SURVOL MATHÉMATIQUE

1 Les espaces de base

Notes — Dans les problèmes que nous envisageons de traiter *in fine*, il n'est finalement besoin que d'espaces vectoriels normés finis sur le corps des réels. On pourrait rapidement en donner les principales propriétés qui sont sans doute encore en mémoire des lecteurs tant elles sont « naturelles ».

Mais en faisant cela, nous ne respecterions pas nos engagements de présenter un peu plus avant les fondements mathématiques.

Sans toutefois aller trop loin dans les notions topologiques générales, nous allons essayer dans ce chapitre de passer en revue la liste des espaces depuis les espaces topologiques jusqu'aux espaces de Hilbert, de manière succincte et didactique (nous l'espérons) en relevant les points importants essentiellement du point de vue de leur utilité.

1.1 Panorama non exhaustif des espaces

Histoire

Le mot « topologie » vient de la contraction des noms grecs « topos » (lieu) et « logos » (étude), c'est donc l'étude du lieu. On a d'ailleurs commencé par l'appeler *Analysis Situs*, le terme « topologie » n'étant introduit qu'en 1847, en allemand, par Johann Benedict Listing dans *Vorstudien zur Topologie*.

La topologie vise à définir ce qu'est un lieu (i.e. un espace) et quelles peuvent être ses propriétés (je dirais uniquement en tant que tel, sans autre ajout). Elle s'intéresse plus précisément à ce que l'on appelle aujourd'hui espaces topologiques et aux applications, dites continues, qui les lient, ainsi qu'à leurs déformations ("*A topologist is one who doesn't know the difference between a doughnut and a coffee cup*").

Euler Poincaré Hausdorff

En analyse, elle fournit des informations sur l'espace considéré permettant d'obtenir un certain nombre de résultats (existence et/ou unicité de solutions d'équations au dérivées partielles, notamment). Les espaces métriques ainsi que les espaces vectoriels normés sont des exemples d'espaces topologiques. L'origine de la topologie est l'étude de la géométrie dans les cultures antiques. Le travail de Leonhard Euler datant de 1736 sur le problème des sept ponts de Königsberg est considéré comme l'un des premiers résultats de géométrie qui ne dépend d'aucune mesure, i.e. l'un des premiers résultats topologiques.

Henri Poincaré publia *Analysis Situs* en 1895, introduisant les concepts d'homotopie et d'homologie. Bien d'autres mathématiciens ont contribué au sujet parmi lesquels nous citerons : Cantor, Volterra, Arzelà, Hadamard, Ascoli, Fréchet, Hausdorff...

Finalement, une dernière généralisation en 1922, par Kuratowski, donna le concept actuel d'espace topologique.

1.1.1 Point de vue topologique

E, un ensemble

Cela suffit déjà pour pouvoir s'intéresser par exemple à des fonctions, à des relations d'équivalence (donc au quotient)... décomposition canonique, permutation...

On peut ensuite définir un ensemble ordonné...

Une topologie T est un ensemble de parties de E que l'on définit comme les ouverts de (E, T), vérifiant les propriétés suivantes :

- L'ensemble vide et E appartiennent à T.
- Toute réunion quelconque d'ouverts est un ouvert, i.e. si $(O_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de T, indexée par un ensemble I quelconque (pas nécessairement fini ni même dénombrable) alors $\bigcup_{i\in I} O_i \in T$.
- Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert, i.e. si O_1, ..., O_n sont des éléments de T (avec $n > 0$), alors $O_1 \cap \ldots \cap O_n \in T$.

Espace topologique

À partir des ouverts, on définit les fermés, l'adhérence, l'intérieur, l'extérieur, voisinage...

Séparation :

deux points distincts quelconques admettent toujours des voisinages disjoints.

Espace séparé (ou de Hausdorff)

Intérêts :

- Unicité de la limite de tout filtre convergent.
- Une suite convergente a une limite unique.
- Une topologie plus fine qu'une topologie séparée est séparée.
- Tout sous-espace d'un espace séparé est séparé.
- Deux applications continues à valeurs dans un séparé qui coïncident sur une partie dense sont égales.

Régularité :

Il est possible de séparer un point x et un fermé F ne contenant pas x par deux ouverts disjoints.

On peut même alors choisir ces deux ouverts de manière à ce que leurs adhérences respectives soient disjointes.

Espace régulier

Application :

- Tout point admet une base de voisinages fermés.
- Tout fermé est l'intersection de ses voisinages fermés.

Compacité (recouvrement fini) :

Un espace séparé est compact (vérifie la propriété de Borel-Lebesgue), si chaque fois qu'il est recouvert par des ouverts, il est recouvert par un nombre fini d'entre eux.

Espace compact

L'intérêt des compacts est de pouvoir étendre des propriétés trivialement vérifiées par des applications définies sur un ensemble fini à des applications définies sur des espaces topologiques infinis, à condition bien sûr qu'elles soient continues.

Tout produit de compacts est compact.

$\overline{\mathbb{R}}$ est compact

Un espace peut ne pas être compact, mais une de ses parties l'être :

- $\mathbb{R}$ n'est pas fermé, mais tout $[a; b]$ fermé borné l'est.
- $\mathbb{R}^n$ n'est pas compact, mais tout pavé fermé l'est (voir théorème 6).

Notons bien que rien n'est dit sur les éléments de l'ensemble E. Ce peuvent être des éléments discrets, des scalaires, des vecteurs, des fonctions...

1.1.2 Point de vue métrique

Comme nous le mentionnions au paragraphe précédent, lorsque l'on parle d'espace on a intuitivement envie de parler de « distance ».

Histoire

Unifiant les travaux de ses prédécesseurs sur les espaces de fonctions, c'est en 1906 que Maurice Fréchet introduit le concept d'espace métrique.

La métrique qui nous est la plus usuelle est évidemment la métrique euclidienne, qui est celle que nous utilisons en géométrique « classique » (euclidienne) : la distance entre deux points est égale à la longueur du segment les reliant. La structure métrique fournit beaucoup plus d'information sur la forme géométrique des objets que la structure topologique.

Enfin nous redonnerons le si important critère de Cauchy (qui est valable pour tout espace uniforme, dont notamment les espaces métriques) qui permet de définir la toute aussi importante notion de complétude.


Fréchet


Cauchy

E, un ensemble

Une distance ou métrique d est une application de $E \times E \to \mathbb{R}_+$ telle que :

— $d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie) ;

— $d(x, y) > 0$ si $x \neq y$, et $d(x, x) = 0$ (positivité) ;

— $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire).

Espace métrique

On peut réexprimer les notions d'ouvert, fermé, adhérence... densité, continuité... avec la métrique (les ε...).

Deux normes sont équivalentes si elles définissent la même topologie.

Deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes s'il existe deux constantes strictement positives k' et k'' telles que $\forall x \in E$, $\|x\|_1 \leqslant k'\|x\|_1$ et $\|x\|_2 \leqslant k''\|x\|_1$.

Critère de Cauchy :

Soit E un espace métrique et soit x_0, x_1, ..., x_n, ... une suite d'éléments de E. Cette suite est de Cauchy de E si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, (\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, n \geqslant N, m \geqslant N) : d(x_m, x_n) \leqslant \varepsilon \tag{1.1}$$

ou encore : $d(x_m, x_n)$ tend vers 0 quand m et n tendent vers l'infini.

Espace métrique complet

Toute suite convergente est de Cauchy.

Réciproque : si x_0, x_1, ..., x_n, ... est de Cauchy sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors elle converge.

Cette propriété est fondamentale car elle permet de reconnaître si une suite converge sans connaître sa limite.

Attention, la notion d'espace complet est une notion métrique et non topologique (elle peut donc être vraie pour une métrique et fausse pour une autre).

L'importance de la complétude tient à ce que la solution d'un problème passe souvent par une solution approchée. Si la suite des solutions approchées est de Cauchy d'un espace convenable, et si cet espace est complet, alors la convergence vers une solution du problème est assurée.

