

Systemes 3D

On a vu dans le chapitre précédent que le principal point faible de la stratégie d'amortissement actif par le TLCD se situait dans son alignement avec les vagues. Dans ce chapitre, nous allons proposer deux systèmes d'amortissement novateurs inspirés par le TLCD que nous avons baptisé TLMCD, pour Tuned Liquid Multiple Column Damper, et nous allons les étudier en 3D. Nous comparerons aussi les performances de ces TLMCD avec une approche plus classique qui consiste à agencer deux TLCD en croix.

5.1 Conventions géométriques de la modélisation 3D

5.1.1 Orientation des repères les uns par rapport aux autres

On conserve les repères introduits au §4.1.2, i.e. le repère lié à la barge est noté $\mathcal{R}_b \triangleq (CdG, \mathbf{x}_b, \mathbf{y}_b, \mathbf{z}_b)$ et le repère galiléen lié à la terre est noté $\mathcal{R}_e \triangleq (O, \mathbf{x}_e, \mathbf{y}_e, \mathbf{z}_e)$. Cependant comme nous autorisons les repères à bouger selon tous les degrés de liberté, l'orientation de \mathcal{R}_b par rapport à \mathcal{R}_e est définie par le triplet d'Euler "roulis-tangage-lacet", noté $\Theta = [\varphi, \theta, \psi]^T$, et la matrice de rotation associée est

$$R(\Theta) \triangleq R_z(\psi) R_y(\theta) R_x(\varphi)$$

où

$$R_x(\varphi) \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\varphi & -s_\varphi \\ 0 & s_\varphi & c_\varphi \end{bmatrix} \quad R_y(\theta) \triangleq \begin{bmatrix} c_\theta & 0 & s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\theta & 0 & c_\theta \end{bmatrix} \quad R_z(\psi) \triangleq \begin{bmatrix} c_\psi & -s_\psi & 0 \\ s_\psi & c_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

en notant $c_x = \cos(x)$ et $s_x = \sin(x)$. On vérifie toujours $\dot{\mathbf{x}}^e = R(\Theta) \mathbf{v}^b$. On a

$R(\Theta) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$	matrice de rotation de \mathcal{R}_b par rapport à \mathcal{R}_e
$x^e = [x, y, z]^\top \in \mathbb{R}^3$	position de CdG dans \mathcal{R}_e
$\Theta = [\varphi, \theta, \psi]^\top \in \mathbb{R}^3$	triplet d'Euler associé à R
$\mathbf{v}^b \in \mathbb{R}^3 \omega^b$	vitesse de \mathcal{R}_b par rapport à \mathcal{R}_e
$\omega^b \in \mathbb{R}^3$	vitesse de rotation de \mathcal{R}_b par rapport à \mathcal{R}_e
nc	nombre minimal de variables nécessaires pour décrire la vitesse du fluide dans le TLCDC/TLMCD
$w \in \mathbb{R}^{nc}$	positions généralisées du fluide
$q = [x^{n \top}, \Theta^\top, w^\top]^\top \in \mathbb{R}^{6+nc}$	positions généralisées du système
$v = [v^b \top, \omega^b \top, \dot{w}^\top]^\top \in \mathbb{R}^{6+nc}$	vitesse généralisées du système
$G(\Theta) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$	matrice reliant $\dot{\Theta}$ et ω^b telle que : $\omega^b = G\dot{\Theta}$
$\mathcal{P}(\Theta) \in \mathbb{R}^{6+nc \times 6+nc}$	matrice reliant \dot{q} et v telle que : $v = \mathcal{P}\dot{q}$
$r^b(\sigma) = [x_t^b, y_t^b(\sigma), z_t^b(\sigma)]^\top \in \mathbb{R}^3$	géométrie des éléments du TLCDC/TLMCD

TABLE 5.1 – Nomenclature spécifique à la modélisation des systèmes 3D

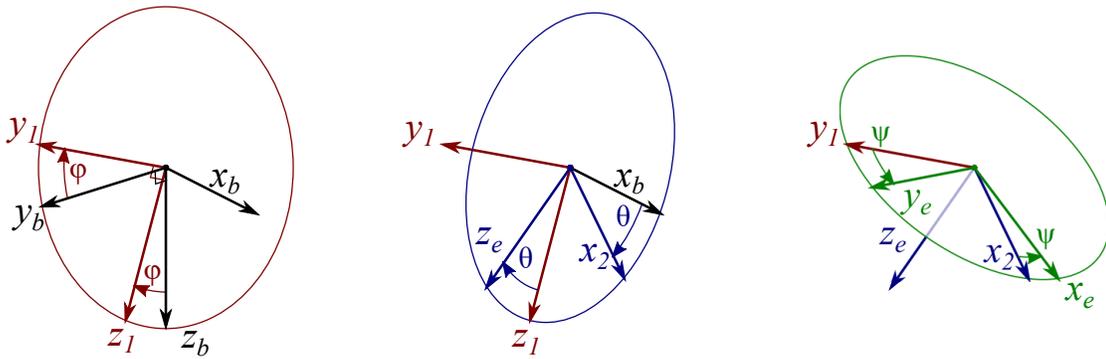


FIGURE 5.1 – Orientation de \mathcal{R}_b par rapport à \mathcal{R}_e

classiquement (Landau et Lifshitz, 1976)

$$\dot{R} = R(\Theta) S(\omega^b) \quad (5.1)$$

On définit

$$\begin{aligned} G(\Theta) &\triangleq [\mathbf{x}, R_x^\top(\varphi) \mathbf{y}, R_x^\top(\varphi) R_y^\top(\theta) \mathbf{z}] = [\mathbf{x}, R_x^\top(\varphi) \mathbf{y}, R(\Theta)^\top \mathbf{z}] \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s_\theta \\ 0 & c_\varphi & s_\varphi c_\theta \\ 0 & -s_\varphi & c_\varphi c_\theta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.2)$$

La vitesse de rotation de \mathcal{R}_b par rapport à \mathcal{R}_e exprimé dans \mathcal{R}_b , notée ω^b , est relié à Θ par $\omega^b = G\dot{\Theta}$.

On note $q_s \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{x}^e \\ \Theta \end{bmatrix}$, $v_s \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{v}^b \\ \omega^b \end{bmatrix}$. On définit $q \triangleq \begin{bmatrix} q_s \\ w \end{bmatrix}$ et $v \triangleq \begin{bmatrix} v_s \\ \dot{w} \end{bmatrix}$, avec $w \in \mathbb{R}^{nc}$ et nc le nombre minimal de variables qui permettent de connaître la vitesse du liquide dans le TLCd (nc sera déterminé en §5.2 pour chaque variante), ces grandeurs sont reliées par $v = \mathcal{P}\dot{q}$ avec

$$\mathcal{P}(\Theta) = \begin{bmatrix} R(\Theta)^\top & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times nc} \\ 0_{3 \times 3} & G(\Theta) & 0_{3 \times nc} \\ 0_{nc \times 3} & 0_{nc \times 3} & \mathbb{I}_{nc} \end{bmatrix}$$

Pour la suite de nos calculs, nous aurons besoin des résultats calculatoires suivants.

On définit la dérivée d'un vecteur ligne $x^\top \triangleq [x_1 \ \dots \ x_n]$ par rapport à un

vecteur colonne $y \triangleq \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$ comme suit

$$\frac{\partial x^\top}{\partial y} \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial y_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_m} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial y_m} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Proposition 1. *Pour tout vecteur $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$, on peut écrire la dérivée de $\mathbf{r}^\top R$ par rapport au vecteur Θ sous la forme*

$$\frac{\partial \mathbf{r}^\top R}{\partial \Theta} = -G^\top S(R^\top \mathbf{r}) \quad (5.4)$$

avec G définie en (5.2) et $S(\cdot)$ la matrice du produit vectoriel

Démonstration. On détaille le calcul pour les trois vecteurs de base $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$. On a

$$R^\top \mathbf{z} = \begin{bmatrix} -s_\theta \\ s_\varphi c_\theta \\ c_\varphi c_\theta \end{bmatrix}$$

donc

$$-G^\top S(R^\top \mathbf{z}) = \begin{bmatrix} 0 & c_\theta c_\varphi & -c_\theta s_\varphi \\ -c_\theta & -s_\theta s_\varphi & -s_\theta c_\varphi \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et

$$\frac{\partial \mathbf{z}^\top R}{\partial \Theta} = \begin{bmatrix} 0 & c_\theta c_\varphi & -c_\theta s_\varphi \\ -c_\theta & -s_\theta s_\varphi & -s_\theta c_\varphi \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

on a donc

$$\frac{\partial \mathbf{z}^\top R}{\partial \Theta} = -G^\top S(R^\top \mathbf{z})$$

On a aussi

$$R^\top \mathbf{y} = \begin{bmatrix} c_\theta s_\psi \\ c_\varphi c_\psi + s_\varphi s_\theta s_\psi \\ -s_\varphi c_\psi + c_\varphi s_\theta s_\psi \end{bmatrix}$$

donc

$$-G^\top S(R^\top \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} 0 & -s_\varphi c_\psi + c_\varphi s_\theta s_\psi & -c_\varphi c_\psi - s_\varphi s_\theta s_\psi \\ -s_\theta s_\psi & s_\varphi c_\theta s_\psi & c_\varphi c_\theta s_\psi \\ c_\theta c_\psi & -c_\varphi s_\psi + s_\varphi s_\theta c_\psi & s_\varphi s_\psi + c_\varphi s_\theta c_\psi \end{bmatrix}$$

et

$$\frac{\partial \mathbf{y}^\top R}{\partial \Theta} = \begin{bmatrix} 0 & -s_\varphi c_\psi + c_\varphi s_\theta s_\psi & -c_\varphi c_\psi - s_\varphi s_\theta s_\psi \\ -s_\theta s_\psi & s_\varphi c_\theta s_\psi & c_\varphi c_\theta s_\psi \\ c_\theta c_\psi & -c_\varphi s_\psi + s_\varphi s_\theta c_\psi & s_\varphi s_\psi + c_\varphi s_\theta c_\psi \end{bmatrix}$$

on a donc

$$\frac{\partial \mathbf{y}^\top R}{\partial \Theta} = -G^\top S(R^\top \mathbf{y})$$

Et finalement on a

$$R^\top \mathbf{x} = \begin{bmatrix} c_\theta c_\psi \\ -c_\varphi s_\psi + s_\varphi s_\theta c_\psi \\ s_\varphi s_\psi + c_\varphi s_\theta c_\psi \end{bmatrix}$$

donc

$$-G^\top S (R^\top \mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & s_\varphi s_\psi + c_\varphi s_\theta c_\psi & c_\varphi s_\psi - s_\varphi s_\theta c_\psi \\ -s_\theta c_\psi & s_\varphi c_\theta c_\psi & c_\varphi c_\theta c_\psi \\ -c_\theta s_\psi & -c_\varphi c_\psi - s_\varphi s_\theta s_\psi & s_\varphi c_\psi - c_\varphi s_\theta s_\psi \end{bmatrix}$$

et

$$\frac{\partial \mathbf{x}^\top R}{\partial \Theta} = \begin{bmatrix} 0 & s_\varphi s_\psi + c_\varphi s_\theta c_\psi & c_\varphi s_\psi - s_\varphi s_\theta c_\psi \\ -s_\theta c_\psi & s_\varphi c_\theta c_\psi & c_\varphi c_\theta c_\psi \\ -c_\theta s_\psi & -c_\varphi c_\psi - s_\varphi s_\theta s_\psi & s_\varphi c_\psi - c_\varphi s_\theta s_\psi \end{bmatrix}$$

On a donc

$$\frac{\partial \mathbf{x}^\top R}{\partial \Theta} = -G^\top S (R^\top \mathbf{x})$$

