

# Système hyperbolique couplé

On a pour l'instant traité des modèles simplifiés afin de comprendre l'intérêt des méthodes de raffinement pour l'équation de transport et d'analyser certaines propriétés. La discrétisation énergétique était réalisée avec un seul groupe ce qui n'est évidemment pas le cas dans les calculs de cœur. En introduisant la dimension énergétique, on s'intéresse au problème modèle 2 :

Problème modèle 2 : Système d'équations de transport couplées

$$\begin{cases} \tilde{\Phi} = \tilde{A} (C\tilde{\Phi} + Q) & \text{sur } \mathcal{D} \\ \Phi = \Phi^{BC} & \text{sur } \partial\mathcal{D}^- \end{cases} \quad (3.1)$$

**Remarque 3.** Les notations "tilde" sont utilisées afin d'avoir des notations cohérentes avec Section 3.5.

**Remarque 4.** Notons bien que l'on s'est affranchi de la variable angulaire afin de définir le problème modèle 2. Ainsi, les estimateurs et l'erreur sont des quantités indépendantes de l'angle définies de la même manière que le flux scalaire c'est-à-dire :

$$(\mathbf{E})_g = \sum_n w_n E_n^g \quad (3.2)$$

$$(\mathbf{e})_g = \sum_n w_n e_n^g \quad (3.3)$$

Les estimateurs d'erreur ont été dérivés sur Eq. 1.21 (modèle 1) et ne prennent donc pas en compte le couplage entre les groupes dû à la matrice noté  $C$ . Ils représentent la distance entre un flux exact  $\hat{\Phi}$  et un approché  $\Phi$

$$\|\mathbf{E}\| = \|\hat{\Phi} - \Phi\| \quad (3.4)$$

### 3. MODÈLE 2 : SYSTÈME HYPERBOLIQUE COUPLÉ

---

où  $\widehat{\Phi}$  et  $\Phi$  satisfont

$$\widehat{\Phi} = \widetilde{A}(C\Phi + Q) \quad (3.5)$$

$$\Phi = A(C\Phi + Q) \quad (3.6)$$

avec  $A$  opérateur discret correspondant à la discrétisation de l'opérateur continu  $\widetilde{A}$  défini par Eq. 1.26.

L'estimateur n'est donc plus directement relié à l'erreur mais on a :

$$\begin{aligned} e &= \widetilde{\Phi} - \Phi \\ &= \widetilde{\Phi} - \widehat{\Phi} + \widehat{\Phi} - \Phi \\ &= \widetilde{A}Ce + E \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$E = (I - \widetilde{A}C)e \quad (3.8)$$

La matrice  $C$  contient les différentes sections efficaces et  $\widetilde{A}$  la section efficace totale. Ainsi, la somme des sections efficaces étant inférieure à la section totale, on assure que le rayon spectral de  $\widetilde{A}C$  est inférieur à 1. Alors, Eq. 3.7 implique :

$$(1 - \rho(\widetilde{A}C)) \|e\| \leq \|E\| \quad (3.9)$$

$$\|e\| \leq \frac{1}{1 - \rho(\widetilde{A}C)} \|E\| \quad (3.10)$$

Si l'on raffine de sorte à faire décroître le maximum de l'estimateur sur tous les groupes grâce à Eq. 3.11, on assure la décroissance de l'erreur et donc la convergence du système. On peut donc utiliser toutes les méthodes vues précédemment afin de conduire le raffinement sur un cas réaliste. Cette comparaison est faite Section 3.1 sur le cas ZONA2B présenté Figure 1.4 avec 33 groupes énergétiques et 12 directions spatiales (quadrature  $S_4$ ). On verra ensuite que l'allure de la solution est différente suivant l'énergie et que l'on peut donc avoir intérêt à proposer des maillages spatiaux différents suivant les groupes énergétiques. On modifiera alors les estimateurs présentés Chapitre 2 afin de prendre en compte le couplage entre les groupes et de proposer une discrétisation spatiale différente suivant l'énergie tout en assurant la convergence.

**Remarque 5.** *Toute l'étude théorique est faite pour la résolution d'un problème à source (problème modèle 2). Par contre, les résultats sur ZONA2B sont extraits du papier de la conférence M&C présenté en Annexe 3 et concernent donc un problème aux valeurs propres. Même si l'on ne possède pas de résultats théoriques sur ce problème, on a effectué le raffinement en prenant le maximum sur les groupes sans observer de problème additionnel.*

### 3.1 Utilisation d'un seul maillage

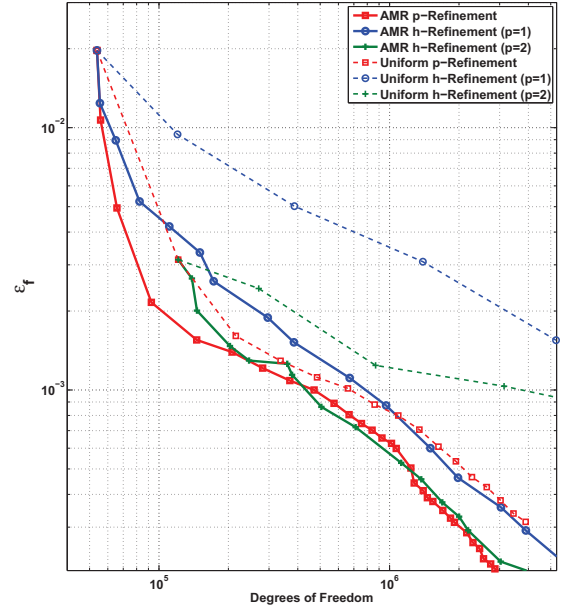
Dans un premier temps, on utilise le même maillage pour tous les groupes énergétiques. Le raffinement d'une cellule  $K^*$  est effectué si :

$$\max_{g'} E^{g'}(K^*) > \alpha \max_{g'} \max_K E^{g'}(K) \quad (3.11)$$

Eq. 3.11 est l'équivalent d'Eq. 1.50 lorsque la discrétisation énergétique comprend plusieurs groupes. Elle nous donne un moyen de mener le raffinement lorsque le découpage énergétique comprend plusieurs groupes. On peut donc tester les différentes stratégies présentées Section 2.2 sur un cas réaliste (ZONA2B) et comparer les résultats aux différents cas simplifiés étudiés.

Figure 3.1 présente la convergence en norme  $L^2$  en fonction des degrés de liberté suivant la stratégie utilisée. Pour les stratégies adaptatives,  $E^R$  est utilisé pour raffiner et la constante  $\alpha$  d'Eq. 3.11 est fixée à 0.5.

**Remarque 6.** Nous avons vu Chapitre 2 que l'estimateur  $E^{FV}$  était plus adapté pour mener le raffinement. L'utilisation de  $E^R$  ici est due à la chronologie de la thèse. Nous avons tout d'abord dérivé l'estimateur  $E^R$  pour faire du  $h$ - et du  $p$ -raffinement puis l'estimateur  $E^{FV}$  est venu plus tard dans une logique de méthodes plus précises dans les cas de faible régularité puis pour la mise en place de méthodes  $hp$ .

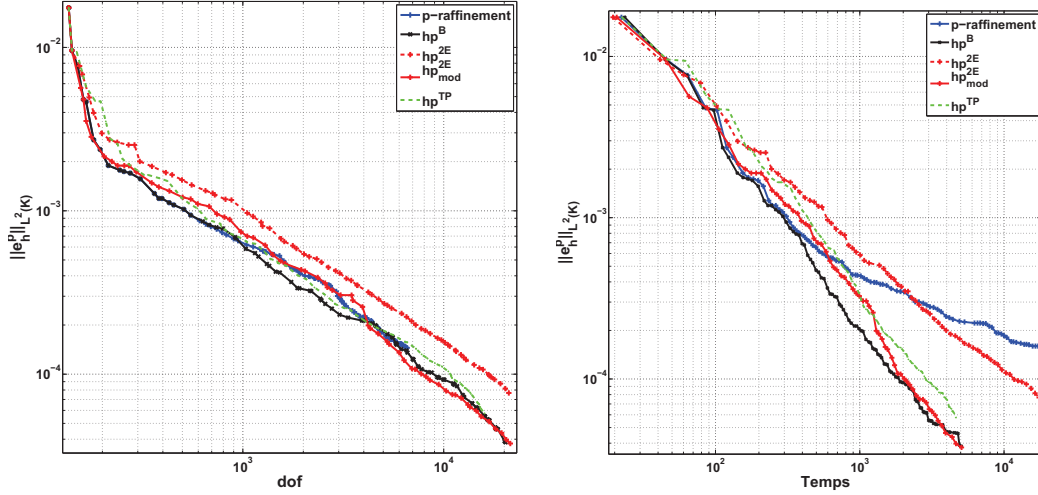


**Figure 3.1:** Erreur sur le flux en norme  $L^2$  en fonction de  $dof$  pour les stratégies adaptatives et uniformes sur le cas ZONA2B

On note l'intérêt des stratégies adaptatives en comparaison au raffinement uniforme ce qui montre que l'estimateur permet de bien localiser les zones où l'erreur est importante. Pour les différentes stratégies adaptatives, on note comme dans les cas MMS, l'intérêt d'augmenter l'ordre au moins jusqu'à deux avant de faire du  $h$ -raffinement et l'avantage du  $p$ -raffinement pour de faibles valeurs de  $p$ .

On teste les différentes stratégies  $hp$  sur ce cas. On représente Figure 3.2 l'erreur pour différentes stratégies  $hp$ . Les stratégies à 2 estimateurs présentées Table 2.1

### 3. MODÈLE 2 : SYSTÈME HYPERBOLIQUE COUPLÉ



**Figure 3.2:** Erreur sur le flux en norme  $L^2$  en fonction de  $dof$  (gauche) et du temps (droite) pour les stratégies  $hp$  sur le cas ZONA2B

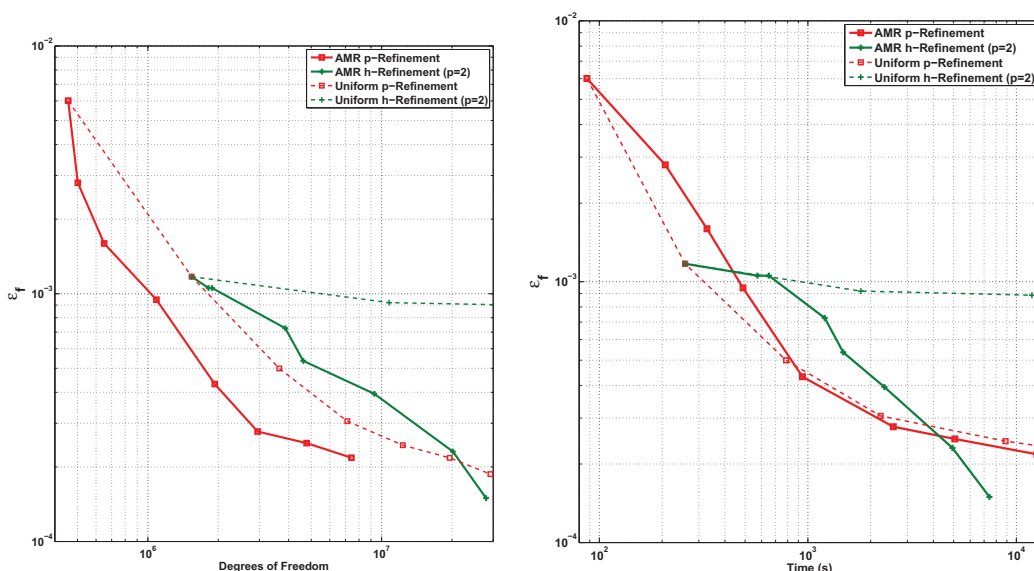
and 2.3, la méthode basique (Table 2.2) et la méthode type-parameter décrite Section 1.3.3 avec  $\gamma = 0.6$ . Si l'on voit clairement l'intérêt d'augmenter l'ordre pour de faibles valeurs de  $p$  rendant la stratégie  $hp^{2E}$  peu efficace, les autres critères permettant de choisir entre  $h$  et  $p$  ont des performances proches. Finalement, dans les cas réalistes, une stratégie basique paraît suffisante afin de choisir entre les deux types de raffinement.