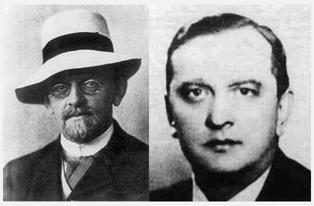
1.1.3 Point de vue algébrique

Jusqu'à présent, nous n'avons pas vraiment parlé d'opérations que nous pourrions effectuer à l'intérieur des espaces que nous avons définis, ou entre ces espaces. Pour une présentation des structures algébriques on se reportera au cours homonyme. Elles sont riches et nombreuses. Dans le cadre de ce document, nous ne nous intéresserons qu'au cas de la structure d'espace vectoriel, le but étant, comme mentionné en introduction, d'en arriver aux espaces de Hilbert, fondements de l'analyse fonctionnelle.

Histoire

Lorsque l'on demande de citer l'un des grands mathématiciens du XX^{e} siècle, Henri Poincaré et David Hilbert se partagent souvent la première place, aussi bien pour l'éventail considérable des sujets qu'ils ont abordés que pour avoir fait émerger de nombreuses idées fondamentales.

Hilbert reste célèbre pour ses 23 problèmes (dits problèmes de Hilbert) qu'il présenta au deuxième congrès international des mathématiciens à Paris en 1900, qui tenaient jusqu'alors les mathématiciens en échec et devaient marquer le cours des mathématiques du XX^{e} siècle (et il avait raison ; tous ne sont pas résolus à ce jour). Notons que c'est von Neumann, reprenant les travaux de Hilbert, qui formalise et nomme ces espaces les espaces de Hilbert en 1927.



Hilbert Banach

Nous croiserons également un autre fondateur de l'analyse fonctionnelle, Stephan Banach qui a généralisé entre autre les travaux de Hilbert sur les équations intégrales, notamment en approfondissant la théorie des espaces vectoriels topologiques.

E, un ensemble

Structure d'espace vectoriel :

C'est une structure comportant une loi de composition interne et une loi de composition externe sur un corps $\mathbb{K}$ permettant d'effectuer des combinaisons linéaires (voir cours sur les structures algébriques).

La loi de composition interne, notée $+$ en fait un groupe abélien, la loi de composition externe est la multiplication par un scalaire, scalaire pris sur le corps $\mathbb{K}$ considéré.

↳ Espace vectoriel (topologique)

Sur un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, deux normes quelconques sont équivalentes.

Une norme sur un espace vectoriel E est une fonction, $x \mapsto \|x\|$ possédant les propriétés :

- positivité : $\|x\| > 0$ pour $x \neq 0$, $\|0\| = 0$;
- transformation par les homothéties : $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|, \lambda \in \mathbb{K}$;
- inégalité de convexité : $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

La distance issue de la norme est la distance définie par $d(x, y) = \|x - y\|$.

↳ Espace vectoriel normé

Tout espace vectoriel normé est automatiquement un espace métrique (avec la distance issue de sa norme). De plus :

- la distance est invariante par translation : $d(x - a, y - a) = d(x, y)$.
- une homothétie de rapport λ multiplie la distance par $|\lambda|$: $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$.

Tout espace vectoriel normé de dimension finie est localement compact (i.e. tout point possède au moins un voisinage compact), car toute boule fermée est compacte.

L'intérêt des distances issues d'une norme est qu'elles rendent continues les opérations de l'espace vectoriel et qu'en particulier les translations sont des homéomorphismes.

Comme un espace vectoriel normé muni de la distance issue de sa norme est un espace métrique, on peut se demander si cet espace métrique vérifie le critère de Cauchy (voir paragraphe précédent) afin d'en faire un espace complet.

↳ Espace de Banach

C'est donc finalement un espace vectoriel normé sur un sous-corps $\mathbb{K}$ de $\mathbb{C}$ (en général, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), complet pour la distance issue de sa norme.

Comme la topologie induite par sa distance est compatible avec sa structure d'espace vectoriel, c'est un espace vectoriel topologique.

Une norme $\|\cdot\|$ découle d'un produit scalaire ou hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle$ si l'on a : $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

↳ Espace de Hilbert

C'est donc un espace préhilbertien complet, i.e. un espace de Banach dont la norme découle d'un produit scalaire ou hermitien unique.

Un espace de Hilbert est la généralisation en dimension quelconque d'un espace euclidien ou hermitien (Un **espace vectoriel euclidien** est un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un produit scalaire).

Le plus important est de disposer d'un produit scalaire, car on va alors pouvoir déterminer des parties orthogonales de l'espace, donc en somme directe (voir théorème 3).

On rappelle, si besoin, qu'un produit scalaire est une forme bilinéaire (i.e. une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$, linéaire pour chacune des deux variables) possédant les propriétés :

— symétrie : $\forall x, y \in E$, $\langle x\, , \ y\rangle = \langle y\, , \ x\rangle$

— positivité : $\forall x \in E$, $\langle x\, , \ x\rangle \geqslant 0$

— définie : $\forall x \in E$, $\big(\langle x\, , \ x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0\big)$

ce qui se traduit pas la définition : « Un produit scalaire sur un espace vectoriel réel E est une forme bilinéaire symétrique définie positive ».

Théorème 1 Tout sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert est un espace de Hilbert.

Voici quelques espaces de Banach couramment utilisés :

— Les espaces euclidiens $\mathbb{R}^n$ et les espaces hermitiens $\mathbb{C}^n$ munis de la norme :

$$\|(x_1, \dots, x_n)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i \overline{x_i}} \tag{1.2}$$

où $\overline{x_i}$ désigne le conjugué de x_i.

— L'espace des fonctions (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) continues et bornées sur un espace topologique X, muni de la norme $\|f\| = \sup_{x\in X}(|f(x)|)$. En particulier, l'espace des fonctions continues sur un espace X compact, comme un intervalle réel $[a\,; b]$.

— Pour tout réel $p \geqslant 1$, l'espace L^p des classes de fonctions mesurables, dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, sur un espace mesuré X.

Voici quelques espaces de Hilbert classiques :

— L'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel est hilbertien,

— L'espace L^2 des fonctions de carré intégrable (voir chapitre 4).

— Certains espaces de Sobolev (voir chapitre 5) sont des espaces de Hilbert (ceux qui nous intéresserons en général, ça tombe bien).

Théorème 2 — Théorème de complétion sur un espace de Banach. Soit E un espace vectoriel normé incomplet. Alors E est isomorphe, en tant qu'espace vectoriel, et isométrique à un sous-espace vectoriel dense dans un espace de Banach $\overline{E}$.

Cet espace de Banach $\overline{E}$ est unique à un isomorphisme isométrique près.

Ce théorème de complétion répond par l'affirmative à la question : si l'espace normé E n'est pas complet, existe-t-il un espace de Banach minimal $\overline{E}$ le contenant ?

Théorème 3 — Théorème de projection dans un espace de Hilbert. Soit F un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert H (il est alors lui-même un espace de Hilbert d'après le théorème 1). Alors :

— son orthogonal $F^\perp$, qui est l'ensemble des vecteurs orthogonaux à chaque vecteur de F, est un sous-espace vectoriel fermé (donc est aussi un espace de Hilbert, toujours en vertu du théorème 1) ;

— et est également le supplémentaire de F : tout $h \in H$ s'écrit de façon unique $h = h' + h''$ où h' est le projeté orthogonal de h sur F, et h'' le projeté orthogonal de h sur $F^\perp$.

Ainsi, $F^\perp$ est l'orthogonal et le supplémentaire de F, et ces deux sous-espaces sont donc en sommes directe. On a donc $H = F \oplus F^\perp$ (on utilise parfois le terme de « somme hilbertienne »).

Ce résultat subsiste si l'on suppose seulement que H est un espace préhilbertien et que F est un sous-espace vectoriel complet de H.