On peut réécrire $\mathbf{r} = r_1 \mathbf{x} + r_2 \mathbf{y} + r_3 \mathbf{z}$, par linéarité de la dérivée on vérifie donc

$$\frac{\partial \mathbf{r}^\top R}{\partial \Theta} = -G^\top S (R^\top \mathbf{r})$$

□

Proposition 2. *On peut écrire les dérivées de $\mathbf{v}^{b\top}$ et $\omega^{b\top}$ par rapport à Θ sous la forme*

$$\frac{\partial \mathbf{v}^{b\top}}{\partial \Theta} = -G^\top S (\mathbf{v}^b) \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial \omega^{b\top}}{\partial \Theta} = \dot{G}^\top - G^\top S (\omega^b) \quad (5.6)$$

Démonstration. Pour démontrer 5.6, on écrit

$$\omega^b = G(\Theta) \dot{\Theta} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi} + s_\theta \dot{\psi} \\ c_\theta s_\varphi \dot{\psi} + c_\varphi \dot{\theta} \\ c_\theta c_\varphi \dot{\psi} - s_\varphi \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

on a donc

$$\frac{\partial \omega^{b\top}}{\partial \Theta} = \begin{bmatrix} 0 & c_\theta c_\varphi \dot{\psi} - s_\varphi \dot{\theta} & -c_\theta s_\varphi \dot{\psi} - c_\varphi \dot{\theta} \\ -c_\theta \dot{\psi} & -s_\theta s_\varphi \dot{\psi} & -s_\theta c_\varphi \dot{\psi} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On dérive la matrice G définie en (5.2) par rapport au temps, on obtient

$$\dot{G}^\top = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s_\varphi \dot{\varphi} & -c_\varphi \dot{\varphi} \\ -c_\theta \dot{\theta} & c_\theta c_\varphi \dot{\varphi} - s_\theta s_\varphi \dot{\theta} & -c_\theta s_\varphi \dot{\varphi} - s_\theta c_\varphi \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

on écrit aussi

$$G^\top S \left(G(\Theta) \dot{\Theta} \right) = \begin{bmatrix} 0 & -c_\theta c_\varphi \dot{\psi} + s_\varphi \dot{\theta} & c_\theta s_\varphi \dot{\psi} + c_\varphi \dot{\theta} \\ c_\theta \dot{\psi} & s_\varphi \left(-\dot{\varphi} + s_\theta \dot{\psi} \right) & c_\varphi \left(-\dot{\varphi} + s_\theta \dot{\psi} \right) \\ -c_\theta \dot{\theta} & c_\theta c_\varphi \dot{\varphi} - s_\theta s_\varphi \dot{\theta} & -c_\theta s_\varphi \dot{\varphi} - s_\theta c_\varphi \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

On vérifie donc bien l'équation

$$\frac{\partial \omega^{b\top}}{\partial \Theta} = \dot{G}^\top - G^\top S(\omega^b)$$

Pour démontrer (5.5), on rappelle qu'on peut écrire \mathbf{v}^b sous la forme $R^\top \dot{\mathbf{x}}^e$, d'après la Proposition 1 on a donc

$$\frac{\partial \mathbf{v}^{b\top}}{\partial \Theta} = -G^\top S(\mathbf{v}^b)$$

□

5.1.2 Éléments relatifs au système d'amortissement

Dans tout le chapitre, et quel que soit le système considéré, nous modélisons la géométrie du tube de la même manière que pour la modélisation 2D i.e.

$$\mathbf{r}^b(\sigma) \triangleq [x_t^b, y_t^b(\sigma), z_t^b(\sigma)]^\top$$

avec

$$y_t^b(\sigma) \triangleq \begin{cases} \frac{L_h}{2} & \sigma \leq -\frac{L_h}{2} \\ -\sigma & -\frac{L_h}{2} < \sigma \leq \frac{L_h}{2} \\ -\frac{L_h}{2} & \frac{L_h}{2} < \sigma \end{cases} \quad z_t^b(\sigma) \triangleq \begin{cases} e + \frac{L_h}{2} + \sigma & \sigma \leq -\frac{L_h}{2} \\ e & -\frac{L_h}{2} < \sigma \leq \frac{L_h}{2} \\ e + \frac{L_h}{2} - \sigma & \frac{L_h}{2} < \sigma \end{cases}$$

et où x_t^b est défini pour chaque système d'amortissement de manière à obtenir un problème symétrique.

La section du TLCD est comme précédemment définie par

$$A_t(\sigma) \triangleq \begin{cases} A_v & \sigma \leq -\frac{L_h}{2} \\ A_h & -\frac{L_h}{2} < \sigma \leq \frac{L_h}{2} \\ A_v & \frac{L_h}{2} < \sigma \end{cases}$$

Dans la suite, les systèmes d'amortissement considérés sont constitués de N éléments pivotés de manière régulière autour de (CoG, \mathbf{z}_b) . La géométrie de chacun de ces éléments est décrite par $R_z(\alpha_i) r^b(\sigma_i)$, exprimée dans \mathcal{R}_b , avec

$$R_z(\alpha_i) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_i) & -\sin(\alpha_i) & 0 \\ \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On introduit $v_i(\sigma_i)$ la vitesse algébrique dans l'élément i du système d'amortissement. Par convention, $v_i(\sigma_i)$ est positif si le fluide se déplace vers σ croissant. Le vecteur $\mathbf{v}_i^b(\sigma_i)$, de la vitesse du fluide dans l'élément i exprimée dans \mathcal{R}_b vaut

$$\mathbf{v}_i^b(\sigma_i) = v_i(\sigma_i) R_z(\alpha_i) \frac{d\mathbf{r}^b}{d\sigma}(\sigma_i) \quad (5.7)$$

On introduit \mathcal{V}_h le vecteur des vitesses algébriques dans la partie horizontale et \mathcal{V}_v le vecteur des vitesses algébriques dans les parties verticales

$$\mathcal{V}_h \triangleq \begin{bmatrix} v_1(0) \\ \vdots \\ v_N(0) \end{bmatrix} \quad \mathcal{V}_v \triangleq \begin{bmatrix} v_1(\sigma_i \notin [-\frac{L_h}{2}, \frac{L_h}{2}]) \\ \vdots \\ v_N(\sigma_i \notin [-\frac{L_h}{2}, \frac{L_h}{2}]) \end{bmatrix}$$

on a

$$\mathcal{V}_h = P_h \dot{w} \quad \mathcal{V}_v = P_v \dot{w} \quad (5.8)$$

P_h et P_v sont déterminés pour chaque système d'amortissement au §5.2.

5.2 Modèles dynamiques

Maintenant que nous avons introduit toutes les notations géométriques, on peut procéder à l'établissement des modèles dynamiques.

5.2.1 Forces généralisées

On notera que le modèle hydrodynamique tel qu'il a été défini en 4.1.3, c'est à dire

$$M_s \dot{v}_s = F(t) + F_{rad}(t, v_s) + F_{hs}(q_s) + F_{anc}(q_s) + F_{visc}(t, v_s)$$

reste valable. On va juste rajouter l'angle d'incidence de la houle β , on notera donc

$$F_{hydro}(t, \beta, q_s, v_s) = F(t, \beta) + F_{rad}(t, v_s) + F_{hs}(q_s) + F_{anc}(q_s) + F_{visc}(t, v_s) \quad (5.9)$$

La force généralisée engendrée par les restrictions dans le système dissipe la puissance suivante

$$\mathcal{V}_h^\top F_h$$

d'après (5.8) on a $\mathcal{V}_h^\top = \dot{w}^\top P_h^\top$, les forces généralisées Q s'écrivent donc

$$Q(t, q, \dot{q}, \beta) = \mathcal{P}(\Theta)^\top \begin{bmatrix} F_{hydro}(t, \beta, q_s, v_s) \\ P_h^\top F_h(\dot{w}) \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

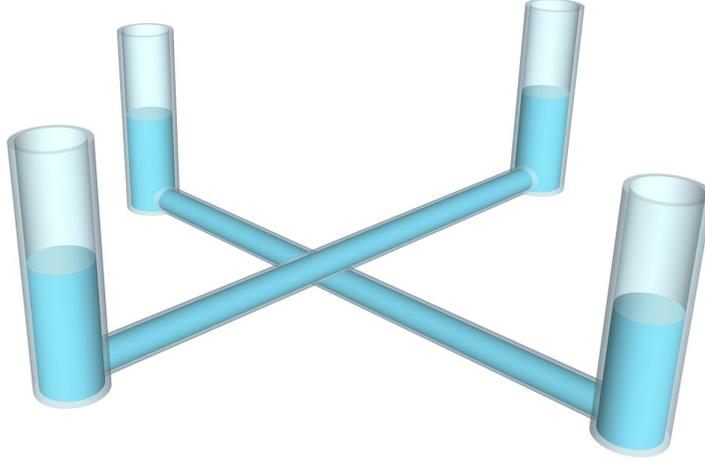


FIGURE 5.2 – Illustration du TLMCD 2U (ils n'ont pas de section commune)

avec

$$F_h = -\frac{1}{2}\rho A_h \eta \circ \mathcal{V}_h \circ |\mathcal{V}_h|$$

avec $\eta \in \mathbb{R}^N$ le vecteur des coefficients de perte de charge et avec \circ le produit matriciel de Hadamard (produit terme à terme).

5.2.2 Système à N TLCD

On choisit d'amortir le flotteur avec un nombre N de tubes en U régulièrement distribués en angle autour de (CoG, \mathbf{z}_b) . On appellera ce système NU . À titre d'exemple, le système 2U est illustré en Fig. 5.2. Pour ce système, chaque élément est un TLCD, par conséquent l'abscisse curviligne de chaque élément, notée σ_i , varie entre $-\varsigma_{si}$ et ς_{pi} . Pour ce système d'amortissement on a $\alpha_i \triangleq \pi \frac{i-1}{N}$.

Pour définir la vitesse du fluide à chaque endroit d'un tube, on a vu au §4.1.2 qu'une seule variable suffisait. On a donc le nombre minimal de variables qui permettent de connaître la vitesse du liquide dans le TLCD (voir §5.1) $nc = N$. Les surfaces libres de chaque TLCD sont toujours situées à $\sigma = \varsigma_{pi}$ et $\sigma = -\varsigma_{si}$ définis comme suit

$$\begin{aligned} \varsigma_{pi} &\triangleq \frac{L_h}{2} + L_v + w_i \\ \varsigma_{si} &\triangleq \frac{L_h}{2} + L_v - w_i \end{aligned}$$

Pour le système NU on a pour $i = 1, \dots, N$

$$v_i(\sigma_i) = \frac{A_v}{A_t(\sigma_i)} \dot{w}_i$$

on en déduit l'expression de $\mathbf{v}_i^b(\sigma_i)$ grâce à l'équation (5.7)

$$\mathbf{v}_i^b(\sigma_i) = \frac{A_v}{A_t(\sigma_i)} \dot{w}_i R_z(\alpha_i) \frac{d\mathbf{r}^b}{d\sigma}(\sigma_i)$$

Les matrices $P_{h_{NU}}$ et $P_{v_{NU}}$ utilisées en (5.8) s'écrivent

$$P_{h_{NU}} = \nu \mathbb{I}_{nc} \qquad P_{v_{NU}} = \mathbb{I}_{nc} \qquad (5.11)$$

Énergie mécanique du système NU

L'énergie potentielle du liquide dans les N tubes en U s'écrit

$$\begin{aligned} V_{NU} &= \mathbf{z}^\top \cdot \left(g\rho \sum_{i=1}^N \int_{-\zeta_{si}}^{\zeta_{pi}} A_t(\sigma) (R(\Theta) R_z(\alpha_i) \mathbf{r}^b(\sigma) + \mathbf{x}^e) d\sigma \right) \\ &= -gm_t z - g\rho \mathbf{z}^\top R(\Theta) \left[\rho \sum_{i=1}^N \int_{-\zeta_{si}}^{\zeta_{pi}} A_t(\sigma) R_z(\alpha_i) \mathbf{r}^b(\sigma) d\sigma \right] \end{aligned} \qquad (5.12)$$

avec m_t la masse totale de liquide dans les TLCDs.

