/S)\sqrt{2gz}$ (le signe $-$ provient du fait que $\mathrm{d}z/\mathrm{d}t < 0$), en intégrant de h à z on trouve :

$$\int_h^z z^{-1/2}\mathrm{d}z = -(s/S)\sqrt{2g}\int_0^t \mathrm{d}t$$
$$2\left[z^{1/2}\right]_h^z = -(s/S)\sqrt{2g}\, t$$
$$\sqrt{z} - \sqrt{h} = -(s/S)\sqrt{g/2}\, t$$

   d'où $z = \left[\sqrt{h} - (s/S)\sqrt{g/2}\, t\right]^2$.

   b) Le temps de vidange est obtenu pour $z = 0$ d'où $t = (S/s)\sqrt{2h/g}$.
4. Application numérique : $t = 446$ s.

exercice 18 : jet d'eau et équation de Bernoulli incompressible

La vitesse verticale de l'eau éjectée par la tuyère du célèbre jet d'eau de Genève, de diamètre 10 cm, est voisine de v = 200 km/h.

1) que vaut cette vitesse v d'éjection en m/s ?
2) quel est le débit du jet d'eau en litres/s ?

3) quelle relation lie v à l'accélération de la pesanteur g et à la hauteur h du jet ?
aide: utiliser la loi de Bernoulli entre le sol et le sommet du jet
4) avec g = 10 m/s², calculer h en m.
5) exprimer la surpression ΔP nécessaire pour éjecter l'eau en fonction de sa vitesse d'éjection v et de sa masse volumique ρ
6) que vaut ΔP (en bars) pour v = 200 km/h et ρ = 1000 kg m^{-3} ?
aide: utiliser la loi de Bernoulli de part et d'autre de la tuyère d'éjection, en supposant la vitesse nulle en amont
7) en déduire la puissance en MW du jet d'eau

Réponses
1) 55 m/s
2) 432 litres
3) $v = (2\ g\ h)^{1/2}$
4) h = 150 m
5) $\Delta P = 1/2\ \rho\ v^2$
6) ΔP = 15 bars
7) puissance = $(1/2\ \rho\ v^2)$ x débit = $1.5\ 10^6$ x 0.43 = 0.65 MW

exercice 19 : force exercée par un fluide sur un obstacle

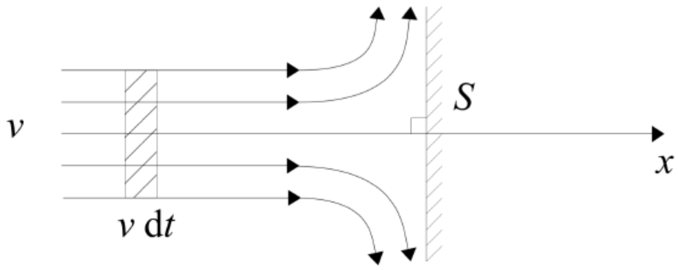


FIGURE 7 – Rencontre d'un fluide avec un obstacle.

On considère un fluide incompressible de masse volumique ρ, se déplaçant à grande distance à la vitesse $v = 10$ m.s^{-1}, le long de l'axe x (voir Fig. ??). Le fluide rencontre dans son parcours un obstacle de surface $S = 1$ m^2.

1. Exprimer la force exercée par le fluide sur l'obstacle en fonction de ρ, v et S ?
   Indication : on utilisera la quantité de mouvement d'un volume dV.
2. Applications numériques : calculer cette force dans le cas où le fluide est de l'eau ($\rho = 10^3$ kg.m^{-3}, de l'air ($\rho = 1,3$ kg.m^{-3}).

Corrections

1. La force est donnée par $\mathbf{F} = \mathrm{d}\mathbf{p}/\mathrm{d}t$ or la quantité de mouvement d'un volume d$V = S v \mathrm{d}t$ s'exprime comme $\mathrm{d}\mathbf{p} = \rho \mathrm{d}V \mathbf{v} = \rho S v \mathrm{d}t \times v \mathbf{e_x} = \rho S v^2 \mathbf{e_x} \mathrm{d}t$. D'où $\mathbf{F} = \rho S v^2 \mathbf{e_x}$.
2. Applications numériques : $F_{\mathrm{eau}} = 10^5$ N, $F_{\mathrm{air}} = 130$ N.

exercice 20 : effet des forces de Coriolis sur un écoulement, nombre de Rossby

Tout corps en mouvement dans un référentiel en rotation subit une force d'inertie dite de Coriolis (c'est elle qui s'illustre dans l'expérience célèbre du pendule de Foucault au Panthéon). L'importance des forces de Coriolis est caractérisée par le nombre de Rossby $R_0 = v/(L\omega)$ où v est la vitesse de la matière en mouvement, L sa taille caractéristique et ω la vitesse angulaire de rotation du référentiel en mouvement. Si $R_0 < 1$, les forces de Coriolis sont dominantes.

1. Calculer $\omega = 2\pi/T$
   — pour la Terre (on donne $T = 24$ heures)
   — pour le Soleil (on donne $T = 26$ jours).
2. Calculer R_0
   — pour une dépression ou un anticyclone dans l'atmosphère terrestre ($L = 10^3$ km, $v = 50$ km.h^{-1} à convertir en m.s^{-1})
   — pour une tache solaire ($L = 10^4$ km, $v = 1$ km.s^{-1})

Corrections

1. $\omega = 7,3 \times 10^{-5}$ rad.s^{-1}, $2,8 \times 10^{-6}$ rad.s-1.
2. $R_0 = 0,2$ (ce sont les forces de Coriolis qui pilotent le mouvement des masses d'air autour d'un anticyclone ou d'une dépression).
   $R_0 = 36$.

exercice 21 : effet des forces de visqueuses sur un écoulement, nombre de Reynolds

Le nombre $R_e = Lv/\nu$ permet de savoir si l'advection ($R_e > 1$) ou les forces visqueuses ($R_e < 1$) dominent. En première approximation, l'écoulement est turbulent si $R_e \gg 1$ (car l'équation d'Euler est non linéaire) et laminaire (absence de tourbillons) si $R_e \ll 1$ (forces visqueuses dominantes). v désigne la vitesse du fluide et L sa dimension caractéristique, ν est la viscosité cinématique du milieu. On demande de compléter le tableau suivant :

Milieu	ν (m^2.s^{-1})	L (m)	v (m.s^{-1})	R_e
eau (tuyau)	10^{-6}	10^{-2}	1	
air (aile avion)	$1,5 \times 10^{-5}$	1	150	
atmosphère solaire	1	10^7	10^3	
huile (tuyau)	10^{-3}	10^{-2}	1	
miel (cuillère)	10^{-2}	10^{-2}	0,01	
bitume (tuyau)	10^5	0,1	0,1	

Réponses (colonne de droite): $R_e = 10^4, 10^7, 10^{10}, 10, 10^{-2}, 10^{-7}$

exercice 22 : effet des forces magnétiques sur un écoulement, nombre de Reynolds magnétique

Le nombre $R_m = \mu_0 L v \gamma$ permet de savoir si l'advection (transport du champ magnétique) ($R_m > 1$) ou la diffusion magnétique ($R_m < 1$) dominent dans un fluide de conductivité γ et de vitesse v. L est la dimension caractéristique du milieu.
Calculer R_m et dire si l'advection ou la diffusion domine :

— dans une tache solaire ($L = 10^4$ km, $v = 1$ km.s^{-1}, $\gamma = 10^3$ S.m^{-1})
— dans une nappe de courant ($L = 1$ m, $v = 1$ km.s^{-1}, $\gamma = 10^2$ S.m^{-1}).

Corrections

Dans une tache solaire : $R_m = 10^7$, advection dominante.
Dans une nappe de courant : $R_m = 0,1$, diffusion dominante.

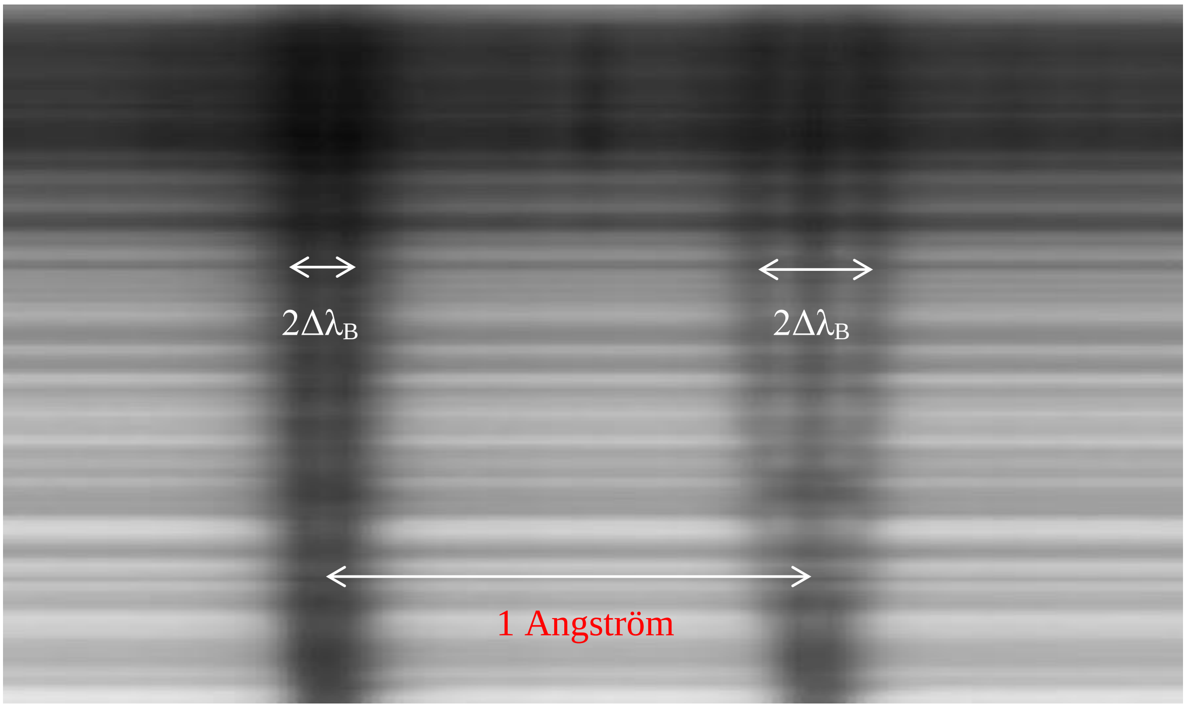
6 – Mesure expérimentale des champs magnétiques

exercice 23 : mesure du champ magnétique dans une tache solaire

Vous avez ci dessous un spectre (en abscisse : la longueur d'onde; en ordonnée: une coordonnée spatiale sur la surface solaire) de deux raies du Fer de longueur d'onde λ = 6301.5 Angström (à gauche) et 6302.5 Angström (à droite) dans la pénombre d'une tache solaire, de champ magnétique très fort. La distance entre les deux raies est de 0.1 nm. On distingue sur la tache deux composantes Zeeman (à polarisation circulaire gauche et droite) écartées de $\Delta\lambda = 2\,\Delta\lambda_B$. On démontre que :

$$\boxed{\Delta\lambda_B = 4.67\ 10^{-13}\ \lambda^2\, g^*\, B}$$

formule de l'effet Zeeman dans laquelle λ et $\Delta\lambda_B$ sont exprimés en Angström (symbole Å) et le champ magnétique B en Gauss (1 G = 10^{-4} T). g* est un facteur de mécanique quantique, qui varie selon les raies (facteur de Landé équivalent). Pour la raie à λ = 6301.5 Å, on a g* = 1.67 et pour la seconde à λ = 6302.5 Å, on a g* = 2.5.