1.2 Tribu, mesure, espaces mesurable et mesuré

En complément à l'aspect métrique (Fréchet 1906), nous allons maintenant aborder l'aspect mesure.

Le but, à travers la notion de mesure, est d'étendre la notion usuelle de longueur pour les ensembles de $\mathbb{R}$, ou de volume pour ceux de $\mathbb{R}^n$, et ceci de deux manières :

- on veut d'une part pouvoir considérer des espaces de base plus généraux (plus « abstraits » : espaces de dimension infinie, espaces sur lesquels on définit les probabilités...) ;
- et d'autre part on veut englober dans le même cadre mathématique les notions de longueurs, surface, volume, mais aussi de masses ou charges ponctuelles issues de la mécanique, de l'électricité... car toutes ces quantités possèdent une même propriété évidente : l'additivité (i.e. si l'on désigne par $\mu(A)$ le volume, la masse, la charge électrique... d'une partie « raisonnable » A, alors $\mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$ dès que les parties A et B sont disjointes).

Afin de réaliser cela, il faut en passer par quelques complications mathématiques, et cela essentiellement pour deux raisons :

- Il nous faut tout d'abord définir ce qu'est une partie « raisonnable » d'un ensemble E (s'il est aisé de définir le volume d'un polyèdre par exemple, il existe des parties dont la « frontière » est si complexe qu'elles ne possèdent pas de notion de volume).
- Ensuite, la propriété d'additivité si dessus est un peu trop naïve et se révèle insuffisante pour avoir de bonnes propriétés pour les mesures.
  En effet, la classe des mesures additives a une structure mathématique extrêmement pauvre, ne permettant pas, en particulier, de définir une notion satisfaisante d'intégrale par rapport à ces mesures additives. On est donc conduit à utiliser les mesures possédant la propriété de σ-additivité (voir définition d'une mesure ci-dessous), ce qui nous oblige à considérer comme classe d'ensembles « mesurables » une tribu (voir définition 2) au lieu de la notion plus simple d'algèbre.

Définition 1 — Algèbre. Une algèbre (de Boole) $\mathcal{E}$ sur un ensemble X est un ensemble non vide de parties de X, stable par passage au complémentaire et par union finie (donc aussi par intersection finie), i.e. :

1. $\mathcal{E} \neq \varnothing$
2. $\forall A \in \mathcal{E}$, ${}^cA \in \mathcal{E}$, où ${}^cA$ désigne le complémentaire de A dans X. (donc $X \in \mathcal{A}$)
3. si $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{E}$ alors $A_1 \cup \ldots \cup A_n \in \mathcal{E}$

Définition 2 — Tribu. Une tribu $\mathcal{A}$ sur un ensemble X est un ensemble non vide de parties de X, stable par passage au complémentaire et par union dénombrable (donc aussi par intersection dénombrable), i.e. :

1. $\mathcal{A} \neq \varnothing$
2. $\forall A \in \mathcal{A}$, ${}^cA \in \mathcal{A}$
3. si $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \mathcal{A}$ alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

Ces deux dernières définitions étant placées l'une sous l'autre, leur différence doit apparaître clairement : dans le cas d'une algèbre, on a à faire à un nombre fini d'intersections ou de réunions, dans celui d'une tribu, on prend en compte un ensemble dénombrable (donc fini ou non).

Il est donc évident que toute tribu est une algèbre, la réciproque étant fausse.

Définition 3 — Espace mesurable. Le couple $(X, \mathcal{A})$ est appelé espace mesurable ou espace probabilisable en fonction du contexte. Sur les espaces mesurables on définit des mesures (voir ci-après) ; sur les espaces probabilisables, on appelle ces mesures des probabilités.

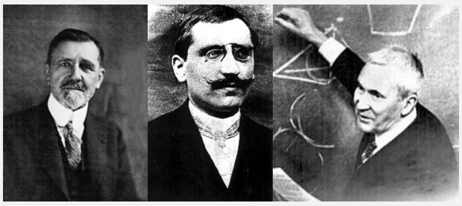
Histoire

La théorie de la mesure s'occupe de regarder un peu plus en détail ce qui se passe à l'intérieur des espaces dits mesurés (définis plus bas) : il s'agit de mesurer les différentes parties existant dans un tel espace, parties en lien avec la topologie, ce qui reboucle le sujet...

Lorsque l'on évoque le concept de mesure, on en arrive assez rapidement à se demander : Est-ce que l'on peut tout mesurer ? Est-ce que l'on doit tout mesurer ? Qu'est-ce qui est négligeable ?

En 1894, Émile Borel énonce la première définition d'ensemble négligeable. En 1897, il définit les ensembles mesurables. En 1901, Henri-Léon Lebesgue introduit la notion de mesure. La théorie se développe jusque dans les années 1950.

Andreï Kolmogorov proposera une axiomatisation du calcul des probabilités basée notamment sur l'intégrale définie à partir d'une mesure.



Borel Lebesgue Kolmogorov

Les parties de X qui appartiennent à la tribu $\mathcal{A}$ sont appelées ensembles mesurables. Dans un contexte probabiliste, on les appelle événements (il suffit que $\mu(X) = 1$ pour que μ soit une probabilité).

Une mesure μ sur un ensemble X est une fonction qui associe à chaque élément d'une tribu d'un ensemble X un scalaire positif (une longueur, un volume, une probabilité...).

Définition 4 — Mesure. Soit $(X, \mathcal{A})$, un espace mesurable. Une application μ définie sur $\mathcal{A}$, à valeurs dans $[0, +\infty]$ est appelée mesure lorsque les deux propriétés suivantes sont satisfaites :

1. L'ensemble vide a une mesure nulle : $\mu(\varnothing) = 0$
2. L'application μ est σ-additive : si E_1, E_2, ... est une famille dénombrable de parties de X appartenant à $\mathcal{A}$ et si ces parties sont deux à deux disjointes, alors la mesure $\mu(E)$ de leur réunion E est égale à la somme des mesures des parties :

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k).1 \tag{1.3}$$

On appelle espace mesuré un triplet $(X, \mathcal{A}, \mu)$, où X est un ensemble, $\mathcal{A}$ une tribu sur X et μ une mesure sur $\mathcal{A}$.

Complément sur le produit d'espaces mesurables. Soient (X, T) et (Y, U) deux espaces mesurables. On appelle rectangle mesurable du produit $\Omega = X \times Y$, toute partie de Ω de la forme $A \times B$ où A et B sont des éléments respectivement T et U-mesurables.

On appelle produit tensoriel des deux tribus T et U, la tribu engendrée par l'ensemble des rectangles mesurables. Cette tribu est notée $T \otimes U$, et est la plus petite tribu de Ω qui contient toutes les parties de la forme $A \times B$, $A \in T$, $B \in U$.

Le produit des espaces mesurables est $(X \times Y, T \otimes U)$ et est un espace mesurable :

$$\int f \, \mathrm{d}(\mu \otimes \nu) = \int\int f(x, y) \mathrm{d}\mu(x) \mathrm{d}\nu(y) \tag{1.4}$$

1.3 Tribu borélienne, mesures de Dirac et Lebesgue

Définition 5 — Tribu borélienne. On appelle tribu borélienne sur un espace topologique donné la tribu engendrée par les ensembles ouverts. Dans le cas simple et fondamental de l'espace usuel à n dimensions, la tribu borélienne de $\mathbb{R}^n$ est engendrée par une famille dénombrable de parties, les pavés, dont les sommets sont à coordonnées rationnelles.

On aura besoin de ces notions (dont la tribu borélienne) pour l'intégrale de Lebesgue et par extension toute la théorie de l'intégration qui est à la base de l'analyse numérique (et oui, formulation faible, quand tu nous tiens) ainsi notamment que pour le théorème de représentation de Riesz fondamental en éléments finis.