On écrit l'énergie cinétique

$$\begin{aligned}
T_{NU} &= T_s + T_{DNU} \\
T_s &= \frac{1}{2} v_s^\top M_s v_s \\
T_{DNU} &= \frac{1}{2} \rho \sum_{i=1}^N \int_{-\zeta_{si}}^{\zeta_{pi}} A_t(\sigma_i) \|\mathbf{v}^b + \omega^b \times R_z(\alpha_i) \mathbf{r}^b(\sigma_i) + \mathbf{v}_i^b(\sigma_i)\|^2 d\sigma_i \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(\rho \int_{-\zeta_{si}}^{\zeta_{pi}} A_t(\sigma_i) d\sigma_i \right) \|\mathbf{v}^b\|^2 - \frac{1}{2} \omega^{b\top} \left(\rho \sum_{i=1}^N \int_{-\zeta_{si}}^{\zeta_{pi}} A_t(\sigma_i) S^2(R_z(\alpha_i) \mathbf{r}^b(\sigma_i)) d\sigma_i \right) \omega^b \\
&\quad + \omega^{b\top} \left(\rho \sum_{i=1}^N \int_{-\zeta_{si}}^{\zeta_{pi}} A_t(\sigma_i) S(R_z(\alpha_i) \mathbf{r}^b(\sigma_i)) d\sigma_i \right) \mathbf{v}^b + \mathbf{v}^{b\top} \left(\rho A_v \sum_{i=1}^N \int_{-\zeta_{si}}^{\zeta_{pi}} R_z(\alpha_i) \frac{d\mathbf{r}^b}{d\sigma}(\sigma_i) \dot{w}_i d\sigma_i \right) \\
&\quad + \omega^{b\top} \left(\rho A_v \sum_{i=1}^N \int_{-\zeta_{si}}^{\zeta_{pi}} S(R_z(\alpha_i) \mathbf{r}^b(\sigma_i)) R_z(\alpha_i) \frac{d\mathbf{r}^b}{d\sigma}(\sigma_i) \dot{w}_i d\sigma_i \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(\rho A_v^2 \int_{-\zeta_{si}}^{\zeta_{pi}} \frac{\dot{w}_i^2}{A_t(\sigma_i)} d\sigma_i \right) \\
T_{NU} &= \frac{1}{2} v^\top M_{NU}(w) v = \frac{1}{2} \dot{q}^\top \mathcal{P}(\Theta)^\top M_{NU}(w) \mathcal{P}(\Theta) \dot{q} = \frac{1}{2} \dot{q}^\top \mathcal{M}_{NU}(q) \dot{q} \quad (5.13)
\end{aligned}$$

avec $\mathcal{M}_{NU} \triangleq \mathcal{P}^\top M_{NU} \mathcal{P}$ et

$$M_{NU}(w) \triangleq \begin{bmatrix} M_s & 0_{6 \times nc} \\ 0_{nc \times 6} & 0_{nc \times nc} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_t \mathbb{I}_3 & M_{v\omega}(w) & M_{vq}(w) \\ M_{v\omega}^\top(w) & M_\omega(w) & M_{\omega q}(w) \\ M_{vq}^\top(w) & M_{\omega q}^\top(w) & M_q(w) \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

Pour $i = 1, \dots, N$ on a

$$\begin{aligned}
m_t &\triangleq \rho \sum_{i=1}^N \int_{-\varsigma_{si}}^{\varsigma_{pi}} A_t(\sigma_i) d\sigma_i \in \mathbb{R} \\
M_{v\omega} &\triangleq -\rho \sum_{i=1}^N \int_{-\varsigma_{si}}^{\varsigma_{pi}} A_t(\sigma_i) S(R_z(\alpha_i) \mathbf{r}^b(\sigma_i)) d\sigma_i = -M_{v\omega}^\top(w) \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \\
M_\omega &\triangleq -\rho \sum_{i=1}^N \int_{-\varsigma_{si}}^{\varsigma_{pi}} A_t(\sigma_i) S^2(R_z(\alpha_i) \mathbf{r}^b(\sigma_i)) d\sigma_i = M_\omega^\top(w) \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \\
M_{vq}[:, i] &\triangleq \rho A_v \int_{-\varsigma_{si}}^{\varsigma_{pi}} R_z(\alpha_i) \frac{d\mathbf{r}^b}{d\sigma}(\sigma_i) d\sigma_i \in \mathbb{R}^{3 \times 1} \\
M_{\omega q}[:, i] &\triangleq \rho A_v \int_{-\varsigma_{si}}^{\varsigma_{pi}} S(R_z(\alpha_i) \mathbf{r}^b(\sigma_i)) R_z(\alpha_i) \frac{d\mathbf{r}^b}{d\sigma}(\sigma_i) d\sigma_i \in \mathbb{R}^{3 \times 1} \\
M_q &\triangleq \mathbb{I}_{nc} \rho A_v (L_h \nu + 2L_v) \in \mathbb{R}^{nc}
\end{aligned}$$

avec $M_{vq} \in \mathbb{R}^{3 \times nc}$, $M_{\omega q} \in \mathbb{R}^{3 \times nc}$.

Établissement de la dynamique du système NU

L'approche Lagrangienne nous dit que la dynamique de notre système s'écrit

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (T_{NU} - V_{NU})}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial (T_{NU} - V_{NU})}{\partial q} = Q$$

En premier lieu on calcule $\frac{\partial T_{NU}}{\partial q}$. Dans l'équation (5.13), on voit que T est indépendant de \mathbf{x}^e donc

$$\frac{\partial T_{NU}}{\partial \mathbf{x}^e} = 0_{3 \times 1}$$

Comme M est symétrique et ne dépend pas de Θ , on a

$$\frac{\partial T_{NU}}{\partial \Theta} = \frac{1}{2} \frac{\partial (\dot{q}^\top \mathcal{P}^\top M_{NU} \mathcal{P} \dot{q})}{\partial \Theta} = \frac{\partial (\mathcal{P} \dot{q})^\top}{\partial \Theta} M_{NU} (\mathcal{P} \dot{q})$$

avec

$$\frac{\partial (\mathcal{P} \dot{q})^\top}{\partial \Theta} = \frac{\partial v^\top}{\partial \Theta} = \left[\frac{\partial \mathbf{v}^{b\top}}{\partial \Theta}, \frac{\partial \omega^{b\top}}{\partial \Theta}, 0_{3 \times 1} \right] = \left[-G^\top S(\mathbf{v}^b) \quad \dot{G}^\top - G^\top S(\omega^b) \quad 0_{3 \times 1} \right]$$

Le terme $\frac{\partial T}{\partial w_i}$ s'écrit

$$\frac{\partial T_{NU}}{\partial w_i} = \frac{1}{2} \dot{q}^\top \mathcal{P}^\top \frac{\partial M_{NU}}{\partial w_i} \mathcal{P} \dot{q}$$

avec

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial w_i} M_{v\omega} &= -\rho A_v S \left(R_z(\alpha_i) \mathbf{r}^b(\varsigma_{pi}) - R_z(\alpha_i) \mathbf{r}^b(-\varsigma_{si}) \right) \\
\frac{\partial}{\partial w_i} M_\omega &= -\rho A_v \left(S \left(R_z(\alpha_i) \mathbf{r}^b(\varsigma_{pi}) \right)^2 - S \left(R_z(\alpha_i) \mathbf{r}^b(-\varsigma_{si}) \right)^2 \right) \\
\frac{\partial}{\partial w_i} M_{vq}[:, i] &= \rho A_v \left(R_z(\alpha_i) \frac{d\mathbf{r}^b}{d\sigma}(\varsigma_{pi}) - R_z(\alpha_i) \frac{d\mathbf{r}^b}{d\sigma}(-\varsigma_{si}) \right) \\
\frac{\partial}{\partial w_i} M_{vq}[:, j \neq i] &= \mathbf{0}_{3 \times 1} \\
\frac{\partial}{\partial w_i} M_{\omega q}[:, i] &= \rho A_v \left(S \left(R_z(\alpha_i) \mathbf{r}^b(\varsigma_{pi}) \right) R_z(\alpha_i) \frac{d\mathbf{r}^b}{d\sigma}(\varsigma_{pi}) - S \left(R_z(\alpha_i) \mathbf{r}^b(-\varsigma_{si}) \right) R_z(\alpha_i) \frac{d\mathbf{r}^b}{d\sigma}(-\varsigma_{si}) \right) \\
\frac{\partial}{\partial w_i} M_{\omega q}[:, j \neq i] &= \mathbf{0}_{3 \times 1} \\
\frac{\partial}{\partial w_i} M_q &= \mathbf{0}_{nc \times nc}
\end{aligned}$$

D'après l'équation (5.12) et (5.4), $\frac{\partial V_{NU}}{\partial \mathbf{q}}$ s'écrit

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_{NU}}{\partial x^n} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -gm_t \end{bmatrix} = -gm_t \mathbf{z} \\
\frac{\partial V_{NU}}{\partial \Theta} &= -g\rho \frac{\partial \mathbf{z}^\top R}{\partial \Theta} \left(\sum_{i=1}^{nc} \int_{-\varsigma_{si}}^{\varsigma_{pi}} A_t(\sigma) R_z(\alpha_i) \mathbf{r}^b(\sigma) d\sigma \right) \\
&= g\rho G^\top S \left(R^\top \mathbf{z} \right) \left(\sum_{i=1}^{nc} \int_{-\varsigma_{si}}^{\varsigma_{pi}} A_t(\sigma) R_z(\alpha_i) \mathbf{r}^b(\sigma) d\sigma \right) \\
\frac{\partial V_{NU}}{\partial w_i} &= -g\rho A_v \mathbf{z}^\top R(\Theta) R_z(\alpha_i) \left(\mathbf{r}^b(\varsigma_{pi}) - \mathbf{r}^b(-\varsigma_{si}) \right)
\end{aligned}$$

On voit dans (5.12) que V_{NU} ne dépend pas de $\dot{\mathbf{q}}$, donc

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial V_{NU}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{0}_{6+nc \times 1}$$

On a aussi

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_{NU}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^\top = \mathcal{M}_{NU} \ddot{\mathbf{q}} + \left(\dot{\mathcal{P}}^\top M_{NU} \mathcal{P} + \mathcal{P}^\top \sum_{i=1}^{nc} \dot{w}_i \frac{\partial M_{NU}}{\partial w_i} \mathcal{P} + \mathcal{P}^\top M_{NU} \dot{\mathcal{P}} \right) \dot{\mathbf{q}}$$