On peut aussi utiliser ce cas réaliste pour mesurer les améliorations induites par les stratégies  $hp$  sur le temps de calcul (Figure 3.2 (droite)). Les conclusions sont assez similaires à celles faites en fonction de  $dof$ . On peut seulement noter que le  $p$ -raffinement devient encore plus désavantageux au regard du temps lorsque  $p$  devient trop grand. En effet, une augmentation de l'ordre entraîne une augmentation de la taille des matrices à inverser sur chaque cellule alors qu'un raffinement en espace ne fait qu'augmenter le nombre de systèmes à inverser. Ainsi, la dépendance entre le temps et les  $dof$  est théoriquement linéaire pour le  $h$ -raffinement contrairement au  $p$ -raffinement.

Les conclusions sont identiques lorsque l'on considère un cas 3D (Figure 3.3). Le surcoût dû au grandes valeurs de  $p$  est encore plus important particulièrement au niveau du temps de calcul. Un phénomène qui peut paraître surprenant est que le temps de calcul du  $p$ -raffinement est équivalent avec adaptation ou avec un raffinement uniforme. Deux phénomènes expliquent cette observation. Le maillage initial comporte peu de mailles, du coup de nombreuses cellules sont raffinées ce qui peut conduire à un comportement proche d'un raffinement uniforme. Cependant, en terme de degrés

## 3.2 Intérêt de maillages spatiaux dépendant de l'énergie

de liberté, le raffinement adaptatif était tout de même meilleur, il existe donc une autre explication. Un aspect qui engendre un surcoût important pour les méthodes adaptatives sont les projections entre les cellules. En effet, à mesure que l'écart entre les ordres des cellules voisines augmente, le coût de projection de la trace augmente. C'est une limite supplémentaire du  $p$ -raffinement : ces performances sont fortement dépendantes du maillage et un maillage initial trop grossier induit des pertes de performances en conduisant à des ordres très élevés dans certaines cellules. Pour obtenir le maillage présenté Figure 1.4, on a créé une routine qui transforme le maillage conforme traditionnellement utilisé pour décrire les cœurs (voir Section 3.5) en un maillage non-conforme. Le maillage ainsi obtenu est le plus grossier possible afin de décrire encore la géométrie. Il est intéressant lorsqu'il est utilisé avec des méthodes de raffinement en espace, par contre, le raffinement en ordre uniquement peut poser des problèmes.



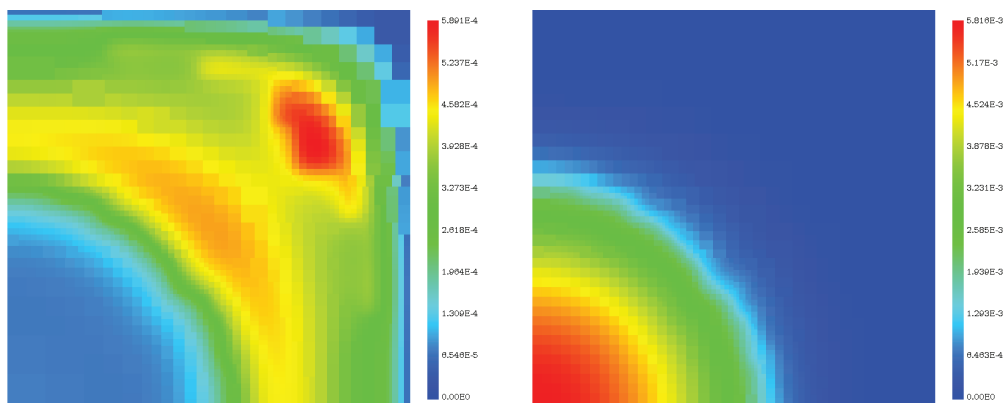
**Figure 3.3:** Erreur sur le flux en norme  $L^2$  en fonction de  $dof$  (gauche) et du temps (droite) pour les stratégies  $hp$  sur le cas ZONA2B en 3D

## 3.2 Intérêt de maillages spatiaux dépendant de l'énergie

Figure 3.4 représente le flux dans 2 zones énergétiques différentes pour le cas ZONA2B. On remarque que l'allure du flux est totalement différente et qu'il n'y a donc *a priori* aucune raison d'utiliser le même maillage spatial. On peut donc penser dans ce cas à raffiner une cellule  $K^*$  du groupe  $g$  si :

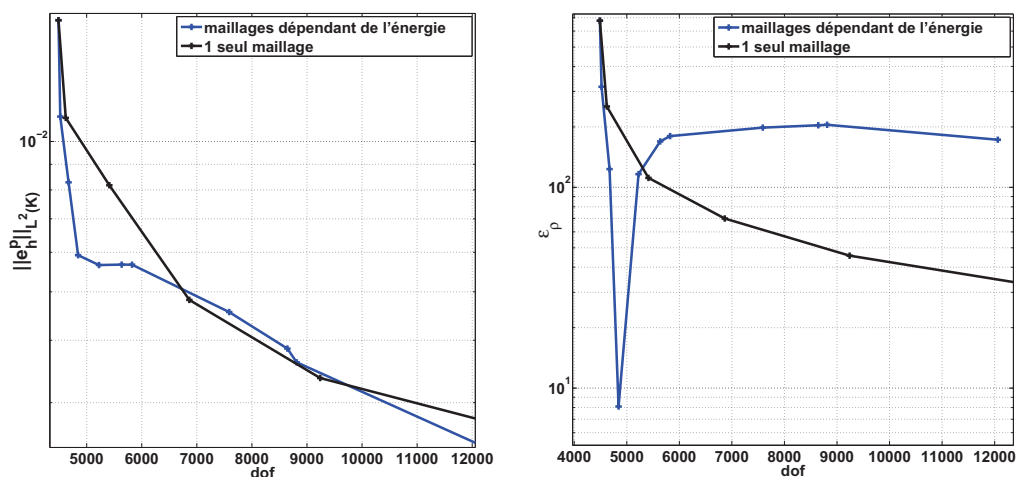
$$E^g(K^*) > \alpha \max_{g'} \max_K E^{g'}(K) \quad (3.12)$$

### 3. MODÈLE 2 : SYSTÈME HYPERBOLIQUE COUPLÉ



**Figure 3.4:** Flux dans une zone thermique (gauche) et rapide (droite) pour le cas ZONA2B

On présente Figure 3.5 la convergence sur le flux et la valeur propre  $k_{\text{eff}}$  si l'on raffine en utilisant Eq. 3.12. Pour le flux, on ne remarque pas d'amélioration de la convergence et c'est encore pire sur le  $k_{\text{eff}}$  où la convergence est dégradée. Cela est dû au fait que l'on ne prend plus en compte le couplage entre les groupes présenté Eq. 3.8. Si l'approche avec un seul maillage permettait de garantir la convergence grâce au maximum sur les groupes, ce n'est plus le cas maintenant. On ne peut donc pas utiliser directement nos estimateurs pour mener un raffinement dépendant de l'énergie.



**Figure 3.5:** Erreur sur le flux en norme  $L^2$  (gauche) et en réactivité (en pcm à droite) en fonction de  $dof$  sur le cas ZONA2B avec des maillages différents selon l'énergie

### 3.3 Estimateur de Radau sur le système hyperbolique

La démonstration de l'estimateur de Radau pour un système hyperbolique est en tout point similaire à celle faite Section 2.4. Il faut cependant être vigilant lors du

### 3.3 Estimateur de Radau sur le système hyperbolique

traitement de la variable angulaire. En effet, la forme du polynôme de Radau dépend de l'angle (en modifiant le signe entre  $L_{p+1}$  et  $L_p$ ). Ainsi la somme sur les directions des polynômes de Radau n'est plus un polynôme de Radau. On se retrouve donc obligé d'exprimer notre estimateur sur les deux coefficients de Legendre  $L_{p+1}$  et  $L_p$ . Si l'estimateur dans le groupe  $g$  et la direction  $n$  s'écrit :

$$E_n^g(\xi, \eta) = \beta_\xi^{n,g} R_{p+1}(\xi) + \beta_\eta^{n,g} R_{p+1}(\eta) \quad (3.13)$$

alors l'estimateur scalaire  $\mathbf{E}^g = (E^g)_g$  satisfait

$$E^g(\xi, \eta) = \beta_{\xi_1}^g L_{p+1}(\xi) - \beta_{\xi_2}^g L_p(\xi) + \beta_{\eta_1}^g L_{p+1}(\eta) - \beta_{\eta_2}^g L_p(\eta) \quad (3.14)$$

avec

$$\beta_{\xi_1}^g = \sum_n w_n \beta_\xi^{n,g} \quad (3.15)$$

$$\beta_{\xi_2}^g = \sum_n w_n \operatorname{sgn}(\Omega_{n\xi}) \beta_\xi^{n,g} \quad (3.16)$$

et des définitions analogues pour les  $\beta_\eta^g$ . En notation matricielle le Théorème 9 s'écrit :

**Théorème 5.** Soit  $\Phi$  solution de Eq. 3.1 et  $\Phi_h^p$  solution du problème discret. Alors l'erreur locale satisfait :

$$\mathbf{E}_h^p(\xi, \eta) = \sum_{k=p+1}^{\infty} h^k \mathbf{Q}_k(\xi, \eta) \quad (3.17)$$

avec

$$\mathbf{Q}_{p+1}(\xi, \eta) = \beta_{\xi_1} L_{p+1}(\xi) - \beta_{\xi_2} L_p(\xi) + \beta_{\eta_1} L_{p+1}(\eta) - \beta_{\eta_2} L_p(\eta) \quad (3.18)$$

où les  $\beta_{\xi_i}$  et  $\beta_{\eta_i}$  ( $i = 1, 2$ ) sont des coefficients constants donnés par Eq. 3.25.

