

Stochastique prise en compte de la variabilité

Notes — Certains diront que c'est enfin dans ce chapitre que nous traitons de la réalité physique... c'est un point de vue. En effet, rien n'est jamais connu de manière parfaite.

L'aléa traduit aussi bien l'impossibilité d'une description déterministe exhaustive que l'irrégularité de tout phénomène observé. Les modèles déterministes ne sont finalement que des approximations des problèmes physiques correspondants, tout comme les modèles linéaires ne sont que des approximations de comportements réels non-linéaires par nature.

Nous nous restreindrons dans le nombre de formulations afin de ne présenter que ce qui nous semble aujourd'hui le plus pertinent.

22.1 Introduction

Dans la manière traditionnelle, encore appelée approche déterministe, la conception des structures repose sur des paramètres tels que les dimensions, la résistance des matériaux et le chargement, tous caractérisés par une valeur constante, i.e. leur moyenne. Sur la base de ces constantes on utilise un modèle mathématique du comportement pour déterminer si la structure est sûre ou non. Afin d'améliorer encore la sécurité, les variables structurelles sont alors remplacées par leur pire cas. Cette philosophie de conception se révèle trop coûteuse d'un point de vue économique car on se place dans le cas où tous les paramètres sont à leur pire valeur en même temps.

Il est bien connu que, par exemple, la résistance varie d'un élément structurel à l'autre, de sorte que cette résistance ne peut être décrite par une unique valeur. De plus, il est parfois nécessaire de prendre en compte des variations temporelles. Ces mêmes variations existent également pour les dimensions et le chargement. Cela est particulièrement vrai pour les chargements naturels comme la houle, le vent et les séismes, qu'il est difficile de prendre en compte de manière déterministe. Il faut en outre garder en tête qu'une certaine incertitude existe également dans le choix des modèles mathématiques utilisés pour l'analyse de la structure.

Le but d'utiliser une approche probabiliste plutôt qu'une simple approche déterministe est d'essayer de prendre en compte les incertitudes mentionnées ci-dessus afin de réaliser une analyse plus réaliste de la sûreté de la structure.

Dans ce chapitre, nous considérerons le problème de formulation classique suivant :

$$au = f \quad (22.1)$$

Jusqu'à présent, nous nous sommes contenté du cas où a est un opérateur déterministe, f l'excitation déterministe et u la réponse déterministe. Nous allons dans ce chapitre nous intéresser au cas où f est une excitation aléatoire et a un opérateur éventuellement aléatoire. Il s'en suit que la réponse du système u est elle-aussi aléatoire.

La manipulation d'équations stochastiques introduit deux difficultés :

- premièrement, les propriétés aléatoires du système doivent être modélisées « correctement » comme variables ou processus aléatoires, avec une distribution de probabilité réaliste ;
- deuxièmement, il faut être capable de résoudre le système différentiel ainsi obtenu, et la réponse obtenue doit pouvoir être décrite par ses moments statistiques.

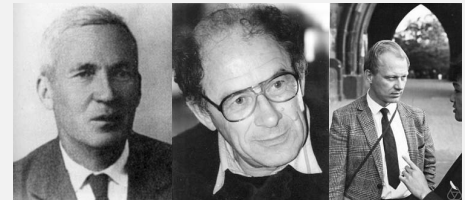
Enfin, la relation entre éléments finis et probabilité recouvre deux aspects :

- d'une part le calcul des moments statistiques de la réponse autour de sa moyenne (essentiellement l'écart-type) ;
- d'autre part les méthodes de fiabilité, par lesquelles on cherche à calculer une probabilité de défaillance associée à un critère dont les arguments dépendent du résultat d'un calcul par éléments finis.

Histoire

Les séries de fonctions, apparues à la fin du XVII^e siècle, et particulièrement les séries de Taylor (voir historique du paragraphe A.1.1), sont aujourd'hui un outil indispensable, permettant notamment d'approcher une fonction de manière facilement exploitable. C'est pourquoi la manière la plus naturelle d'appréhender le traitement de l'équation (22.1) a été de procéder à un développement en série.

Dès le début du XVIII^e siècle, la **théorie des perturbations** a été utilisée par les astronomes pour les besoins de la mécanique céleste : en effet, les équations différentielles décrivant un système de n corps en interaction gravitationnelle n'a pas de solution exacte générale pour $n \geq 3$. Cet aspect de la théorie des perturbations a été synthétisé à la fin du XIX^e siècle dans les ouvrages classiques de Laplace, Tisserand et Poincaré, avant de connaître de nouveaux développements dans la seconde moitié du XX^e siècle avec l'avènement en 1954 de la « théorie KAM » (théorème de mécanique classique i.e. non relativiste et non quantique, mettant en défaut l'hypothèse ergodique de Boltzmann), du nom de ses trois concepteurs : Kolmogorov, Arnold et Moser. La méthode a par ailleurs été abondamment utilisée au XX^e siècle pour les besoins de la physique quantique, d'abord en mécanique quantique non relativiste, puis en théorie quantique des champs.



Kolmogorov Arnold Moser

C'est encore cette même méthode de perturbation qui est la plus ancienne et la plus utilisée en ingénierie pour analyser les systèmes aléatoires (pas seulement aléatoires, voir la présentation de la méthode de réanalyse au paragraphe 13.6 qui est une méthode de perturbation). Bien que les méthodes mathématiques sous-jacentes soient très simples, cela ne signifie nullement que leur validité aille de soi : on fait un développement de Taylor de chaque quantité aléatoire autour de sa moyenne, les termes causant l'instabilité de la solution approchée étant d'ordres supérieurs. Toutefois, dans la pratique, il n'est pas possible d'aller au delà de l'ordre un ou deux. Cela réduit la portée des applications de la méthode aux cas des **petits aléas**, i.e. **de petites fluctuations autour d'une valeur moyenne**. Sans efforts inconsidérés, **ces méthodes ne fournissent pas de statistiques d'ordres élevés**.

Il a donc bien évidemment été essayé d'améliorer cette méthode afin d'obtenir des statistiques d'ordres plus élevés. Une méthode, peu connue et peu utilisée, pour atteindre ce but est la **hierarchy closure approximation**. Il s'agit d'exprimer les moments d'ordres élevés en fonctions de moments d'ordres moins élevés. Si l'on considère que l'opérateur a de l'équation (22.1) peut être décomposé en une partie déterministe \bar{a} et une partie aléatoire \tilde{a} , cette équation se met sous la forme :

$$(\bar{a} + \tilde{a})u = f \quad (22.2)$$

qui se résout en :

$$u = \bar{a}^{-1} f - \bar{a}^{-1} \tilde{a} u \quad (22.3)$$

En appliquant à cette dernière équation l'opérateur \tilde{a} , puis en réinjectant le résultat dans l'équation précédente, il vient :

$$u = \bar{a}^{-1} f - \bar{a}^{-1} \tilde{a} \bar{a}^{-1} f + \bar{a}^{-1} \tilde{a} \bar{a}^{-1} \tilde{a} u \quad (22.4)$$

et on peut poursuivre ainsi, si on le souhaite. Cela ne peut néanmoins être fait que si :

$$E[(\bar{a}^{-1} \tilde{a})^n u] = E[(\bar{a}^{-1} \tilde{a})^n] E[u] \quad (22.5)$$

où $E[.]$ est la moyenne (espérance mathématique).

Le découplage effectué par l'équation (22.5) n'a pas de base rigoureuse et est souvent justifié intuitivement par un argument d'indépendance locale. On aboutit de toutes façons à une formulation très complexes pour les moments d'ordres élevés, de sorte que cette méthode n'est utilisée en pratique elle aussi que pour le cas des petites fluctuations.

22.2 Représentation des processus stochastiques

Nous allons reprendre et compléter ce qui a été présenté au paragraphe 1.2. Nous avons donc déjà exposé qu'une probabilité est une mesure particulière. Reprenons cela avec un vocabulaire probabiliste.

22.2.1 Variable aléatoire

On appelle **épreuve** l'observation d'un phénomène aléatoire. Toutes les **réalisations** possibles d'une épreuve forment l'ensemble de tous les résultats d'une expérience aléatoire, qui sera noté Θ . Un **événement** E est un sous-ensemble de Θ contenant les réalisations $\theta \in \Theta$. La **mesure** de l'occurrence de E est une mesure de probabilité notée P . L'ensemble de tous les événements possibles ayant une probabilité ainsi définie est appelé une σ -algèbre associée à Θ , et est notée \mathcal{F} . L'espace de probabilité construit grâce à ces notions est noté (Θ, \mathcal{F}, P) . En d'autres termes, pour reprendre la partie I, l'espace de probabilité (Θ, \mathcal{F}, P) est construit sur la tribu \mathcal{F} et avec la mesure P .

Une **variable aléatoire** réelle X est une fonction $X : (\Theta, \mathcal{F}, P) \rightarrow \mathbb{R}$. Pour les variables aléatoires continues, la **densité de probabilité** est notée $f_X(x)$ et la **fonction de répartition** est notée $F_X(x)$. Un **vecteur aléatoire** est un vecteur dont les composantes sont des variables aléatoires.