Dynamique du système NU

On écrit la dynamique du système

$$\mathcal{M}_{NU}(q) \ddot{q} + C_{NU}(q, \dot{q}) \dot{q} + k_{NU}(q) = Q_{NU}(t, q, \dot{q}, \beta) \quad (5.15)$$

avec

$$\mathcal{M}_{NU}(q) \triangleq \mathcal{P}(\Theta)^\top M_{NU}(w) \mathcal{P}(\Theta)$$

$$C_{NU} \triangleq \dot{\mathcal{P}}^\top M_{NU} \mathcal{P} + \mathcal{P}^\top \sum_{i=1}^{nc} \dot{w}_i \frac{\partial M_{NU}}{\partial w_i} \mathcal{P} + \mathcal{P}^\top M_{NU} \dot{\mathcal{P}} - \begin{bmatrix} 0_{3 \times 6+nc} \\ \frac{\partial(\mathcal{P}\dot{q})^\top}{\partial \Theta} M_{NU} \mathcal{P} \\ \frac{1}{2} \dot{q}^\top \mathcal{P}^\top \frac{\partial M_{NU}}{\partial w_1} \mathcal{P} \\ \vdots \\ \frac{1}{2} \dot{q}^\top \mathcal{P}^\top \frac{\partial M_{NU}}{\partial w_{nc}} \mathcal{P} \end{bmatrix}$$

$$k_{NU} \triangleq -g \begin{bmatrix} m_t \mathbf{z} \\ -\rho G^\top S (R^\top \mathbf{z}) \sum_{i=1}^{nc} \int_{-\zeta_{si}}^{\zeta_{pi}} A_t(\sigma) R_z(\alpha_i) \mathbf{r}^b(\sigma) d\sigma \\ \rho A_v \mathbf{z}^\top R(\Theta) R_z(\alpha_1) (\mathbf{r}^b(\zeta_{p1}) - \mathbf{r}^b(-\zeta_{s1})) \\ \vdots \\ \rho A_v \mathbf{z}^\top R(\Theta) R_z(\alpha_{nc}) (\mathbf{r}^b(\zeta_{pnc}) - \mathbf{r}^b(-\zeta_{snc})) \end{bmatrix}$$

$$Q_{NU}(t, q, \dot{q}, \beta) = \mathcal{P}(\Theta)^\top \begin{bmatrix} F_{hydro}(t, \beta, q_s, v_s) \\ P_{hNU}^\top F_h(\dot{w}) \end{bmatrix}$$

5.2.3 TLMCD en étoile à N éléments

Ce système d'amortissement est constitué de N moitiés de tube en U reliées entre elles à la coordonnée $\mathbf{r}^b(\sigma = 0)$, ces éléments sont régulièrement distribués en angle autour de (CoG, \mathbf{z}_b) . On appellera ce système NS . À titre d'exemple, le système 3S est illustré en Fig. 5.3. Pour ce système chaque élément est un demi TLCD. L'abscisse curviligne de chaque élément, notée σ_i , varie donc entre 0 et ζ_i . Comme précédemment on a $x_t^b = 0$. Pour ce système d'amortissement on a $\alpha_i \triangleq 2\pi \frac{i-1}{N}$.

Nous considérons toujours que la masse totale d'eau dans le TLMCD est constante. En notant ζ_i la position de la surface libre de l'élément i , la conservation de la masse donne

$$m_t \triangleq \rho \sum_{i=1}^N \int_0^{\zeta_i} A_t(\sigma_i) d\sigma_i = \text{constante}$$

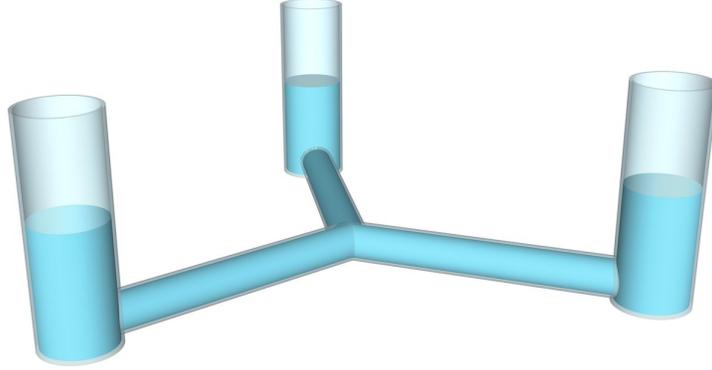


FIGURE 5.3 – Illustration du TLMCD 3S

Il en découle que si on connaît les positions des $N - 1$ premières surfaces libres, on en déduit la $N^{\text{ème}}$, par conséquent $nc = N - 1$. On note donc pour $i = 1, \dots, nc$,

$$\varsigma_i = \frac{L_h}{2} + L_v + w_i \quad (5.16)$$

et

$$\varsigma_N = \frac{L_h}{2} + L_v - \sum_{i=1}^{N-1} w_i \quad (5.17)$$

Pour le système NS on a pour $i = 1, \dots, N - 1$

$$v_i(\sigma_i) = \frac{A_v}{A_t(\sigma_i)} \dot{w}_i$$

et

$$v_N(\sigma_N) = -\frac{A_v}{A_t(\sigma_N)} \sum_{i=1}^{N-1} \dot{w}_i$$

On écrit donc les matrices $P_{h_{NS}}$ et $P_{v_{NS}}$ utilisées en (5.8)

$$P_{h_{NS}} = \nu \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{nc} \\ -\mathbb{1}_{1 \times nc} \end{bmatrix} \quad P_{v_{NS}} = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{nc} \\ -\mathbb{1}_{1 \times nc} \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

Énergie mécanique du système NS

En suivant la même démarche qu'au §5.2.2, on écrit l'énergie cinétique de notre système sous la forme $T_{NS} = \frac{1}{2} \dot{q}^\top \mathcal{P}(\Theta)^\top M_{NS}(w) \mathcal{P}(\Theta) \dot{q}$ avec

$$M_{NS}(w) \triangleq \begin{bmatrix} M_s & 0_{6 \times nc} \\ 0_{nc \times 6} & 0_{nc \times nc} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_t \mathbb{I}_3 & M_{v\omega}(w) & M_{vq}(w) \\ M_{v\omega}^\top(w) & M_\omega(w) & M_{\omega q}(w) \\ M_{vq}^\top(w) & M_{\omega q}^\top(w) & M_q(w) \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

Pour $i = 1, \dots, N$ on a

$$\begin{aligned}
m_t &\triangleq \rho \sum_{i=1}^N \int_0^{\varsigma_i} A_t(\sigma_i) d\sigma_i \in \mathbb{R} \\
M_{v\omega} &\triangleq -\rho \sum_{i=1}^N \int_0^{\varsigma_i} A_t(\sigma_i) S(R_z(\alpha_i) \mathbf{r}^b(\sigma_i)) d\sigma_i = -M_{v\omega}^\top(w) \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \\
M_\omega &\triangleq -\rho \sum_{i=1}^N \int_0^{\varsigma_i} A_t(\sigma_i) S^2(R_z(\alpha_i) \mathbf{r}^b(\sigma_i)) d\sigma_i = M_\omega^\top(w) \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \\
M_{vq}[:, j] &\triangleq \rho A_v P_{h_{NS}}[:, j] \sum_{i=1}^N \int_0^{\varsigma_i} R_z(\alpha_i) \frac{d\mathbf{r}^b}{d\sigma}(\sigma_i) d\sigma_i \in \mathbb{R}^{3 \times 1} \\
M_{\omega q}[:, j] &\triangleq \rho A_v P_{h_{NS}}[:, j] \sum_{i=1}^N \int_0^{\varsigma_i} S(R_z(\alpha_i) \mathbf{r}^b(\sigma_i)) R_z(\alpha_i) \frac{d\mathbf{r}^b}{d\sigma}(\sigma_i) d\sigma \in \mathbb{R}^{3 \times 1} \\
M_q &\triangleq \rho A_v \left(P_{h_{NS}}^\top \frac{L_h}{2\nu} (\nu - 1) + \nu^{-2} P_{h_{NS}}^\top \begin{bmatrix} \varsigma_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \varsigma_N \end{bmatrix} P_{h_{NS}} \right) \in \mathbb{R}^{nc}
\end{aligned}$$

avec $M_{vq} \in \mathbb{R}^{3 \times nc}$, $M_{\omega q} \in \mathbb{R}^{3 \times nc}$.

L'énergie potentielle du liquide dans la variante NS s'écrit

$$\begin{aligned}
V_{NS} &= \mathbf{z}^\top \cdot \left(g\rho \sum_{i=1}^N \int_0^{\varsigma_i} A_t(\sigma) (R(\Theta) R_z(\alpha_i) \mathbf{r}^b(\sigma) + \mathbf{x}^e) d\sigma \right) \\
&= -gm_t z - g\rho \mathbf{z}^\top R(\Theta) \left[\rho \sum_{i=1}^N \int_0^{\varsigma_i} A_t(\sigma) R_z(\alpha_i) \mathbf{r}^b(\sigma) d\sigma \right] \quad (5.20)
\end{aligned}$$

avec m_t la masse totale de liquide dans les TLCDS.

Dynamique du système NS

En suivant la même démarche que pour le modèle NU, on observe que la dynamique du système est régie par

$$\mathcal{M}_{NS}(q) \ddot{q} + C_{NS}(q, \dot{q}) \dot{q} + k_{NS}(q) = Q_{NS}(t, q, \dot{q}, \beta) \quad (5.21)$$

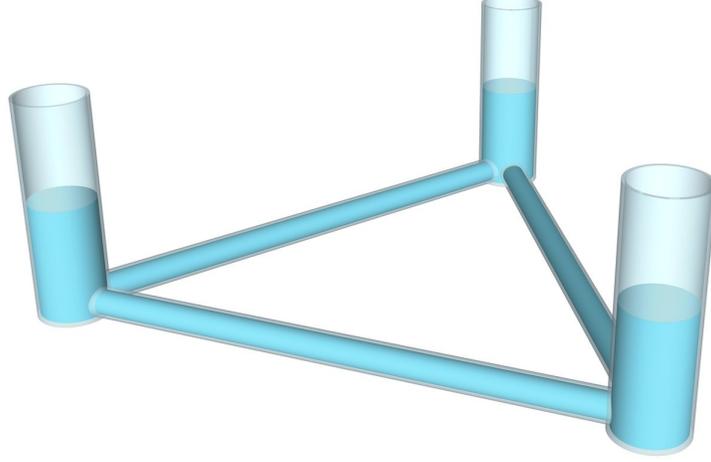


FIGURE 5.4 – Illustration du TLMCD 3P

avec

$$\mathcal{M}_{NS}(q) \triangleq \mathcal{P}(\Theta)^\top M_{NS}(w) \mathcal{P}(\Theta)$$

$$C_{NS} \triangleq \dot{\mathcal{P}}^\top M_{NS} \mathcal{P} + \mathcal{P}^\top \sum_{i=1}^{nc} \dot{w}_i \frac{\partial M_{NS}}{\partial w_i} \mathcal{P} + \mathcal{P}^\top M_{NS} \dot{\mathcal{P}} - \begin{bmatrix} 0_{3 \times 6+nc} \\ \frac{\partial(\mathcal{P}\dot{q})^\top}{\partial \Theta} M_{NS} \mathcal{P} \\ \frac{1}{2} \dot{q}^\top \mathcal{P}^\top \frac{\partial M_{NS}}{\partial w_1} \mathcal{P} \\ \vdots \\ \frac{1}{2} \dot{q}^\top \mathcal{P}^\top \frac{\partial M_{NS}}{\partial w_{nc}} \mathcal{P} \end{bmatrix}$$

$$k_{NS} \triangleq -g \begin{bmatrix} m_t \mathbf{z} \\ -\rho G^\top S (R^\top \mathbf{z}) \sum_{i=1}^N \int_0^{\zeta_i} A_t(\sigma) R_z(\alpha_i) \mathbf{r}^b(\sigma) d\sigma \\ \rho A_v \mathbf{z}^\top R(\Theta) (R_z(\alpha_1) \mathbf{r}^b(\zeta_1) - R_z(\alpha_N) \mathbf{r}^b(\zeta_N)) \\ \vdots \\ \rho A_v \mathbf{z}^\top R(\Theta) (R_z(\alpha_{nc}) \mathbf{r}^b(\zeta_{nc}) - R_z(\alpha_N) \mathbf{r}^b(\zeta_N)) \end{bmatrix}$$

$$Q_{NS}(t, q, \dot{q}, \beta) = \mathcal{P}(\Theta)^\top \begin{bmatrix} F_{hydro}(t, \beta, q_s, v_s) \\ P_{h_{NS}}^\top(0) F_h(\dot{w}) \end{bmatrix}$$

5.2.4 TLMCD en polygone à N éléments

Ce système d'amortissement est constitué de N tubes horizontaux, agencés de manière à former un polygone régulier convexe, et de N colonnes verticales positionnées à chaque sommet du polygone, on appellera ce système NP . À titre d'exemple, le système 3P est illustré en Fig. 5.4. Pour ce système, l'abscisse curviligne de chaque

élément, notée σ_i , varie entre $-\frac{L_h}{2}$ et ς_i . La géométrie de notre système nous donne $x_t^b = -\frac{L_h}{2 \tan \frac{\pi}{N}}$. Pour ce système d'amortissement on a, comme pour le NS, $\alpha_i \triangleq 2\pi \frac{i-1}{N}$.