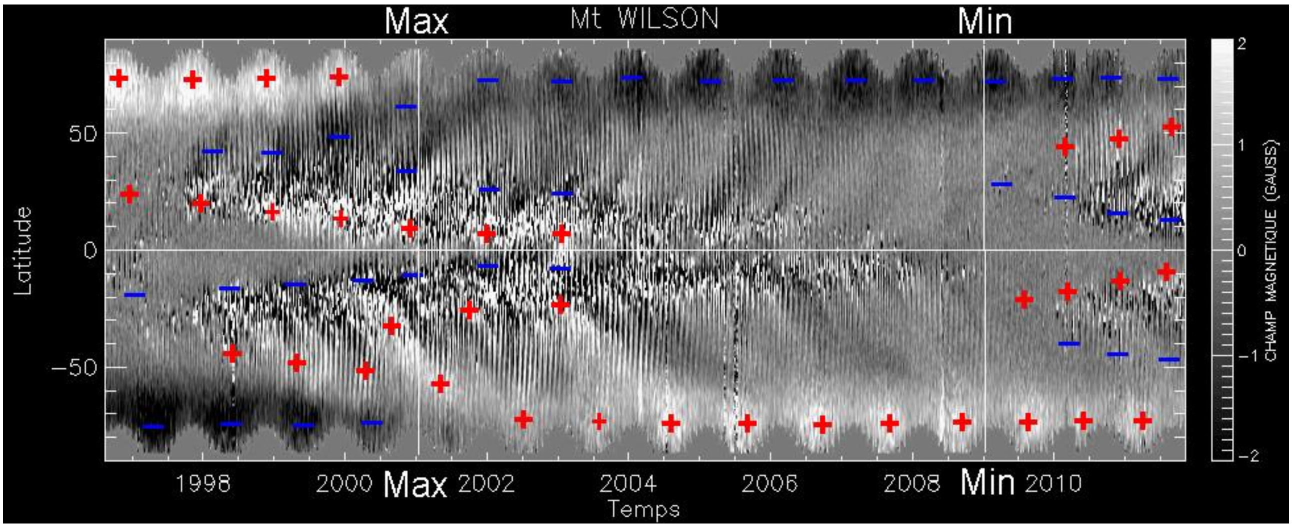


Pour la raie de droite à $\lambda = 6302.5$ Å:
1) mesurer $2\Delta\lambda_B$ dans l'ombre de la tache en Å sur l'image
2) en déduire B en Gauss
Pour la raie de gauche à $\lambda = 6301.5$ Å:
3) mesurer $2\Delta\lambda_B$ dans l'ombre de la tache en Å sur l'image
4) en déduire B en Gauss
Note: on doit trouver à peu très le même résultat sur les deux raies

Réponses:
1) $2\Delta\lambda_B = 0.24$ Å d'où $\Delta\lambda_B = 0.12$ Å
2) B = 2590 Gauss
3) $2\Delta\lambda_B = 0.15$ Å d'où $\Delta\lambda_B = 0.075$ Å
4) B = 2420 Gauss

7 – Advection/diffusion du champ magnétique

Exercice 24 : advection des champs magnétiques au cours du cycle solaire



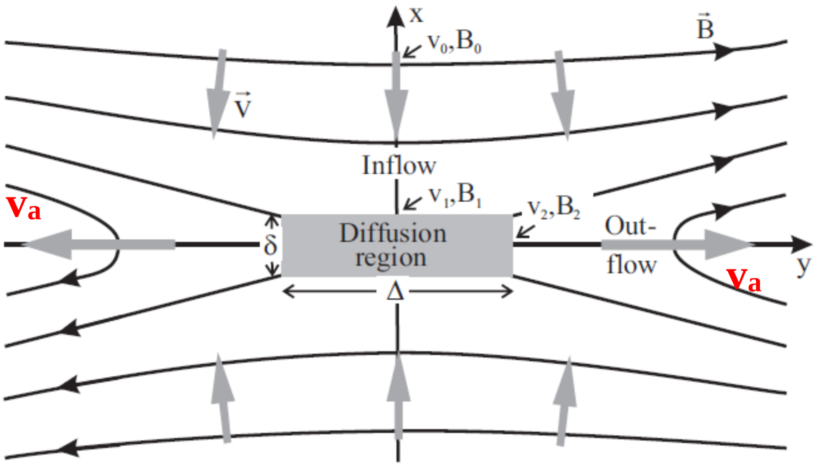
Les cartes synoptiques des champs magnétiques solaires (temps en abscisse, latitude en ordonnée) dévoilent un transport des champs magnétiques vers les pôles lors de la phase de montée des cycles (entre le minimum et le maximum solaire, soit 4 ans), comme le montre la figure de 1998 à 2001 (début du cycle 23) puis de 2009 à 2013 (début du cycle 24).

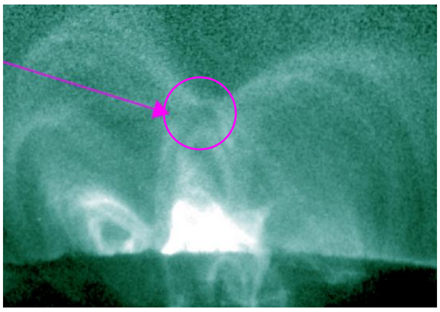
1) si R = 700000 km (rayon solaire), que vaut le quart de cercle équateur - pôles en mètres ?
2) sachant que la circulation méridienne de l'équateur vers les pôles mesurée par les satellites héliosismologiques (SOHO, PICARD) vaut 10 m/s, quel temps faut-il au champ magnétique pour parcourir la distance équateur - pôles, en années ?
3) ce temps advectif est-il compatible avec la durée du cycle solaire de 11 ans ?

Réponses :
1) $R\pi/2 = 1.1\ 10^9$ m
2) 3.5 années
3) oui

exercice 25 : reconnexion magnétique

Le processus de reconnexion magnétique, qui permet une réorganisation des lignes de champ magnétique et une conversion d'énergie magnétique en énergie cinétique et en chaleur (effet Joule) est à l'oeuvre dans les éruptions solaires, la magnétosphère terrestre ou encore les disruptions des machines de laboratoire tels les tokamaks. La reconnexion se fait dans une "nappe de courant" (zone de champs magnétiques anti parallèles) au sein d'une région diffusive de nombre de Reynolds magnétique voisin de 1.
Ci dessous, le champ magnétique anti parallèle B_0 = 0.01 T est advecté à la vitesse v_0 = 1 km s^{-1} vers la région diffusive de conductivité γ = 1000 S m^{-1}. On appelle δ l'épaisseur de la région diffusive et Δ sa longueur.

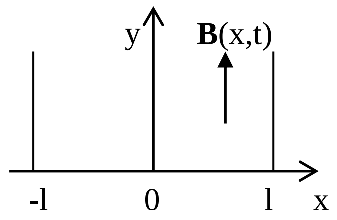




1) rappeler la formule donnant le temps convectif τ en fonction de δ et v_0.
2) rappeler la formule donnant le temps diffusif τ_d en fonction de δ, μ_0 et γ.
3) en égalisant ces deux temps, exprimer l'épaisseur δ de la région diffusive en fonction de v_0, μ_0 et γ.
4) calculer δ (en m) pour v_0 = 1000 m s^{-1}, γ = 1000 S m^{-1} et $\mu_0 = 4\,\pi\,10^{-7}$
5) la matière est éjectée de la zone diffusive à la vitesse $v_a = B_0 / (\rho\mu_0)^{1/2}$ dite vitesse d'Alfvèn; calculer v_a (en km s^{-1}) pour B_0 = 0.01 T, $\rho = 10^{-11}$ kg m^{-3} (masse volumique) et $\mu_0 = 4\,\pi\,10^{-7}$
6) un simple bilan de masse dans la région diffusive (masse entrante = masse sortante) fournit la relation $\delta\, v_a = \Delta\, v_0$; calculer la longueur Δ de la région diffusive (en m).
7) la région diffusive est-elle observable sur le Soleil où tout détail inférieur à 70 km échappe aux télescopes ?
8) la densité de courant j dans la région diffusive est $B_0/(\delta\mu_0)$, que vaut-elle (en A m^{-2}) ?
9) que vaut la puissance volumique j^2/γ dissipée par effet Joule (en W m^{-3}) ?