Définition 81 — Moments d'une variables aléatoire. Les **moments d'ordre n** d'une variable aléatoire X , s'ils existent, sont définis par :

$$E[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x) dx \quad (22.6)$$

et les moments centrés réduits, s'ils existent, sont :

$$\text{moyenne : } \mu = \langle X \rangle = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \quad (22.7)$$

$$\text{variance : } \sigma^2 = E[(X - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f_X dx \quad (22.8)$$

$$\text{coefficient d'asymétrie (skewness) : } \delta = \frac{E[(X - \mu)^3]}{\sigma^3} \quad (22.9)$$

$$\text{coefficient d'aplatissement (kurtosis) : } \kappa = \frac{E[(X - \mu)^4]}{\sigma^4} \quad (22.10)$$

La variance est égale au carré de l'écart-type.

22.2.2 Espace de probabilité

Soient maintenant deux variables aléatoires X et Y . La **covariance** de ces deux variables est :

$$\text{Cov}[X, Y] = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)(y - \mu_Y) f_{X,Y}(x, y) dx dy \quad (22.11)$$

où $f_{X,Y}$ est leur **densité de probabilité conjointe**.

Définition 82 L'**espace vectoriel des variables aléatoires réelles d'écart-type fini** (moment d'ordre 2), noté $L^2(\Theta, \mathcal{F}, P)$, est un espace de Hilbert.

Le produit scalaire sur cet espace de Hilbert est défini comme : $(X, Y) = \int xy dP$ où dP est la mesure de probabilité conjointe, ce qui équivaut à $(X, Y) = \int xy f_{X,Y} dx dy$. Avec ce qui précède, le produit scalaire est donc finalement défini par :

$$(X, Y) = E[XY] \quad (22.12)$$

et la norme associée est :

$$\|X\| = \sqrt{E[X^2]} \quad (22.13)$$

Théorème 65 Les polynômes d’Hermite sous leur forme probabiliste, H_n , présentés au paragraphe A.1.5, forment une base de l’espace $L^2(\Theta, \mathcal{F}, P)$.

On rappelle également qu’une variable aléatoire gaussienne centrée réduite (i.e. de moyenne nulle, écart-type égal à 1) a une densité de probabilité φ et une fonction de répartition Φ définies par :

$$\varphi(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{et} \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt \quad (22.14)$$

Dans la suite du chapitre, nous noterons ξ une telle variable aléatoire gaussienne centrée réduite.

Nous présentons quelques propriétés des polynômes d’Hermite, à commencer par la relation d’orthogonalité :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) H_m(x) \varphi(x) dx = n! \delta_{nm} \quad (22.15)$$

où δ_{nm} est le symbole de Kronecker.

$$\frac{dH_n(x)}{dx} = n H_{n-1}(x) \quad (22.16)$$

$$H_i(x) H_j(x) = \sum_{k=|i-j|}^{i+j} C_{ijk} H_k(x) \quad (22.17)$$

avec :

$$\begin{cases} C_{ijk} = 0 & \text{si } \frac{i+j+k}{2} \notin \mathbb{N} \\ C_{ijk} = \frac{i!j!}{\left(\frac{i+j-k}{2}\right)! \left(\frac{i+k-j}{2}\right)! \left(\frac{j+k-i}{2}\right)!} & \text{sinon} \end{cases} \quad (22.18)$$

22.2.3 Processus ou champ aléatoire

Nous venons de présenter les variables aléatoires. Or, ce qui nous intéresse, est de prendre en compte la variation d’une propriété (par exemple le module d’Young du matériau) continûment sur notre domaine Ω .

Définition 83 — Champ aléatoire ou processus stochastique. Un **champ aléatoire scalaire** $w(x, \theta)$ peut être défini comme un ensemble de variables aléatoires indexées par un paramètre continu $x \in \Omega$. le paramètre x n’est pas forcément continu, il peut être discret. Nous nous intéressons ici au cas d’un processus continu. Ainsi un **processus stochastique** $w(x, \theta)$ définit une fonction de deux variables x et θ et représente :

- x et θ variables : une famille de fonctions ;
- x variable et θ fixé : une fonction de x , i.e. une réalisation du champ aléatoire (i.e. une fonction de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R} , où notre domaine Ω est un ouvert de \mathbb{R}^d) ;
- x fixé et θ variable : une variable aléatoire ;
- x et θ fixés : un nombre.

Un champ aléatoire est dit :

- **vectorel** si la quantité $w(x, \theta)$ attachée au point x est un vecteur aléatoire.
- **unidimensionnel** si $d = 1$ et **multidimensionnel** sinon (cas qui nous intéresse).
- **gaussien** si tout vecteur $\{w(x_1), \dots, w(x_n)\}$ est un vecteur gaussien. Il est alors complètement défini par sa moyenne, sa variance et sa fonction d’autocovariance définie par :

$$C(x, x') = \text{Cov}[w(x), w(x')] \quad (22.19)$$

- **stationnaire (au sens faible)** si sa moyenne et sa variance sont constantes et si sa fonction d’autocorrélation ρ ne dépend que de la différence $(x - x')$. La fonction d’autocorrélation est définie par :

$$\rho(x, x') = \frac{C(x, x')}{\sigma(x)\sigma(x')} \quad (22.20)$$

22.2.4 Discrétisation de champs aléatoires

Maintenant que nous avons défini ce qu'est un processus stochastique $w(x, \theta)$, il nous faut le discrétiser. On se propose donc d'approcher $w(x, \theta)$ par $w_h(x, \chi)$, où χ est un vecteur aléatoire constitué de n variables aléatoires ξ_i , i.e. sous la forme :

$$w(x, \theta) \approx w_h(x, \chi) \quad (22.21)$$

Plusieurs méthodes sont possibles :

discrétisation par valeurs moyennes : les ξ_i sont des intégrales pondérées de $w(x, \theta)$ sur un domaine Ω_i , et dans le cas des éléments finis, sur chaque élément. Cette méthode a pour conséquence de lisser le processus stochastique ;

discrétisation par valeurs ponctuelles : les ξ_i sont sélectionnées parmi les valeurs de $w(x, \theta)$ en certains points x . Cette méthode de collocation a pour conséquence de générer des irrégularités additionnelles ;

développement en séries : le champ est représenté par une série de variables aléatoires et de fonctions spatiales déterministes. C'est uniquement ce type de méthode que nous allons présenter.

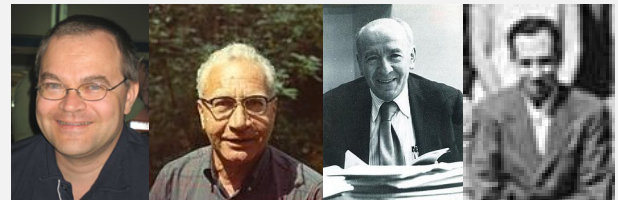
22.2.5 Développement en série de Karhunen-Loève

Histoire

Nous avons déjà mentionné dans ce chapitre que la méthode de perturbation, basée sur un développement en série de Taylor, avait des limitations.

Toutefois, le recours à un développement en série reste une idée intéressante... reste à trouver comment procéder.

Pour améliorer le développement en série d'un champ aléatoire, on peut penser à utiliser un développement à la Fourier : scinder la dépendance des variables x et θ , et utiliser une base de fonctions orthogonales. Ainsi cherche-t-on à écrire le processus stochastique $w(x, \theta)$ sous la forme :



Karhunen

Loève

Kac

Siegert

$$w(x, \theta) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \xi_i(\theta) f_i(x) \quad (22.22)$$

où les α_i sont des constantes à déterminer, les ξ_i des variables aléatoires et les f_i des fonctions déterministes orthogonales entre elles. C'est exactement ce que propose le développement de Karhunen-Loève, obtenu indépendamment par Karhunen en 1947, Loève en 1948, mais également en 1947 par Kac et son ami Siegert du Radiation Laboratory.

La méthode de Karhunen-Loève se propose elle-aussi de décomposer le champ aléatoire $w(x, \theta)$ en une partie déterministe (sa moyenne $\mu(x)$) et une partie aléatoire. Cette fois, la partie aléatoire sera décomposée sur la base des valeurs propres λ_i et des fonctions propres $\varphi_i(x)$ de la fonction d'autocovariance

$$C_{ww}(x, x') = \sigma(x)\sigma(x')\rho(x, x') \quad (22.23)$$

Il faut donc résoudre le problème aux valeurs propres suivant :

$$\int_{\Omega} C_{ww}(x, x')\varphi(x')d\Omega = \lambda_i\varphi_i(x), \quad \forall i \geq 1 \quad (22.24)$$

qui est une équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce. Le noyau $C_{ww}(\cdot, \cdot)$ étant une fonction d'autocovariance, il est borné, symétrique et défini positif (Loève, 1977). l'ensemble des $\{\varphi_i\}$ forme une base complète orthogonale de l'espace des fonctions $L^2(\Omega)$. Les valeurs propres sont réelles, positives et en nombre fini.