Nous avons $2N$ vitesses du liquide (une dans chaque colonne verticale et une dans chaque tube horizontal), on peut aussi écrire N relations de conservation des débits massiques (une à chaque sommet du polygone, comparable à la loi des nœuds en électricité). L'équation de conservation de la masse totale, notée $m_t \triangleq \rho \sum_{i=1}^N \int_{-\frac{L_h}{2}}^{\varsigma_i} A_t(\sigma) d\sigma$, est une conséquence des N relations locales de conservation des débits. On a donc besoin de $nc = 2N - N = N$ variables indépendantes pour décrire chaque vitesse. Par conservation de la masse totale de fluide, on a $N - 1$ surfaces libres indépendantes, il nous faut donc introduire une variable supplémentaire pour décrire complètement le système.

On choisit arbitrairement w_{nc} comme étant la "position" du fluide dans le tube horizontal d'indice N . On notera que les équations (5.16) et (5.17) sont valables aussi pour ce système.

Pour le système NP on a pour $i = 1, \dots, N - 1$ et $\sigma_i > \frac{L_h}{2}$ (dans les tubes verticaux)

$$\begin{aligned} v_i(\sigma_i) &= \dot{w}_i \\ v_N(\sigma_N) &= - \sum_{i=1}^{N-1} \dot{w}_i \end{aligned}$$

les équations de conservation des débits à chaque sommet nous donnent, pour $i = 1, \dots, N$ et $\frac{L_h}{2} \geq \sigma_i \geq -\frac{L_h}{2}$ (dans les tubes horizontaux)

$$v_i(\sigma_i) = \nu \sum_{j=1}^i \dot{w}_j + \dot{w}_{nc}$$

comme on a $\sum_{i=1}^N \dot{w}_i = 0$ on réécrit plus simplement

$$v_N(\sigma_N) = \dot{w}_{nc}$$

On déduit des expressions de $v_i(\sigma_i)$ les matrices $P_{h_{NP}}$ et $P_{v_{NP}}$

$$P_{h_{NP}} = \begin{bmatrix} \nu & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \nu & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ \nu & \cdots & \nu & \nu & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P_{v_{NP}} = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{nc-1} & 0_{nc-1 \times 1} \\ -\mathbb{1}_{1 \times nc-1} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

Énergie mécanique du système NP

En suivant la même démarche qu'au §5.2.2, on écrit l'énergie cinétique de notre système sous la forme $T_{NP} = \frac{1}{2} \dot{q}^\top \mathcal{P}(\Theta)^\top M_{NP}(w) \mathcal{P}(\Theta) \dot{q}$ avec

$$M_{NP}(w) \triangleq \begin{bmatrix} M_s & \mathbf{0}_{6 \times nc} \\ \mathbf{0}_{nc \times 6} & \mathbf{0}_{nc \times nc} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_t \mathbb{I}_3 & M_{v\omega}(w) & M_{vq}(w) \\ M_{v\omega}^\top(w) & M_\omega(w) & M_{\omega q}(w) \\ M_{vq}^\top(w) & M_{\omega q}^\top(w) & M_q(w) \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

Pour $i = 1, \dots, N$ on a

$$\begin{aligned} m_t &\triangleq \rho \sum_{i=1}^N \int_{-\frac{L_h}{2}}^{\varsigma_i} A_t(\sigma_i) d\sigma_i \in \mathbb{R} \\ M_{v\omega} &\triangleq -\rho \sum_{i=1}^N \int_{-\frac{L_h}{2}}^{\varsigma_i} A_t(\sigma_i) S(R_z(\alpha_i) \mathbf{r}^b(\sigma_i)) d\sigma_i = -M_{v\omega}^\top(w) \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \\ M_\omega &\triangleq -\rho \sum_{i=1}^N \int_{-\frac{L_h}{2}}^{\varsigma_i} A_t(\sigma_i) S^2(R_z(\alpha_i) \mathbf{r}^b(\sigma_i)) d\sigma_i = M_\omega^\top(w) \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \\ M_{vq}[:, j] &\triangleq \rho A_v P_{h_{NP}}[:, j] \sum_{i=1}^N \int_{-\frac{L_h}{2}}^{\frac{L_h}{2}} R_z(\alpha_i) \frac{d\mathbf{r}^b}{d\sigma}(\sigma_i) d\sigma_i \\ &\quad + \rho A_v P_{h_{2NP}}[:, j] \sum_{i=1}^N \int_{-\frac{L_h}{2}}^{\varsigma_i} R_z(\alpha_i) \frac{d\mathbf{r}^b}{d\sigma}(\sigma_i) d\sigma_i \in \mathbb{R}^{3 \times 1} \\ M_{\omega q}[:, j] &\triangleq \rho A_v P_{h_{NP}}[:, j] \sum_{i=1}^N \int_{-\frac{L_h}{2}}^{\frac{L_h}{2}} S(R_z(\alpha_i) \mathbf{r}^b(\sigma_i)) R_z(\alpha_i) \frac{d\mathbf{r}^b}{d\sigma}(\sigma_i) d\sigma \\ &\quad + \rho A_v P_{h_{2NP}}[:, j] \sum_{i=1}^N \int_{-\frac{L_h}{2}}^{\varsigma_i} S(R_z(\alpha_i) \mathbf{r}^b(\sigma_i)) R_z(\alpha_i) \frac{d\mathbf{r}^b}{d\sigma}(\sigma_i) d\sigma \in \mathbb{R}^{3 \times 1} \\ M_q &\triangleq \rho A_v \left(\frac{L_h}{\nu} P_{h_{NP}}^\top P_{h_{NP}} + \nu^{-2} P_{h_{2NP}}^\top \begin{bmatrix} \varsigma_1 - \frac{L_h}{2} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \varsigma_N - \frac{L_h}{2} \end{bmatrix} P_{h_{2NP}} \right) \in \mathbb{R}^{nc} \end{aligned}$$

avec $M_{vq} \in \mathbb{R}^{3 \times nc}$, $M_{\omega q} \in \mathbb{R}^{3 \times nc}$.

L'énergie potentielle du liquide dans les N tubes en U s'écrit

$$\begin{aligned}
V_{NP} &= \mathbf{z}^\top \cdot \left(g\rho \sum_{i=1}^N \int_{-\frac{L_h}{2}}^{\varsigma_i} A_t(\sigma) (R(\Theta) R_z(\alpha_i) \mathbf{r}^b(\sigma) + \mathbf{x}^e) d\sigma \right) \\
&= -gm_t z - g\rho \mathbf{z}^\top R(\Theta) \left[\rho \sum_{i=1}^N \int_{-\frac{L_h}{2}}^{\varsigma_i} A_t(\sigma) R_z(\alpha_i) \mathbf{r}^b(\sigma) d\sigma \right] \quad (5.24)
\end{aligned}$$

avec m_t la masse totale de liquide dans les TLCDs.

Dynamique du système NP

En suivant la même démarche que pour le modèle NU, on observe que la dynamique du système est régie par

$$\mathcal{M}_{NP}(q) \ddot{q} + C_{NP}(q, \dot{q}) \dot{q} + k_{NP}(q) = Q(t, q, \dot{q}, \beta) \quad (5.25)$$

avec

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{NP}(q) &\triangleq \mathcal{P}(\Theta)^\top M_{NP}(w) \mathcal{P}(\Theta) \\
C_{NP} &\triangleq \dot{\mathcal{P}}^\top M_{NP} \mathcal{P} + \mathcal{P}^\top \sum_{i=1}^{nc} \dot{w}_i \frac{\partial M_{NP}}{\partial w_i} \mathcal{P} + \mathcal{P}^\top M_{NP} \dot{\mathcal{P}} - \begin{bmatrix} 0_{3 \times 6+nc} \\ \frac{\partial(\mathcal{P} \dot{q})^\top}{\partial \Theta} M_{NP} \mathcal{P} \\ \frac{1}{2} \dot{q}^\top \mathcal{P}^\top \frac{\partial M_{NP}}{\partial w_1} \mathcal{P} \\ \vdots \\ \frac{1}{2} \dot{q}^\top \mathcal{P}^\top \frac{\partial M_{NP}}{\partial w_{nc-1}} \mathcal{P} \\ 0_{1 \times 6+nc} \end{bmatrix} \\
k_{NP} &\triangleq -g \begin{bmatrix} m_t \mathbf{z} \\ -\rho G^\top S (R^\top \mathbf{z}) \sum_{i=1}^N \int_{-\frac{L_h}{2}}^{\varsigma_i} A_t(\sigma) R_z(\alpha_i) \mathbf{r}^b(\sigma) d\sigma \\ \rho A_v \mathbf{z}^\top R(\Theta) (R_z(\alpha_1) \mathbf{r}^b(\varsigma_1) - R_z(\alpha_N) \mathbf{r}^b(\varsigma_N)) \\ \vdots \\ \rho A_v \mathbf{z}^\top R(\Theta) (R_z(\alpha_{N-1}) \mathbf{r}^b(\varsigma_{N-1}) - R_z(\alpha_N) \mathbf{r}^b(\varsigma_N)) \\ 0 \end{bmatrix} \\
Q_{NP}(t, q, \dot{q}, \beta) &= \mathcal{P}(\Theta)^\top \begin{bmatrix} F_{hydro}(t, \beta, q_s, v_s) \\ P_{hNP}^\top(0) F_h(\dot{w}) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

5.3 Performances passives

On étudie comment se comportent les solutions 2U, 3P et 3S pour différentes incidences. Premièrement nous allons regarder comment évolue la dynamique du système

linéarisé tangent quand on modifie l’orientation des vagues par rapport au TLMCD. Dans un deuxième temps, nous étudierons la réponse du système passif, avec la dynamique complète, aux angles d’incidence de la houle.

5.3.1 Paramètres optimaux

Pour pouvoir comparer les systèmes d’amortissement entre eux, nous devons déterminer leurs paramètres de conception. Pour concevoir le système 2U, nous choisissons arbitrairement de garder la même masse de liquide par tube en U que pour le cas 2D i.e. 2% de la masse du système à amortir. Nous avons décidé d’imposer que les comparaisons soient réalisées pour des systèmes de coût équivalent

On lit dans (Yalla, 2001), que le prix d’un TLCD dépend de trois facteurs, l’espace utilisé dans le flotteur, les coûts supplémentaires de construction, et le coût de l’acier du TLCD en lui-même. Le coût de l’espace utilisé est nul pour notre étude puisque l’espace à l’intérieur de la barge n’a pas de valeur marchande. Si nous avons considéré l’amortissement d’un immeuble, alors ce coût aurait été celui de la place occupée par le TLCD, qui ne peut donc plus être aménagée en appartement ou en bureau. Si les colonnes dépassent du flotteur, il faudrait probablement ajouter des éléments supplémentaires pour assurer la solidité des colonnes. C’est pour cela que la longueur des colonnes verticales est calculée pour ne pas dépasser de la barge, par conséquent ce coût aussi est nul. On voit donc que le prix du TLCD sera principalement décidé par la quantité d’acier requise pour sa construction. En supposant une épaisseur d’acier constante sur tout le TLCD, on constate que le coût du TLCD est proportionnel à la surface des colonnes.