Notons que tout intervalle ouvert, fermé ou semi-ouvert appartient à la tribu borélienne de $\mathbb{R}$. Il en est de même de toute réunion finie ou dénombrable de ces intervalles.

Il n'est pas possible de donner une description plus concrète de la tribu borélienne de $\mathbb{R}$ que ce qui a été fait. Toutes les réunions finies ou dénombrables d'intervalles sont des boréliens, mais certains boréliens ne sont pas de cette forme. En fait, toutes les parties de $\mathbb{R}$ que l'on rencontre dans la pratique sont des boréliens. Il existe des parties de $\mathbb{R}$ qui ne sont pas boréliennes, mais il faut un peu de sueur pour les construire.

Les tribus sont des familles de parties qui sont destinées à être mesurées. Pour pouvoir mesurer des parties suffisamment compliquées comme celles qui ne peuvent être définies que par des passages à la limite (comme l'ensemble triadique de Cantor), les tribus doivent être assez fines pour être stables par des opérations relativement générales comme le passage au complémentaire, les réunions et intersections dénombrables. Néanmoins, elles ne doivent pas être trop fines afin de ne pas contenir de parties non mesurables.

Rappelons également deux mesures simples et importantes :

— la mesure de comptage, qui donne le nombre d'éléments d'un ensemble.

— la mesure de Dirac ou masse de Dirac, qui est une mesure supportée par un singleton et de masse totale 1.

Définition 6 — Mesure de Dirac. Pour un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$ et un point a de X, on appelle mesure de Dirac au point a la mesure notée δ_a sur $(X, \mathcal{A})$ telle que :

$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad (\delta_a(A) = 1 \text{ si } a \in A \text{ et } \delta_a(A) = 0 \text{ si } a \notin A) \tag{1.5}$$

Le support de δ_a est réduit au singleton $\{a\}$.

Les masses de Dirac sont très importantes, notamment dans la pratique car elles permettent par exemple de construire des mesures par approximations successives.

Définition 7 — Mesure complète. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, on dit que μ est une mesure complète lorsque tout ensemble négligeable pour μ appartient à la tribu $\mathcal{A}$ sur laquelle μ est définie, i.e. :

$$\forall M, N \in \mathcal{P}(X), \quad (N \subset M, M \in \mathcal{A} \text{ et } \mu(M) = 0) \quad \Rightarrow \quad N \in \mathcal{A} \tag{1.6}$$

La mesure de Lebesgue a permis de bâtir une théorie de l'intégration palliant les insuffisances de l'intégrale de Riemann (il suffit de vouloir intégrer $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ sur $[0\,;1]$ avec Riemann pour être dans l'impasse). Nous détaillerons cela un peu plus au chapitre 4 sur les espaces de Lebesgue.

Parmi les définitions de cette mesure, nous présentons la plus intuitive, celle qui consiste à généraliser la notion de volume en gardant les mesures sur les pavés de $\mathbb{R}^n$.

Définition 8 — Mesure de Lebesgue. Il existe une plus petite mesure définie sur une tribu de parties de $\mathbb{R}^n$ qui soit complète et coïncide sur les pavés avec leur volume (i.e. avec le produit des longueurs de leurs côtés).

Cette mesure est appelée la mesure de Lebesgue (notée λ_n) et sa tribu de définition la tribu de Lebesgue (notée $\mathcal{L}_n$ et que nous ne définissons pas ici, et dont les éléments sont dits Lebesgue-mesurables).

Cette restriction aux boréliens de la mesure de Lebesgue est parfois dénommée mesure de Borel-Lebesgue.

Cela signifie par exemple qu'il existe une unique mesure de Lebesgue λ sur les boréliens de $\mathbb{R}$ telle que $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\lambda([a\,;b]) = |b-a|$. Il en découle que pour un point $\{a\} = [a\,;a]$, $\lambda(\{a\}) = 0$, puis par union dénombrable, que pour tout sous-ensemble X fini ou dénombrable de $\mathbb{R}$, $\lambda(X) = 0$. En particulier $\lambda(\mathbb{N}) = \lambda(\mathbb{Z}) = \lambda(\mathbb{Q}) = 0$. Un ensemble de mesure nulle est dit négligeable.

Si pour la mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{R}$, la notion de « presque partout » correspond bien à l'intuition, ce n'est pas vrai en général. Par exemple, pour $\mu = \delta_a$ sur la tribu de l'ensemble des parties de X, une propriété est vraie μ-pp simplement si elle est vérifiée en a.

Si la mesure μ est nulle, toute propriété est vérifiée pp (ainsi que sa négation).

« Construire une mesure », c'est montrer qu'il existe une unique mesure qui vérifie certaines propriétés. Pour cela, on utilise le théorème (ou lemme) de la classe monotone (dû à Wacław Sierpiński et popularisé par Dynkin) pour montrer l'unicité et le théorème de Carathéodory pour montrer l'existence.

1.4 Propriétés de la mesure de Lebesgue

On appelle mesure de Lebesgue sur un espace euclidien E la mesure image de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ par n'importe quelle isométrie de $\mathbb{R}^n$ dans E.

Soit A une partie Lebesgue-mesurable d'un espace euclidien E. On appelle mesure de Lebesgue sur A la restriction à A de la mesure de Lebesgue de E.

Théorème 4 La mesure de Lebesgue est invariante sous toutes les isométries. Elle est en particulier invariante sous les translations : c'est une mesure de Haar du groupe topologique $\mathbb{R}^n$.

Oui, la mesure de Lebesgue peut être vue comme une mesure de Haar. Mais, historiquement, la mesure de Haar est définie plus tard (on parle souvent de *la* mesure de Haar, alors que l'on devrait parler d'*une* mesure de Haar). Elle généralise celle de Lebesgue.

Définition 9 — Mesure régulière. Une mesure (positive) μ définie sur une tribu contenant la tribu borélienne d'un espace topologique X est dite régulière lorsque elle est à la fois intérieurement régulière et extérieurement régulière :

1. $\forall A \subset X$ de la tribu, $\mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid K$ compact contenu dans $A\}$;
2. $\forall A \subset X$ de la tribu, $\mu(A) = \inf\{\mu(O) \mid O$ ouvert contenant $A\}$.

Théorème 5 La mesure de Lebesgue est finie sur tout compact ; chaque compact, qui est borné, pouvant être enfermé dans un cube.

Elle est par voie de conséquence régulière, $\mathbb{R}^n$ étant métrisable, localement compact et séparable.

— $\mathbb{R}^n$ est métrisable : un espace topologique est un espace métrisable lorsqu'il est homéomorphe à un espace métrique (un homéomorphisme est une application bijective continue entre deux espaces topologiques dont la réciproque est continue) ;
— $\mathbb{R}^n$ est localement compact : un espace localement compact est un espace séparé qui, sans être nécessairement compact lui-même, admet des voisinages compacts pour tous ses points (De plus, on a la propriété : Tout espace localement compact est régulier) ;
— $\mathbb{R}^n$ est séparable : un espace séparable est un espace topologique contenant un sous-ensemble fini ou dénombrable et dense, i.e. contenant un ensemble fini ou dénombrable de points dont l'adhérence est égale à l'espace topologique tout entier.

Théorème 6 — Théorème de Borel-Lebesgue. On retiendra de ce théorème que dans $\mathbb{R}^n$, les compacts sont les ensembles fermés bornés.

Histoire

En complément à la première note historique de ce chapitre, nous vous proposons une illustration très concrète de l'application de la topologie, que vous avez très certainement rencontrée : la carte du métro.


Carte du métro


Beck

La représentation schématique généralement utilisée pour représenter un réseau de métro a été mise au point, la première fois, en 1931 par Henry Beck, alors dessinateur industriel de 29 ans et engagé comme intérimaire par la société du métro londonien. Facile à comprendre et à utiliser, esthétique... elle est pourtant fausse à tous les égards sauf deux.