Chaque réalisation de w peut donc être développée sur cette base sous la forme :

$$w(x, \theta) = \mu(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i} \xi_i(\theta) \varphi_i(x) \quad (22.25)$$

où les ξ_i sont les coordonnées de la réalisation du champ aléatoire par rapport à l'ensemble des fonctions déterministes φ_i .

On montre aisément que $E[\xi_m \xi_n] = \delta_{mn}$ et $E[\xi_n] = 0$. La famille $\{\xi_i\}_{i \geq 1}$ forme un ensemble orthonormal de variables aléatoires.

Comme il ne peut y avoir de valeurs propres multiples (sauf 0), il est possible de les classer en une suite décroissante. En tronquant la somme de l'équation (22.25) à l'ordre M (i.e. en ne retenant que les M plus grands valeurs propres), on obtient l'approximation de Karhunen-Loève du champ aléatoire :

$$w_h(x, \theta) = \mu(x) + \sum_{i=1}^M \sqrt{\lambda_i} \xi_i(\theta) \varphi_i(x) \quad (22.26)$$

Comme les fonction propres sont orthonormales, on obtient une expression de chacune des variables aléatoires ξ_i apparaissant dans la série de Karhunen-Loève :

$$\xi_i(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \int_{\Omega} (w(x, \theta) - \mu(x)) \varphi_i(x) d\Omega \quad (22.27)$$

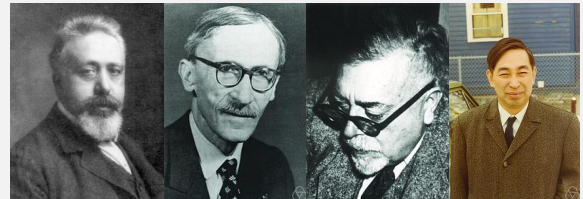
Cette dernière équation nous dit également que lorsque w est un champ gaussien, alors chaque variable aléatoire ξ_i est également gaussienne. Les $\{\xi_i\}_{i \geq 1}$ forment un ensemble de variables aléatoires gaussiennes centrées réduites indépendantes.

22.2.6 Chaos polynomial

Histoire

La théorie des fonctionnelles non-linéaires a été développée par Volterra dès 1913. Il généralisa le développement des fonctions en série de Taylor au cas des fonctionnelles.

Wiener s'intéressa au problème par ses contact avec Paul Lévy, élève de Volterra. C'est lui qui appliqua les idées de Volterra pour la première fois à l'analyse stochastique. Il appliqua sa théorie du mouvement brownien à l'intégration des fonctionnelles de Volterra et développa ce que l'on appelle désormais le chaos homogène.



Volterra Lévy Wiener Itô

Poursuivant les travaux de Wiener, Cameron et Martin en 1947 proposèrent un développement de type Fourier pour les fonctionnelles non-linéaires : le développement de Fourier-Hermite. C'est à nouveau Wiener qui, à partir de ses travaux de 1923 sur les espaces différentiels et de 1938 sur les chaos homogène, appliqua le développement de Fourier-Hermite en 1958 aux problèmes impliquant des phénomènes aléatoires. Il en résultera le développement de Wiener-Hermite, qui a été appliqué depuis à une grande variété de problèmes.

Le chaos homogène de Wiener a ensuite été raffiné par Itô en 1951 pour obtenir ce que l'on appelle maintenant l'intégrale multiple de Wiener.

L'utilisation du développement de Karhunen-Loève nécessite de connaître la fonction de covariance du processus à développer. Or, si l'on souhaite appliquer un tel développement aux coefficients aléatoires de l'opérateur dans l'équation (22.1)... et bien justement on ne connaît pas la fonction de covariance ni par conséquent ses fonctions propres. Il est nécessaire de trouver un autre développement qui contourne le problème.

Le chaos polynomial est une forme particulière du chaos homogène. Il est défini comme suit.

Définition 84 — Chaos polynomial. Le **chaos polynomial de dimension M et d'ordre p** est défini comme l'ensemble des polynômes d'Hermite multidimensionnels en les M variables aléatoires gaussiennes centrées réduites ξ_1, \dots, ξ_M de degré inférieur ou égale à p .

Chacun de ces polynômes est complètement défini par une liste de M entiers positifs ou nuls $\alpha_1, \dots, \alpha_M$ comme suit à partir des polynômes d'Hermite H_n :

$$\Psi_{\alpha} = \prod_{i=1}^M H_{\alpha_i}(\xi_i) \quad (22.28)$$

où α est la liste considérée.

L'ensemble des chaos polynomiaux est un sous-espace linéaire de l'espace des fonctions L^2 de variables aléatoires Θ défini plus haut, et est un anneau pour la multiplication fonctionnelle.

Déterminons la dimension de la base du chaos polynomial de dimension M et d'ordre p :

Démonstration. (On pourrait aboutir au résultat plus directement, mais nous en profitons pour parler des polynômes homogènes). Considérons l'anneau des polynômes en M indéterminées $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_M]$. Un polynôme homogène, ou forme algébrique, est un polynôme en plusieurs indéterminées dont tous les monômes non nuls sont de même degré total. L'ensemble des polynômes homogènes de degré p dans $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_M]$ forme un \mathbb{R} -espace vectoriel. Sa base canonique est l'ensemble des monômes $X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \dots X_M^{\alpha_M}$ où $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_M = p$. Sa dimension est donc le nombre de p -combinaisons avec répétition de l'ensemble $\{1, 2, \dots, M\}$, i.e. $\Gamma_M^p = \binom{M+p-1}{p}$. La dimension de cette base vaut $\sum_{i=0}^p \Gamma_M^i$, avec $\Gamma_M^0 = 1$. Tous calculs faits, La dimension de la base du chaos polynomial de dimension M et d'ordre p est donc donnée par :

$$\binom{M+p}{p} \quad (22.29)$$

□

Le tableau 22.1 donne le nombre de polynômes présents dans la base du chaos polynomial considéré en fonction du nombre M de variables aléatoires et du degré maximal p choisi.

	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$	$p = 4$
$M = 1$	2	3	4	5
$M = 2$	3	6	10	15
$M = 3$	4	10	20	35
$M = 4$	5	15	35	70
$M = 5$	6	21	56	126
$M = 6$	7	28	84	210

Tableau 22.1: Nombre de polynômes dans la base du chaos : M est le nombre de variables aléatoires, et p le degré maximal

22.3 Éléments finis stochastiques

Nous rappelons l'équation (22.1) :

$$au = f \text{ que l'on peut écrire maintenant : } a(x, \theta)u(x, \theta) = f(x, \theta)$$

où l'opérateur a est défini sur le produit d'un espace de Hilbert de type L^2 (en fonction du problème) par l'espace de Hilbert $L^2(\Theta, \mathcal{F}, P)$. C'est un opérateur différentiel dont les coefficients ont des fluctuations aléatoires dépendant d'une ou plusieurs variables.

On fait l'hypothèse que l'opérateur a est un opérateur différentiel dont les coefficients aléatoires sont contraints à être des processus stochastiques du second ordre. Cette hypothèse n'est pas sévère en fait, car la plupart des processus physiquement mesurables sont de ce type. On pourra donc écrire chacun des coefficients $a_i(x, \theta)$ de a comme la somme d'une composante déterministe $\bar{a}_i(x) = E[a_i(x, \theta)]$ et d'une composante aléatoire $\tilde{a}_i(x, \theta)$. On obtiendra à nouveau un système sous la forme :

$$(\bar{a}(x) + \tilde{a}(x, \theta))u(x, \theta) = f(x, \theta) \quad (22.30)$$

qui se résout en :

$$u = g(\tilde{a}_i(x, \theta), f(x, \theta)) \quad (22.31)$$

avec g une fonctionnelle non-linéaire.

22.3.1 Développement en séries de von Neumann

Notre problème consiste à résoudre l'équation (22.30), i.e. à inverser l'opérateur. Lorsque un opérateur est inversible, son inverse admet un développement en série convergent. La méthode de développement en séries de von Neumann consiste à écrire la solution de l'équation (22.30) sous la forme :

$$u(\tilde{a}(\theta), x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (\bar{a}^{-1}(x)\tilde{a}(x, \theta))^i f(x, \theta) \quad (22.32)$$

qui ne converge que si :

$$\|\bar{a}^{-1}(x)\tilde{a}(x, \theta)\| < 1 \quad (22.33)$$

L'intérêt est que l'on ne doit inverser que $\bar{a}^{-1}(x)$. Toutefois, on ne sait pas calculer symboliquement les termes d'ordre supérieur à deux, et on se contente de simulations numériques au delà. On peut faire les mêmes remarques que pour la méthode de perturbation et il est difficile d'obtenir les moments d'ordre supérieur à deux, surtout si l'on considère la valeur moyenne du processus sur chaque élément, comme nous allons l'illustrer immédiatement en mécanique.