Réponses :
1) $\tau = \delta / v_0$
2) $\tau_d = \delta^2\, \mu_0\, \gamma$
3) $\delta = 1 / (v_0\, \mu_0\, \gamma)$
4) δ = 0.7958 m
5) v_a = 2821 km s^{-1}
6) Δ = 2257 m
7) non
8) j = 9947 A m^{-2}
9) P = 98946 W m^{-3}

exercice 26 : un modèle simple de nappe de courant diffusive



L'équation de diffusion du champ magnétique dans un milieu unidimensionnel de l'espace (axe Ox) tel que -l < x < l et de conductivité γ s'écrit: $\partial^2 B/\partial x^2 = \mu_0 \gamma \, \partial B/\partial t$
On va rechercher une solution à cette équation par séparation des variables, de sorte que
$B(x,t) = X(x)\, T(t)$
où X(x) est une fonction de x seulement, et T(t) une fonction de t seulement. Le champ magnétique est supposé porté par l'axe Oy.
On a alors $T(t)\, d^2X/dx^2 = \mu_0 \gamma \, X(x)\, dT/dt$
1) On pose $d^2X/dx^2 = - k^2 X(x)$ où k est une constante; exprimer la solution X(x) impaire (qui change de signe en x = 0 et donne des champs anti symétriques) de cette équation différentielle en fonction d'une constante multiplicative X_0, de k et de x.
2) Exprimer alors dT/dt en fonction de T(t) et des constantes k, μ_0 et γ.
3) Par intégration, formuler T(t) en fonction de t, des constantes k, μ_0 et γ et d'une constante multiplicative T_0
4) Donner alors l'expression du champ magnétique B(x,t) en fonction de x, t, des constantes k, μ_0 et γ, et de la constante multiplicative $B_0 = X_0 T_0$
5) en t = 0, on a $B(l,0) = B_0$ et $B(-l,0) = -B_0$; quelle relation (la plus simple possible) lie k à la demi largeur l de la nappe ?
6) On sait que $\mathbf{j} = \mathbf{rot}(\mathbf{B})/\mu_0$ (densité de courant); elle est portée par l'axe Oz orthogonal au plan (xOy). Exprimer la valeur algébrique j en fonction de $\partial B/\partial x$ et de μ_0
7) Donner j(x,t) densité de courant en fonction de x, t et des constantes k, μ_0, γ et B_0
Remarquer que j(x,t) est paire (symétrique) et maximum en x = 0: c'est la nappe de courant
8) exprimer la constante de temps τ_d caractéristique de la diffusion en fonction de l, μ_0, γ qui confère une décroissance exponentielle (question 3) au courant et au champ magnétique.
9) application numérique: pour $\gamma = 1000$ S m^{-1} et $\tau_d = 1000$ s (temps caractéristique d'une éruption solaire), quelle est l'épaisseur l de la nappe (en m) ?
10) sera t-elle observable, sachant qu'aucun télescope ne peut discerner de détails plus fins que 70 km ?

Réponses :
1) $X(x) = X_0 \sin(kx)$
2) $dT/dt = - k^2 T(t) / (\mu_0 \gamma)$
3) $T(t) = T_0 \exp[- k^2 t / (\mu_0 \gamma)]$
4) $B(x,t) = B_0 \sin(kx) \exp[- k^2 t / (\mu_0 \gamma)]$
5) $k = \pi / (2\, l)$
6) $j = (1/\mu_0)\, \partial B/\partial x$
7) $j(x,t) = (B_0 k/\mu_0) \cos(kx) \exp[- k^2 t / (\mu_0 \gamma)]$
8) $\tau_d = 4\, l^2 \mu_0 \gamma / \pi^2$
9) l = 1400 m
10) non

9 – Ondes

Rappel de cours utile pour les ondes :
considérons une onde plane progressive harmonique se propageant dans la direction du vecteur d'onde **k**; son écriture complexe, en termes de vitesse **v** (champ vectoriel), surpression P_1 ou surdensité ρ_1 (champs scalaires), s'écrit:

$A\, e^{i(\omega t - \mathbf{k}.\mathbf{r})}$
où A est une amplitude (vectorielle ou scalaire). Dans ce cas, l'écriture des opérateurs se simplifie:

$\mathrm{div}(\mathbf{v}) = -\, i\, \mathbf{k}.\mathbf{v}$ produit scalaire avec $(-\, i\, \mathbf{k})$
$\mathrm{rot}(\mathbf{v}) = -\, i\, \mathbf{k} \wedge \mathbf{v}$ produit vectoriel avec $(-\, i\, \mathbf{k})$
$\partial \mathbf{v}/\partial t = i\, \omega\, \mathbf{v}$ produit avec $(i\, \omega)$
$\partial^2 \mathbf{v}/\partial t^2 = -\, \omega^2\, \mathbf{v}$ produit avec $(-\, \omega^2)$
$\mathbf{grad}\, P_1 = -\, i\, \mathbf{k}\, P_1$ produit avec $(-\, i\, \mathbf{k})$
et $(\mathbf{v}.\mathbf{grad})\mathbf{v}$ se néglige pour les petits mouvements car du second ordre en $\mathbf{v}$

exercice 27 : vitesses de propagation des ondes dans différents milieux

1) Pour les solides, liquides et gaz, la vitesse de propagation des ondes sonores longitudinales (ondes de pression) s'écrit:
$v = (E/\rho)^{1/2}$
où E est le module d'élasticité (module d'Young en Pa) et ρ la masse volumique (en kg m^{-3}). Pour un gaz, E est relié à la pression, et la vitesse de propagation n'est pas la même selon le type de transformation au sein du gaz, isotherme (E = P) ou adiabatique ($E = \gamma P$, $\gamma = 1.67$ ou 1.4 selon que le gaz est mono ou di-atomique). Ici on s'intéressera uniquement au cas adiabatique. On donne le tableau suivant, à compléter (en colonne bleue !).

Matériau	E(Pa)	ρ (kg m^{-3})	v (m s^{-1}) - réponses à donner !
diamant	10^{12}	3500	16900
acier	$2\ 10^{11}$	7900	5030
béton	$3.5\ 10^{10}$	2300	3900
verre	$7\ 10^{10}$	2500	5290
granite	$6\ 10^{10}$	2600	4800
croûte terrestre	1011	2800	5980
bois	10^{10}	700	3780
caoutchouc	10^{7}	950	100
eau	$2.2\ 10^{9}$	1000	1480
air au sol	$1.4\ 10^{5}$	1.3	330
surface solaire	10^{3}	10^{-5}	10000
couronne solaire	10^{-4}	10^{-14}	100000

2) pour une corde de masse linéïque μ (kg m^{-1}) et de section S (m²), tendue sous la tension T (N), on a E = T / S et $\rho = \mu$ / S, donc la relation ci dessus devient $v = (T/\mu)^{1/2}$. Quelle est la célérité des ondes (transversales en m s^{-1}) sur une corde de tension T = 100 N et de masse linéïque $\mu = 5$ grammes par mètre ? Si la corde, fixée à ses deux extrémités, mesure L = 32 cm, quelle est la fréquence f = v / 2L (en Hz) du mode fondamental de vibration ?
Note: le mode fondamental correspond à une longueur L égale à une demi longueur d'onde $\lambda = v/f$; d'autres modes peuvent exister à des multiples de la fréquence fondamentale.
3) en eau profonde, la relation de dispersion de la houle est $\omega^2 = g\, k$ où ω est relié à la période T de la houle par $\omega = 2\pi/T$; k est relié à la longueur d'onde λ de la houle par $k = 2\pi/\lambda$. Que vaut la longueur d'onde d'une houle de période 10 s ? Sa vitesse de propagation $v = \omega/k = g/\omega$? On prendra g = 9.8 m s^{-2} (accélération de la pesanteur).
4) en eau peu profonde, la relation de dispersion de la houle est $\omega = k\, (g\, h)^{1/2}$ où h est la profondeur. Que vaut la longueur d'onde d'une houle de période T = 10 s dans h = 10 m d'eau ? dans 1 m d'eau ? Et les vitesses de propagation correspondantes $v = (g\, h)^{1/2}$? On prendra g = 9.8 m s^{-2} (accélération de la pesanteur).

Réponses :
2) $v = 141$ m s^{-1}
$f = 220$ Hz
Note: il s'agit de la note de musique "la" du 2ème octave
3) $\lambda = 156$ m, $v = 15.6$ m s^{-1}
4) pour h = 10 m, $\lambda = 99$ m, $v = 9.9$ m s^{-1}
pour h = 1 m, $\lambda = 31$ m, $v = 3.1$ m s^{-1}
Note: vitesse et longueur d'onde de la houle diminuent avec la profondeur, expliquant le déferlement des vagues sur la plage.

exercice 28 : vitesse du son, vitesse d'Alfvèn et plasma β

Dans un gaz parfait de masse molaire M et de température T, la vitesse du son est $C_s = \sqrt{\gamma RT/M}$ où $R = 8,32$ J.mole^{-1}.K^{-1} est la constante des gaz parfaits et γ l'exposant adiabatique (5/3 pour un gaz monoatomique, 7/5 pour un diatomique). Dans un milieu magnétisé, les ondes d'Alfvèn se propagent à la vitesse $v_a = B/\sqrt{\mu_0 \rho}$ où B est le champ magnétique et μ_0 la perméabilité magnétique du vide. Le nombre β du plasma indique si les forces de pression dominent ($\beta > 1$) ou non ($\beta < 1$) les forces magnétiques. β est lié à C_s et à v_a par la relation $\beta = 2/\gamma \times (C_s/v_a)^2$.

1. Calculer C_s (en km.s^{-1})
   — dans une tache solaire ($M = 10^{-3}$ kg, $T = 4000$ K, $\gamma = 5/3$)
   — dans la photosphère solaire ($M = 10^{-3}$ kg, $T = 6000$ K, $\gamma = 5/3$)
   — dans la couronne solaire ($M = 10^{-3}$ kg, $T = 1,5 \times 10^6$ K, $\gamma = 5/3$)
   — dans l'atmosphère terrestre ($M = 0,029$ kg, $T = 300$ K, $\gamma = 7/5$).
2. Calculer v_a (en km.s^{-1})
   — dans une tache solaire ($B = 0,1$ T, $\rho = 10^{-5}$ kg.m^{-3})
   — dans la photosphère solaire ($B = 10^{-3}$ T, $\rho = 3 \times 10^{-5}$ kg.m^{-3})
   — dans une boucle magnétique coronale ($B = 10^{-3}$ T, $\rho = 10^{-12}$ kg.m^{-3}).
3. Calculer β et dire si les forces de pression ou magnétiques dominent :
   — dans une tache solaire
   — dans la photosphère solaire
   — dans une boucle magnétique coronale.