Elle n'est pas à l'échelle, donc toutes les distances sont fausses ; les lignes droites reliant les stations ne traduisent absolument pas le cheminement réel du métro sous les rues ; les orientations sont fausses (une ligne verticale ne signifie pas que le trajet s'effectue selon l'axe nord-sud).

Le premier aspect exact est que si une station de métro est représentée au nord de la Tamise, alors il en est de même pour la station réelle. Le second aspect exact est la description du réseau : l'ordre des stations sur chaque ligne et les interconnexions entre les lignes sont fidèles à la réalité. C'est d'ailleurs ce second aspect qui est finalement le seul dont les voyageurs ont effectivement besoin.

Notons enfin que cette illustration permet de comprendre aisément comment la notion de distance peut être appréhendée en topologie.

1.5 Petit exemple amusant d'injection dans un Hilbert

Soient V et H deux espaces de Hilbert sur $\mathbb{R}$ et V inclus dans H avec injection continue et V dense dans H.

Comme V est inclus dans H, l'injection est tout bêtement $i : x \mapsto x$.

Dans ces conditions, H est un espace de Hilbert avec un produit scalaire $(\,|\,)_H$, et V muni du produit scalaire induit est un sous-espace dense, donc ne peut pas être un espace de Hilbert par restriction du produit scalaire $(\,|\,)_H$. La structure hilbertienne de V est définie par un produit scalaire $(\,|\,)_V$ propre à V.

Il y a donc deux topologies sur V : la topologie hilbertienne propre à V et la topologie héritée de la structure hilbertienne de H. La continuité de l'injection i impose donc une condition sur ces topologies : la topologie hilbertienne de V est plus fine que la trace sur V de la topologie hilbertienne de H.

... et maintenant que le terme « injection » a été prononcé, il est temps de passer au chapitre suivant...

2 Applications et morphismes

Notes — Au chapitre précédent, des espaces ont été définis, mais on ne s'est pas intéressé beaucoup aux relations entre eux ou au sein d'eux.

Des distances, normes... ont été introduites, sans utiliser plus que ça le vocable de fonction. Le terme d'injection a été prononcé à la fin du chapitre précédent comme fil conducteur pour introduire celui-ci...

Dans ce chapitre, nous ne présenterons pour le coup que des choses extrêmement « rudimentaires » et toutes vues en taupe ou avant. Il s'agit uniquement d'un aide-mémoire.

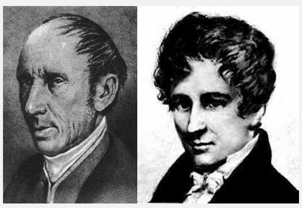
Histoire

L'univers mathématiques du début du XVIIIe siècle est dominé par Leonhard Euler et par ses apports tant sur les fonctions que sur la théorie des nombres, tandis que Joseph-Louis Lagrange éclairera la seconde moitié de ce siècle.


Euler Lagrange

Euler a introduit et popularisé plusieurs conventions de notation par le biais de ses nombreux ouvrages largement diffusés. Plus particulièrement, il a introduit la notion de fonction (dans L'*Introductio in analysin infinitorum*, premier traité dans lequel le concept de fonction est à la base de la construction mathématique, et dont les premiers chapitres lui sont consacrés) et a été le premier à écrire $f(x)$ pour désigner la fonction f appliquée à l'argument x, en 1734 (bien que le terme de « fonction » apparaisse pour la première fois dans un manuscrit d'août 1673 de Leibniz, resté inédit, et intitulé *la Méthode inverse des tangentes ou à propos des fonctions*). Il a également introduit la notation moderne des fonctions trigonométriques, la lettre e pour la base du logarithme naturel (également connue sous le nom de nombre d'Euler) en 1727, la lettre grecque Σ pour désigner une somme en 1755 et la lettre i pour représenter l'unité imaginaire, en 1777. L'utilisation de la lettre grecque π pour désigner le rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre a également été popularisée par Euler, mais celui-ci n'est pas à l'origine de la notation.

Les différentes techniques mises au point (par exemple pour la résolution des équations différentielles, le développement en séries entières ou asymptotiques, applications aux réels négatifs, aux complexes...) conduisent à s'intéresser à la « fonction » en tant que sujet d'étude.

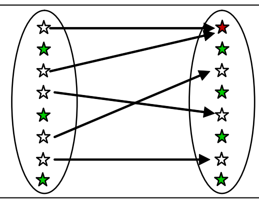
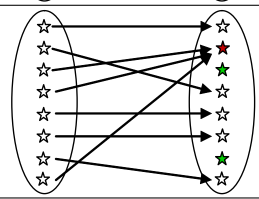
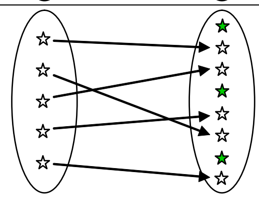
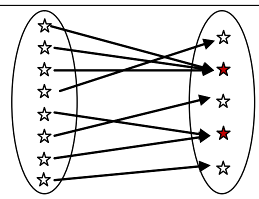
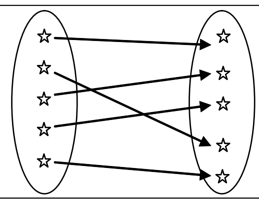

Cauchy Abel

À la fin du XVIIIe siècle, les mathématiciens croient encore, pour peu de temps, que la somme infinie de fonctions continues est continue, et (pour plus longtemps) que toute fonction continue admet une dérivée... (sur ces notions, voir chapitre suivant).

C'est Cauchy qui met un peu d'ordre dans tout cela en montrant que la somme d'une série numérique n'est commutativement convergente que si la série est absolument convergente. Mais Cauchy, qui pourtant n'est qu'à un doigt de la notion de convergence uniforme, énonce un théorème faux de continuité d'une série de fonctions continues qu'Abel contredit par un contre-exemple le 16 janvier 1826 : Cauchy affirme en 1821 que la somme d'une série de fonctions continues est toujours continue. Cinq ans plus tard, Abel propose un contre-exemple en considérant la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ d'applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de terme général $f_n(x) = (-1)^n/n.\sin(nx)$.

2.1 Fonction, application, injection, surjection, bijection

Si ça c'est pas du rappel de base, je ne m'y connais pas...

Fonction	Un « truc » qui met en relation certains éléments de E avec certains élément de F.	
Application	Fonction définie partout : *(plus d'étoile verte dans E)* Une fonction f est une application si son ensemble de départ est égal à son ensemble de définition.	
Injection	Application telle que tout élément de F a au plus 1 antécédent. F a au moins autant d'éléments que E. *(plus d'étoile verte dans E et plus d'étoile rouge dans F)* Soit $\forall x, y \in E^2, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$, ou $\forall x, y \in E^2, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$	
Surjection	Application telle que tout élément de F a au moins 1 antécédent. F a au plus autant d'éléments que E. *(plus d'étoile verte dans E et plus d'étoile verte dans F)* Soit $\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y$, ou f est surjective si son ensemble image est égal à son ensemble d'arrivée.	
Bijection	C'est une injection ET une surjection : chaque élément de l'ensemble de départ correspond à un seul élément de l'ensemble d'arrivée et vice-versa.	

★ = élément n'ayant pas de relation ; ☆ = élément ayant 1 relation ; ★ = élément ayant plus d'une relation.

Tableau 2.1: Types de fonctions

Une étoile rouge dans E n'a pas de sens, cela voudrait dire qu'un élément de E peut avoir plusieurs valeurs différentes par la relation considérée...

En fait, on sait donner un sens à cela. C'est ce que l'on appelle une fonction multivaluée ou fonction multiforme ou fonction multivoque ou multifonction. L'exemple le plus simple d'un fonction multiforme est la fonction réciproque d'une application non injective (penser simplement aux fonctions circulaires).