De manière similaire au problème modèle 1, on va conserver uniquement le terme dominant et utiliser comme estimateur d'erreur  $\mathbf{E}_h^p$

$$\mathbf{E}_h^p = \beta_{\xi_1} L_{p+1}(\xi) - \beta_{\xi_2} L_p(\xi) + \beta_{\eta_1} L_{p+1}(\eta) - \beta_{\eta_2} L_p(\eta) \quad (3.19)$$

Pour obtenir les coefficients  $\beta$ , le processus est similaire à celui présenté Section 2.4. L'équation vérifiée par l'estimateur  $E_n^g$  pour le groupe  $g$  et dans la direction  $\Omega_n$  est maintenant :

$$\iint_{\hat{K}} (E_n^g - A_n^g \mathbf{C} \mathbf{E}^g) R_{p+1}^n(\xi) d\xi d\eta = \underbrace{\iint_{\hat{K}} (A_n^g Q_n^g - \phi_n^g + A_n^g \mathbf{C} \phi^g) R_{p+1}^n(\xi) d\xi d\eta}_{I_\xi^n} \quad (3.20)$$

$$\iint_{\hat{K}} (E_n^g - A_n^g \mathbf{C} \mathbf{E}^g) R_{p+1}^n(\eta) d\xi d\eta = \iint_{\hat{K}} (A_n^g Q_n^g - \phi_n^g + A_n^g \mathbf{C} \phi^g) R_{p+1}^n(\eta) d\xi d\eta \quad (3.21)$$

### 3. MODÈLE 2 : SYSTÈME HYPERBOLIQUE COUPLÉ

On injecte alors la forme de l'estimateur dans ces équations pour obtenir :

$$\beta_{\xi}^{n,g} + \frac{2|J|C}{4|\Omega_{n_x}|J_{00}^{-1} + 2|J|\|R_{p+1}\|^2 \Sigma_t^g} \left( \beta_{\xi_1} \|L_{p+1}\|^2 - \text{sgn}(\Omega_{n_x}) \beta_{\xi_2} \|L_p\|^2 \right) = I_{\xi}^n \quad (3.22)$$

et une équation similaire en  $\eta$ . On présente ici comment obtenir l'estimateur dans la direction  $\xi$ , le processus est le même pour  $\eta$ . Pour obtenir les coefficients  $\beta_{\xi_1}$  et  $\beta_{\xi_2}$ , on somme Eq. 3.22 pour tous les  $n$  et on effectue la somme pondérée par le signe de  $\Omega_{n_x}$ . On obtient alors un système d'équations couplées :

$$\begin{aligned} \beta_{\xi_1}^g &= -2|J|C^g \left( \|L_{p+1}\|^2 \sum_n \frac{w_n}{4|\Omega_{n_x}|J_{00}^{-1} + 2|J|\|R_{p+1}\|^2 \Sigma_t^g} \beta_{\xi_1}^g \right. \\ &\quad \left. + \|L_p\|^2 \sum_n \frac{w_n \text{sgn}(\Omega_{n_x})}{4|\Omega_{n_x}|J_{00}^{-1} + 2|J|\|R_{p+1}\|^2 \Sigma_t^g} \beta_{\xi_2}^g \right) \\ &\quad + \sum_n w_n I_{\xi}^n \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \beta_{\xi_2}^g &= -2|J|C^g \left( \|L_{p+1}\|^2 \sum_n \frac{w_n}{4|\Omega_{n_x}|J_{00}^{-1} + 2|J|\|R_{p+1}\|^2 \Sigma_t^g} \beta_{\xi_2}^g \right. \\ &\quad \left. + \|L_p\|^2 \sum_n \frac{w_n \text{sgn}(\Omega_{n_x})}{4|\Omega_{n_x}|J_{00}^{-1} + 2|J|\|R_{p+1}\|^2 \Sigma_t^g} \beta_{\xi_1}^g \right) \\ &\quad + \sum_n w_n \text{sgn}(\Omega_{n_x}) I_{\xi}^n \end{aligned} \quad (3.24)$$

Les coefficients vérifient  $\beta_{\xi_1}$  et  $\beta_{\xi_2}$  satisfont donc le système :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_G + 2|J|D^{-1}C\|L_{p+1}\|^2 & 2|J|D_s^{-1}C\|L_p\|^2 \\ 2|J|D_s^{-1}C\|L_{p+1}\|^2 & \mathbf{I}_G + 2|J|D^{-1}C\|L_p\|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{\xi_1} \\ \beta_{\xi_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{P}_s \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

avec

$$(\mathbf{D}^{-1})_{g,g'} = \sum_n \frac{w_n}{4|\Omega_{n_x}|J_{00}^{-1} + 2|J|\|R_{p+1}\|^2 \Sigma_t^g} \delta_{g,g'} \quad (3.26)$$

$$(\mathbf{D}_s^{-1})_{g,g'} = \sum_n \frac{w_n \text{sgn}(\Omega_{n_x})}{4|\Omega_{n_x}|J_{00}^{-1} + 2|J|\|R_{p+1}\|^2 \Sigma_t^g} \delta_{g,g'} \quad (3.27)$$

$$(\mathbf{P})_g = \sum_n w_n I_{\xi}^n \quad (3.28)$$

$$(\mathbf{P}_s)_g = \sum_n w_n \text{sgn}(\Omega_{n_x}) I_{\xi}^n \quad (3.29)$$

La quadrature utilisée étant symétrique,  $D_s^{-1} = 0$ . Ainsi, les coefficients  $\beta_{\xi_1}$  et  $\beta_{\xi_2}$  ne sont pas liés. Ils vérifient :

$$\begin{cases} \underbrace{\left( \mathbf{I}_G + 2|J|D^{-1}C\|L_{p+1}\|^2 \right)}_{\mathbf{c}_{\xi_1}} \beta_{\xi_1} = \mathbf{P} \\ \underbrace{\left( \mathbf{I}_G + 2|J|D^{-1}C\|L_p\|^2 \right)}_{\mathbf{c}_{\xi_2}} \beta_{\xi_2} = \mathbf{P}_s \end{cases} \quad (3.30)$$



### 3.3 Estimateur de Radau sur le système hyperbolique

---

**Remarque 7.** Si  $\mathbf{C} = 0$ , on retrouve le système vérifié pour le problème modèle 1. Il n'y a plus de couplage entre les différents groupes d'énergie.

Il faut cependant noter que la méthode n'est valable que lorsque les maillages sont les mêmes dans tous les groupes c'est-à-dire pour la première itération. Après, il serait nécessaire de projeter les éléments de la matrice de couplage sur les bases de Radau. Dans Eq. 3.30 nous n'aurions plus  $\mathbf{C} \|L_{p+1}\|^2$  mais des produits d'intégrales de Legendre comme par exemple  $\mathbf{C} \int_{-1}^1 \int_{-1}^0 L_{p+1}(x)L_{p+1}(2x+1)dx$ . Mais nous avons vu sur le modèle 1 (Chapitre 2) que l'estimateur de Radau est dérivé pour un maillage conforme. Il n'y a donc pas de sens à modifier la matrice de couplage vu que l'estimateur sans couplage n'est plus valide.

Dans un premier temps, on se place dans le cadre exact du théorème *i.e.* avec le même maillage dans chaque groupe et des sections indépendantes de l'espace. La géométrie est identique au benchmark de protection du modèle 1 (Figure 1.3) avec une source constante  $Q = 10$  dans M1 mais on travaille maintenant avec deux groupes énergétiques. Les matériaux M1 et M2 sont identiques avec  $\Sigma_t = (11.5, 1.5)$  et  $\Sigma_s = (1, 0; 10, 1)$  impliquant une forte dépendance du groupe 2 au groupe 1. Le maillage spatial est uniforme avec un pas  $h = \frac{1}{10}$ .

Un premier moyen de vérification de l'importance du couplage consiste à réécrire Eq. 3.7 sous la forme suivante :

$$\mathbf{e} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{C}\mathbf{e} + \mathbf{E} \quad (3.31)$$

$$\mathbf{e} - \mathbf{E} = \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{C}(\mathbf{e} - \mathbf{E}) + \mathbf{C}\mathbf{E}) \quad (3.32)$$

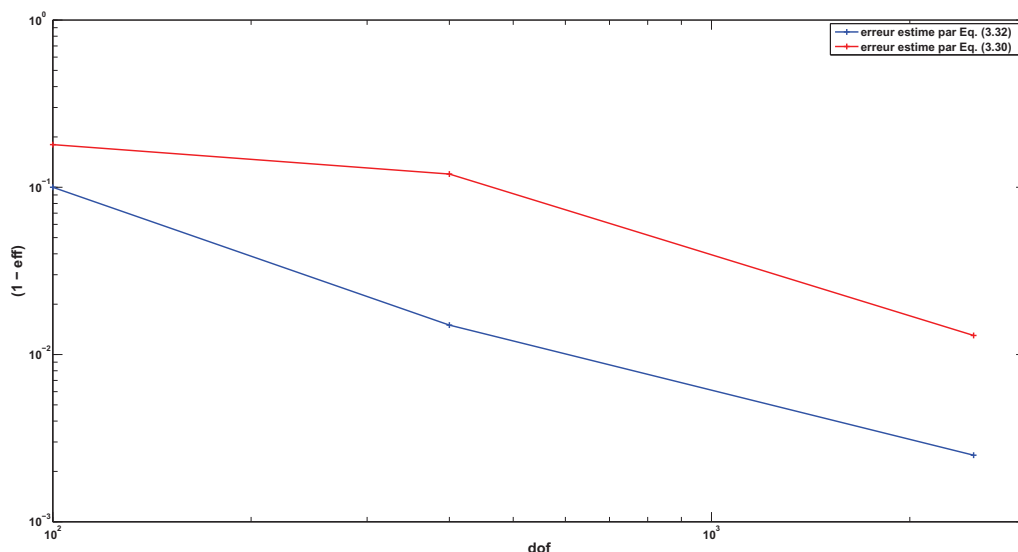
Ainsi,  $(\mathbf{e} - \mathbf{E})$  est solution du problème initial avec comme terme source l'estimateur d'erreur multiplié par la matrice de couplage  $\mathbf{C}\mathbf{E}$ . On commence donc par résoudre notre problème de protection

$$\phi = \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{C}\phi + \mathbf{Q}) \quad (3.33)$$

et à calculer l'estimateur d'erreur  $\mathbf{E}$  ainsi que l'erreur  $\mathbf{e}$ . On résout ensuite le problème donné par Eq. 3.32 avec l'estimateur d'erreur  $\mathbf{E}$  du calcul initial servant de base au calcul du terme source. Figure 3.6 gauche (resp. droite) représente l'indice d'efficacité entre l'erreur  $\mathbf{e}$  du problème de protection (Eq. 3.33) et l'erreur calculée à partir de la résolution d'Eq. 3.32 (resp.  $\mathbf{E}^R$  obtenu par Eq. 3.30),  $\mathbf{e}^R$  obtenue en additionnant  $\mathbf{E}$  à la solution d'Eq. 3.32 c'est-à-dire :

$$eff = \frac{\|\mathbf{e}^R\|}{\|\mathbf{e}\|} \quad \left( \text{resp.} = \frac{\|\mathbf{E}^R\|}{\|\mathbf{e}\|} \right) \quad (3.34)$$

### 3. MODÈLE 2 : SYSTÈME HYPERBOLIQUE COUPLÉ



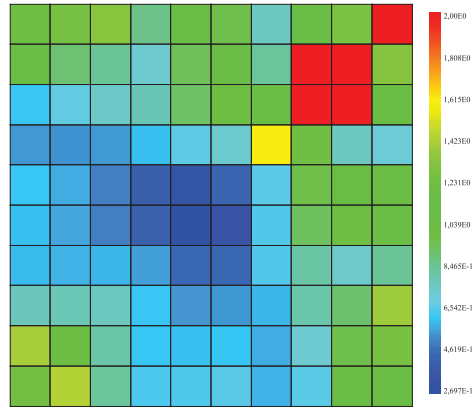
**Figure 3.6:** Indice d'efficacité avec l'erreur estimé par Eq. 3.32 et par Eq. 3.30

On observe que l'indice d'efficacité tend bien vers 1 et donc que  $e^R$  tend vers  $e$  nous assurant ainsi de la validité d'Eq. 3.32 pour estimer l'erreur couplée.