22.3.2 Un exemple en statique linéaire

Considérons le cas de la statique linéaire décrite par le système :

$$[K] \{q\} = \{F\}$$

mais où cette fois, le matériau utilisé est supposé avoir un module d'Young représenté par un champ aléatoire gaussien. La loi de comportement, traduite par la matrice d'élasticité, s'écrit alors :

$$H(x, \theta) = w(x, \theta) H_0 \quad (22.34)$$

où H_0 est une matrice déterministe constante.

Chaque matrice de rigidité élémentaire, donnée par $[k^e] = \int_{\Omega_e} [N_u]^{-1} [\mathcal{L}]^{-1} [H] [\mathcal{L}] [N_u] d\Omega_e$ s'écrit, en reportant le développement de Karhunen-Loève de $w(x, \theta)$ est donnée par la relation (22.25) :

$$[k^e(\theta)] = [k_0^e] + \sum_{i=1}^{\infty} [k_i^e] \xi_i(\theta) \quad (22.35)$$

avec

$$[k_i^e] = \sqrt{\lambda_i} \int_{\Omega_e} \varphi_i [N_u]^{-1} [\mathcal{L}]^{-1} [H_0] [\mathcal{L}] [N_u] d\Omega_e \quad (22.36)$$

Suite à l'assemblage, on obtient le système :

$$\left([K_0] + \sum_{i=1}^{\infty} [K_i] \xi_i \right) \{q(\theta)\} = \{F\} \quad (22.37)$$

où $[K_0]$ est la matrice de rigidité globale calculée aux valeurs moyennes, et les matrices $[K_i]$ des matrices déterministes obtenues par les techniques d'assemblage classique.

On réécrit le système précédent :

$$[K_0] \left([I] + \sum_{i=1}^{\infty} [K_0]^{-1} [K_i] \xi_i \right) \{q(\theta)\} = \{F\} \quad (22.38)$$

ce qui conduit à :

$$\{q(\theta)\} = \left([I] + \sum_{i=1}^{\infty} [K_0]^{-1} [K_i] \xi_i \right)^{-1} \{q_0\}, \quad \text{avec} \quad \{q_0\} = [K_0]^{-1} \{F\} \quad (22.39)$$

et le développement en série de von Neumann de cette dernière équation donne :

$$\{q(\theta)\} = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \left(\sum_{i=1}^{\infty} [K_0]^{-1} [K_i] \xi_i \right)^k \{q_0\} \quad (22.40)$$

En tronquant les développements de Karhunen-Loève et de von Neumann, on obtient une approximation de $\{q(\theta)\}$. On pourra également noter la ressemblance avec ce qui a été exposé au paragraphe 13.6 sur la méthode de réanalyse.

22.3.3 Projection sur la base du chaos polynomial

Les équations (22.32) et (22.40) montrent que la solution s'exprime comme série polynomiale de variables gaussiennes centrées réduites ξ_i . Il est possible de réarranger tous les termes de l'équation (22.32) en l'indexant par un seul indice j sous la forme :

$$u^i(\theta) = \sum_{j=0}^{\infty} u_j^i \mathcal{P}_j \quad (22.41)$$

où les \mathcal{P}_j sont les polynômes homogènes en les variables gaussiennes centrées réduites ξ_k (avec $\mathcal{P}_0 \equiv 1$). Comme les polynômes homogènes forment une base de $L^2(\Theta, \mathcal{F}, P)$, les coefficients u_j^i sont les coordonnées de $u^i(\theta)$ dans cette base. Mais les polynômes homogènes ne forment pas une base orthogonale de $L^2(\Theta, \mathcal{F}, P)$ au sens du produit scalaire défini par la relation (22.12), contrairement au chaos polynomial. La solution peut donc également s'écrire dans la base du chaos polynomial sous la forme :

$$u(\theta) = \sum_{j=0}^{\infty} u_j \Psi_j \quad (22.42)$$

Il s'agit simplement d'un changement de base, et dans ce cas, même le premier terme de la série dans la base du chaos polynomial n'est pas le même que dans la série de von Neumann.

Pour en revenir à l'exemple précédent, cela signifie que l'on peut décomposer les déplacements dans la base du chaos polynomial : $\{q(\theta)\} = \sum_{i \geq 0} \{q_i\} \Psi_i(\theta)$, où les $\{q_j\}$ sont des vecteurs déterministes (de dimension égale au nombre de degrés de liberté). Dans ce cas, tous les termes sont différents du développement en série de von Neumann, même le premier $\{q_0\}$.

22.3.4 Obtention des coefficients du système matriciel à résoudre

Nous allons poursuivre notre exemple de statique linéaire pour obtenir explicitement le système à résoudre. Pour cela, nous substituons le développement sur la base du chaos polynomial donné par la relation (22.42) dans le développement de Karhunen-Loève de l'équation (22.37). En notant $\xi_0(\theta) \equiv 1$, on obtient :

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} [K_i] \xi_i(\theta) \right) \left(\sum_{i=0}^{\infty} \{q_i\} \Psi_i(\theta) \right) = \{F\} \quad (22.43)$$

Et il est évidemment nécessaire de tronquer les séries dans cette équation pour pouvoir résoudre numériquement.

Nous supposons donc que le développement de Karhunen-Loève est tronqué à l'ordre $M + 1$ et que la base de chaos polynomial sera considérée jusqu'à l'ordre p . Le résidu correspondant à cette troncature de l'équation (22.43) est :

$$R_{M,p} = \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^{p-1} [K_i] \{q_j\} \xi_i(\theta) \Psi_j(\theta) - \{F\} \quad (22.44)$$

La meilleure approximation de $\{q(\theta)\}$ est obtenue en minimisant le résidu au sens des moindres carrés. Cela se produit lorsque le résidu est orthogonal au sous-espace engendré par les $\{\Psi_k\}_{k=0}^{p-1}$ dans $L^2(\Theta, \mathcal{F}, P)$, ce qui s'écrit :

$$E[R_{M,p} \cdot \Psi_k] = 0, \quad \forall k \in \{0, \dots, p-1\} \quad (22.45)$$

Maintenant, posons :

$$c_{ijk} = E[\xi_i \Psi_j \Psi_k] \quad (22.46)$$

$$\{F\}_k = E[\Psi_k \{F\}] \quad (22.47)$$

$$[K]_{jk} = \sum_{i=0}^M c_{ijk} [K_i] \quad (22.48)$$

On remarquera au passage que $\{F_k\}$ est nul pour tout $k > 0$ dans le cas d'un chargement déterministe (ce qui est le cas dans notre exemple).

On obtient finalement le système matriciel suivant à résoudre :

$$\begin{bmatrix} [K]_{0,0} & \cdots & [K]_{0,p-1} \\ \vdots & & \vdots \\ [K]_{p-1,0} & \cdots & [K]_{p-1,p-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q\}_0 \\ \vdots \\ \{q\}_{p-1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F\}_0 \\ \vdots \\ \{F\}_{p-1} \end{Bmatrix} \quad (22.49)$$

qui est un système de taille p (ordre du développement dans la base du chaos polynomial) \times nombre de degrés de liberté du modèle déterministe.

Les blocs diagonaux du système ci-dessus $[K]_{jj}$ représentent la contribution due à la valeur moyenne. Plus les fluctuations des propriétés matérielles sont faibles, plus le système est diagonal par blocs. Le système reste par ailleurs symétrique, défini-positif et à caractère bande. Il peut être résolu directement par une factorisation de Cholesky, ou par une méthode hiérarchique.

22.3.5 Synthèse et remarques

Toute variable aléatoire X de $L^2(\Theta, \mathcal{F}, P)$ de fonction de répartition $F_X(x)$ peut être transformée en une variable gaussienne centrée réduite ξ en utilisant la relation $\xi = F_X^{-1}(\Phi(\xi))$ (où Φ est la fonction de répartition gaussienne centrée réduite) et donc se décomposer sur une base orthogonale de $L^2(\Theta, \mathcal{F}, P)$ telle que celle des polynômes d'Hermite :

$$X = \sum_{i=0}^{\infty} a_i H_i(\xi)$$

Les coefficients a_i , dans cette base, s'expriment comme :

$$a_i = \frac{E[XH_i(\xi)]}{E[H_i(\xi)^2]} = \frac{E[XH_i(\xi)]}{i!}$$

De la même manière, un vecteur aléatoire X de M variables aléatoires indépendantes peut être représenté par M variables aléatoires gaussiennes centrées réduites ξ_i ($i = 1 \dots M$). Enfin, toute fonction S suffisamment régulière d'une variables ou d'un vecteur aléatoire X à valeur scalaire ou vectorielle peut être décomposée sur la base du chaos polynomial composée des polynômes d'Hermites multidimensionnels (i.e. en M variables) de variables gaussiennes centrées réduites et s'écrire sous la forme :

$$S = \sum_{i=0}^{\infty} S_i \Psi(\xi_j), \quad j = 1 \dots M$$

La méthode des éléments finis stochastiques spectraux initialement proposée par Ghanem et Spanos avait pour but de modéliser la variabilité spatiale des propriétés matérielles d'un système mécanique, puis de propager cette incertitude à travers le modèle. Le module d'Young est modélisé comme un champ gaussien $E(x)$ et un développement en série de Karhunen-Loève permet de le représenter à partir d'une famille de variables gaussiennes centrées réduites :

$$E(x) = \mu(x) + \sum_{i=0}^{\infty} \sqrt{\lambda_i} \varphi_i(x) \xi_i$$

à partir des valeurs propres λ_i et des vecteurs propres φ_i de la fonction d'autocovariance du champ aléatoire. **En pratique, on n'utilisera évidemment qu'un nombre limité M de termes, correspondant aux valeurs propres les plus grandes.**