On trouve les fonctions multiformes en analyse complexe : lorsque l'on veut utiliser le théorème des résidus pour calculer une intégrale réelle, on peut être amené à considérer des restrictions (déterminations) qui font de ces fonctions multiformes des fonctions (univoques), par exemple en utilisant la théorie des revêtements qui considère des fonctions sur des surfaces de Riemann.

En restreignant une fonction à son domaine de définition, on en fait une application. En la restreignant en plus à son ensemble d'arrivée on en fait une surjection (une surjection, c'est un « truc » défini partout sur E et F).

Quand on a une surjection, on est sûr que tout élément de l'ensemble de départ à une image, et que tout élément de l'ensemble d'arrivée a un antécédent (au moins un même).

Dans la pratique, on ne fait pas de distinction formelle entre fonction et application...

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$ est une fonction, pas une application, car la racine carrée n'est pas définie sur $\mathbb{R}$ mais sur $\mathbb{R}_+$. $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$ est une application ! Mais pourquoi s'intéresserait-on à f là où elle n'est pas définie... De plus, $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, x \mapsto \sqrt{x}$ est une surjection par définition (puisque l'on considère f de son ensemble de définition jusqu'à son ensemble image). C'est évidemment une bijection (il ne reste que l'injectivité à prouver...).

Définition 10 — Support. On appelle support d'une fonction f l'adhérence (ou la fermeture, i.e. le plus petit fermé) du lieu où la fonction n'est pas nulle :

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n, f(x) \neq 0\}} \tag{2.1}$$

2.2 Morphismes

Cette section est extraite du cours sur les structures algébriques. Nous l'avons toutefois sérieusement amputée pour coller à l'objectif de ce document.

2.2.1 Présentation

Histoire

Mort au cours d'un duel à l'âge de vingt ans (ce qui en fait un héros romantique), il laisse un manuscrit élaboré trois ans plus tôt, dans lequel il établit qu'une équation algébrique est résoluble par radicaux si et seulement si le groupe de permutation de ses racines a une certaine structure, qu'Emil Artin appellera justement résoluble.

Son Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux, publié par Joseph Liouville quatorze ans après sa mort, a été considéré par ses successeurs, en particulier Sophus Lie, comme le déclencheur du point de vue structural et méthodologique des mathématiques modernes.

Galois

Toutefois, pour être tout à fait exact, Lagrange, reprenant une idée de d'Alembert en vue de prouver qu'un polynôme de degré n possède n racines (i.e. que $\mathbb{C}$ est algébriquement clos), utilise des résultats sur les fonctions semblables des racines, i.e. des fonctions rationnelles des racines qui restent invariantes par les mêmes permutations. Ce résultat, qu'il a établi dans son fameux mémoire de 1771 *Réflexions sur la résolution algébrique*, inspirera Abel et Galois et peut être considéré comme le tout premier de la théorie des groupes.

Soient deux ensembles G et G' munis d'un même type de structure (topologique, groupe, anneau, espace vectoriel, algèbre...). Un morphisme (ou homomorphisme) de $G \to G'$ est une application f qui respecte cette structure.

Pour ce faire, cette application doit vérifier certaines conditions, notamment une certaine « linéarité » vis-à-vis des lois des G et G' (on pourrait également remplacer le terme linéarité par « capacité à faire sortir de la fonction »).

Un morphisme entre deux espaces topologiques est tout simplement une application continue (voir chapitre suivant sur la continuité). C'est d'ailleurs ce dernier terme qui est utilisé en topologie, pas celui de morphisme (mais cela revient bien au même).

Un morphisme de groupe entre $(G, *)$ et $(G', \star)$ satisfait à l'égalité suivante qui est bien une « condition de linéarité par rapport à la loi » : $\forall (x, y) \in G,\ f(x * y) = f(x) \star f(y)$. En particulier, si e et e' sont les éléments neutres de G et G', alors : $f(e) = e'$. Une autre conséquence directe est que : $\forall x \in G,\ f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1}$.

2.2.2 Cas des espaces vectoriels : application et forme linéaires

Définition 11 — Morphisme d'espace vectoriel. Soient $(E, +, .)$ et $(F, +, .)$ deux espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$. Un morphisme d'ev f entre E et F est une application qui respecte la condition de linéarité par rapport aux lois $+$ (en fait qui est un morphisme de groupe entre les groupes $(E, +)$ et $(F, +)$) et qui conserve la « linéarité par rapport à la multiplication par un scalaire » :

$$\begin{cases} \forall (x, y) \in E^2, \quad f(x + y) = f(x) + f(y) & \text{condition d'additivité} \\ \forall x \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x) & \text{condition d'homogénéité} \end{cases} \tag{2.2}$$

Ceci est équivalent à la condition suivante (on parle de « préservation des combinaisons linéaires ») :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda \cdot x + y) = \lambda \cdot f(x) + f(y) \tag{2.3}$$

et on utilise plutôt le terme d'application linéaire ou d'opérateur linéaire ou encore de transformation linéaire.

Dans le cas où $F = \mathbb{K}$, on ne parle pas d'application linéaire mais de forme linéaire. Une forme linéaire est donc une application linéaire définie sur E et à valeurs dans $\mathbb{K}$ (supposé commutatif). En d'autres termes, on parle de forme au lieu d'application, mais c'est la même chose !

Si φ et ψ sont des formes linéaires et a et b des éléments de $\mathbb{K}$:

$$\forall x \in E, \quad (a\varphi + b\psi)(x) = a \cdot \varphi(x) + b \cdot \psi(x) \tag{2.4}$$

L'application constante de valeur $0_{\mathbb{K}}$ s'appelle la « forme linéaire nulle ».

2.2.3 Endo, iso, auto -morphismes

Un endomorphisme est un morphisme d'une structure dans elle-même.

Un isomorphisme est est un morphisme f entre deux ensembles munis de la même espèce de structure, tel qu'il existe un morphisme f' dans le sens inverse, tels que $f \circ f'$ et $f' \circ f$ sont les identités des structures. **Un isomorphisme est un morphisme bijectif.**

Deux ensembles munis du même type de structure algébrique sont dits isomorphes s'il existe un isomorphisme entre les deux ensembles.

L'isomorphie présente un intérêt majeur, car elle permet de transposer des résultats et propriétés démontrés sur l'un des deux ensembles à l'autre.

Un automorphisme est un isomorphisme d'une structure dans elle-même, i.e. à la fois un isomorphisme et un endomorphisme. **Un automorphisme est un endomorphisme bijectif.**

L'identité d'un ensemble est toujours un automorphisme, quelle que soit la structure considérée.

On note :

- $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F ;
- $\mathrm{Isom}_{\mathbb{K}}(E, F)$ l'ensemble des isomorphismes de E dans F ;
- $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E ;
- $GL_{\mathbb{K}}(E)$ le « groupe linéaire », i.e. le groupe des automorphismes de E.

2.2.4 Espace dual d'un espace vectoriel

Définition 12 — Espace dual. On appelle espace dual d'un espace vectoriel E l'ensemble des formes linéaires sur E. Il est lui-même un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et on le note E^* ou $hom(E, \mathbb{K})$.

La structure d'un espace et celle de son dual sont très liées. Nous allons détailler quelques points en nous restreignant aux cas qui nous intéressent (cas réel, dimension finie).

Remarque. Si l'on dispose, sur l'espace vectoriel considéré E, d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (voir chapitre 1), alors il existe un moyen « naturel » de plonger E dans E^*, i.e. d'associer à chaque élément de E un élément du dual, et ce de manière à former un isomorphisme entre E et un sous-espace de E^* : à chaque élément $x \in E$ on associe la forme linéaire φ_x : $E \to K$; $y \mapsto \langle x, y \rangle$. Alors l'application $f : E \to E^*$; $x \mapsto \varphi_x$ est une application linéaire injective, donc l'espace E est isomorphe au sous-espace $f(E)$ de E^*.