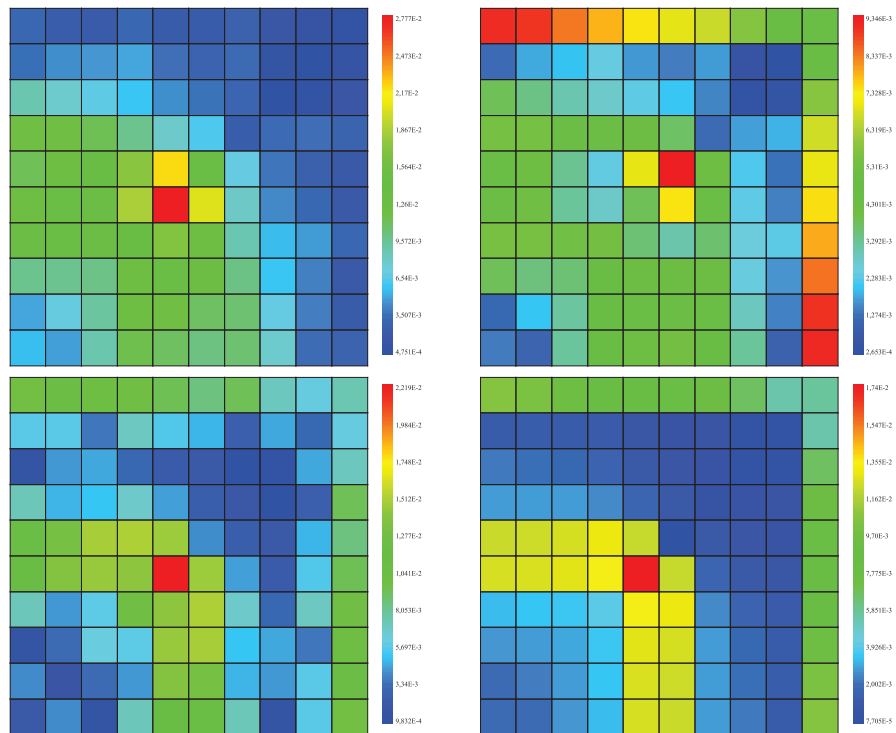
Lorsque l'erreur est estimée par Eq. 3.30 l'efficacité tend aussi vers 1 mais de manière plus lente. Afin de voir les zones où l'erreur est le moins bien estimée, on représente Figure 3.7 l'efficacité spatiale lorsque l'erreur est estimée par Eq. 3.30 (la valeur 2 a été imposée lorsque l'efficacité était supérieure à 2 pour des raisons de visibilité). On avait vu Section 2.4.5 que malgré les problèmes liés à la régularité de la solution, l'estimateur de Radau permettait de mener efficacement le raffinement dans un cas de protection à un groupe. Ici, on remarque que l'indice d'efficacité est parfois assez éloigné de 1, en particulier à l'interface entre la partie du domaine où l'on a imposé une source et le reste. Afin de mieux juger de l'intérêt d'Eq. 3.30, Figure 3.8 est la représentation spatiale de l'erreur  $L^2$  et des estimateurs sans couplage  $E$  et estimé par Eq. 3.30 dans le groupe 2. On peut ainsi voir que la matrice de couplage permet à l'estimateur de se rapprocher de l'erreur. Ainsi, même si l'on a vu Figure 3.6 que l'efficacité pouvait être assez éloigné de 1, l'utilisation d'Eq. 3.30 pour estimer l'erreur permet de se rapprocher de l'erreur.

Ainsi, Eq. 3.32 est une bonne approximation de l'erreur. Mais bien sûr cela ne peut pas nous fournir une estimation viable de l'erreur. En effet, obtenir un estimateur d'erreur par Eq. 3.32 implique la résolution d'un problème de transport équivalent au problème initial ce qui introduit un surcoût important. Eq. 3.30 permet de se rappro-

### 3.3 Estimateur de Radau sur le système hyperbolique

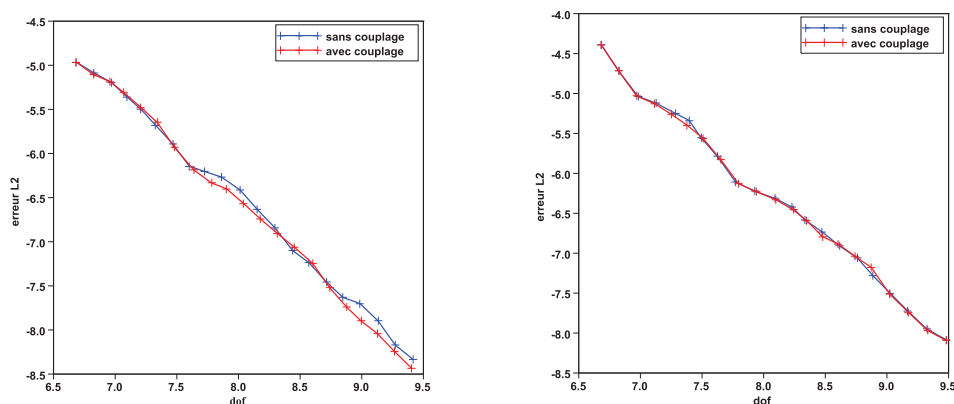


**Figure 3.7:** Représentation spatiale de l'efficacité avec estimation d'erreur faite par Eq. 3.30 dans le groupe 2



**Figure 3.8:** estimateur sans couplage (haut) dans le groupe 1 (gauche) et 2 (droite), erreur  $L^2$  (en bas à gauche), et erreur estimée par Eq. 3.30 (en bas à droite) pour le groupe 2 dans le cas de protection

### 3. MODÈLE 2 : SYSTÈME HYPERBOLIQUE COUPLÉ



**Figure 3.9:** Convergence sur le cas de protection à 2 groupes avec un seul matériau (gauche) et deux matériaux différents (droite) avec et sans couplage

cher de l'erreur par rapport à une méthode où l'on ne prend pas en compte le couplage mais le résultat est encore relativement éloigné de la vraie erreur.

#### 3.4 Adaptation de maillage dépendante de l'énergie

Après avoir vu comment estimer l'erreur dans le cas de la résolution d'un système (problème modèle 2), on cherche un moyen de mener efficacement le raffinement. Pour cela, on utilise une fonction poids qui va traduire l'influence des groupes  $g'$  sur le groupe  $g$  :

$$(\mathbf{W}_{\xi_1})_g = \sum_{g'} \left| \mathcal{C}_{\xi_1}^{g',g} \right| \quad (3.35)$$

où les matrices  $\mathcal{C}_{\xi}$  sont définies Eq. 3.30.

Dans notre exemple, cette fonction poids va permettre de donner de l'importance au groupe 2 par rapport au groupe 1. Ainsi l'estimateur qui était initialement plus faible dans le groupe 2 (Figure 3.8 en haut) va devenir plus important, ce qui devrait nous permettre de raffiner plus efficacement. Le nouvel estimateur d'erreur est donné par :

$$E_h^p = \mathbf{W}_{\xi_1} \beta_{\xi_1} L_{p+1}(\xi) - \mathbf{W}_{\xi_2} \beta_{\xi_2} L_p(\xi) + \mathbf{W}_{\eta_1} \beta_{\eta_1} L_{p+1}(\eta) - \mathbf{W}_{\eta_2} \beta_{\eta_2} L_p(\eta) \quad (3.36)$$

On trace Figure 3.9 (gauche) la norme  $L^2$  de l'erreur sur le problème de protection à deux groupes lorsque le raffinement est mené avec l'estimateur sans couplage

### 3.4 Adaptation de maillage dépendante de l'énergie

---

ou avec l'estimateur modifié par la fonction poids (Eq. 3.36). Si les deux courbes sont relativement proches initialement, on remarque que la prise en compte du couplage à travers une fonction poids nous permet d'améliorer légèrement la convergence. Il reste maintenant à adapter ce résultat au cas réaliste ZONA2B. Cela demande de prendre en compte le fait que la matrice de couplage dépende de l'espace via les sections efficaces. On va alors rencontrer le même problème que pour le modèle 1 lorsque l'estimateur devenait moins efficace dès que le maillage devenait non conforme ou que l'ordre de la base de polynôme n'était plus uniforme. Après la cellule impactée par les modifications, il s'en suivait une zone le long des lignes caractéristiques où l'indice d'efficacité de l'estimateur s'éloignait de 1. En effet, la démonstration de l'estimateur de Radau étant faite par induction sur les cellules, toute modification en amont perturbe toutes les cellules situées après. Ainsi, dès que les sections sont spatialement dépendantes, il faudrait dériver, si possible, un nouvel estimateur qui ferait certainement intervenir toutes les matrices de couplage en amont. Pour voir ce problème, on a tout d'abord utilisé le même cas test de protection que précédemment mais en mettant la matrice de couplage à zéro dans le matériau M2. Figure 3.9 (droite) représente la norme  $L^2$  de l'erreur dans ce cas. On remarque alors que la prise en compte du couplage ne permet pas d'améliorer la convergence. Ainsi, l'approche proposée est insuffisante pour les cas hétérogènes. On propose d'utiliser une fonction poids indépendante de l'espace.