La matrice de rigidité est alors elle-aussi aléatoire et on peut l'exprimer aussi bien dans la base de variables gaussiennes que dans la base du chaos polynomial :

$$[K] = \sum_{i=0}^{\infty} [K]_i \xi_i = \sum_{j=0}^{\infty} [K]_j \Psi_j$$

Si le champ aléatoire considéré n'est plus gaussien (par exemple lognormal), ou si la dépendance de la rigidité en fonction de ce champ n'est plus linéaire, Ghanem montre que la matrice de rigidité peut encore être représentée sur la base du chaos polynomial. **On a montré que cela est encore valable quelque soit la loi des variables aléatoires.**

Dans l'exemple présenté, le chargement était considéré comme déterministe, mais il peut lui-aussi être modélisé par des variables aléatoires de loi quelconque du moment qu'elles sont décomposées sur la base du chaos polynomial, et on obtient le système discrétisé suivant :

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} [K]_i \Psi_i \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \{q\}_j \Psi_j \right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \{F\}_k \Psi_k \right) \quad (22.50)$$

La résolution numérique se fait en tronquant les séries de sorte que le résidu associé soit minimal au sens de Galerkin.

Le processus stochastique porte sur des propriétés liées au domaine considéré Ω . Le plus simple des choix est donc de considérer la même discrétisation pour le modèle éléments finis que pour la discrétisation du processus stochastique. Toutefois, le maillage du domaine Ω correspond au problème traité et plus particulièrement à l'obtention de certaines quantités : pour un calcul mécanique, le maillage doit permettre d'appréhender correctement le champ de contraintes. Or ce maillage « compatible » avec les contraintes n'a strictement aucune raison d'être adapté à la discrétisation du champ stochastique ! **C'est pourquoi il est souvent préférable d'utiliser deux maillages différents.** La minimisation du résidu dans le choix de la troncature des séries essaye de « faire au mieux » avec les nœuds disponibles, mais cela peut se révéler insuffisant.

Dans la mise en place de telles méthodes, il convient de comparer les résultats avec des résultats de référence... or, comme nous l'avons vu, à part dans de très rares cas, il n'est pas possible d'obtenir des formulations simples et donc de disposer de résultats analytiques. Dans ce cas, la **méthode Monte-Carlo** est utilisée. Le nom de ces méthodes, qui fait allusion aux jeux de hasard pratiqués à Monte-Carlo, a été inventé en 1947 par Nicholas Metropolis, et publié pour la première fois en 1949 dans un article coécrit avec Stanislaw Ulam. Pour chacune des variables aléatoires, un grand nombre de tirages aléatoires est effectué dans les distributions de probabilité déterminées précédemment, afin de trouver la probabilité d'occurrence de chacun des résultats en appliquant la loi des grands nombres. Il s'agit d'une méthode simple et brutale... mais qui permet à coup sûr d'obtenir un résultat que l'on peut considérer comme la référence... à condition d'avoir effectué un nombre suffisamment élevé de tirages !

22.4 Post-traitement : moments statistiques

Quels que soient les paramètres considérés comme aléatoires, le vecteur des déplacements nodaux et les tenseurs de déformations et de contraintes en tout point peuvent s'écrire sous la forme d'un développement sur la base du chaos polynomial. Nous considérerons disposer à présent de la réponse du système S (déplacement, déformation, contrainte) écrite dans la base du chaos polynomial :

$$S = \sum_{i=0}^{p-1} s_i \Psi_i \quad (22.51)$$

Les post-traitements vont s'effectuer sur une expression analytique et ne coûtent presque rien en terme de temps de calcul. On peut ainsi se focaliser sur une analyse en tendance centrale (les premiers moments statistiques

de la réponse) ou bien effectuer des analyses de fiabilité (et donc s'intéresser aux queues de distribution). La densité de probabilité de la réponse peut également être obtenue de différentes manières.

À partir de la relation (22.51), on obtient les moments :

$$\text{Moyenne : } E[S] = s_0 \quad (22.52)$$

$$\text{Variance : } \sigma_S^2 = \sum_{i=1}^{p-1} E[\Psi_i^2] s_i^2 \quad (22.53)$$

$$\text{Coefficient d'asymétrie : } \delta_S = \frac{1}{\sigma_S^3} \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=1}^{p-1} \sum_{k=1}^{p-1} E[\Psi_i \Psi_j \Psi_k] s_i s_j s_k \quad (22.54)$$

$$\text{Coefficient d'aplatissement : } \kappa_S = \frac{1}{\sigma_S^4} \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=1}^{p-1} \sum_{k=1}^{p-1} \sum_{l=1}^{p-1} E[\Psi_i \Psi_j \Psi_k \Psi_l] s_i s_j s_k s_l \quad (22.55)$$

L'obtention simple de ces moments statistiques justifie pleinement l'utilisation de la base de chaos polynomial... c'est pourquoi notre présentation s'est focalisée dessus.

22.5 Fiabilité des structures

22.5.1 Définitions

La fiabilité des structures vise à calculer la probabilité de défaillance d'une structure en tenant compte de la variabilité de paramètres (géométrie, matériau, chargement). Ces paramètres sont représentés par des variables aléatoires X , et S est la réponse du système.

Pour chaque mode de défaillance de la structure, une **fonction d'état limite** $g(X, S(X))$ est définie dans l'espace des paramètres, à laquelle on associe l'hypersurface $\{g(X, S(X)) = 0\}$, appelée **surface d'état limite**, qui sépare le **domaine de sûreté** $D_s = \{X | g(X, S(X)) > 0\}$ du **domaine de défaillance** $D_f = \{X | g(X, S(X)) \leq 0\}$.

La **probabilité de défaillance** de la structure P_f est définie par :

$$P_f = \text{Prob}[g(X, S(X)) \leq 0] = \int_{g(X, S(X)) \leq 0} f_X(x) dx \quad (22.56)$$

À partir des résultats d'un calcul par éléments finis stochastiques, on dispose de la représentation (approchée) de $S(X)$ aussi bien sous forme de série dans la base du chaos polynomial que sous forme de série en les variables gaussiennes centrées réduites.

En appelant R la résistance et S le chargement (notation classique), une illustration est donnée à la figure 22.1.

En se plaçant dans l'espace de ces variables gaussiennes centrées réduites, dit **espace réduit**, la fonction d'état limite représente toujours la limite entre les domaines de sûreté et de défaillance, mais de sorte que le point de cette hypersurface le plus proche de l'origine, appelé **point de conception**, est le point pour lequel la probabilité de défaillance est maximale. Cette distance à l'origine est appelée **indice de sûreté** β , et on a donc :

$$P_f = \Phi(-\beta) \quad (22.57)$$

soit :

$$\beta = -\Phi^{-1}(P_f) \quad (22.58)$$

où Φ est la fonction de répartition gaussienne centrée réduite. Toutefois, déterminer ce point (i.e. le minimum de la fonction d'état limite) n'est pas si facile. Tous les algorithmes d'optimisation convergent vers un minimum, mais aucun ne peut affirmer que ce minimum est global.

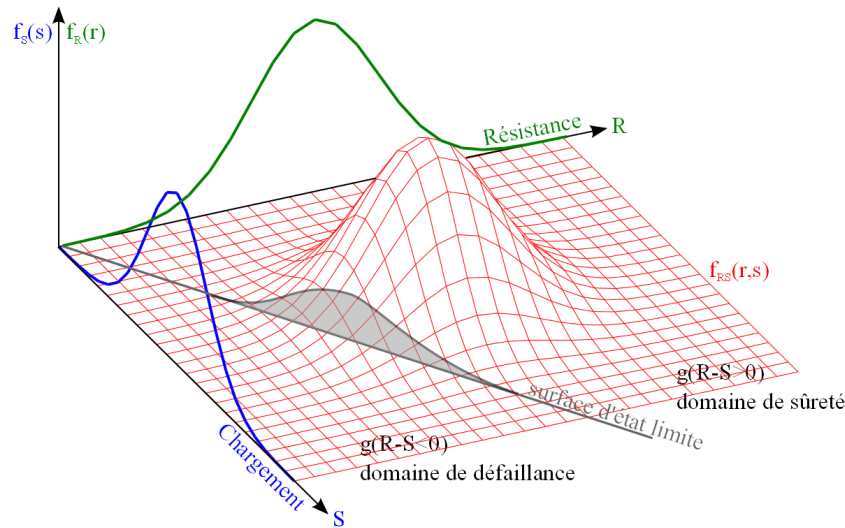


FIGURE 22.1: Illustration des concepts de fiabilité

Histoire

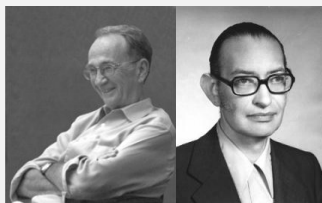
Le tout premier essai dans l'utilisation des concepts statistiques pour la fiabilité des structures date de 1926, par Max Mayer dans *Die Sicherheit der Bauwerke und ihre Berechnung nach Grenzkraften anstatt nach zulässigen Spannungen*. De nombreux progrès ont été faits par M. Prot (*Note sur la notion de coefficient de sécurité*, 1936), W. Weibul (*Investigations into strength of properties of brittle materials*, 1938, *A statistical theory of strength of materials*, 1939), W. Kjellman (*Säkerhetsproblemet ur principiell och teoretisk synpunkt*, 1940), et G. Wästlund (*Säkerhetsproblemet ur praktisk-konstruktiv synpunkt*, 1940), mais globalement, très peu d'articles avaient été publiés dans le domaine avant la seconde guerre mondiale.