Si l'espace E est de dimension finie n, alors l'espace dual E^* est isomorphe à E et est donc lui aussi de dimension n. On a alors le théorème de la base duale (que je ne présente pas, car je n'ai pas parlé de base... mais peut-être pourrons-nous nous passer de ces rappels dans ce document).

Pour $x \in E$, on note $\langle \varphi, x \rangle$ pour $\varphi(x)$. Cette notation est appelée crochet de dualité.

Définition 13 — Dual topologique. Soit E un espace vectoriel topologique sur le corps $\mathbb{K}$. Le dual topologique E' de E est le sous-espace vectoriel de E^* (le dual algébrique de E) formé des formes linéaires continues.

Si l'espace est de dimension finie, le dual topologique coïncide avec le dual algébrique, puisque dans ce cas toute forme linéaire est continue. Mais dans le cas général, l'inclusion du dual topologique dans le dual algébrique est stricte.

Remarques topologiques. En complément, quelques mots sur les topologies faible et faible-*, afin de pouvoir faire dans de bonnes conditions une remarque sur leur usage.

Définition 14 — Topologies faible et faible-*. Soient E un espace vectoriel topologique et E' son dual topologique, i.e. l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur E.
On appelle topologie forte sur E la topologie initiale de E ;
On appelle topologie faible sur E la topologie la plus grossière qui rende continus tous les éléments de E' ;
On appelle topologie faible-* sur E' la topologie la plus grossière qui rendue continus tous les éléments de E.

Notons que si E est réflexif, i.e. si $E'' = E$ alors la topologie faible et la topologie faible-* coïncident.

Les topologies faibles ne sont en général pas métrisables, et ne peuvent donc se définir par la seule donnée des notions de convergence de suites. Cependant, c'est bien la notion de convergence faible de suites qui est utile en pratique.

On place ici des remarques faisant appel aux espaces de Lebesgue définis au chapitre 4.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Pour $1 < p < \infty$, les topologies faible et faible-* sur $L^p(\Omega)$ coïncident, et la notion de convergence associée (convergence contre des fonctions test dans L^p) est :

$$\forall g \in L^{p'}(\Omega), \quad \int_\Omega f_n g \longrightarrow \int_\Omega fg$$

Pour $p = \infty$, la topologie faible-* correspond à la convergence contre des fonctions test dans L^1 ; pour $p = 1$, la topologie faible correspond à la convergence contre des fonctions test dans L^∞. On s'interdira en revanche de considérer la convergence faible-* dans L^1, ou la convergence faible dans L^∞ (la question de savoir si L^1 est le dual de L^∞ touche à de subtiles questions d'axiomatique, et la réponse est négative si l'on admet l'axiome du choix...)

Quel est l'intérêt d'appauvrir la topologie ? Une des motivations majeures est que moins il y a d'ouverts, plus il y a de compacts. Il est beaucoup plus facile d'être compact pour la topologie faible que pour la topologie forte.

2.2.5 Noyau et image

Définition 15 — Noyau. Le noyau du morphisme f est l'ensemble des antécédents de l'élément neutre :

$$\ker(f) = \{x \in E, f(x) = 0\} = f^{-1}(\{0\}) \tag{2.5}$$

et f est injectif si et seulement si son noyau est réduit à $\{0\}$.

Définition 16 — Image. L'image du morphisme f est l'image par f de E :

$$\mathrm{im}(f) = \{f(x), x \in E\} = f(E) \tag{2.6}$$

et f est surjectif si et seulement si son image est égale à F.

Dans le cas d'**espaces vectoriels**, l'ensemble $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E et l'ensemble $\mathrm{im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Théorème 7 — Théorème du rang. Il est assez visible que (théorème de factorisation) f induit un isomorphisme de l'espace vectoriel quotient $E/\ker(f)$ sur l'image $\mathrm{im}(f)$. Deux espaces isomorphes ayant même dimension, il s'en suit la relation, valable pour un espace E de dimension finie, appelée théorème du rang :

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{im}(f)) = \dim(E) \tag{2.7}$$

Le nombre $\dim(\mathrm{im}(f))$ est aussi appelé rang de f et est noté $\mathrm{rg}(f)$.

On a également :

- l'image réciproque d'un sous-espace vectoriel de F par f est un sous-espace vectoriel de E ;
- l'image directe d'un sous-espace vectoriel de E par f est un sous-espace vectoriel de F.

2.3 Opérateur

Le terme « opérateur » a été utilisé au paragraphe précédent... regardons d'un peu plus près.

D'une manière générale, un opérateur est une application entre deux espaces vectoriels topologiques.

Un opérateur $O : E \to F$ est linéaire si et seulement si :

$$\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad \forall(x_1, x_2) \in E, \quad O(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda O(x_1) + \mu O(x_2) \tag{2.8}$$

où $\mathbb{K}$ est le corps des scalaires de E et F.

Lorsque $F = \mathbb{R}$, un opérateur est une fonctionnelle sur E.

Un opérateur est continu s'il est continu en tant qu'application (pour la définition de la continuité, voir chapitre suivant).

Un opérateur différentiel est un opérateur agissant sur des fonctions différentiables au sens des dérivés ordinaires ou partielles : voir définition au chapitre suivant.

On définit également les opérateurs différentiels elliptiques et hyperboliques. Mais pour cela, il faut introduire les notions de symbole et symbole principale d'un opérateur... et cela ne nous semble ni adapté à ce document, ni suffisamment « naturel » pour cet exposé. Nous nous contenterons de définir plus loin les notions d'équations aux dérivées partielles linéaires et homogènes du second-ordre dites elliptiques, hyperboliques et paraboliques.

3 Continuité et dérivabilité

Notes — Dans ce chapitre, nous nous intéresserons aux notions de continuité et de dérivabilité, les espaces nécessaires ayant été définis précédemment, ainsi que les notions d'application...

Dans la mesure où les problèmes que nous souhaitons aborder, i.e. ceux issus de la physique, sont généralement décrits par des équations différentielles ou des équations aux dérivées partielles, on comprend bien que la notion de dérivation est centrale.

Mais n'oublions pas que ces notions de continuité et de différentiabilité n'ont pas toujours été définies de manière précise au cours de l'histoire et ont donné lieu à de bien terribles affrontements entre nos glorieux anciens.

3.1 Continuité et classe C^0

Histoire

Dans le manuscrit de 1673 *la Méthode inverse des tangentes ou à propos des fonctions*, Leibniz dit : « J'appelle fonctions toutes les portions des lignes droites qu'on fit en menant des droites indéfinies qui répondent au point fixe et aux points de la courbe ; comme sont abscisse, ordonnée, corde, tangente, perpendiculaire, sous-tangente, sous-perpendiculaire... et une infinité d'autres d'une construction plus composée, qu'on ne peut figurer. » Finalement, au terme d'une correspondance nourrie entre Leibniz et Jean Bernoulli, celui-ci donne en 1718 la définition suivante : « On appelle fonction d'une grandeur variable une quantité composée, de quelque manière que ce soit, de cette grandeur variable et des constantes. ». Il propose la notation ϕx.

La continuité est en quelque sorte contenue, sous-jacente à ces définitions car les fonctions considérées sont « physiques » et ne présentent au plus qu'un nombre fini de discontinuités.

Dans son *Introductio in analysin infinitorum* de 1748, Euler définit une fonction d'une quantité variable comme « une expression analytique composée d'une manière quelconque de cette quantité variable et de nombres ou de quantités constantes ». Le mot « analytique » n'est pas davantage précisé. En fait, pour Euler, une fonction est une combinaison quelconque d'opérations prises dans le stock des opérations et des modes de calcul connus de son temps, et applicables aux nombres : opérations classiques de l'algèbre, exponentielle, logarithme, passage d'un arc à ses lignes trigonométriques..., certaines de ces opérations pouvant être itérées un nombre illimité de fois...