Corrections

1. $C_s = 7,4; 9,1; 144,4; 0,34$ km.s^{-1}.
2. $v_a = 28,2; 0,16; 892$ km.s^{-1}.
3. $\beta = 0,08$ (forces magnétiques dominent)
   $\beta = 3870$ (forces de pression dominent)
   $\beta = 0,03$ (forces magnétiques dominent).

exercice 29 : onde sonore longitudinale

On considère une onde sonore longitudinale dans un fluide isentropique de pression et masse volumique uniformes au repos, notées P_0 et ρ_0, se propageant selon Ox. Le vecteur d'onde **k** et le vecteur vitesse **v**(x,t) sont portés par Ox. On pose:
$\rho(x,t) = \rho_0 + \rho_1(x,t)$ où ρ_1 est la perturbation de masse volumique ou "surdensité" avec $|\rho_1| \ll \rho_0$
$P(x,t) = P_0 + P_1(x,t)$ où P_1 est la perturbation de pression ou "surpression" avec $|P_1| \ll P_0$
Les quantités **v**, ρ_1 et P_1 varient en $e^{i(\omega t - kx)}$.
1) on rappelle la loi de conservation de la masse:
$\partial\rho/\partial t + \mathrm{div}(\rho\mathbf{v}) = 0$
$\rightarrow \partial\rho_1/\partial t + \rho_0\, \mathrm{div}(\mathbf{v}) = 0$ au premier ordre (petits mouvements).
En utilisant les opérateurs pour les ondes, en déduire ρ_1 en fonction de ρ_0, k, v, ω

2) on rappelle l'équation du mouvement (Euler):

$\rho\partial\mathbf{v}/\partial t + \rho(\mathbf{v.grad})\mathbf{v} = -\ \mathbf{grad}\ P$

$\rightarrow \rho_0\ \partial\mathbf{v}/\partial t = -\ \mathbf{grad}\ P_1$ au premier ordre (petits mouvements).

En utilisant les opérateurs pour les ondes, en déduire P_1 en fonction de ρ_0, k, v, ω

3) on rappelle que pour une transformation isentropique:

P/ρ^γ = constante

$\rightarrow P_1 / P_0 = \gamma\ \rho_1 / \rho_0$

En utilisant les expressions de P_1 et de ρ_1 issues des deux premières questions, en déduire la relation de dispersion exprimant ω^2 en fonction de k^2, P_0, γ et ρ_0

4) exprimer la vitesse du son Cs donnée par la relation ω = Cs k en fonction de γ, P_0 et ρ_0

5) soit le vecteur de Poynting $\mathbf{\Pi} = P_1\ \mathbf{v}$

Exprimez la valeur algébrique de Π (puissance transportée par l'onde) en fonction de ρ_0, v et Cs

6) exprimez la densité d'énergie cinétique Ec en fonction de ρ_0 et v

7) exprimez la densité d'énergie potentielle $Ep = 1/2\ \chi\ P_1^2$ en fonction de ρ_0 et v sachant que χ est le coefficient de compressibilité isentropique défini par $\chi = (1/\rho)\ (\partial\rho/\partial P) = (1/\rho_0)\ (\rho_1/P_1) = 1/(\gamma\ P_0)$; remarquez qu'il y a équipartition entre énergie cinétique et potentielle

8) exprimez la densité d'énergie mécanique Em = Ec + Ep en fonction de ρ_0 et v

9) quelle relation y a t-il entre Π, Em et Cs ? Constatez que l'onde propage son énergie mécanique à la vitesse Cs.

10) quelle relation existe t-il entre la valeur moyenne $<\Pi>$, ρ_0 et V amplitude de la vitesse ?

11) application numérique pour la surface solaire.

Calculez Cs avec P_0 = 1000 Pa, $\rho = 2\ 10^{-5}$ kg m^{-3}, $\gamma = 5/3$; en supposant V = 1 km/s, calculez ensuite $<\Pi>$. Sachant que l'estimation de $<\Pi>$ est plutôt de 2000 W/m², quel pourcentage de la surface solaire est couvert par les ondes acoustiques progressives ?

Réponses :

1) $\rho_1 = \rho_0\ k\ v / \omega$

2) $P_1 = \rho_0\ \omega\ v / k$

3) $\omega^2 = k^2\ (\gamma\ P_0 / \rho_0)$

4) $Cs = (\gamma\ P_0 / \rho_0)^{1/2}$

5) $\Pi = \rho_0\ \omega\ v^2 / k = \rho_0\ v^2\ Cs$

6) $Ec = 1/2\ \rho_0\ v^2$

7) $Ep = 1/2\ \chi\ P_1^2 = 1/(2\ \gamma\ P_0)\ (\rho_0\ \omega\ v / k)^2 = (\rho_0\ Cs\ v)^2 / (2\ \gamma\ P_0) = 1/2\ \rho_0\ v^2$

8) $Em = \rho_0\ v^2$

9) Π = Em Cs

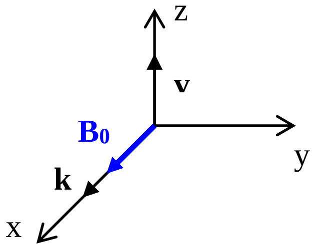
10) $<\Pi> = 1/2\ \rho_0\ V^2\ Cs$

11) Cs = 9130 m/s et $1/2\ \rho_0\ V^2\ Cs$ = 91300 W/m² donne un pourcentage de 2.2 %

exercice 30 : onde magnétique d'Alfvèn transversale incompressible

On considère une onde dans un fluide incompressible de masse volumique ρ, se propageant selon Ox dans un champ magnétique uniforme et constant $\mathbf{B_0} = B_0\ \mathbf{e_x}$. Le vecteur d'onde $\mathbf{k}$ est porté par Ox. On pose: $\mathbf{B}(x,t) = \mathbf{B_0} + \mathbf{B_1}(x,t)$ où $\mathbf{B_1}$ est la perturbation de champ magnétique avec $|B_1| << B_0$. Les quantités ondulatoires $\mathbf{v}(x,t)$ et $\mathbf{B_1}(x,t)$ varient en $e^{i(\omega t - kx)}$.

On supposera que la vitesse du fluide **v** est portée par Oz donc orthogonale à **k** et $\mathbf{B_0}$ (qui sont tous deux portés par Ox).
L'onde est donc transversale.



1) on rappelle la loi de conservation de la masse:
$\partial\rho/\partial t + \mathrm{div}(\rho\mathbf{v}) = 0$
→ $\mathrm{div}(\mathbf{v}) = 0$ pour un fluide incompressible.
En utilisant les opérateurs pour les ondes, **v** porté par Oz satisfait-il div(**v**) = 0 ?
2) dans un milieu de conductivité infinie, dans lequel la densité de courant doit rester finie, on a:
$\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} = \mathbf{0}$
ce qui permet d'exprimer l'équation de Maxwell Faraday sous la forme d'une équation de transport ou d'advection du champ magnétique:
$\mathbf{rot}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) = \partial\mathbf{B}/\partial t$
→ $\mathbf{rot}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B_0}) = \partial\mathbf{B_1}/\partial t$ au premier ordre (petits mouvements).
En utilisant les opérateurs pour les ondes, exprimer le vecteur $\mathbf{B_1}$ en fonction du vecteur **v** et des quantités algébriques k, B_0 et ω. Remarquer alors que $\mathbf{B_1}$ est orthogonal à $\mathbf{B_0}$.
Aide: développer le double produit vectoriel par la relation $\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = (\mathbf{A}.\mathbf{C})\,\mathbf{B} - (\mathbf{A}.\mathbf{B})\,\mathbf{C}$
3) on rappelle l'équation du mouvement (Euler) en présence d'une force de Laplace dans laquelle la densité de courant **j** est donnée par l'équation de Maxwell Ampère en ARQS, $\mathbf{j} = \mathrm{rot}(\mathbf{B})/\mu_0$:
$\rho\partial\mathbf{v}/\partial t + \rho(\mathbf{v}.\mathbf{grad})\mathbf{v} = \mathrm{rot}(\mathbf{B}) \wedge \mathbf{B}/\mu_0$
→ $\rho\, \partial\mathbf{v}/\partial t = \mathrm{rot}(\mathbf{B_1}) \wedge \mathbf{B_0}/\mu_0$ au premier ordre (petits mouvements).
En écrivant les opérateurs pour les ondes, en déduire le vecteur **v** en fonction du vecteur $\mathbf{B_1}$ et des quantités algébriques ρ, k, B_0, ω et μ_0.
Aide: développer le double produit vectoriel par la relation $\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = (\mathbf{A}.\mathbf{C})\,\mathbf{B} - (\mathbf{A}.\mathbf{B})\,\mathbf{C}$
4) en combinant les relations entre les vecteurs **v** et $\mathbf{B_1}$ trouvées aux questions 2 et 3, en déduire la relation de dispersion reliant ω^2 à k^2, B_0, ρ et μ_0.
5) exprimer la vitesse d'Alfvèn Va donnée par la relation ω = Va k en fonction de B_0, ρ et μ_0
6) soit le vecteur de Poynting $\mathbf{\Pi} = \mathbf{E} \wedge \mathbf{B_1}/\mu_0$
Sachant que $\mathbf{E} = -\,\mathbf{v} \wedge \mathbf{B_0}$ au premier ordre, et que $\mathbf{B_1}$ s'exprime en fonction de **v** par le résultat de la question 2, exprimez la valeur algébrique du vecteur de Poynting (porté par Ox) en fonction de k, ω, B_0, v et μ_0
Aide: développer le double produit vectoriel par la relation $\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = (\mathbf{A}.\mathbf{C})\,\mathbf{B} - (\mathbf{A}.\mathbf{B})\,\mathbf{C}$
7) Exprimez la valeur algébrique de Π (puissance transportée par l'onde) en fonction de ρ_0, v et Va
8) exprimez la densité d'énergie cinétique Ec en fonction de ρ et v
9) exprimez la densité d'énergie magnétique $Em = B_1^2 / 2\mu_0$ en fonction de ρ et v à partir du résultat des questions 2 et 5; remarquez qu'il y a équipartition entre énergie cinétique et magnétique
10) exprimez la densité d'énergie totale Et = Ec + Em en fonction de ρ et v
11) quelle relation y a t-il entre Π, Et et Va ? Constatez que l'onde propage son énergie totale à la vitesse d'Alfvèn Va.