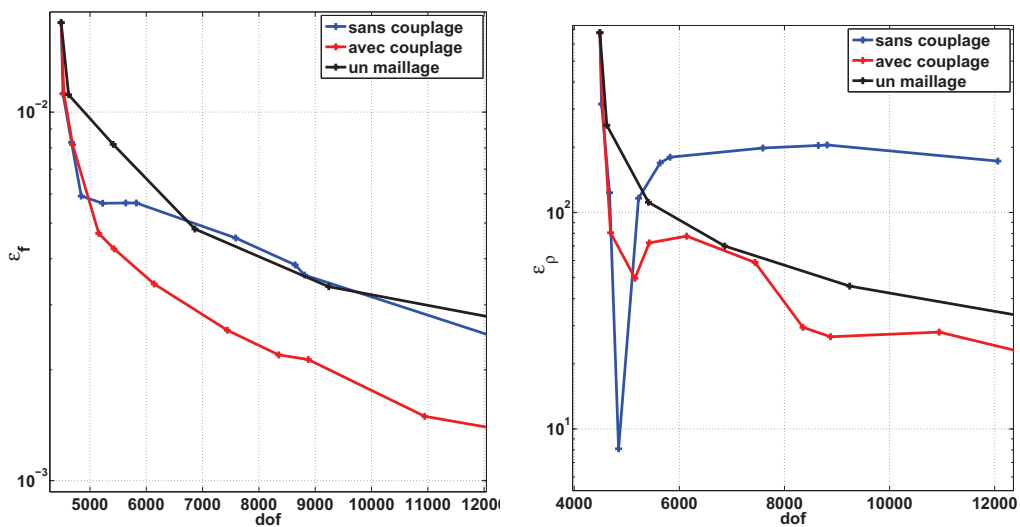
Vu que l'on s'est affranchi des directions pour obtenir notre estimateur, la notion de cellules amonts et avals n'a plus de sens. On propose donc une fonction poids qui représente le poids global d'un groupe sur les autres sans tenir compte des différences spatiales. Pour cela, on homogénéise la matrice de couplage en faisant l'hypothèse d'un milieu infini homogène ce qui nous amène à la matrice de couplage suivante :

$$(\mathbf{c})_{g,g'} = \delta_{g,g'} - \frac{\mathbf{C}_{g,g'}}{\Sigma_t^g} \quad (3.37)$$

et la fonction poids est obtenue comme précédemment en sommant sur les lignes.

Les nouvelles courbes de convergence en utilisant cette fonction poids sont représentées Figure 3.10 en terme d'erreur  $L^2$  sur la solution et d'erreur sur la valeur propre du système. Dans les deux cas, on observe une nette amélioration de la convergence et on voit l'intérêt d'utiliser des maillages différents par groupes d'énergie. En effet, la stratégie initiale (sans couplage) amenait à une convergence équivalente au cas à un seul maillage voire pire pour le  $k_{eff}$ . Même si la méthode proposée pour prendre en compte le couplage n'est certainement pas optimale, elle permet au moins de montrer

### 3. MODÈLE 2 : SYSTÈME HYPERBOLIQUE COUPLÉ



**Figure 3.10:** Erreur  $L^2$  (gauche) et sur le  $k_{eff}$  en pcm (droite) avec ou sans prise en compte du couplage sur le cas ZONA2B

l'intérêt de l'approche multi-maillages pour la résolution de l'équation de transport des neutrons avec des gains importants notamment sur la convergence du flux.

### **3.5 Article 2 : Adaptation de maillage sur un cas réaliste**

Cette partie est un proceeding de la conférence M&C qui s'est déroulé à Rio de Janeiro du 8 au 12 mai 2011 : D. Fournier, P. Archier, R. Le Tellier, C. Suteau, "Improvement of Neutronic Calculations on a MASURCA Core using Adaptive Mesh Refinement Capabilities". Il présente une analyse des différentes stratégies de raffinement sur un cas réaliste issu d'un programme réalisé sur un réacteur expérimental du CEA Cadarache. L'estimateur de Radau défini Section 2.2.1 est utilisé pour conduire le raffinement sur des cas 2D et 3D. Les enjeux liés à un raffinement spatial différent par groupe d'énergie (Section 3.2) sont également abordés.

### 3. MODÈLE 2 : SYSTÈME HYPERBOLIQUE COUPLÉ

---

#### 3.5.1 Introduction

A better knowledge of neutronic parameters for core calculations is required for the design of new reactors. Improving the accuracy of the solution of the neutron transport equation in a deterministic way increases the calculation time and the memory footprint. Despite the improvements of computational resources, the accuracy is not always sufficient. In this paper, we propose to deal with this issue using Adaptive Mesh Refinement (AMR) methods. The main idea is to create an optimal mesh *i.e* to minimize the number of unknowns for a given accuracy.

To test such an approach, all numerical tests are done on the ZONA2B experimental core configuration (30) of the MASURCA mock-up based at CEA Cadarache. Comparisons are done on some important neutronic parameters such as the flux, current or multiplication factor in terms of the improvement in the number of unknowns but also the calculation time. An exhaustive analysis is performed on the 2D benchmark and its conclusions are confirmed on the 3D case.

Developments are made in the SNATCH solver (36) of the ERANOS code system (79). Within this framework, the neutron transport equation is discretized successively according to energy, angle and space. The treatment of the energy variable consisting on a multigroup approach is followed by a discretization of the angular variable using the discrete ordinates method (53). It results in a set of coupled first-order hyperbolic transport equations which can be written as

$$\vec{\Omega}_n \cdot \vec{\nabla} \widetilde{\phi}_n^g(\vec{r}) + \Sigma_t^g(\vec{r}) \widetilde{\phi}_n^g(\vec{r}) = \sum_{g'} \sum_{n'} S_{n' \rightarrow n}^{g' \rightarrow g} \widetilde{\phi}_{n'}^{g'}(\vec{r}) \quad (3.38)$$

$$\Leftrightarrow H_n^g \widetilde{\phi}_n^g(\vec{r}) = \sum_{g'} \sum_{n'} S_{n' \rightarrow n}^{g' \rightarrow g} \widetilde{\phi}_{n'}^{g'}(\vec{r}) \quad (3.39)$$

where  $\vec{\Omega}_n$  is the direction related to the  $S_N$  method,  $\widetilde{\phi}_n^g(\vec{r})$  is the flux at position  $\vec{r}$  in the direction  $\vec{\Omega}_n$  and the energy group  $g$ ,  $\Sigma_t^g$  is the total cross-section in group  $g$  and  $S_{n' \rightarrow n}^{g' \rightarrow g}(\vec{r})$  contains the sources resulting from scattering and fission.

The spatial scheme has been chosen in order to solve a local problem and to make *hp*-refinement possible. A Discontinuous Galerkin Finite Element Method (DGFEM) has been implemented. The domain is decomposed into a Cartesian grid which can be non conforming in order to perform *h*-refinement. In each cell, the solution of Eq. 3.38



is approximated on a hierarchical polynomial basis (82) allowing to perform easily  $p$ -refinement.

This method has also been implemented in the XUTHOS code (71, 94) for unstructured triangular meshes. It highlights the interest of AMR to improve the calculation time as well as the rate of convergence. To lead the refinement process, an error estimator is necessary to select the regions to refine. The quality of this estimator determines the performance of the AMR strategy. In this paper, a method developed in (3) and applied in our framework in (35) is used. The estimator  $E_n^g$  considers the right hand side of Eq. 3.39 as independent of the flux in other groups. It measures the distance between an exact flux  $\widehat{\phi}_n^g$  and an approximate one  $\phi_n^g$

$$\|E_n^g\|_{L^2} = \left\| \widehat{\phi}_n^g - \phi_n^g \right\|_{L^2} \quad (3.40)$$

where  $\widehat{\phi}_n^g$  and  $\phi_n^g$  satisfy respectively

$$\widetilde{H}_n^g \widehat{\phi}_n^g(\vec{r}) = \sum_{g'} \sum_{n'} S_{n' \rightarrow n}^{g' \rightarrow g} \phi_{n'}^{g'}(\vec{r}) \quad (3.41)$$

$$H_n^g \phi_n^g(\vec{r}) = \sum_{g'} \sum_{n'} S_{n' \rightarrow n}^{g' \rightarrow g} \phi_{n'}^{g'}(\vec{r}) \quad (3.42)$$

where  $H_n^g$  is an approximate operator of  $\widetilde{H}_n^g$  (defined in Eq. 3.39).

A cell  $\kappa$  is refined if

$$\max_{g'} \sum_n w_n E_n^{g'}(\kappa) > \alpha \max_{g'} \max_{\kappa_i} \sum_n w_n E_n^{g'}(\kappa_i) \quad (3.43)$$

where  $\alpha \in [0, 1]$  is fixed to 0.5 throughout this study and  $w_n$  are the weights associated to the angular discretization.

Moreover, in the present paper, we propose and test an AMR strategy depending on the energy. Indeed, the spatial behavior of the flux on the different energy ranges is different so that there is no reason to represent the solution on the same mesh in all the energy groups. In this way, a cell  $\kappa$  in group  $g$  is refined if

$$\sum_n w_n E_n^g(\kappa) > \alpha \max_{g'} \max_{\kappa_i} \sum_n w_n E_n^{g'}(\kappa_i) \quad (3.44)$$

This paper is organized as follows. The core configuration used for this study is presented in Section 3.5.2. Section 3.5.3 details the methodology used to compare the

### 3. MODÈLE 2 : SYSTÈME HYPERBOLIQUE COUPLÉ

---

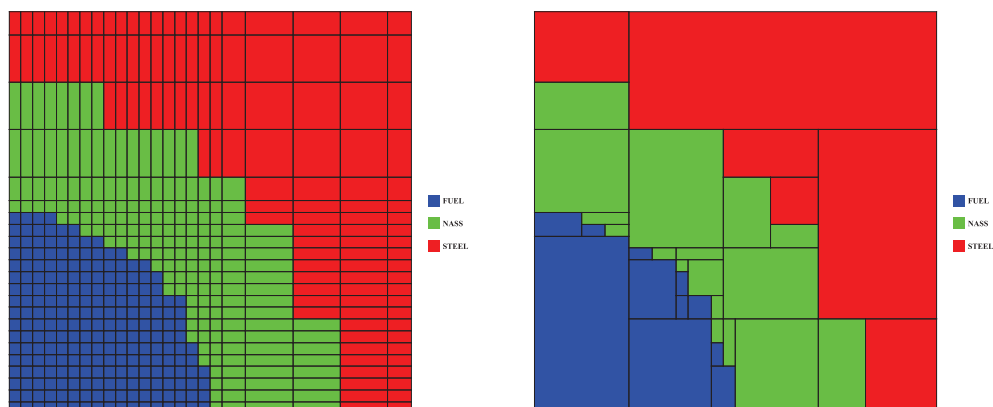


Figure 3.11: 2D conforming (left) and non conforming (right) mesh

different strategies of refinement. Results are then compared on various quantities of interest in Section 3.5.4 for the 2D case and Section 3.5.5 for the 3D one.