La solution la plus compacte est la 3S, pour la même quantité d’acier, elle peut donc avoir une masse d’eau supérieure aux autres. Dans un cas réel de conception d’un flotteur équipé d’un TLMCD à partir d’une “feuille blanche”, le calcul du coût du TLMCD devient beaucoup moins simple. De nouvelles possibilités seraient envisageables. Par exemple, on pourrait diminuer la quantité d’acier nécessaire en faisant passer l’eau du TLMCD dans des poutres qui étaient déjà nécessaires à la structure du flotteur.

Si chaque colonne est tubulaire, l’indice de prix i.e. la surface d’un TLCD est approximativement

$$S_{TLCD} = L_h \cdot 2\sqrt{\pi A_h} + 2 \cdot 2L_v \cdot 2\sqrt{\pi A_v}$$

	ν	η	L_h	A_v	μ	$P.I.$
1U (TLCD simple)	4.10	2.28	32.31 m	5.70 m ²	2%	2.38
2U	4.03	2.21	32.32 m	5.66 m ²	4.00%	2.43
3S	4.02	1.77	31.38 m	10.31 m ²	5.40%	2.29
3P	7.04	2.34	27.57 m	7.88 m ²	3.23%	2.43

TABLE 5.2 – Paramètres optimaux pour chaque solution

Pour les trois variantes retenues, on a

$$\begin{aligned}
S_{NU} &= NS_{TLCD} \\
S_{NS} &= N/2S_{TLCD} \\
S_{NP} &= N \left(L_h \cdot 2\sqrt{\pi A_h} + 2L_v \cdot 2\sqrt{\pi A_v} \right)
\end{aligned}$$

Pour que nos variantes soient comparables, on choisit A_v et A_h pour avoir $S_{NU} = S_{NS} = S_{NP}$. Lors de l’optimisation des paramètres du TLCD dans le plan, au §4.3.3, nous avons tracé l’amplitude des oscillations du flotteur grâce à une linéarisation de la force développée par la restriction, appliquer la même technique pour un système à N restrictions est mathématiquement très compliqué. Dans la partie traitant du TLCD “classique”, on devait résoudre l’équation 4.22, ce qui équivaut à trouver la racine d’un polynôme de degré 4. Pour N restrictions, il faut donc résoudre un système de N polynômes de degré 4. On a donc choisi de trouver l’amplitude maximale de la RAO par simulation. Ces calculs étant numériquement lourds, on va essayer de limiter le nombre de variables d’optimisation.

Au §4.3.3, on a pu constater que l’algorithme d’optimisation choisissait de maximiser L_h afin d’utiliser tout l’espace disponible pour le système d’amortissement. On va donc fixer ici $L_h = L_{h_{maxi}}$, on passe donc de 3 à 2 variables à optimiser, ce qui nous permet de réduire significativement les temps de calcul.

Pour déterminer les meilleurs paramètres, on utilise la fonction `fminsearch` de Matlab. Le critère de performance à minimiser est le même qu’au §4.3.3

$$P.I. = \max_{T \in [3;30]} (|\varphi|) \quad (5.26)$$

Cet indice de performance fait que le TLMCD est réglé pour amortir la période propre en roulis de notre système. Pour une implantation du système sur un site donné, il faudrait probablement adapter l’indice de performance pour obtenir un réglage spécifique à ce site.

En Table 5.2 on a regroupé l’ensemble des paramètres optimaux pour chaque système.

Pour ces systèmes, on a $S = 608 \text{ m}^2$, en supposant qu'on ait une épaisseur d'acier de 15 mm^1 , et en reprenant le coût de l'acier donné au §2.3.1, on obtient un coût approximatif du système d'amortissement de 365 k€ soit environ 4% du coût total de l'éolienne flottante ou 8% du coût de la barge.

On voit que la meilleure performance est obtenue par le système 3S. Ce résultat est assez intuitif puisque le 3S étant le système le plus compact (trois demi-TLCD) il est celui dans lequel on peut mettre la plus grande masse. Un autre résultat de ce tableau est intéressant à souligner, c'est le rapport des sections du 3P qui est bien plus grand que celui des autres solutions. Ce résultat indique que le 3P a naturellement une période de résonance bien plus petite que les autres. Cette particularité peut lui permettre d'être une solution mieux adaptée à des flotteurs qui ont une période de résonance plus basse que la barge que l'on considère ici.

5.3.2 Étude du modèle linéarisé

Comme la plate-forme est un solide de révolution, tourner la houle d'un angle β est mathématiquement équivalent à tourner le TLMCD dans la barge d'un angle $-\beta$. Pour cette sous-section uniquement, on modifie donc $R_z(\alpha_i)$ la matrice qui définit l'orientation des tubes par rapport à \mathcal{R}_b pour la faire devenir

$$R_z(\alpha_i)(\beta) = R_z(-\beta) R_z(\alpha_i)$$

En suivant la même démarche qu'au §5.2, nous obtenons des modèles dépendant directement de β .

Nous linéarisons la dynamique du système 2U (qui dépend donc de β) autour de $q = \dot{q} = 0_{8 \times 1}$, les matrices de masse, de frottement et de raideur linéarisées sont notées respectivement $\tilde{M}(\beta)$, $\tilde{C}(\beta)$ et $\tilde{K}(\beta)$. Étant donné que l'approximation Linéaire Temps Invariant (LTI) supprime la force développée par la restriction, nous décidons de remplacer $F_{h_{NV}}$ par un coefficient de frottement linéaire c , qu'on inclut dans $\tilde{C}(\beta)$.

On va maintenant montrer mathématiquement que la dynamique de l'approximation LTI du système 2U est indépendante de β .

On a tracé le root-locus de chaque système d'amortissement en Fig. 5.5 pour β allant de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

On voit que les racines du système linéarisé tangent sont indépendantes de l'angle d'incidence de la houle, sauf pour le TLCD classique (1U).

La dynamique du système 2U linéarisé est

$$\tilde{M}(\beta) \ddot{q} + \tilde{C}(\beta) \dot{q} + \tilde{K}(\beta) q = \begin{bmatrix} F(t) \\ 0_{2 \times 1} \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

1. Yann Poirette et Timothée Perdrizet, Direction Mécanique Appliquée

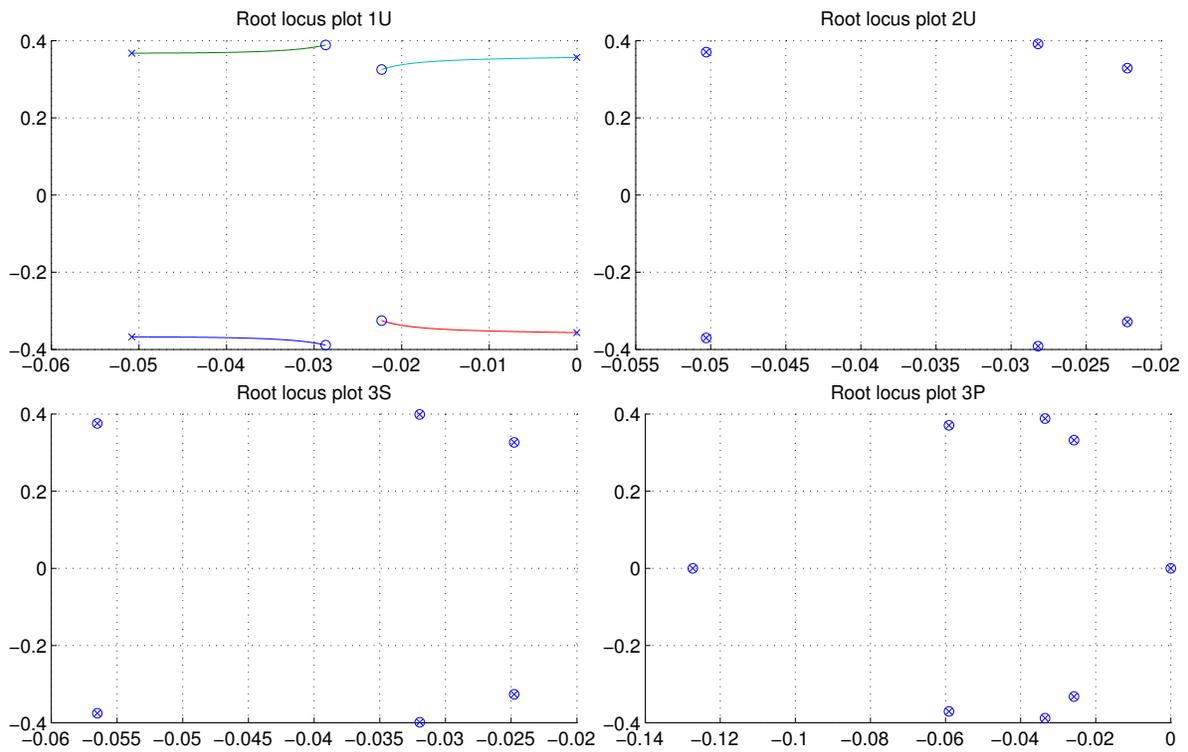


FIGURE 5.5 – Root-locus des systèmes 1U, 2U, 3S, et 3P pour des incidences de houle allant de 0° à 180°

où

$$\tilde{M}(\beta) = \begin{bmatrix} M_s & 0_{6 \times 2} \\ 0_{2 \times 6} & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_D \mathbb{I}_3 & -M_{v\omega} & M_{vq}(\beta) \\ M_{v\omega} & M_\omega & M_{\omega q}(\beta) \\ M_{vq}^\top(\beta) & M_{\omega q}^\top(\beta) & M_q \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C}(\beta) = \begin{bmatrix} 0_{6 \times 6} & 0_{6 \times 2} \\ 0_{2 \times 6} & c \mathbb{I}_2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{K}(\beta) = \begin{bmatrix} K_s & 0_{6 \times 2} \\ 0_{2 \times 6} & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 2} \\ 0_{3 \times 3} & K_\omega & K_{\omega q}(\beta) \\ 0_{2 \times 3} & K_{\omega q}^\top(\beta) & K_q \end{bmatrix}$$

avec

$$M_{vq}(\beta) = \mu_h \nu L_h \begin{bmatrix} \sin \beta & \cos \beta \\ -\cos \beta & \sin \beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{\omega q}(\beta) = \mu_h \nu L_h (L_v + e) \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_q = \mathbb{I}_2 \rho A_v (L_h \nu + 2L_v)$$

$$K_{\omega q}(\beta) = \mu_h \nu g L_h \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_q = 2 \mathbb{I}_2 \rho A_v g$$