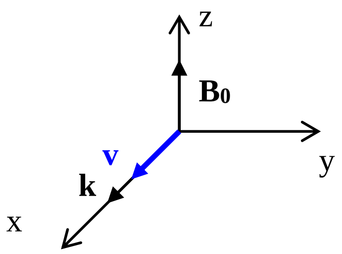
Réponses :
1) $\mathbf{k}.\mathbf{v} = 0$ est satisfait car **v** et **k** sont orthogonaux
2) $-\,\mathbf{k} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B_0}) = \omega\, \mathbf{B_1}$
Développons le double produit vectoriel:
$-\,(\mathbf{k}.\mathbf{B_0})\,\mathbf{v} + (\mathbf{k}.\mathbf{v})\,\mathbf{B_0} = \omega\, \mathbf{B_1}$
Or **k** et **v** sont orthogonaux, d'où $\mathbf{B_1} = -\,(\mathbf{k}.\mathbf{B_0})\,\mathbf{v}/\omega = -\,(k\, B_0/\omega)\,\mathbf{v}$
3) $\rho\, \omega\, \mathbf{v} = -\,(\mathbf{k} \wedge \mathbf{B_1}) \wedge \mathbf{B_0}/\mu_0 = \mathbf{B_0} \wedge (\mathbf{k} \wedge \mathbf{B_1})/\mu_0$
Développons le double produit vectoriel:
$\rho\, \omega\, \mathbf{v} = (\mathbf{B_0}.\mathbf{B_1})\,\mathbf{k}/\mu_0 - (\mathbf{B_0}.\mathbf{k})\,\mathbf{B_1}/\mu_0$
Or $\mathbf{B_0}$ et $\mathbf{B_1}$ sont orthogonaux, d'où $\mathbf{v} = -\,(B_0\, k)\,\mathbf{B_1}/(\rho\, \omega\, \mu_0)$
4) les questions 2 et 3 ont fourni les relations:
$\mathbf{v} = -\,(B_0\, k)\,\mathbf{B_1}/(\rho\, \omega\, \mu_0)$ et $\mathbf{B_1} = -\,(k\, B_0/\omega)\,\mathbf{v}$
On en déduit la relation de dispersion: $(B_0^2\, k^2) / (\rho\, \omega^2\, \mu_0) = 1$
soit $\omega^2 = k^2\, B_0^2/(\rho\, \mu_0)$
5) $Va = B_0/(\rho\, \mu_0)^{1/2}$
6) $\mathbf{\Pi} = \mathbf{B_1} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B_0})/\mu_0$

Développons le double produit vectoriel:
$\mathbf{\Pi} = (\mathbf{B_1}.\mathbf{B_0})\ \mathbf{v}\ /\mu_0 - (\mathbf{B_1}.\mathbf{v})\ \mathbf{B_0}\ )\ /\mu_0$
Or $\mathbf{B_0}$ et $\mathbf{B_1}$ sont orthogonaux, d'où $\Pi = k\ B_0^2\ v^2/\ (\omega\ \mu_0)$
7) $\Pi = \rho\ v^2\ Va$
8) $Ec = 1/2\ \rho\ v^2$
9) $Em = B_1^2\ /\ 2\ \mu_0 = (k\ B_0/\omega)^2\ v^2\ /\ 2\ \mu_0 = 1/2\ \rho\ v^2$
10) $Et = \rho\ v^2$
11) $\Pi = Et\ Va$

exercice 31 : onde magnéto-sonore

On considère une onde dans un fluide compressible de masse volumique au repos ρ_0, se propageant selon Ox dans un champ magnétique uniforme et constant $\mathbf{B_0} = B_0\ \mathbf{e_z}$. Le vecteur d'onde **k** est porté par Ox. On pose:
$\mathbf{B}(x,t) = \mathbf{B_0} + \mathbf{B_1}(x,t)$ où $\mathbf{B_1}$ est la perturbation de champ magnétique avec $|B_1| << B_0$.
$\rho(x,t) = \rho_0 + \rho_1(x,t)$ où ρ_1 est la perturbation de masse volumique ou "surdensité" avec $|\rho_1| << \rho_0$
$P(x,t) = P_0 + P_1(x,t)$ où P_1 est la perturbation de pression ou "surpression" avec $|P_1| << P_0$
Les quantités ondulatoires $\mathbf{v}(x,t)$, $\rho_1(x,t)$, $P_1(x,t)$ et $\mathbf{B_1}(x,t)$ varient en $e^{i(\omega t-kx)}$.

On supposera que la vitesse du fluide **v** est portée par Ox donc orthogonale à $\mathbf{B_0}$
k et **v** sont colinéaires selon Ox donc l'onde est longitudinale.



1) on rappelle la loi de conservation de la masse:
$\partial\rho/\partial t + \mathrm{div}(\rho\mathbf{v}) = 0$
→ $\partial\rho_1/\partial t + \rho_0\ \mathrm{div}(\mathbf{v}) = 0$ au premier ordre (petits mouvements).
En utilisant les opérateurs pour les ondes, exprimer ρ_1 en fonction de k, ρ_0 et v.
2) dans un milieu de conductivité infinie, dans lequel la densité de courant doit rester finie, on a:
$\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} = \mathbf{0}$
ce qui permet d'exprimer l'équation de Maxwell Faraday sous la forme d'une équation de transport ou d'advection du champ magnétique:
$\mathbf{rot}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) = \partial\mathbf{B}/\partial t$
→ $\mathbf{rot}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B_0}) = \partial\mathbf{B_1}/\partial t$ au premier ordre (petits mouvements).
En utilisant les opérateurs pour les ondes, exprimer le vecteur $\mathbf{B_1}$ en fonction du vecteur $\mathbf{B_0}$ et des quantités algébriques k, v et ω. Remarquer alors que $\mathbf{B_1}$ est colinéaire à $\mathbf{B_0}$
Aide: développer le double produit vectoriel par la relation $\mathbf{A \wedge (B \wedge C) = (A.C)\ B - (A.B)\ C}$
3) on rappelle l'équation du mouvement (Euler) en présence d'un gradient de pression et d'une force de Laplace dans laquelle la densité de courant **j** est donnée par l'équation de Maxwell Ampère en ARQS, $\mathbf{j} = \mathrm{rot}(\mathbf{B})/\mu_0$:
$\rho\partial\mathbf{v}/\partial t + \rho(\mathbf{v}.\mathbf{grad})\mathbf{v} = -\ \mathbf{grad}\ P + \mathrm{rot}(\mathbf{B}) \wedge \mathbf{B}/\mu_0$
→ $\rho_0\ \partial\mathbf{v}/\partial t = -\ \mathbf{grad}\ P_1 + \mathrm{rot}(\mathbf{B_1}) \wedge \mathbf{B_0}/\mu_0$ au premier ordre (petits mouvements)
En écrivant les opérateurs pour les ondes, en déduire la valeur algébrique v de la vitesse en fonction des quantités algébriques ρ_0, k, P_1, B_0, B_1, ω et μ_0.
Aide: développer le double produit vectoriel par la relation $\mathbf{A \wedge (B \wedge C) = (A.C)\ B - (A.B)\ C}$
4) La question 2 exprime B_1 en fonction de v; la question 1 exprime ρ_1 en fonction de v; on peut alors exprimer P_1 en fonction de v connaissant ρ_1 en fonction de v en faisant l'hypothèse d'un fluide isentropique régi par la loi de Laplace P/ρ^γ = constante ce qui donne $P_1\ /\ P_0 = \gamma\ \rho_1\ /\ \rho_0$.
Remplacer, dans le résultat de la question 3, B_1 et P_1 par leurs expressions respectives en fonction de v. En déduire la relation de dispersion reliant ω^2 à k^2, P_0, B_0, ρ_0, γ et μ_0.
5) exprimer la vitesse Vm donnée par la relation $\omega = Vm\ k$ en fonction de P_0, B_0, ρ_0, γ et μ_0

6) on donne la vitesse du son $Cs = [P_0 \gamma / \rho_0]^{1/2}$
et la vitesse des ondes magnétiques $Va = B_0 / (\mu_0 \rho_0)^{1/2}$
exprimer la vitesse de propagation des ondes magnéto-sonores Vm en fonction de Cs et de Va.
7) soit $\beta = P_0 / [B_0^2/(2\mu_0)]$; exprimer Vm en fonction de Cs et β.
8) dans un milieu non magnétique (soleil calme), $\beta >> 1$; Vm est-il voisin de la vitesse des ondes sonores ou magnétiques ?
9) dans un milieu magnétique (tache solaire), $\beta << 1$; Vm est-il voisin de la vitesse des ondes sonores ou magnétiques ?

Réponses :
1) $\rho_1 = \rho_0 k v / \omega$
2) $- \mathbf{k} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B_0}) = \omega \mathbf{B_1}$
Développons le double produit vectoriel:
$- (\mathbf{k}.\mathbf{B_0}) \mathbf{v} + (\mathbf{k}.\mathbf{v}) \mathbf{B_0} = \omega \mathbf{B_1}$
Or **k** et $\mathbf{B_0}$ sont orthogonaux, d'où $\mathbf{B_1} = (kv) \mathbf{B_0} /\omega= (kv) B_0 \mathbf{e_z} /\omega$
3) $\rho_0 \omega v \mathbf{e_x} = k P_1 \mathbf{e_x} - (k \mathbf{e_x} \wedge B_1 \mathbf{e_z}) \wedge B_0 \mathbf{e_z} /\mu_0$
$= k P_1 \mathbf{e_x} + (k B_1 \mathbf{e_y}) \wedge B_0 \mathbf{e_z} /\mu_0$
$= k P_1 \mathbf{e_x} + (k B_1 B_0 \mathbf{e_x}) /\mu_0$
$\rho_0 \omega v = k P_1 + k B_1 B_0 /\mu_0$
4) la question 2 donne: $B_1 = (kv) B_0 /\omega$
la question 1 fournit: $\rho_1 = \rho_0 k v / \omega$
l'hypothèse isentropique donne $P_1 = P_0 \gamma \rho_1 / \rho_0$, soit compte tenu de la question 1: $P_1 = P_0 \gamma k v / \omega$
Le résultat de question 3 s'exprime alors:
$\rho_0 \omega v = k P_1 + k B_1 B_0 /\mu_0 = P_0 \gamma k^2 v / \omega + k^2 v B_0^2 / (\mu_0 \omega)$
d'où la relation de dispersion:
$\omega^2 = k^2 [P_0 \gamma / \rho_0 + B_0^2 / (\mu_0 \rho_0)]$
5) $Vm = [P_0 \gamma / \rho_0 + B_0^2 / (\mu_0 \rho_0)]^{1/2}$
6) $Vm = [Cs^2 + Va^2]^{1/2}$
7) $Vm = Cs [1 + 2/(\beta\gamma)]^{1/2}$
8) sonores
9) magnétiques