#### 3.5.2 The CIRANO ZONA2B Core : Conforming and Non Conforming Description

The CIRANO experimental program was performed from 1994 to 1997 in order to investigate the performances of steel reflected plutonium burning fast reactors. Several core configurations were studied at the time (effect of fertile blankets, sodium voiding, ...). One of them, the ZONA2B configuration presented in Figure 3.11, is of particular interest for this study, as the fertile blankets have been replaced by steel reflector. In this case, the flux variations at the interfaces, especially between fuel and reflector, are more important than in fast reactor configurations with fertile blankets. Due to this large gradient term, obtaining a fine solution of Eq. 3.38 is more difficult than in benchmarks with blankets.

The CIRANO ZONA2B derived benchmarks (the 2D and 3D versions) contain three homogenized media denoted *FUEL*, *NASS* and *STEEL* in Figure 3.11. They were obtained from ECCO cell calculations, a module of the ERANOS code system (79). The *FUEL* medium is a mix of sodium and U/PuO<sub>2</sub> fuel. The *NASS* is composed of 3/4 of stainless steel and 1/4 of sodium. The *STEEL* is a shield made of steel.

Figure 3.11 (left) is the usual representation of the core using a conforming description of the geometry. Neutronic calculations are generally performed on this mesh containing 529 cells. A routine has been written to transform Figure 3.11 (left) into a non conforming description presented in Figure 3.11 (right). This algorithm starts from the conforming description and gathers the cells containing the same material in

a recursive way. Thus, it is possible to set the level of non-conformity (6 in Figure 3.11 (right)). Thanks to these non conforming capabilities, it requires no more than 34 cells to represent the same core. This latter description is the initial mesh used for the refinement procedures.

### 3.5.3 Error Calculation

The reference values *i.e* the converged quantities calculated on a fine mesh with high polynomial order are denoted with a tilde notation. The different strategies are compared in terms of the convergence on the different neutronic parameters.

The error in reactivity  $\epsilon_\rho$  is given by

$$\epsilon_\rho = |\tilde{\rho} - \rho| = \frac{|\widetilde{k_{\text{eff}}} - k_{\text{eff}}|}{\widetilde{k_{\text{eff}}} \cdot k_{\text{eff}}} \quad (3.45)$$

The error on the flux is evaluated in a  $L^2$  norm in space by

$$\epsilon_f = \max_g \sum_n w_n \left( \int_{\mathcal{D}} \left( \widetilde{\phi}_n^g(\vec{r}) - \phi_n^g(\vec{r}) \right)^2 d\vec{r} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.46)$$

The error on the current  $\epsilon_c$  is calculated at the interface  $\Gamma$  between two media (*FUEL* and *NASS* in this study) by

$$\epsilon_c = \max_g \sum_n w_n \int_{\Gamma} \int_{4\pi} \left( \vec{\Omega}_n \cdot \vec{n} \right) \left| \widetilde{\phi}_n^g(\vec{r}) - \phi_n^g(\vec{r}) \right| d\vec{\Omega}_n ds \quad (3.47)$$

In the following, we use superscript to denote the strategy. For instance,  $\epsilon_f^{h,2}$  is the error on the flux when  $h$ -refinement with a polynomial basis order  $p = 2$  is performed.

To compare the different strategies, we monitor the convergence of these neutronic parameters as a function of the number of degrees of freedom, denoted  $dof$  in the following, and the calculation time.  $dof$  represents the number of unknowns induced by the three discretizations

$$dof = nbGroups \times nbDirections \times nbCells \times (p + 1)^d \quad (3.48)$$

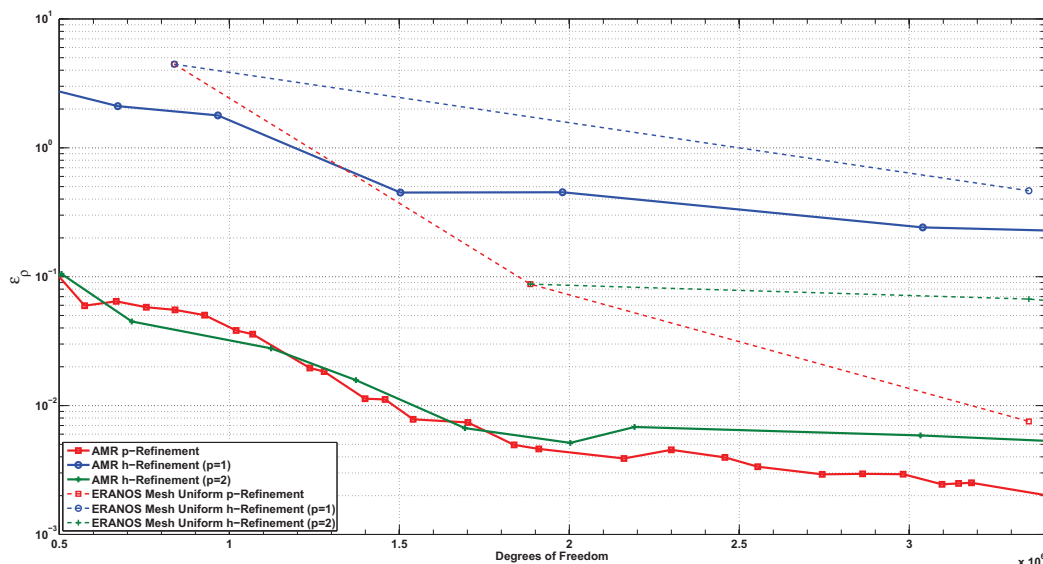
where  $nbGroups$ ,  $nbDirections$ ,  $nbCells$  represent respectively the number of energy groups, angular directions and spatial cells.  $(p + 1)^d$  is the cell polynomial basis size at order  $p$  in dimension  $d$  ( $d = 2$  or  $3$ ).

### 3. MODÈLE 2 : SYSTÈME HYBERBOLIQUE COUPLÉ

Three different parameters have been chosen because it allows to test different aspects of the refinement process. The flux is the most natural one because it is the quantity controlled by the error estimator with Eq. 3.40. Analyzing the convergence of the reactivity is also important because this integral quantity is often the main interest of neutronic calculations. Finally, the current at the core-reflector interface is more sensitive to the local flux gradient and gives a finer analysis of the strategies.

#### 3.5.4 Comparison of the Different Strategies on the 2D Case

##### 3.5.4.1 Comparison of $h$ - and $p$ - Refinement Methods



**Figure 3.12:** Reactivity error as a function of  $dof$  for adaptive refinement strategies and comparison with ERANOS mesh

Figure 3.12 shows the error on the reactivity as a function of the  $dof$  with different strategies. The dotted lines represent uniform refinement on conforming meshes. Starting from the discretization presented in Figure 3.11 (left), all cells are  $h$ - or  $p$ -refined. The other strategy starts from a non conforming mesh as described in Figure 3.11 (right) and the refinement is done locally using an error estimator on each cell.

Let us firstly note the interest of the initial mesh transformation (Figure 3.11 between left and right) and of the AMR process. Obtaining an accuracy of 1 pcm with  $h$ -refinement and  $p = 1$  requires twice more degrees of freedom with the conforming approach than the non conforming one. It is even more than three times for  $\epsilon_\rho = 0.1$  pcm

with a  $p$ -refinement strategy.

The convergence is slower using  $h$ -refinement with  $p = 1$  than the two other strategies. At a given number of  $dof$ , the accuracy is at least one order of magnitude worst than the same strategy with  $p = 2$ .  $\epsilon_\rho^{h,2}$  and  $\epsilon_\rho^p$  have a similar behavior.

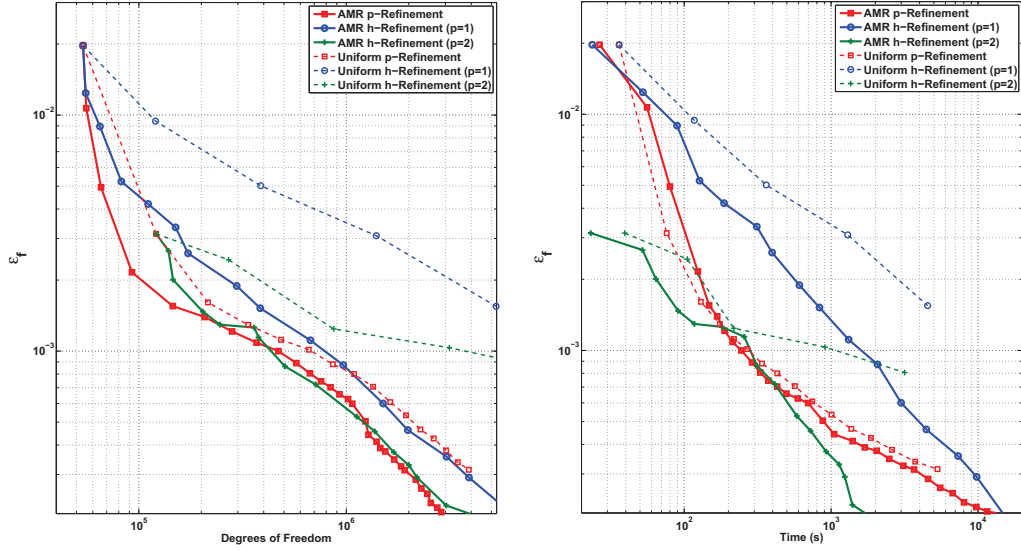
This first analysis on the reactivity shows the importance of transforming the initial mesh of Figure 3.11 (left) into a non conforming one (Figure 3.11 (right)). In the following, adaptive and uniform strategies will be compared using the non conforming mesh described in Figure 3.11 (right) as initial mesh.

Analyzing only the convergence of  $\epsilon_\rho$  is not sufficient to compare the different strategies. The analysis of the flux error convergence is presented in Figure 3.13. Concerning  $h$ -refinement, the interest of the AMR process is indisputable. Actually, it is clear that some cells have to be more refined than others, particularly at interfaces. Whereas finely refining the interface is easy with  $h$ -refinement,  $p$ -refinement strategy implies the increase of the polynomial basis order in large cells. Most of the cells describing the domain in the non conforming way have at least one edge located at a material interface. Thus, adaptive and uniform  $p$ -refinements are nearly equivalent. It shows the limitations of  $p$ -refinement starting from very coarse meshes.

The number of degrees of freedom represents the memory storage but is also linked to the calculation time. As the time is not directly proportional to  $dof$ , Figure 3.13 (right) represents  $\epsilon_f$  as a function of the time. The additional cost related to AMR induced by the error estimation and the update of the different quantities between two refinements represents less than 0.5% of the total time and can be neglected. Consequently, AMR and uniform strategies can be compared in the same way.

Whereas, for  $h$ -refinement, the calculation time varies proportionally with  $dof$ , the dependency is more complicated for the  $p$ -refinement case. Actually, a linear system has to be solved on each cell leading to inverse square matrices of size  $(p + 1)^2$ . As the complexity to inverse a matrix  $n \times n$  is  $\mathcal{O}(n^3)$ , the cost is  $\mathcal{O}((p + 1)^6)$ . With  $h$ -refinement, even if we have more and more cells, the size of the matrix is constant. On the opposite, when  $p$ -refinement is performed, the cost increases as  $p^6$ . It explains the slowing down of the convergence when  $p$  increases too much.