Après 1945, le nombre d'article croit constamment. A l'université de Columbia, A.M. Freudenthal créa un institut pour l'étude de la fatigue et de la fiabilité, et produisit un grand nombre d'articles. L'évolution des codes modernes a été grandement influencée par les articles de 1949 à 1952 de E. Torroja et A. Páez (par exemple *Calcul du coefficient de sécurité*, 1952). En 1953, dans sa thèse *Strength, safety and economical dimension of structures*, A.I. Johnson suggéra d'utiliser les distributions de valeurs extrêmes, celles-ci étant étudiées par E.J. Gumbel (*Statistics of Extremes*, 1958).



Freudenthal Gumbel

J. Ferry Borges en 1952 pointa l'importance de prendre en compte le caractère aléatoire des dimensions et des propriétés mécaniques dans celui du comportement structural. Dans un rapport établi en 1962 par A.M. Freudenthal il est suggéré de représenter le chargement par une distribution en valeurs extrêmes et la résistance pour une distribution normale logarithmique.



Cornell Rosenblueth

En 1967, C.A. Cornell dans deux articles (*Bounds on the reliability of structural systems* et *A probability-based structural code*) propose une représentation du chargement, de la résistance et des dimensions par leurs moyenne et variance, ce qui devient la base des méthodes dites de niveau II^a. D'importantes contributions dans ce domaine seront dues à E. Rosenblueth et L. Esteva en 1972, O. Ditlevsen en 1973, A.M. Hasofer et N.C. Lind en 1974 et D. Veneziano en 1974. Nous allons en dire quelques mots un peu plus bas (indices de fiabilité).

En 1968, dans un article sur la conception sous chargement sismique (*Probabilistic models for seismic force design*) J.R. Benjamin défend l'utilisation des concepts probabilistes Bayésiens. Quant aux recherches des scientifiques russes sur le sujet, elles sont publiées par V.V. Bolotin en 1969 dans *Statistical methods in structural mechanics*.

Depuis 1970, de très nombreux articles ont été publiés sur le sujet. N'en mentionner que quelques uns est faire offense à de nombreux très bons autres articles. Nous citerons encore quelques grands noms du domaine tels que J. Armit (*wind structures*, 1976), F. Moses (*Reliability of structural systems*, 1976), R. Rackwitz (*First order reliability theories and stochastic models*, 1977), H. Karadeniz (logiciel SAPOS), A. Der Kiureghian, M. Shinozuka, M. Lemaire...



Rackwitz Karadeniz Der Kiureghian Shinozuka Lemaire

Revenons un peu sur **L'indice de fiabilité** utilisé en analyse de risque. C'est une mesure de la sûreté qui est élevée lorsque la probabilité de défaillance P_f est faible. Il s'agit d'un outil plus rudimentaire que la probabilité de défaillance qui est utilisé si celle-ci est trop grande ou lorsque son calcul est trop incertain à cause de l'approximation faite ou parce que l'on ne dispose pas d'informations suffisantes pour la calculer.

En 1969, Cornell définit l'indice de fiabilité β_C (dans le cas de variables gaussiennes) comme :

$$\beta_C = \frac{E[M]}{D[M]} \quad (22.59)$$

L'idée est que la distance du point de mesure $E[M]$ à la surface d'état limite est une bonne mesure de la fiabilité. Cette distance est mesurée par rapport à une unité d'incertitude $D[M]$ qui peut être la variance par exemple. On appelle M la marge de sécurité.

Si l'on note r la résistance et s le chargement correspondant, alors $g(r, s) = r - s$ et $M = R - S$. On peut alors écrire :

$$\beta_C = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}$$

En 1972, Rosenblueth et Esteva proposent un nouvel indice de fiabilité. Dans le cas où $R > 0$ et $S > 0$, on peut écrire $g(r, s) = \log(r/s)$, et $M = \log(r/s)$, d'où :

$$\beta_{RE} = \frac{E[\log(r/s)]}{D[\log(r/s)]} \quad (22.60)$$

qui est calculé en linéarisant la marge de sécurité M . Un développement de Taylor au premier ordre donne :

$$M \approx \frac{\log \mu_R - \log \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}$$

En 1974, Hasofer et Lind proposent de passer de l'espace des variables X à celui de variables normalisées et non corrélées. Ce sont eux qui donnent la définition de l'indice de fiabilité β_{HL} comme la distance minimale de l'origine à la surface d'état limite. En 1976, Ditlevsen propose un autre indice de fiabilité, plus sélectif, en introduisant une mesure de fiabilité obtenue en intégrant une fonction pondérée sur le domaine de sûreté. En pratique, on a souvent $\beta_G = \beta_{HL}$.

a. On distingue les méthodes de :

- niveau I : l'aspect probabiliste est introduit en donnant aux variables aléatoires une « valeur caractéristique » associée à un facteur de sécurité partiel ;
- niveau II : ce sont les méthodes fiabilistes utilisant deux paramètres pour décrire chaque variable aléatoire (moyenne et variance) ;
- niveau III : elles procèdent à l'analyse complète du problème et impliquent l'intégration de la fonction de densité de probabilité conjointe multidimensionnelle des variables aléatoires étendue sur le domaine de la sécurité. La fiabilité est exprimée en termes d'indices de sécurité adéquates, à savoir : indice de fiabilité et probabilité de défaillance ;
- niveau IV : elles concernent les structures qui sont d'une importance économique majeure, et impliquent l'utilisation des principes de l'analyse économique de l'ingénierie sous incertitude. Elles tiennent compte des coûts et des bénéfices de la construction, de la maintenance, de la réparation, des conséquences de la défaillance, des intérêts sur le capital... Elles doivent être utilisées pour les projets sensibles comme les projets nucléaires, les tours de transmission, les ponts routiers.

22.5.2 Méthodes FORM/SORM

La probabilité de défaillance P_f donnée à l'équation (22.57) est rarement utilisable directement, le domaine d'intégration étant défini implicitement. La méthode FORM (First Order Reliability Method) permet d'obtenir une approximation de cette intégrale.

On commence par réécrire l'équation (22.57) dans l'espace réduit. Pour cela on utilise une transformation isoprobabiliste $T : X \rightarrow U(X)$. Les transformations couramment utilisées sont celles de Rosenblatt ou Nataf¹. En utilisant ce changement de variable, on obtient :

$$P_f = \int_{T^{-1}(U), S(T^{-1}(U))} \varphi_n(U) du_1 \dots du_n \quad (22.61)$$

avec φ_n la densité de probabilité multinormale de dimension n :

$$\varphi_n(u) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \exp\left(-\frac{1}{2}(u_1^2 + \dots + u_n^2)\right) \quad (22.62)$$

Cette densité de probabilité est maximale à l'origine et décroît exponentiellement avec $\|u\|^2$. Les points contribuant le plus à l'intégrale sont donc ceux appartenant au domaine de défaillance les plus proches de l'origine.

Puis on détermine le point de conception P , i.e. le point D_f le plus proche de l'origine :

$$P = \min_{\|u\|} \{g(T^{-1}(U), S(T^{-1}(U))) \leq 0\} \quad (22.63)$$

en utilisant un algorithme d'optimisation pour résoudre ce problème de minimisation.

Enfin on approche le domaine d'intégration D_f dans (22.61) par le demi-espace défini par l'hyperplan tangent à D_f en P . L'intégration est alors analytique, et on obtient l'équation (22.57).