Exercice 32 : modes d'ondes stationnaires d'une cavité sphérique

On considère un écoulement irrotationnel à symétrie sphérique dans lequel le vecteur vitesse **v** dérive du potentiel φ par la relation **v** = **grad** φ. Le potentiel φ est solution de l'équation de d'Alembert $\Delta\varphi = (1/Cs^2)\, \partial^2\varphi/\partial t^2$ où Cs est la vitesse du son dans le milieu. La cavité est délimitée par deux rayons R_1 et $R_2 > R_1$. On donne en symétrie sphérique $\Delta\varphi = 1/r\, \partial^2(r\varphi)/\partial r^2$.
On recherche des solutions de la forme $\varphi(r,t) = f(r)\, e^{i\omega t}$ où f(r) est une fonction de la variable radiale r seulement, telle que $R_1 < r < R_2$.
1) A partir de l'équation de d'Alembert, écrire l'équation vérifiée par le produit [r f(r)]
2) On pose $k = \omega/Cs$; vérifier que $[r f(r)] = A\, e^{-ikr}+ B\, e^{ikr}$ est solution; donner ensuite φ(r,t) sous la forme de la somme de deux ondes sphériques progressives harmoniques (complexes) ayant A et B pour amplitudes.
3) on impose les conditions aux limites suivantes: $\mathbf{v}(R_1, t) = \mathbf{v}(R_2,t) = \mathbf{0}$ pour tout t; sachant que l'onde est longitudinale, donc que la vitesse **v** est radiale, en déduire deux conditions aux limites sur $\partial\varphi/\partial r(R_1, t)$ et sur $\partial\varphi/\partial r(R_2, t)$
4) exprimer $\partial\varphi(r, t)/\partial r$
5) déduire des conditions aux limites sur $\partial\varphi/\partial r(R_1, t)$ et sur $\partial\varphi/\partial r(R_2, t)$ deux équations liant A et B, du type $A\, g(kR_1) = B\, h(kR_1)$ et $A\, g(kR_2) = B\, h(kR_2)$ où g et h sont deux fonctions complexes que l'on explicitera

6) en effectuant le rapport des deux équations trouvées à la question 5, éliminer A et B et en déduire la relation suivante:
$\tan[k(R_2-R_1)] = k(R_2-R_1) / (1+k^2R_2R_1)$
Cette relation définit des modes stationnaires discrets (valeurs discrètes de k donc de ω)
Aide: $\sin(x) = (e^{ix} - e^{-ix})/2i$ et $\cos(x) = (e^{ix} + e^{-ix})/2$
7) étudions le cas particulier où $R_1 = 0$ et où $R_2 = R$; que devient la relation de la question 6 portant sur le produit (kR) ?
8) les premiers modes solution de l'équation trouvée à la question 7sont donnés par kR = 4.49, 7.72, 10.90, 14.06... Lorsque kR >> 1, donner la solution asymptotique en fonction du nombre π et d'un nombre entier n >> 1
9) quelles valeurs de kR obtient-on pour les quatre premiers modes en adoptant la solution asymptotique ?

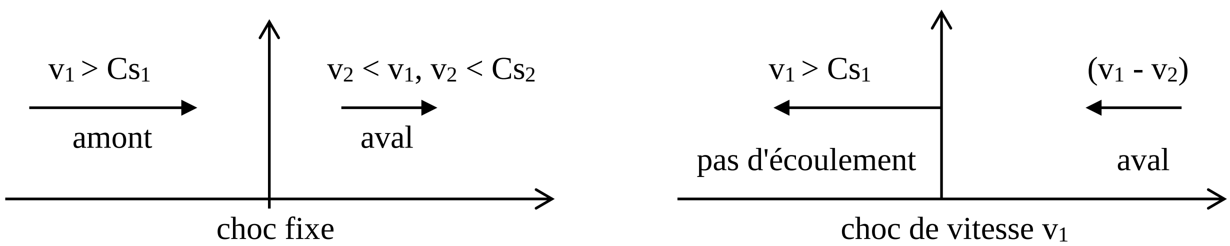
Remarque: le soleil est une cavité résonante plus complexe comportant des centaines de modes de vibration découverts par les techniques de sondage héliosismologique qui analysent les oscillations de la surface de l'étoile.

Réponses :
1) $\partial^2(rf)/\partial r^2 + (\omega^2/Cs^2)\,(rf) = 0$
2) $\varphi(r,t) = A\, e^{i(\omega t-kr)}/r + B\, e^{i(\omega t+kr)}/r$
3) $\partial\varphi/\partial r(R_1, t) = \partial\varphi/\partial r(R_2, t) = 0$
4) $\partial\varphi(r, t)/\partial r = -A\, e^{i(\omega t-kr)}/r^2 - B\, e^{i(\omega t+kr)}/r^2 -ik\, A\, e^{i(\omega t-kr)}/r + ik\, B\, e^{i(\omega t+kr)}/r$
5) $A\, e^{-ikR1}\,(1 + ikR_1) = B\, e^{ikR1}\,(ikR_1 - 1)$
$A\, e^{-ikR2}\,(1 + ikR_2) = B\, e^{ikR2}\,(ikR_2 - 1)$
6) $e^{-ik(R1-R2)}\,(1 + ikR_1)/(1 + ikR_2) = e^{ik(R1-R2)}\,(ikR_1 - 1)/(ikR_2 - 1)$
En développant cette expression et en regroupant les exponentielles, on fait apparaître une équation dans laquelle $\sin[k(R_2-R_1)]$ apparaît dans le terme de gauche et $\cos[k(R_2-R_1)]$ dans le terme de droite; en faisant le quotient, on en déduit la formule donnée $\tan[k(R_2-R_1)] = k(R_2-R_1) / (1+k^2R_2R_1)$
7) $\tan(kR) = kR$
8) $kR = \pi/2 + n\,\pi$ pour n >> 1
9) $kR = 1.5\,\pi,\ 2.5\,\pi,\ 3.5\,\pi,\ 4.5\,\pi$ soit 4.71, 7.85, 10.99, 14.14, on peut dire qu'à partir de n = 5, la valeur asymptotique convient.

10 – chocs hydrodynamiques, écoulements transsoniques

Exercice 33 : effet destructeur d'une onde de choc

Les relations de Rankine Hugoniot, établies pour une discontinuité fixe (choc) de pression, vitesse, masse volumique et température en présence d'un écoulement amont supersonique ($v_1 > Cs_1$) et aval subsonique ($v_2 < Cs_2$), où Cs_1 et Cs_2 sont les vitesses du son dans chaque zone, sont également valides pour un choc mobile. On passe du choc fixe au choc mobile de vitesse v_1 (sans écoulement amont) selon le schéma suivant :



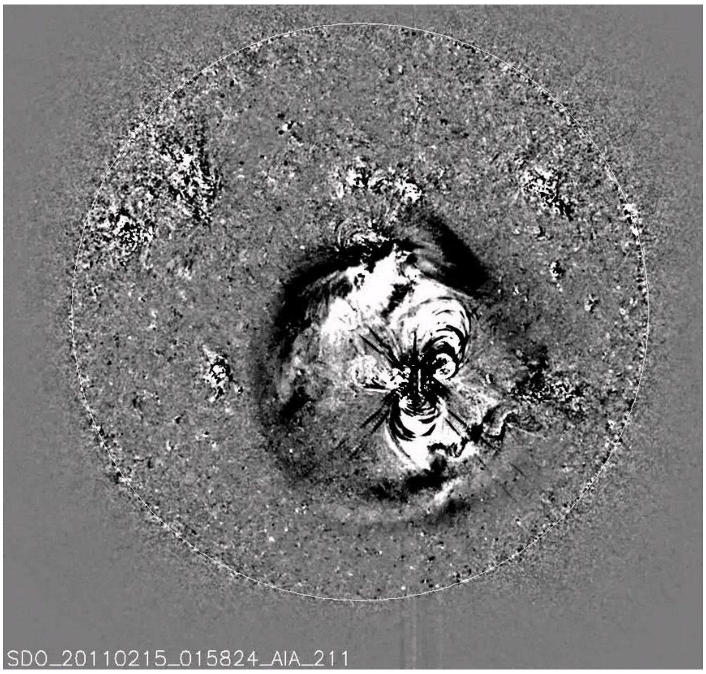
$v_1/v_2 = \rho_2/\rho_1 = (\gamma+1)\, M_1^2 / [2 + M_1^2\, (\gamma-1)] \ > 1$

$P_2/P_1 = [\, 2\, \gamma\, M_1^2 - (\gamma-1)\,] / (\gamma+1) \ > 1$

Le choc fixe réalise une compression ($P_2 > P_1$) avec augmentation de température ($T_2 > T_1$, donc $Cs_2 > Cs_1$) et diminution de la vitesse d'écoulement ($v_2 < v_1$).
En amont du choc mobile de vitesse v_1, il n'y a pas d'écoulement; en aval la vitesse est ($v_1 - v_2$).
1) On donne pour l'air $Cs_1 = 330$ m s^{-1} et γ (exposant adiabatique) = 7/5 = 1.4. Supposons qu'une explosion s'accompagne d'un choc de vitesse $v_1 = 990$ m s^{-1}. Que vaut le nombre de Mach $M_1 = v_1/Cs_1$ du choc ?
2) connaissant M_1, utiliser les relations de Rankine Hugoniot ci dessus pour en déduire $\rho_2/\rho_1 = v_1/v_2$; en déduire v_2 puis la vitesse de l'écoulement aval ($v_1 - v_2$) en m s^{-1}
Note: le choc s'accompagne d'un souffle violent en aval
3) utiliser les relations de Rankine Hugoniot ci dessus pour en déduire la compression P_2/P_1; en supposant $P_1 = 1$ bar, que vaut P_2 en bars ?
Note: le choc s'accompagne d'une forte compression
4) que vaut la force $F = (P_2\text{-}P_1)$ exercée par le choc sur une surface de 1 m², exprimée en Nm^{-2} ? Quel est son équivalent en tonnes par mètre carré, c'est à dire $(P_2\text{-}P_1)/g$, où $g = 9.8$ m s^{-2} ?
Note: la force énorme exercée par l'onde de choc explique son effet destructeur
5) connaissant ρ_2/ρ_1 et P_2/P_1, déduire de la loi des gaz parfaits T_2/T_1; en supposant $T_1 = 300$ K, que vaut T_2 en K ?
Note: le choc s'accompagne d'une forte augmentation de température