Nous introduisons le changement de variable

$$q = \tilde{P}(\beta) y$$

avec

$$\tilde{P}(\beta) = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_6 & 0_{6 \times 1} & 0_{6 \times 1} \\ 0_{1 \times 6} & \cos \beta & \sin \beta \\ 0_{1 \times 6} & -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}$$

qui vérifie $\tilde{P}^\top(\beta) = \tilde{P}^{-1}(\beta)$. En multipliant (5.27) à gauche par $\tilde{P}^\top(\beta)$ elle devient

$$\tilde{P}^\top(\beta) \tilde{M}(\beta) \tilde{P}(\beta) \ddot{y} + \tilde{P}^\top(\beta) \tilde{C}(\beta) \tilde{P}(\beta) \dot{y} + \tilde{P}^\top(\beta) \tilde{K}(\beta) \tilde{P}(\beta) y = \tilde{P}^\top(\beta) \begin{bmatrix} F(t) \\ 0_{2 \times 1} \end{bmatrix}$$

où

$$\begin{aligned}
& \tilde{P}^\top(\beta) \tilde{M}(\beta) \tilde{P}(\beta) \\
= & \begin{bmatrix} m_D \mathbb{I}_3 & -M_{v\omega} & \mu_h \nu Lh \begin{bmatrix} \sin \beta & \cos \beta \\ -\cos \beta & \sin \beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \\ * & M_\omega & \mu_h \nu Lh(Lv + e) \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \\ * & * & \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \rho A_v (L_h \nu + 2L_v) \mathbb{I}_2 \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\
= & \tilde{M}(0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \tilde{P}^\top(\beta) \tilde{K}(\beta) \tilde{P}(\beta) \\
= & \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 2} \\ * & K_\omega & \mu_h \nu g Lh \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \\ * & * & 2\rho A_v g \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \mathbb{I}_2 \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\
= & \tilde{K}(0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{P}^\top(\beta) \tilde{C}(\beta) \tilde{P}(\beta) &= \begin{bmatrix} 0_{6 \times 6} & 0_{6 \times 2} \\ 0_{2 \times 6} & c \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \mathbb{I}_2 \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \tilde{C} \\
\tilde{P}^\top(\beta) \begin{bmatrix} F(t) \\ 0_{2 \times 1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} F(t) \\ 0_{2 \times 1} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Pour résumer, le système 2U LTI dont la dynamique est

$$\tilde{M}(\beta) \ddot{q} + \tilde{C}(\beta) \dot{q} + \tilde{K}(\beta) q = \begin{bmatrix} F(t) \\ 0_{2 \times 1} \end{bmatrix}$$

est identique au système

$$\tilde{M}(0) \ddot{y} + \tilde{C}(0) \dot{y} + \tilde{K}(0) y = \begin{bmatrix} F(t) \\ 0_{2 \times 1} \end{bmatrix}$$

au sens où les solutions de ces 2 systèmes, pour des conditions initiales compatibles, satisfont

$$q = \tilde{P}(\beta) y$$

En utilisant une approche similaire, on obtient les mêmes résultats pour les systèmes 3P et 3S. Comme notre flotteur est un solide de révolution, on sait déjà que son comportement est le même, peu importe d'où vient la houle. Maintenant on sait que peu importe l'orientation de la houle par rapport aux TLMCD ou au flotteur, la dynamique de notre système (avec TLMCD) linéarisé temps invariant autour de $q = \dot{q} = 0_{6+nc}$ reste la même. Cependant nous verrons au §5.3.4 que la dynamique de nos systèmes passifs non-linéaires dépend de β .

On rappelle qu'à partir de maintenant seule F_{hydro} dépend de β .

5.3.3 Préalables

Verrouillage de la dynamique du lacet

Avant de présenter les RAO pour différents angles d'incidence de vagues, nous allons voir la dernière hypothèse que nous devons formuler pour que toutes ces RAO soient comparables.

Sans système d'ancrage, on observe une dérive en lacet bien qu'il n'y ait aucune force qui s'exerce sur ce degré de liberté. Pour comprendre ce phénomène, il faut s'intéresser à l'obtention de la dérivée de ψ . Cette dérivée découle de la formule $\dot{\Theta} = G^{-1}(\Theta)\omega^b$, i.e. même si l'on a $\psi = 0$ et $\omega^b = [\omega_1^b, \omega_2^b, 0]$, on peut parfaitement obtenir $\dot{\psi} \neq 0$. Dans la littérature cette propriété liée aux angles d'Euler est connue sous le nom de "coning" (Radix et de Cremiers, 1991; Titterton et Weston, 2004). Pour que les RAO soient comparables, nous ajoutons une très grande raideur à K_s pour littéralement bloquer le lacet. Dans toutes les simulations, les surfaces libres du TLMCD sont restées dans les colonnes verticales.

Définition des repères des résultats

Nous allons changer l'incidence de la houle, cela implique de changer les variables des résultats. On définit φ_r et θ_r , les oscillations de l'éolienne flottante dans le sens de la houle et perpendiculairement à la houle, respectivement. On cherche leur expression en fonction de φ , θ et ψ .

Nous devons donc introduire \mathcal{R}_{er} et \mathcal{R}_{br} les repères des résultats. Ils sont liés entre eux par $R(\Theta_r)$ telle que $\forall \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{r}^{er} = R(\Theta_r)\mathbf{r}^{br}$ et avec $\Theta_r \triangleq [\varphi_r, \theta_r, \psi_r]^\top$. Ces repères sont liés à \mathcal{R}_e et \mathcal{R}_b par une rotation d'angle β autour de \mathbf{z} , de manière à ce que $\forall \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{r}^e = R_z(\beta)\mathbf{r}^{er}$$

et

$$\mathbf{r}^b = R_z(\beta)\mathbf{r}^{br}$$

On obtient donc

$$\mathbf{r}^{er} = R_z^\top(\beta) \mathbf{r}^e = R_z^\top(\beta) R(\Theta) \mathbf{r}^b = R_z^\top(\beta) R(\Theta) R_z(\beta) \mathbf{r}^{br}$$

c'est-à-dire

$$R(\Theta_r) = R_z^\top(\beta) R(\Theta) R_z(\beta) \quad (5.28)$$

la résolution de cette équation nous permet d'exprimer Θ_r en fonction de Θ . Dans la suite de ce document, toutes les RAO en roulis (resp. en tangage) seront les RAO de φ_r (resp. de θ_r).

5.3.4 RAO passives

On présente ici les RAO du flotteur amorti par les systèmes 2U, 3S et 3P pour différents angles d'incidence.

On observe que les courbes extrêmes sont 0° et 45° pour le système 2U, et, 0° et 30° pour 3S et 3P, ceci est dû à la symétrie des systèmes.

En Fig. 5.6 on voit que la dynamique des systèmes d'amortissement n'est pas indépendante de l'orientation de la houle, contrairement à ce qu'on a vu en 5.3.2.

On observe que les systèmes 3S et 3P sont plus robustes au changement d'incidence que le 2U. On voit aussi que chaque système d'amortissement induit du tangage parasite, encore une fois le 2U en crée bien plus que les TLMCD.

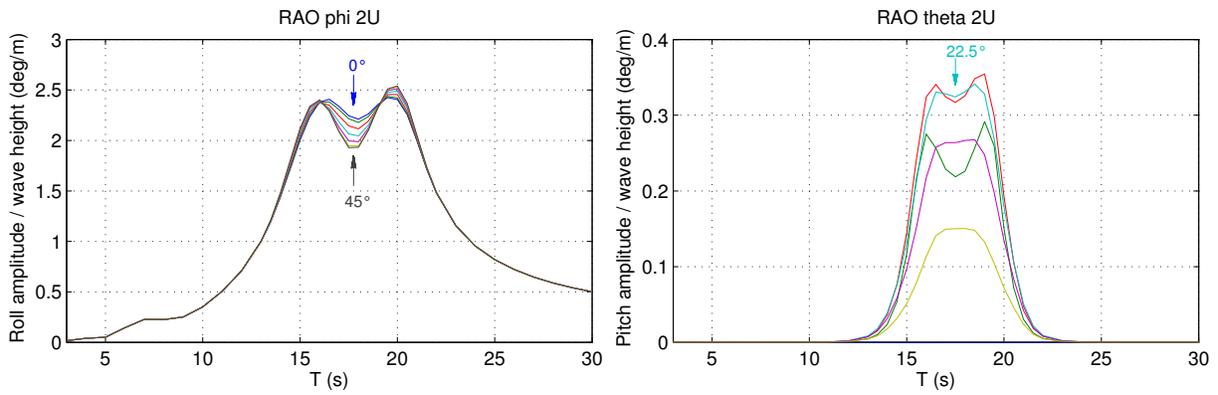
Bien que les écarts soient plutôt faibles, on voit que le système 3S est le plus robuste à l'angle d'incidence de la houle, il crée aussi moins de tangage parasite, et sa performance d'amortissement est meilleure pour un coût identique.

En Annexe C.1, on montre que si on remplace F_h par la version linéaire définie au §5.3.2, le système est beaucoup plus robuste à l'incidence de la houle. On en déduit que le manque de robustesse à l'incidence est liée de manière prépondérante à la non-linéarité de la force exercée par la restriction sur le liquide du TLMCD. La commande LQR saturée est non-linéaire par nature, il faudra donc être très attentifs à son comportement face aux différentes incidences de la houle.

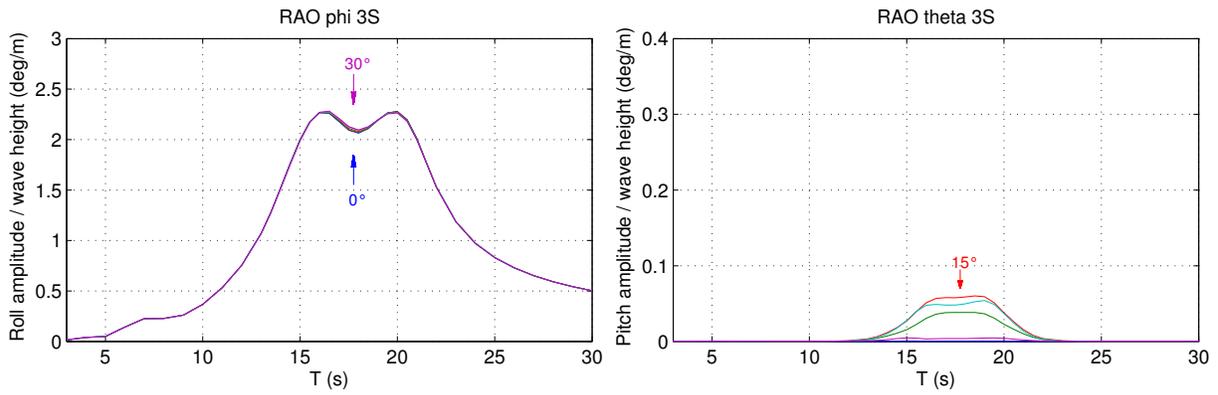
5.4 Performances du contrôle semi-actif

5.4.1 Synthèse du contrôle LQR saturé

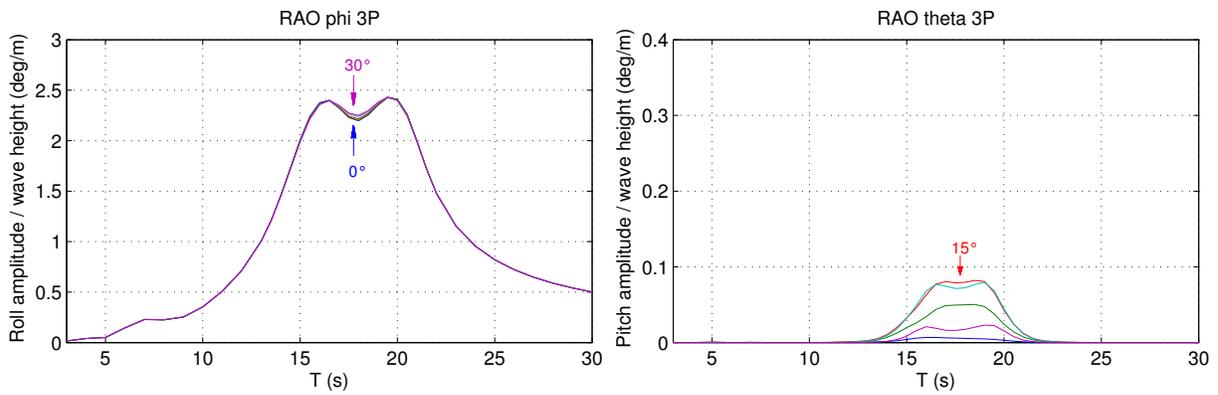
Pour les systèmes 2U, 3S, 3P, nous avons linéarisé les systèmes en suivant la même démarche qu'au §4.3.2. Nous avons bloqué toutes les translations ainsi que le lacet, la barge peut se mouvoir en roulis et en tangage, les colonnes d'eau sont elles aussi libres de leur mouvement. Le *modèle réduit* dépend de β l'angle d'incidence de la houle, au



(a) RAO du système 2U



(b) RAO du système 3S



(c) RAO du système 3P

FIGURE 5.6 – RAO des TLMCD passifs sur le *modèle complet* pour différents angles d'incidence en houle monochromatique d'amplitude 3 m

même titre que le *modèle complet*, c'est-à-dire uniquement par F la force d'excitation de la houle. Sa dynamique s'écrit

$$\dot{X} = AX + BF_h(\dot{w}, \eta) + EF(\beta, t) \quad (5.29)$$

avec

$$X = \begin{bmatrix} \varphi \\ \theta \\ w \\ \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{w} \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0_{2+nc} & \mathbb{I}_{2+nc} \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 0_{2+nc} & \\ M^{-1} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_2 \\ 0_{nc \times 2} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0_{2+nc} & \\ M^{-1} \begin{bmatrix} 0_{2 \times nc} \\ P_{h_N}^\top \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Le système 2U est facile à régler puisque les meilleures matrices de pondérations Q et R sont les mêmes que celles déterminées par essais successifs au §4.5.1. Nous aborderons la pondération des systèmes 3S et 3P plus précisément au §5.4.2.