Les méthodes SORM (Second Order Reliability Method) sont des extensions de la méthode FORM. L'une d'elle consiste à approcher la surface d'état limite par un hyperparaboloïde d'ordre 2 au voisinage du point de conception. Si $(\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1})$ désignent les courbures principales de cet hyperparaboloïde, l'approximation SORM de la probabilité de défaillance conduit à la formule de Breitung :

$$P_f = \Phi(-\beta) \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta\kappa_i}} \quad (22.64)$$

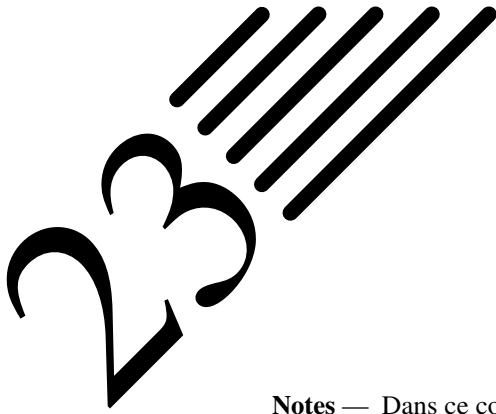
22.5.3 Tirages d'importance

Les simulations de Monte Carlo sont les méthodes les plus simples à mettre en œuvre pour calculer la probabilité de défaillance d'un système, mais ce sont aussi les plus coûteuses. Après avoir généré des réalisations pour les variables aléatoires d'entrée selon leur densité conjointe de probabilité, on évalue la fonction d'état limite pour ces réalisations. On compte le nombre total de cas défaillants parmi les calculs effectués, ce qui permet d'estimer la probabilité en fonction du nombre de cas défaillants par rapport au nombre total des réalisations effectuées. Pour s'assurer de la convergence des méthodes de simulation, il faut calculer le coefficient de variation de la simulation : la convergence est atteinte pour un coefficient de variation d'environ 5%.

Les **simulations d'importance** (ou Importance sampling) sont des méthodes efficaces pour estimer la probabilité de défaillance, car elles permettent de générer des tirages qui conduisent plus fréquemment à la défaillance et permettent de gagner plus d'information sur le domaine de défaillance.

Comme le poids de la probabilité de défaillance est généralement situé au voisinage du point de conception, il est plus efficace de concentrer les tirages autour de ce point. On commence donc par l'approcher, par exemple par la méthode FORM. On introduit la fonction $\psi(u)$, dite densité d'importance, que l'on peut prendre égale à la densité multinormale réduite centrée au point de conception de coordonnées u^* . Dans ce cas, pour simuler U suivant la densité $\psi(U)$, on génère d'abord une variable multinormale centrée réduite U_r et on effectue le changement de variables $U = U_r + U^*$. Pour la simulation de variables aléatoires, on pourra consulter [64].

1. La transformation de Rosenblatt transforme un vecteur X de loi quelconque en un vecteur U de même dimension mais à composantes indépendantes, gaussiennes, centrées et réduites. La transformation de Nataf transforme un vecteur ayant une loi à copule elliptique en un vecteur de loi sphérique associée au représentant elliptique de la copule. Une copule est une fonction de répartition définie sur $[0, 1]^N$ dont les lois marginales sont égales à la loi uniforme sur $[0, 1]$. Nous nous passerons volontiers de cela dans ce document de présentation. Pour la petite histoire, Murray Rosenblatt a passé sa thèse sous la direction de Mark Kac.



Quelques méthodes dérivées

Notes — Dans ce court chapitre, nous survolons quelques méthodes également utilisées en simulation numérique. Nous n'entrons pas dans le détail, mais si les notions d'éléments finis, de formulations mixtes et hybrides et les multiplicateurs de Lagrange ont été comprises, alors nos courtes explications doivent suffire.

23.1 Méthode des éléments frontières

La méthode des éléments finis et la [méthode des éléments frontière \(Boundary Element Method\)](#) peuvent être considérées comme issues des méthodes de Ritz et de Trefftz respectivement. Dans les deux cas, il s'agit de résoudre un problème décrit par des équations aux dérivées partielles dans un domaine Ω et sur sa frontière $\Gamma = \partial\Omega$ en remplaçant le problème continu par un nombre fini de paramètres inconnus dans la résolution numérique.

La méthode de Ritz, et donc la méthode des éléments finis, se base sur l'existence d'un principe variationnel pour lequel la fonction inconnue sera recherchée comme une combinaison de fonctions de base définies dans tout le domaine Ω .

La méthode de Trefftz a été proposée en 1926 dans un article intitulé « une alternative à la méthode de Ritz ». Le passage domaine/frontière se fait en appliquant le théorème de Green à la formulation variationnelle considérée et en proposant des fonctions d'interpolation linéairement indépendantes qui satisfont les équations aux dérivées partielles d'intérieur de domaine *a priori*. Trefftz montre que l'intégrale d'intérieur de domaine du principe variationnel disparaît et que seules subsistent des intégrations aux frontières. **Cependant, cette méthode discrétisant la frontière seule peut être employée uniquement si le problème physique considéré est gouverné par des équations différentielles linéaires et homogènes.** On obtient encore un système de type $[K]\{q\} = \{F\}$, mais les intégrales se font uniquement sur Γ .

Cette méthode est préférée à la méthode des éléments finis lorsque le domaine de propagation devient infini puisque seule la surface de la frontière du domaine doit être discrétisée (i.e. on n'a pas besoin de mailler tout le domaine de propagation comme avec les éléments finis) et on gagne ainsi une dimension dans la discrétisation du problème (le champ considéré (acoustique par exemple) en tout point de l'espace étant dû au rayonnement de ses frontières). En outre la condition de Sommerfeld de rayonnement à l'infini est satisfaite automatiquement dans les méthodes d'éléments finis de frontière via le noyau des formulations intégrales qui répond exactement aux conditions aux limites pour des domaines infinis, contrairement aux méthodes d'éléments finis. Toutefois, on pourra appliquer la méthode des éléments finis en utilisant les éléments infinis ou des techniques de type « perfectly matched layer » et champs lointains, comme vu au chapitre 19.

La méthode des éléments finis et la méthode des éléments frontières sont toutes deux des méthodes très robustes pour de nombreuses applications industrielles, ce qui en fait des outils de choix pour les simulations numériques. Cependant, leur utilisation pose des problèmes lorsque l'on a évolution des surfaces internes à cause du « maillage » de ces surfaces : description correcte, évolution de ces surfaces, fissures, front de sollicitation, interfaces... Une des motivations pour les méthodes sans maillage est de s'affranchir de ces difficultés.

23.2 Méthodes particulières ou sans maillage

En grandes déformations par exemple, le maillage va nécessairement être très déformé au cours du calcul, conduisant à une dégénérescence du jacobien ayant pour conséquence une perte de précision, des problèmes de convergence... et il est nécessaire alors de recourir à des méthodes de remaillage adaptatif qui sont coûteuses en temps de calcul et posent encore des problèmes dans le cas tridimensionnel. Sans raffinement de maillage, des phénomènes de localisation de la déformation, qui suit le bord des éléments se produit, et on constate, par exemple dans le cas de la simulation de fissures, que le chemin de fissuration varie fortement avec le maillage... il faut alors développer des éléments spéciaux.

Pour palier ces problèmes ont été développées, dès les années 70 puis améliorées et popularisées dans les années 90, de nombreuses méthodes où la discrétisation ne repose plus sur un maillage mais sur un ensemble de points¹. L'idée est de construire une fonction définie sur un espace continu à partir de l'ensemble des valeurs discrètes prises par cette fonction sur un nuage de points du domaine. On parle alors de **méthode particulière** (dont une autre application sera donnée au paragraphe 23.5). Les problèmes de déformation de maillage ne peuvent survenir puisqu'il n'y a plus de connectivité entre les nœuds ; le remaillage et la gestion des frontières internes (fissures...) sont résolus puisqu'il s'agit alors simplement d'ajouter des nœuds au grès des besoins. **Chaque point possède un domaine d'influence de forme simple**, comme un cercle, sur lequel les fonctions d'approximation sont construites. Les différentes approches se distinguent, entre autres, par les techniques utilisées pour la construction des fonctions d'approximation. Ces fonctions sont construites de manière à pouvoir représenter tous les modes rigides et de déformation sur le domaine d'influence (c'est une condition nécessaire à la convergence de ces méthodes), et sont nulles en dehors. De manière générale, on écrira alors :

$$u(x) = \sum_{i \in N_s(x)} \sum_{\alpha=1}^{N_f(i)} a_i^\alpha \phi_i^\alpha(x) \quad (23.1)$$

où $N_s(x)$ est l'ensemble des points i dont le support contient le point x et $N_f(i)$ est le nombre de fonctions d'interpolation définies sur le support associé au point i .

Une fois les fonctions d'interpolation construites, il est possible d'en ajouter d'autres par **enrichissement**. L'enrichissement de l'approximation permet ainsi de représenter un mode de déplacement donné $F(x)\phi_i^\alpha(x)$:

$$u(x) = \sum_{i \in N_s(x)} \sum_{\alpha=1}^{N_f(i)} a_i^\alpha \phi_i^\alpha(x) + \sum_{i \in N_s(x) \cap N_f} \sum_{\alpha=1}^{N_f(i)} b_i^\alpha \phi_i^\alpha(x) F(x) \quad (23.2)$$

L'enrichissement des fonctions d'interpolation a par exemple permis de résoudre des problèmes de propagation de fissure en deux et trois dimensions sans remaillage : la fissure se propage à travers un nuage de points et est modélisée par enrichissement, à savoir des fonctions $F(x)$ discontinues sur la fissure ou représentant la singularité en fond de fissure.