Réponses
1) $M_1 = 3$
2) $\rho_2/\rho_1 = v_1/v_2 = 3.86$
$v_1 = 990$ m s^{-1} donne alors $v_2 = 257$ m s^{-1} puis ($v_1 - v_2$) = 733 m s^{-1}
3) $P_2/P_1 = 10.33$ d'où $P_2 = 10.33$ bars
4) $F = 9.33\ 10^5$ N m^{-2} ou 95 tonnes/m²
5) $T_2/T_1 = 2.68$ d'où $T_2 = 800$ K

<u>exercice 34 : onde de choc lors d'une éruption solaire</u>



Observation d'une onde de choc déclenchée par une éruption solaire: satellite SDO/NASA, Instrument AIA, Raie du Fer ionisé à 21.1 nm, Température 10^6 K

On considère un choc se propageant à la vitesse $v_1 = 450$ km s^{-1} dans la basse couronne solaire où la vitesse du son est $Cs_1 = 150$ km s^{-1}. On donne les relations de Rankine Hugoniot:

$v_1/v_2 = \rho_2/\rho_1 = (\gamma+1)\, M_1^2 / [2 + M_1^2 (\gamma-1)] > 1$

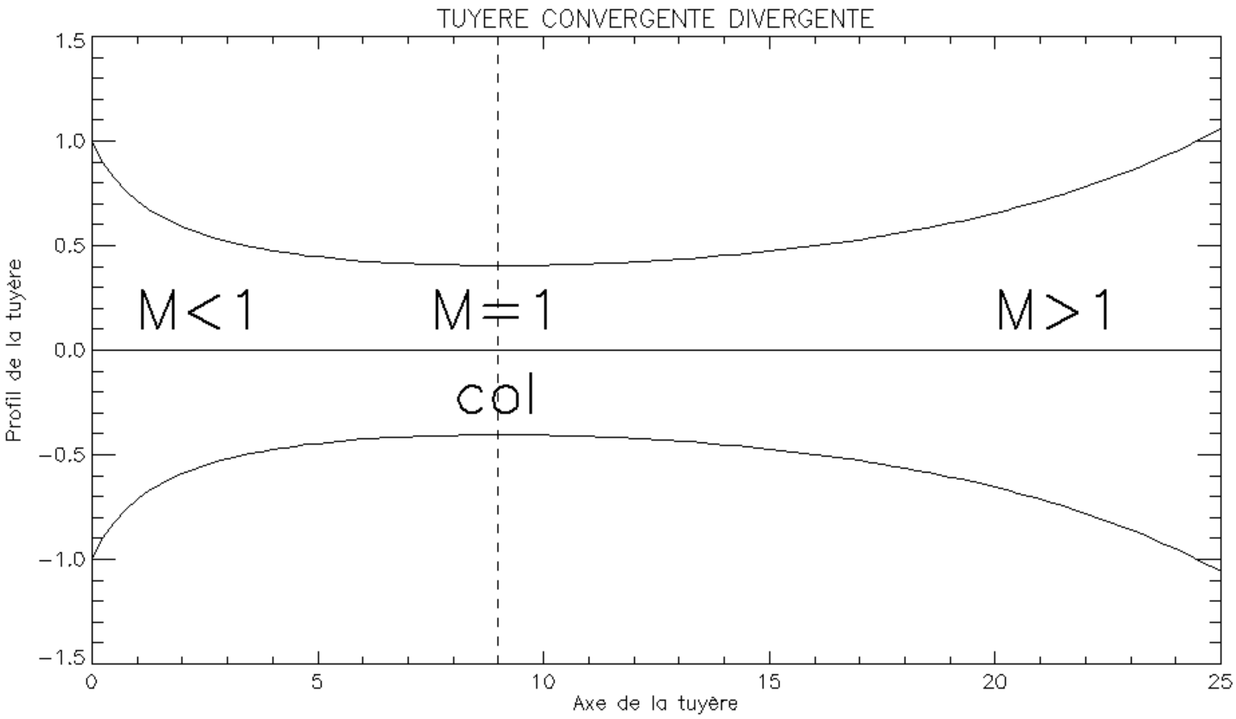
$P_2/P_1 = [\, 2\, \gamma\, M_1^2 - (\gamma-1)\,] / (\gamma+1) > 1$

Dans la couronne solaire, γ (exposant adiabatique) = 5/3 = 1.667
1) que vaut le nombre de Mach $M_1 = v_1/Cs_1$ du choc ?
2) déduire des relations de Rankine Hugoniot ρ_2/ρ_1
3) déduire des relations de Rankine Hugoniot P_2/P_1
Note: la compression au passage du choc peut expliquer la déstabilisation des filaments solaires
4) connaissant ρ_2/ρ_1 et P_2/P_1, déduire de la loi des gaz parfaits T_2/T_1
Note: l'élévation de température au passage du choc peut aussi expliquer la disparition thermique des filaments solaires, parfois observée, et leur réapparition après refroidissement

Réponses :
1) $M_1 = 3$
2) $\rho_2/\rho_1 = 3$
3) $P_2/P_1 = 11$
4) $T_2/T_1 = 3.67$

exercice 35 : écoulement transsonique dans une tuyère convergente divergente

Cet exercice a pour but de comprendre le fonctionnement de la tuyère convergente divergente, utilisée dans les moteurs fusée, pour éjecter des gaz à grande vitesse. Le principe a été établi par l'ingénieur suédois Laval à la fin du XIXème siècle. La tuyère est composée d'une section convergente subsonique (nombre de Mach M < 1), où la vitesse augmente jusqu'au col pour atteindre la vitesse du son (M = 1). Dans la partie divergente, la vitesse est supersonique (M > 1) et continue de croître progressivement jusqu'à la sortie. En général, la pression d'entrée est élevée et la vitesse d'entrée faible; par contre, en sortie, la pression est la pression atmosphérique (1 bar) et la vitesse des gaz est supersonique.



Soit x l'abscisse d'un point sur l'axe Ox de la tuyère. Appelons S(x) sa section (connue) de la tuyère, v(x) la vitesse de l'écoulement le long de l'axe, P(x) la pression et ρ(x) la masse volumique. On se place en régime stationnaire.
1) quelle relation lie ρ, v et S (conservation de la masse) ?
2) écrire l'équation d'Euler liant ρ, v, dv/dx et dP/dx (on néglige la pesanteur)
3) on suppose l'écoulement isentropique de sorte que P/ρ^γ = constante où γ est l'exposant adiabatique. Montrer que dP/dx est proportionnel à dρ/dx par un facteur (le carré de la vitesse locale du son) qu'on exprimera en fonction de γ, P et ρ.
4) en combinant les trois équations précédentes, on obtient une équation pour v(x) à S(x) connu:
$dv/dx \ (M^2 - 1) = (v/S) \ dS/dx$
où M(x) = v(x)/Cs(x) est le nombre de Mach à l'abscisse x.
Pour que V(x) croisse dans la section convergente, quelle condition a t-on sur M ?
Pour que V(x) croisse dans la section divergente, quelle condition a t-on sur M ?

Réponses :
1) $\rho \ v \ S = \text{constante} = \rho_0 \ v_0 \ S_0$
2) $\rho \ v \ dv/dx = - dP/dx$
3) $Cs = (\gamma \ P / \rho)^{1/2}$
4) section convergente, dS/dx < 0; dv/dx > 0 implique M < 1
section divergente, dS/dx > 0; dv/dx > 0 implique M > 1

exercice 36 : tuyère d'un moteur fusée

Le moteur fusée Vulcain de la fusée Ariane 5 brûle de l'oxygène O_2 et de l'hydrogène H_2 produisant de la vapeur H_2O à la température de 3570 K sous pression de 115 bars dans la chambre de combustion. Les gaz pénètrent dans une tuyère convergente divergente; l'écoulement dans la tuyère est transsonique (subsonique à l'entrée, supersonique en sortie, sonique au col) et s'accompagne d'une détente et d'une chute de température. A l'abscisse x le long de la tuyère, on désigne par V(x), C(x), P(x), T(x), ρ(x), S(x) respectivement la vitesse du fluide, vitesse du son, pression, température, masse volumique, et section droite (surface) de la tuyère. L'écoulement se fait sans échange de chaleur; on le considère isentropique. Les équations régissant l'écoulement sont:

conservation de la masse:	$\rho \ v \ S = \text{constante}$
loi des gaz parfaits:	$P = \rho \ R \ T / M$
transformation isentropique:	$P/\rho^\gamma = \text{constante}$
conservation de l'énergie:	$h + v^2/2 = \text{constante}$ avec $h = [\gamma/(\gamma-1)] \ R \ T / M$ (enthalpie massique)

Constantes utiles:
γ = 1.3 (exposant adiabatique)
M = 0.018 kg (masse molaire de l'eau)
$R = 8.314 \ J \ K^{-1} \ mole^{-1}$ (constante des gaz parfaits)