### 3. MODÈLE 2 : SYSTÈME HYPERBOLIQUE COUPLÉ



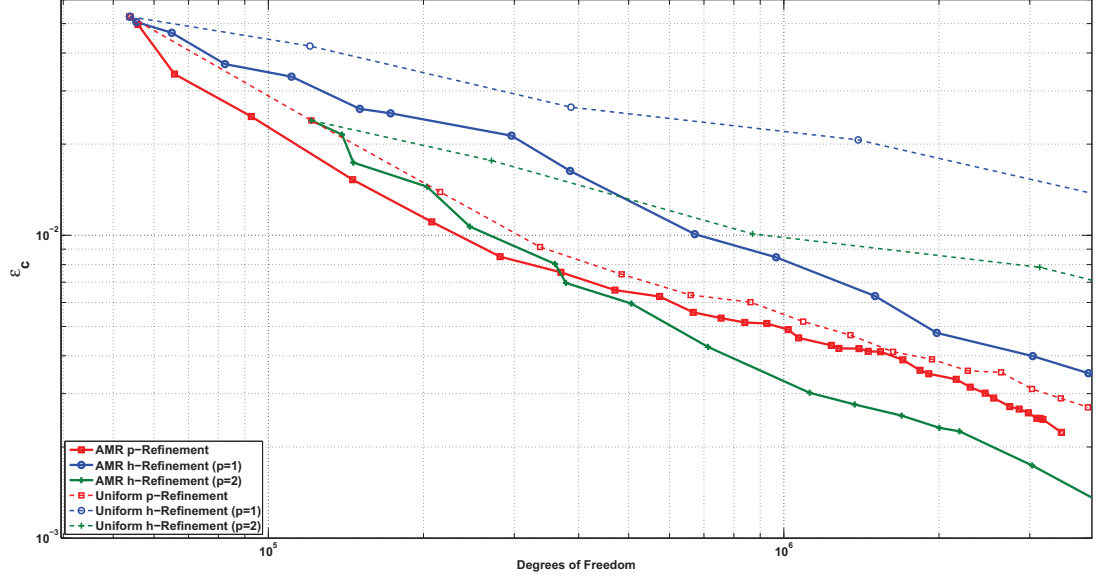
**Figure 3.13:** Flux error as a function of *dof* (left) and time (right) for adaptive and uniform refinement strategies

To go further, the convergence of the current at the interface between fuel and reflector is analyzed in Figure 3.14. In this region, the flux is less regular and an important gradient is observed between the two materials. The analysis is quite similar to the one performed on the reactivity but the difference between  $\epsilon_c^{h,2}$  and  $\epsilon_c^p$  is more pronounced. When the flux is non regular, *h*-refinement becomes more interesting than *p*-refinement. Actually, the approximation of a function with non-continuous first derivatives is better with a finer mesh than with a higher polynomial order. It should nevertheless be noted that this analysis is highly-dependent on the initial mesh. Starting from a finer mesh could improve the convergence of the *p*-refinement strategy.

The study of this 2D benchmark points out the advantage of the AMR method and particularly of the *h*-refinement with  $p = 2$  which exhibits a fast convergence for various physical quantities. The *p*-refinement process seems interesting too, at least, as long as  $p$  is not too large.

#### 3.5.4.2 The Energy-dependent AMR

The flux behavior is drastically different depending on the energy. Whereas the fast neutron flux is high in the *FUEL* and *NASS* regions, the thermal one is low. Thus, there is no reason to use the same spatial discretization to represent the solution of the transport equation. As the error estimator used to lead the refinement process is energy-group-dependent, it allows to adapt the spatial meshes differently depending on



**Figure 3.14:** Current error as a function of  $dof$  for adaptive and uniform refinement strategies

the energy groups.

The basic idea is to have one spatial mesh per energy group but this strategy induces an additional cost in memory footprint and calculation time. Actually, when the meshes between groups are different, a projection of the source is necessary and the equation solved is no longer Eq. 3.42 but

$$H_n^g \phi_n^g(\vec{r}) = \sum_{g'} \Pi_{g' \rightarrow g} \sum_{n'} S_{n' \rightarrow n}^{g' \rightarrow g} \phi_{n'}^{g'}(\vec{r}) \quad (3.49)$$

where  $\Pi_{g' \rightarrow g}$  represents the  $L^2$  projector from group  $g'$  to  $g$ .

An intermediate option consists in joining some groups that will share the same spatial mesh. In the following, the convergence has been studied using 1, 2, 6, 15 and 33 different spatial meshes. The gathering of the energy groups into macro-groups is presented in Table 3.1.

The meshes obtained at the end of the refinement process with 6 different energy meshes are presented in Figure 3.15. As expected, the *FUEL* regions and the *FUEL-NASS* interface are finely discretized in macro-groups 1 and 2. For groups 3 to 5, *FUEL* is less and less refined and, on the contrary, the mesh becomes finer at the *NASS-STEEL* interface. In the last group, few neutrons are present and the final mesh is the coarsest.

### 3. MODÈLE 2 : SYSTÈME HYBERBOLIQUE COUPLÉ

2 meshes	{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16}, {17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33}
6 meshes	{1, 2, 3, 4}, {5, 6, 7}, {8, 9, 10, 11, 12}, {13, 14, 15}, {16, 17, 18, 19, 20, 21}, {22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33}
15 meshes	{1, 2}, {3, 4}, {5}, {6, 7}, {8, 9}, {10, 11}, {12, 13}, {14, 15}, {16, 17, 18}, {19, 20, 21}, {22, 23, 24, 25, 26, 27}, {28, 29, 30}, {31}, {32}, {33}

Table 3.1: Energy groups gathering

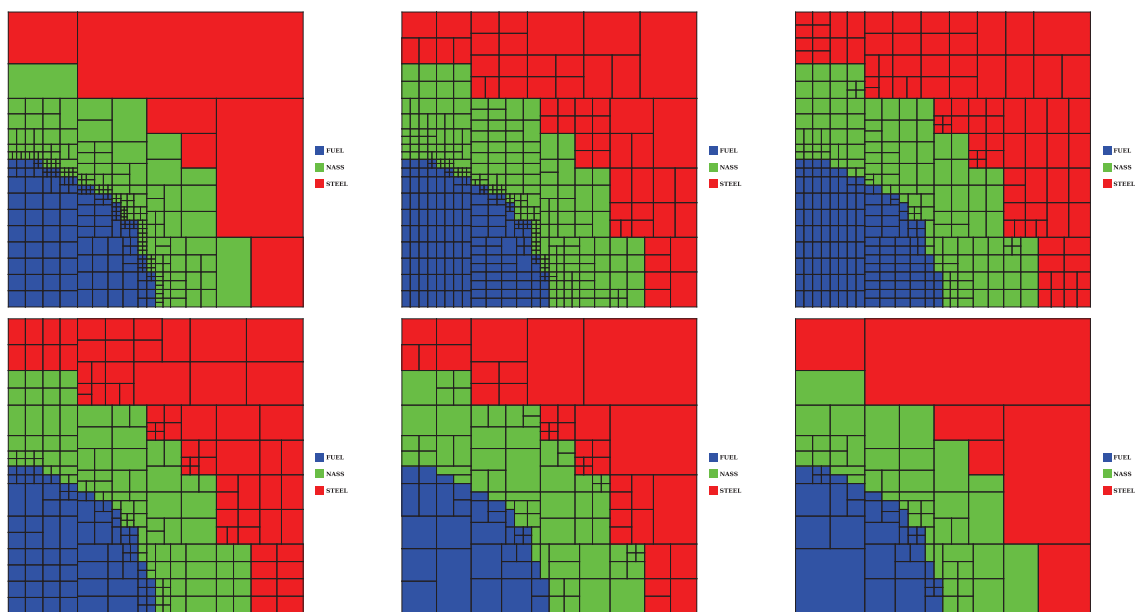


Figure 3.15: Final meshes obtained for macro-groups 1 to 6

The convergence is now compared depending on the number of different meshes used. Figure 3.16 represents  $\epsilon_\rho$  as a function of the *dof*.

Results are far from the expected ones. At the beginning, as expected, the more energy meshes, the faster the convergence occurred. But after some refinement steps, the convergence deteriorates and becomes worse than in the energy-independent case. To explain this phenomenon, we have to detail the error estimator behavior. Using the notations of Eqs. 3.39, 3.41 and 3.42, the error  $\epsilon_n^g$  can be written in terms of the estimator  $E_n^g$  as



$$\epsilon_n^g = \widetilde{\phi}_n^g - \phi_n^g \quad (3.50)$$

$$= \widetilde{\phi}_n^g - \widehat{\phi}_n^g + \widehat{\phi}_n^g - \phi_n^g \quad (3.51)$$

$$= \widetilde{H}_n^g{}^{-1} \left( \sum_{g'} \sum_{n'} S_{n' \rightarrow n}^{g' \rightarrow g} \epsilon_{n'}^{g'} \right) + E_n^g \quad (3.52)$$

The refinement is lead using the estimator  $E_n^g$  and does not take into account the coupling terms between groups. If the meshes are the same in all the energy groups, by using a criterion on the maximum error over all the groups (Eq. 3.44), this additional error term is implicitly controlled. By considering different meshes per energy group, the convergence is deteriorated because the coupling terms are not properly controlled. To avoid this phenomenon, it would be necessary to relate the flux convergence in groups where the energy mesh is different. This issue is currently under study.