5.4.2 Robustesse à l'incidence de la houle

Comme pour l'étude des TLMCD passifs, nous allons nous intéresser à la robustesse à l'incidence de la houle sur notre système en boucle fermée.

Prise en compte des symétries des systèmes 3S et 3P

Nos TLMCD 3S et 3P sont conçus pour être invariants par rotation de 120° autour de la droite définie par CdG et \mathbf{z}_b . Nous allons voir si cette propriété se vérifie sur le *modèle réduit* en boucle ouverte, puis bouclés par le LQR non-saturé.

Lorsqu'on tourne \mathcal{R}_b et \mathcal{R}_e de 120° les conséquences sur X sont les suivantes : il faut exprimer la matrice de rotation entre ces deux nouveaux repères en fonction de $[\varphi \ \theta]^\top$ et il faut faire une permutation circulaire des vitesses de l'eau dans les colonnes verticales et les tubes horizontaux. On appellera ce nouveau vecteur X_{120} et on définit P_{120} telle que $X_{120} = P_{120}X$. De la même manière, on fait permuer les composantes de F_h grâce à la matrice P_F . L'écriture de P_{120} et de P_F est détaillée en Annexe B.1. On vérifie (par exemple avec le logiciel de calcul formel Maple) la propriété suivante

Proposition 3. Les matrices A et B du modèle réduit des systèmes 3S et 3P (5.29) vérifient

$$A = P_{120}^{-1}AP_{120} \quad (5.30)$$

$$B = P_{120}^{-1}BP_F \quad (5.31)$$

Proposition 4. Pour que les matrices Q et R de pondération du LQR vérifient

$$Q = P_{120}^\top Q P_{120} \quad (5.32)$$

$$R = P_F^\top R P_F \quad (5.33)$$

on peut choisir

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 \mathbb{I}_2 & 0_2 & 0_2 & 0_2 \\ 0_2 & q_2 P_{h_{3S}}^\top P_{h_{3S}} & 0_2 & 0_2 \\ 0_2 & 0_2 & q_3 \mathbb{I}_2 & 0_2 \\ 0_2 & 0_2 & 0_2 & q_4 P_{h_{3S}}^\top P_{h_{3S}} \end{bmatrix}$$

pour le système 3S, et

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 \mathbb{I}_2 & 0_2 & 0_2 & 0_2 \\ 0_2 & q_2 P_{v_{3P}}^\top P_{v_{3P}} + q_3 P_{h_{3P}}^\top P_{h_{3P}} & 0_2 & 0_2 \\ 0_2 & 0_2 & q_4 \mathbb{I}_2 & 0_2 \\ 0_2 & 0_2 & 0_2 & q_5 P_{v_{3P}}^\top P_{v_{3P}} + q_6 P_{h_{3P}}^\top P_{h_{3P}} \end{bmatrix}$$

pour le système 3P, avec q_1 à q_6 des constantes positives ou nulles et $P_{v_{3P}}$ et $P_{h_{3P}}$ définies en (5.22).

On peut aussi choisir $R = r_1 \mathbb{I}_3$ avec $r_1 > 0$.

Démonstration. Voir Annexe B.2 □

On appellera ‘‘CARE’’ l’équation algébrique de Riccati en temps continu, elle s’écrit classiquement

$$A^\top \chi + \chi A - \chi B R^{-1} B^\top \chi + Q = 0$$

avec $\chi = \chi^\top$ l’inconnue.

Proposition 5. Si on vérifie (5.30-5.33) et que χ est l’unique solution stabilisante de CARE en temps continu, alors on a $A - BK = P_{120}^{-1} (A - BK) P_{120}$, avec $K \triangleq R^{-1} B^\top \chi$, c’est-à-dire que la dynamique du système bouclé est invariant par rotation de 120 degrés, comme c’est le cas pour le système en boucle ouverte.

Démonstration. Voir Annexe B.3 □

Vérification par simulation

On a vérifié en Annexe C.2 que nos systèmes bouclés par un LQR non saturé et excités par une houle monochromatique de faible amplitude (0.1 m) sont complètement insensibles au changement d'incidence de la houle. On notera que ni les matrices A , B , Q , R ni le vecteur K ne dépendent de β .

5.4.3 Résultats

Nous avons tracé en Fig. (5.7) les performances que fournissent les systèmes 2U, 3S et 3P soumis à une houle monochromatique pour différentes incidences de houle.

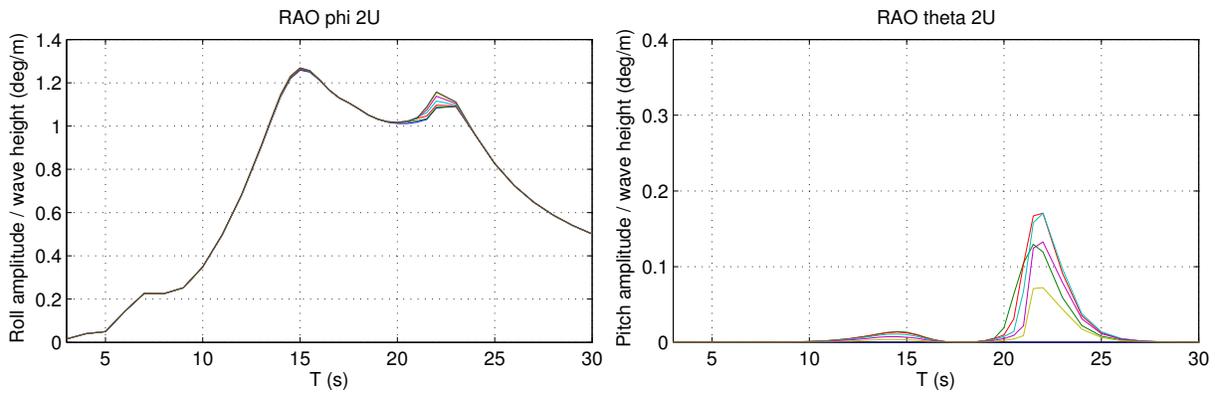
On constate que les TLMCD bouclés par le contrôle LQR saturé sont quasiment insensibles à l'incidence de la houle. En ce qui concerne les performances d'amortissement en roulis proposées par chaque système, les RAO sont de forme similaire et celle du 3S est plutôt meilleure que celles des systèmes 3P et 2U.

Les performances de ces systèmes soumis à des houles polychromatiques pour différentes incidences sont tracées en Annexe C.3 ces RAO généralisées confirment que les systèmes considérés sont très peu dépendants de l'incidence de la houle.

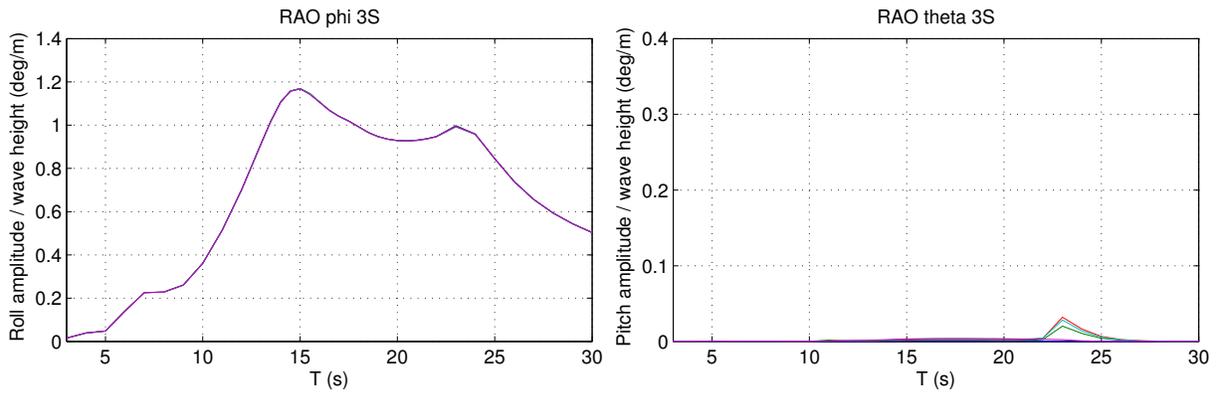
On considère donc le problème de l'incidence de la houle résolu par cette commande.

5.5 Tests de robustesse

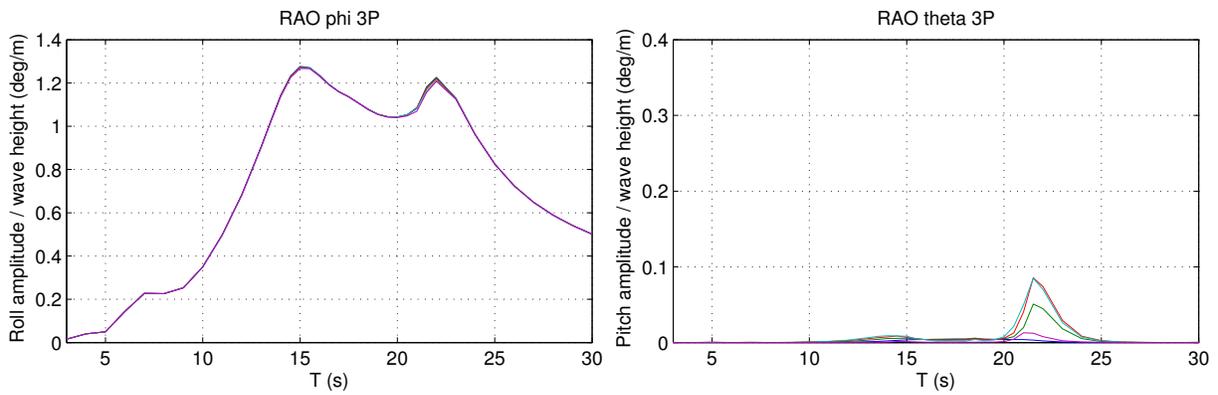
Comme dans le Chapitre 4 nous vérifions numériquement que certaines des hypothèses qu'on a faites pour simplifier notre problème n'impactent pas dramatiquement les performances de nos système d'amortissement. Le détail des méthodes utilisées ainsi que les résultats obtenus sont présentés en Annexe D. Les hypothèses traitées dans cette Annexe sont les suivantes : §D.1) la valeur minimale de la perte de charge est $\eta = 0$, §D.2) l'éolienne flottante oscille autour de l'axe vertical, §D.3) l'éolienne est rigide. Les simulations entreprises ici mènent à des résultats similaires à ceux obtenus en Section 4.6, il y a cependant un résultat notable : quand on rend le mât flexible, le système 3P est le seul en mesure d'empêcher la résonance de la nacelle au bout du mât de l'éolienne.



(a) RAO du système 2U



(b) RAO du système 3S



(c) RAO du système 3P

FIGURE 5.7 – RAO sur le *modèle complet* de nos TLMCD 2U, 3S et 3P en LQR saturé pour différents angles d’incidence pour une houle monochromatique d’amplitude 3 m