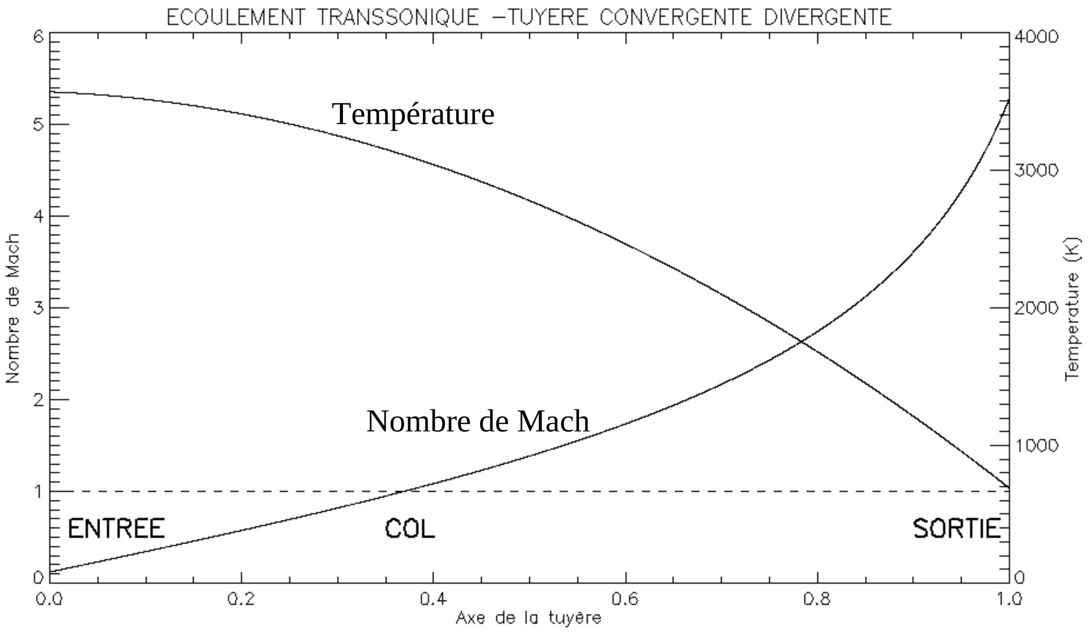
Entrée de la tuyère (indice e):
Pression: P_e = 115 bars
Température: T_e = 3570 K

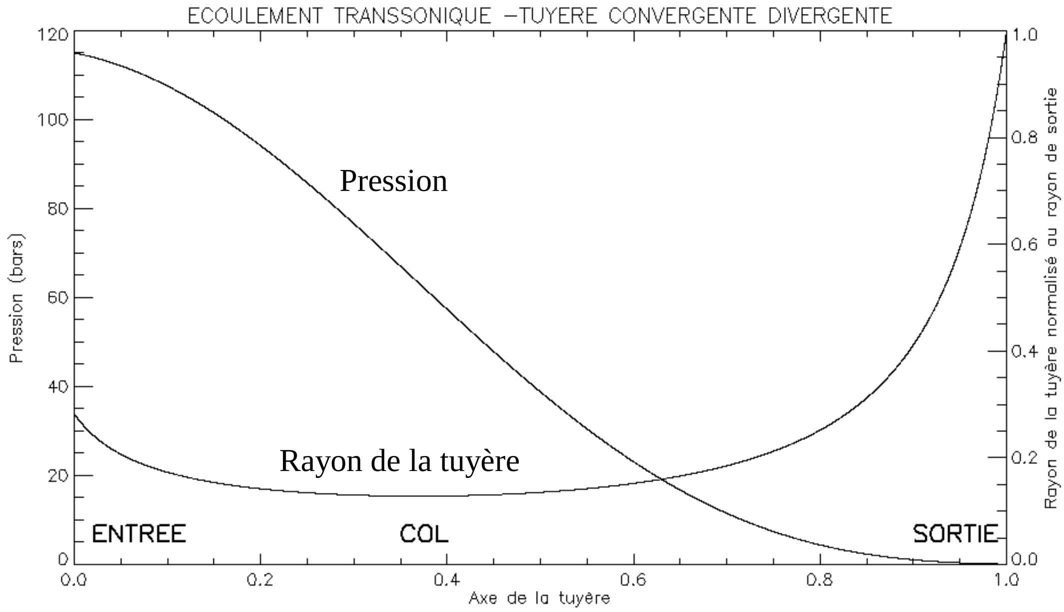
Sortie de la tuyère (indice s):
vitesse: $V_s = 3400 \ m \ s^{-1}$
diamètre: D_s = 1.76 m

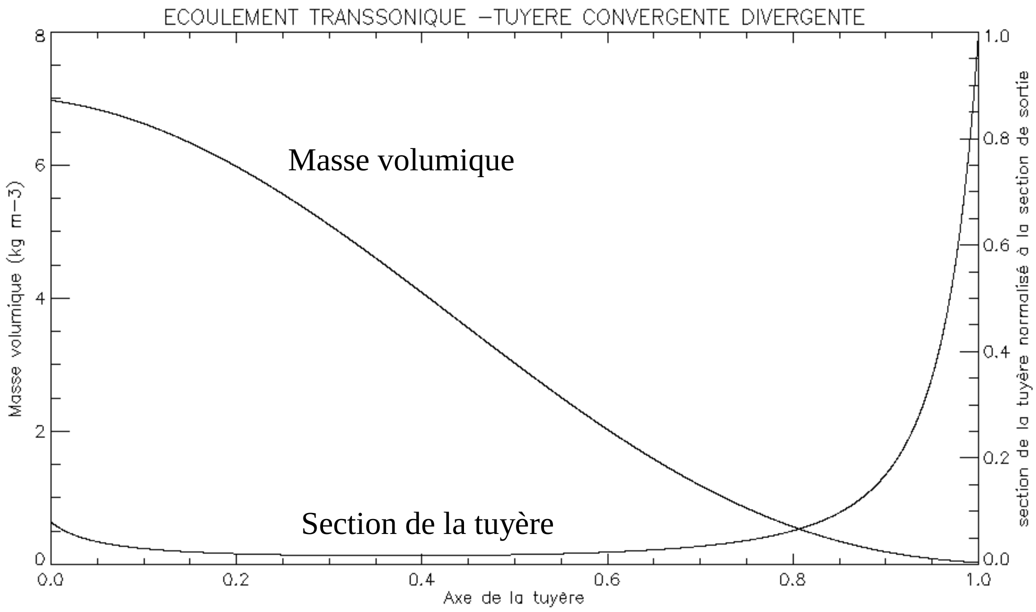
1) Température et vitesse au col (indice c pour le col)
On néglige la vitesse d'entrée dans la tuyère et on écrit la conservation de l'énergie entre l'entrée de la tuyère et le col:
$[\gamma/(\gamma-1)]\ R\ T_e / M = [\gamma/(\gamma-1)]\ R\ T_c / M + V_c^2/2$
T_c est la température au col.
On fixe la vitesse V_c au col à la vitesse du son: $V_c^2 = \gamma\ R\ T_c / M$
Exprimer le rapport T_c / T_e en fonction de γ; T_e étant donné, que vaut numériquement T_c ? En déduire la valeur numérique de V_c en m s^{-1}.
2) Pression et masse volumique au col
La loi de Laplace (transformation isentropique) nous donne $P_c = P_e\ (T_c/T_e)^{\gamma/(\gamma-1)}$
Exprimer le rapport P_c / P_e en fonction de γ; P_e étant donné, en déduire la valeur numérique de la pression P_c au col en bars, puis la masse volumique (kg m^{-3}) par la loi des gaz parfaits, soit $\rho_c = P_c\ M / (R\ T_c)$.
3) Température de sortie T_s
On écrit la conservation de l'énergie entre la sortie de la tuyère et le col, ce qui donne T_s:
$[\gamma/(\gamma-1)]\ R\ T_s / M + V_s^2/2 = [\gamma/(\gamma-1)]\ R\ T_c / M + V_c^2/2$
Que vaut numériquement T_s ? La vitesse du son en sortie $C_s = (\gamma\ R\ T_s / M)^{1/2}$? Le nombre de Mach $M_s = V_s/C_s$?
4) Pression et masse volumique de sortie
La loi de Laplace (transformation isentropique) nous donne $P_s = P_c\ (T_s/T_c)^{\gamma/(\gamma-1)}$
En déduire la valeur numérique de la pression P_s de sortie en bars, puis la masse volumique (kg m^{-3}) par la loi des gaz parfaits, soit $\rho_s = P_s\ M / (R\ T_s)$
5) Que vaut le débit massique $d = \rho_s V_s S_s = \rho_s V_s (\pi D_s^2/4)$ en kg s^{-1} ?
6) Que vaut la poussée du moteur fusée $F = d\ V_s$ en N puis en tonnes (on prendra 9.81 m s^{-2} pour l'accélération de la pesanteur) ?
7) En écrivant la conservation du débit massique entre la sortie et le col:
$d = \rho_s V_s S_s = \rho_c V_c S_c$
que vaut numériquement le rapport de section sortie/col S_s/S_c ?

Réponses :
1) $T_c / T_e = 2/(\gamma + 1)$
$T_c = 3104$ K
$V_c = 1365$ m s^{-1}
2) $P_c / P_e = [2/(\gamma + 1)]^{\gamma/(\gamma-1)}$
$P_c = 62.75$ bars
$\rho_c = 4.37$ kg m^{-3}
3) $T_s = 682$ K
$C_s = 640$ m s^{-1}
$M_s = 5.31$
4) $P_s = 0.088$ bars
$\rho_s = 0.028$ kg m^{-3}
5) $d = 232$ kg s^{-1}
6) F = 788300 N ou bien 80.35 tonnes
7) $S_s/S_c = 62.7$

Figures en Annexe :
résultat purement indicatif d'un calcul numérique le long de la tuyère dans laquelle la vitesse de l'écoulement est proportionnelle à x: $V(x) = V_e + (V_s - V_e)\ x$, ce qui conditionne la dépendance de la section en fonction de x (le rayon de la tuyère est calculé à partir de cette donnée).


ECOULEMENT TRANSSONIQUE -TUYERE CONVERGENTE DIVERGENTE
Température
Nombre de Mach
ENTREE
COL
SORTIE
Nombre de Mach
Temperature (K)
Axe de la tuyère


ECOULEMENT TRANSSONIQUE -TUYERE CONVERGENTE DIVERGENTE
Pression
Rayon de la tuyère
ENTREE
COL
SORTIE
Pression (bars)
Rayon de la tuyère normalisé au rayon de sortie
Axe de la tuyère


ECOULEMENT TRANSSONIQUE -TUYERE CONVERGENTE DIVERGENTE
Masse volumique
Section de la tuyère
Masse volumique (kg m-3)
section de la tuyère normalisé à la section de sortie
Axe de la tuyère