Euler Bolzano Heine

Dans ce même ouvrage, Euler dit qu'une fonction est continue si elle est définie par une seule expression anlytique (finie ou infinie) et mixte ou discontinue si elle possède plusieurs expression analytiques suivant ses intervalles de définition.

La définition actuelle est celle due à Bernard Bolzano dans sa théorie des fonctions en 1816 : « La fonction $f(x)$ varie suivant la loi de continuité pour la valeur x si la différence $|f(x+w)-f(x)|$ peut-être rendue plus petite que toute valeur donnée. » Il existe une notion de continuité uniforme qui est plus forte que la simple continuité et fixée par Heinrich Eduard Heine en 1872.

La continuité est une propriété topologique (donc indépendante de la métrique).

Définition 17 — Continuité d'une fonction en un point (version topologique). Soit f une application d'un espace topologique E dans un espace topologique F. On dit que f est continue en un point a de E si, quelque soit le voisinage W de $f(a)$ dans F, il existe un voisinage V de a dans E tel que $\forall x \in V$, $f(x) \in W$, c'est-à-dire que l'image réciproque de tout voisinage de $f(a)$ est un voisinage de a.

Cette définition est donnée pour la culture, car nous n'avons pas rappelé la notion de voisinage dans ce document. Cela n'a pas d'importance dans ce contexte puisque nous travaillerons sur des cas moins généraux.

Évidemment, une application de E dans F est continue si elle est continue en tout point de E.

Ramenons nous à des choses plus connues et plus en lien avec ce document. Dans le cas des espaces métriques, la continuité se définit comme suit.

Définition 18 — Continuité d'une fonction en un point (version métrique). Soient (E, d) et (E', d') deux espaces métriques, $f : E \to E'$ et $a \in E$. On dit que l'application f est continue en a si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in E, \quad \Big[d(x,a) < \eta \implies d'(f(x), f(a)) < \varepsilon \Big] \tag{3.1}$$

Ainsi f est continue en a si et seulement si la limite de f en a existe (elle vaut alors nécessairement $f(a)$).

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \tag{3.2}$$

Elle n'a pas de limite en $(0,0)$.

En effet, $f(x,y)$ est continue partout sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Elle est continue sur l'axe des abscisses et des ordonnées où elle est $\equiv 0$. Elle est donc séparément continue à l'origine, et par suite dans tout le plan. Mais elle n'est pas continue par rapport à l'ensemble des variables à l'origine, car sur la droite $y = mx$, elle prend la valeur $m/(1+m^2)$ en dehors de l'origine ; or $\frac{m}{1+m^2} \neq 0$ dès que $m \neq 0$, et par conséquent elle ne tend pas vers 0 lorsque (x,y) tend vers l'origine. Une telle fonction est dite partiellement continue.

Pour une fonction réelle, on peut définir une fonction continue comme une fonction dont on peut tracer le graphe sans lever le crayon. Si l'on exclut certains fonctions très particulières (comme les fractales), alors l'idée générale de la continuité est bien traduite par cette phrase (la fonction ne présente pas de « saut »).

Définition 19 — Continuité d'une fonction réelle en un point. Une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sera dite continue au point $a \in I$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in I, \quad \Big[|x-a| < \eta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon \Big]. \tag{3.3}$$

La classe des fonctions continues est notée C^0. Elle inclut par exemple les fonctions continues par morceaux ainsi que les constantes (dont la fonction nulle).

Attention à ne pas confondre la classe des fonctions continues C^0 avec C_0 l'ensemble des fonctions continues qui s'annulent à l'infini (sous-espace de l'espace des fonctions continues).

3.2 Continuité de Hölder et Lipschitz

Remarque : Dans le cas des espaces métriques, nous avons vu qu'il était possible de redéfinir la continuité à l'aide des ε plutôt que par les voisinages.

Avec Hölder et Lipschitz, la notion de « continuité uniforme » nous est proposée. La distinction entre continuité et continuité uniforme est la même que celle entre la convergence simple et la convergence uniforme dans le cas des séries (pour le lecteur qui s'en souviendrait). En effet, cette continuité uniforme ne regarde pas comment (quel ε) la fonction est continue en chaque point, mais comment elle est continue dans sa globalité, i.e. lorsque ce fameux ε n'est plus lié à la position sur la courbe, mais est fixé pour la fonction entière.

Hölder Lipschitz

La continuité höldérienne ou condition de Hölder est une condition suffisante (mais non nécessaire) pour qu'une application définie entre deux espaces métriques soit continue.

La définition s'applique en particulier pour les fonctions d'une variable réelle.

Définition 20 — Fonction a-höldérienne. Si (E, d) et (F, d') sont deux espaces métriques, une fonction $f : E \to F$ est dite a-höldérienne s'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad d'(f(x), f(y)) \leqslant C\, d(x, y)^a \tag{3.4}$$

La continuité höldérienne d'une fonction dépend donc d'un paramètre réel strictement positif $a \in]0\,;1]$, et prend en compte toutes les variations de la valeur de la fonction sur son ensemble de définition.

Si $0 < a \leqslant 1$ est fixé, l'ensemble des fonctions réelles a-höldériennes est un espace vectoriel, conventionnellement noté $\mathcal{C}^{0,a}(E, \mathbb{R})$.

Théorème 8 Toute application f qui est a-höldérienne est continue. Mieux, elle est uniformément continue, dans le sens suivant :

$$\text{Si } \varepsilon > 0, \text{ alors pour } \eta = (\varepsilon/C)^{1/a}, \quad d(x, y) < \eta \ \Rightarrow\ d(f(x), f(y)) < \varepsilon \tag{3.5}$$

Le réel η dépend de ε mais est indépendant de la variable x parcourant l'espace de définition de l'application.

Définition 21 — Fonction lipschitzienne. Lorsque $a = 1$, l'application est dit lipschitzienne. Une application lipschitzienne est plus « régulière » qu'une fonction simplement continue.

Toute fonction lipschitzienne (en tant que fonction höldérienne) est uniformément continue.

Toute fonction réelle lipschitzienne est (absolument continue donc à variation bornée donc) dérivable presque partout pour la mesure de Lebesgue et sa dérivée est essentiellement bornée.

3.3 Dérivée

Le nombre dérivé en un point d'une fonction à variable et valeurs réelles est le coefficient directeur de la tangente au graphe de cette fonction en ce point, ou aussi le coefficient directeur de l'approximation affine de cette fonction en ce point : ce nombre n'est donc défini que si cette tangente, ou cette approximation, existe. La dérivée d'une fonction f est une fonction qui, à tout nombre pour lequel f admet un nombre dérivé, associe ce nombre dérivé.

Définition 22 — Dérivée d'une fonction. Soit f une application d'un ouvert Ω du corps $\mathbb{K}$ (resp. un intervalle de $\mathbb{R}$) dans un espace affine normé F (resp. $\mathbb{R}$), alors on peut donner un sens, pour $a \in \Omega$, à la quantité :

$$f'(a) = \lim_{\substack{h \neq 0, h \to 0 \\ a+h \in \Omega}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \in F \tag{3.6}$$

que l'on appelle le vecteur dérivé ou simplement la dérivée de f en a.

Histoire

Au XVII^e^ siècle, la compréhension mais surtout la modélisation (i.e. la mise en équations) de phénomènes physiques et techniques conduit à la création au siècle suivant de l'analyse en tant que branche des mathématiques abordant les notions de dérivation, intégration et équations différentielles.

Les échanges, les conceptions et la compréhension des infinitésimaux ont animé le monde scientifique pendant bien longtemps, la discussion était tout autant philosophique que mathématique, ce qui est somme toute assez normal compte tenu du sujet... Les fondateurs incontestés de l'analyse sont Newton et Leibniz. La portée de leurs travaux est considérable car ils vont permettre non seulement la compréhension des courbes (puis le calcul des aires), mais aussi celle du mouvement des corps. C'est véritablement une révolution où l'on passe d'une science de la statique à une science de la dynamique.