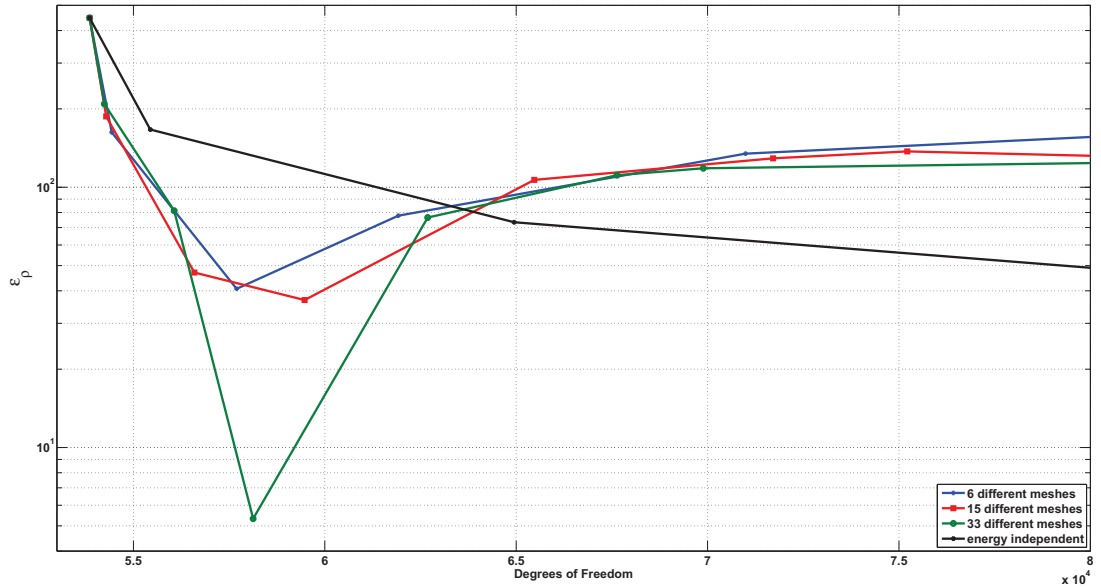
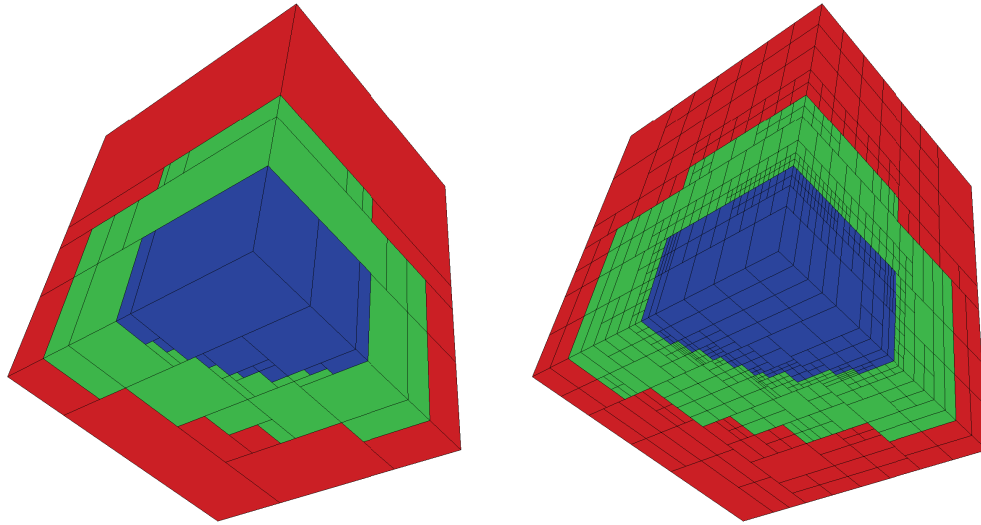


Figure 3.16: Convergence with energy-dependent or independent meshes

### 3.5.5 Improvements in the 3D Case

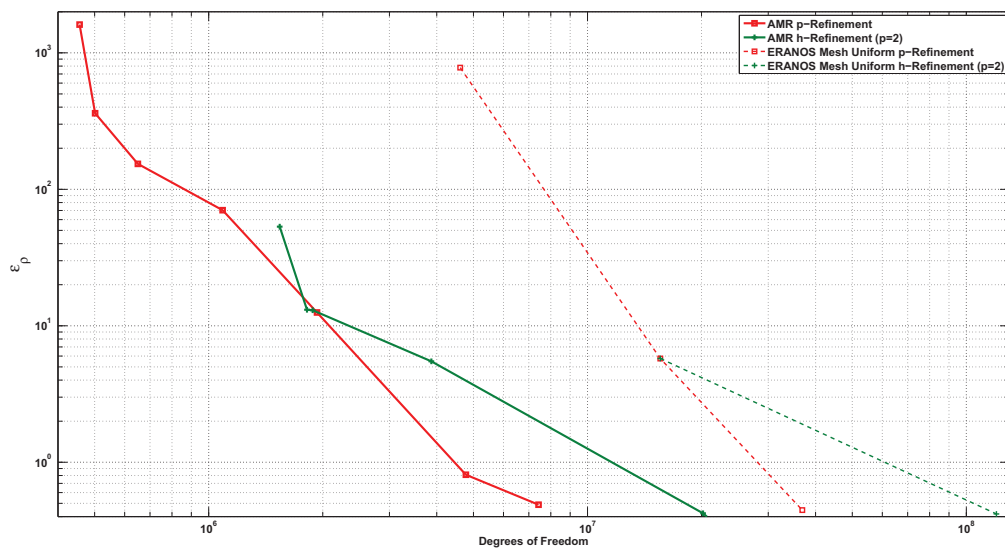
The initial mesh of the 3D benchmark is presented in Figure 3.17 (left) with the same color code as in Figure 3.11. Figure 3.17 (right) represents a mesh obtained after some refinement steps. As expected, the most refined regions are the ones located at interfaces and in particular at the *FUEL/NASS* one. In the *STEEL* regions, the mesh is relatively coarse because the neutron density is low and the associated flux is regular.

### 3. MODÈLE 2 : SYSTÈME HYBERBOLIQUE COUPLÉ

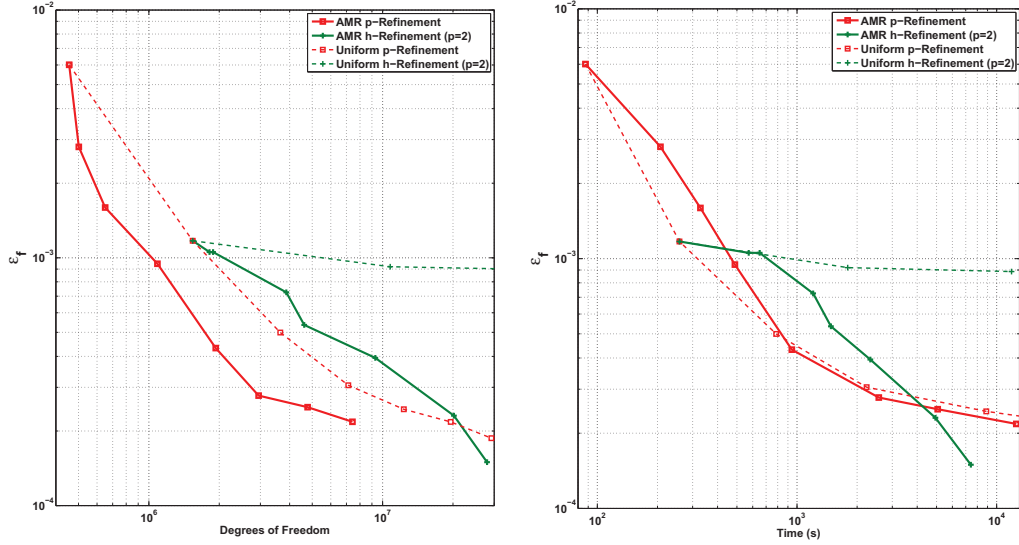


**Figure 3.17:** 3D initial non conforming mesh (left) and refined mesh (right)

This “visual” analysis is confirmed in Figure 3.18 comparing the convergence rate of the reactivity depending on the *dof*. As in the 2D case, a first comparison is given between the strategy based on the ERANOS mesh (extension of Figure 3.11 to 3D) with uniform refinement to the adaptive strategy with the initial mesh presented in Figure 3.17. Obtaining an error on the reactivity inferior to 1 pcm requires five times more degrees of freedom in the uniform case than in the adaptive one for *h*-refinement and even ten times for *p*-refinement. It highlights the importance of transforming the initial conforming mesh into a coarser non conforming one before using an AMR procedure.



**Figure 3.18:** Reactivity as a function of *dof* for adaptive and uniform refinement strategies



**Figure 3.19:** Flux error as a function of  $dof$  (left) and time (right) for adaptive and uniform refinement strategies

In the following, the initial mesh for the uniform and adaptive strategies is the non conforming one as depicted in Figure 3.17. Figure 3.19 (left) shows the convergence of the flux as a regard of  $dof$ . Adaptive strategies converge faster than uniform ones and  $p$ -refinement seems better than  $h$ -refinement with  $p = 2$ . This analysis has to be completed by comparing the calculation times. Actually, in the 3D case, the cell polynomial basis size is  $(p + 1)^3$ . The same reasoning as in the 2D case leads to a  $\mathcal{O}(p^9)$  complexity to inverse a matrix. It can become time consuming to increase  $p$  even if the number of  $dof$  remains reasonable.

The representation of the error on the flux as a regard of the calculation time can be seen in Figure 3.19 (right). As long as  $p$  is “small” (less than 4), the size of the problem to solve stays reasonable and the time is proportional to  $dof$ . Beyond this limit, the time increases rapidly with  $dof$ . Another aspect refers to the projections required to pass from one cell to another if the orders are different. Actually, with the upwind scheme, if a uniform polynomial basis is used, the incoming flux in a cell is a restriction of the flux in the upstream cells. With different polynomial orders, a projection is required. It explains why the uniform  $p$ -refinement is faster than the adaptive one for the first refinement steps.

For the  $h$ -refinement, the time stays proportional to  $dof$  even after several refinement steps. This strategy seems better adapted to obtain highly accurate solutions. On

### 3. MODÈLE 2 : SYSTÈME HYPERBOLIQUE COUPLÉ

---

the opposite,  $p$ -refinement can be faster to obtain a less accurate result or an integral quantity such as the reactivity.

#### 3.5.6 Conclusions

In this paper, AMR capabilities have been presented on a benchmark derived from the CIRANO ZONA2B experimental program in the MASURCA facility. Tests have been performed in two and three dimensional cases in order to compare adaptive and uniform strategies on different neutronic quantities of interest.

Adaptive algorithms lead to a decrease of the calculation time and memory footprint compared to uniform strategies. The benefit can be extremely important : for example, at a given accuracy, the calculation time is divided by more than five on the reactivity. However, results can greatly vary depending on the adaptive strategy used.

For the energy-independent approach, the different strategies are not equivalent. Performing  $h$ -refinement with  $p = 1$  is really inferior to the same approach with  $p = 2$  in terms of the number of degrees of freedom or the calculation time. On the other hand, the comparison between  $p$ - and  $h$ -refinement with  $p = 2$  is less definitive. For relatively small  $p$ , increasing the polynomial order seems to be the best approach. It leads rapidly to accurate results, particularly for integral parameters such as the reactivity. If a higher accuracy is required, the  $p$ -strategy becomes less interesting than the  $h$ -refinement with  $p = 2$ . Even if  $dof$  are similar for the two strategies, increasing  $p$  to high values implies to inverse large matrices leading to important calculation time. On the opposite, the cost of  $h$ -refinement is proportional to  $dof$  leading to a faster convergence than for  $p$ -refinement.

This analysis underlines the difficulty to find the best strategy in terms of calculation time or number of degrees of freedom. It explains the interest in the research of  $hp$ -adaptive algorithms to optimize the number of unknowns. Such developments are in progress (34).

Concerning the energy-dependent approach, results are not as interesting as expected. The problems due to the convergence of the source term clearly inhibit the advantages of having a spatial discretization dependent on the energy. This work has to be pursued to extend the error estimation in order to take into account the source convergence.