En résumé, pour développer une méthode sans maillage, on a besoin : 1) d'un nuage de points, 2) d'une méthode d'interpolation, comme par exemple la formule (23.1), et 3) d'une formule de quadrature permettant d'exprimer la formulation faible que l'on souhaite traiter sous forme matricielle. Les **méthodes sans maillage (Meshless Methods)** sont flexibles dans le choix de l'approximation et de l'enrichissement. Elles comportent néanmoins quelques inconvénients. Tout d'abord, on remarquera que la méthode d'interpolation n'est pas, contrairement au cas de la méthode des éléments finis, interpolante. Il s'en suit que dans nombre de méthodes sans maillage, l'imposition des conditions aux limites de Dirichlet est plus compliquée à réaliser. On ne peut pas non plus utiliser les schémas d'intégration numérique de la méthode des éléments finis car les fonctions de forme ne sont plus polynomiales et que l'on ne dispose pas d'un maillage pour placer les points d'intégration. Le choix du nombre de points d'intégration et de la taille du domaine d'influence dans un nuage arbitraire de points d'approximation n'est pas trivial : alors que dans le cas de la méthode des éléments finis, la matrice de rigidité est obtenue par assemblage

1. On peut par exemple nommer les méthode des noyaux régularisants, des éléments diffus ou discrets (DEM), de Galerkin sans éléments (Element Free Galerkin Method, EFGM), Smoothed Particule Hydrodynamics (SPH), Reproducing Kernel Particle Method (RKPM), $h - p$ Cloud Method, Moving Particle Simulation (MPS), Particle Finite Element Method (PFEM), Material Point Method (MPM), Molecular Dynamics (MD), Lattice-Boltzmann-Method (LBM)... Les méthodes que nous verrons dans les paragraphes suivants : partition de l'unité, éléments finis étendue, treillis de Boltzmann sont issues, dans une certaine mesure, des méthodes sans maillage.

des contributions élémentaires, pour les méthodes sans maillage, l'assemblage se fait en couvrant le domaine de points d'intégration et en ajoutant leur contribution. De plus, chaque point ayant généralement plus de voisins que dans la méthode des éléments finis, la matrice de « rigidité » est moins creuse. Enfin, dans nombre de cas, il est nécessaire de faire varier la taille du domaine d'influence dans l'espace et le temps pour mieux suivre le problème : la raréfaction des particules en cours de calcul dans certaines zones conduit à des instabilités dues par exemple à l'augmentation des erreurs numériques dans le calcul de dérivées (mais augmenter la zone d'influence correspond à augmenter le nombre de voisins donc à alourdir le calcul...).

23.3 Partition de l'unité

La base des éléments finis classiques peut elle-aussi être enrichie (afin de ne pas recourir aux méthodes sans maillage) de manière à représenter une fonction donnée sur un domaine donné. Melenk et Babuška, en 1996, ont appelé cette technique : la **Partition de l'Unité (PU)**. Ils ont remarqué en fait que si $N_s(x)$, autrement dit l'ensemble des points i dont le support contient le point x , était remplacé par $N_n(x)$, c'est-à-dire l'ensemble des nœuds contenant x , alors on retomberait sur la formulation éléments finis usuelle, qui, sous forme « assemblée », s'écrivait bien alors :

$$u(x) = \sum_{i \in N_n(x)} \sum_{\alpha} a_i^{\alpha} \phi_i^{\alpha}(x) \quad (23.3)$$

Cela veut simplement dire que, dans le cas des éléments finis, on considère les supports comme liés à des nœuds, alors que dans le cas sans maillage, ils sont liés à des points. En d'autres termes, si l'on considère un nœud à chaque point, la méthode des éléments finis est un cas particulier de la méthode sans maillage. On peut alors également écrire l'approximation de partition de l'unité par :

$$u(x) = \sum_{i \in N_n(x)} \sum_{\alpha} a_i^{\alpha} \phi_i^{\alpha}(x) + \sum_{i \in N_n(x) \cap N_f} \sum_{\alpha} b_i^{\alpha} \phi_i^{\alpha}(x) F(x) \quad (23.4)$$

23.4 Méthode des éléments finis étendue

Dans le cas particulier où la méthode de partition de l'unité est appliquée à la modélisation de discontinuités ou de vides au sein même des éléments, on obtient alors la **méthode des éléments finis étendue (X-FEM)** :

$$u(x) = \sum_{i \in I} u_i \phi_i(x) + \sum_{i \in L} a_i \phi_i(x) H(x) + \sum_{i \in K_1} \phi_i(x) \left(\sum_{j=1}^4 b_{i,1}^j F_1^j(x) \right) + \sum_{i \in K_2} \phi_i(x) \left(\sum_{j=1}^4 b_{i,2}^j F_2^j(x) \right) \quad (23.5)$$

où I est l'ensemble des nœuds du maillage, L l'ensemble des nœuds enrichis pour modéliser la fissure coupant de part en part un élément, K_1 et K_2 les nœuds enrichis pour modéliser le fond de fissure.

L'avantage en X-FEM est qu'il n'est plus demandé au maillage de se conformer à des surfaces, qu'elles soient intérieures ou extérieures, et qu'il peut alors être conservé lors de leur évolution. Les surfaces ne sont plus maillées et sont localisées sur le maillage grâce à la notion de **fonction de niveau**. À chaque nœud au voisinage de cette surface, on associe la distance signée à cette surface. Cette fonction « distance » peut être interpolée sur chaque élément avec les fonctions classique de premier ordre. Les surfaces sont ainsi stockées par un champ élément fini défini au voisinage de la surface qui participe au calcul au même titre que les autres champs physiques. En particulier, la X-FEM permet la modélisation des trous, sans avoir à forcer le maillage à se conformer à ceux-ci. Un nœud dont le support est complètement à l'intérieur du trou ne donne pas lieu à la création de degrés de liberté. Pour un nœud dont le support coupe la frontière du trou, la fonction d'interpolation classique est multipliée par une fonction valant 1 dans la matière et 0 dans le trou.

23.5 Méthodes de treillis de Boltzmann

La dénomination « méthodes particulières » recouvre deux types différents de modèles pour la mécanique du solide et pour la mécanique des fluides. D'un côté, on trouve des concepts de discrétisation dans lequel la réponse d'un continuum est projetée sur les « particules » véhiculant l'information mécanique au cours de leurs déformations (SPH, MPS, PFEM, MPM, et Lattice-Boltzmann-Method). De l'autre côté, cette notion exprime la représentation de calcul de particules physiques existantes à différentes échelles (MD, DEM). On peut alors considérer les cas où les particules existent physiquement (comme pour les matières granulaires) ainsi que les cas où elles évoluent au cours du processus de chargement, ces deux cas pouvant même éventuellement être couplés.

Dans les [méthodes de treillis de Boltzmann](#) (Lattice Boltzmann Methods, LBM), on ne cherche plus à simuler un problème de dynamique des fluides par les équations de Navier-Stokes (nous avons déjà évoqué certains problèmes que l'on rencontre alors), mais en se servant de l'équation de Boltzmann discrète pour un fluide newtonien avec modèle de collision (par exemple Bhatnagar-Gross-Krook). L'idée est de simuler l'écoulement ainsi que les processus de collision entre un nombre limité de particules. Les interactions entre particules conduisent à un comportement de l'écoulement visqueux applicables à une échelle plus grande. On peut donc les voir également comme des méthodes de décomposition de domaine ou d'homogénéisation [paragraphe 13.4.2 et chapitre 15].

Les LBM sont particulièrement bien adaptées à la simulation de fluides autour de géométries complexes et ont l'avantage de pouvoir être implémentées sur des machines parallèles. Bien qu'historiquement développées pour les gaz en treillis, elles s'obtiennent également directement à partir des équations simplifiées de Boltzmann BGK (Bhatnagar-Gross-Krook).

On considère un treillis discret dont les nœuds portent des particules. Ces particules sautent d'un nœud au suivant selon leur vitesse : c'est la phase de propagation. Puis les particules se choquent et acquièrent une nouvelle vitesse : c'est la phase de collision. La simulation procède en alternant les phases de propagations et de collisions des particules. On montre que de tels gaz suivent les équations des fluides de Navier-Stokes. L'inconvénient majeur de cette méthode appliquée à la dynamique des fluides est l'apparition de « bruit ». Si l'on ne cherche qu'un champ relativement calme (peu de variations, en tous cas, pas de variations brutales), il est nécessaire de pouvoir prendre la moyenne sur un treillis relativement grand et sur une grande période de temps. Dans ce cas, les LBM contournent le problème en pré-moyennant le gaz : on considère la distribution des particules sur le treillis plutôt que les particules elles-mêmes.

La forme générale de l'équation de treillis de Boltzmann est :

$$f_i(x + \Delta_t \vec{c}_i, t + \Delta_t) = f_i(x, t) + \Omega_i \quad (23.6)$$

où f_i est la concentration de particules se déplaçant avec la vitesse \vec{c}_i jusqu'au nœud suivant pendant un temps Δ_t . Ω_i représente l'opérateur de collision, et c'est lui qui change d'une méthode à l'autre. Dans le modèle BGK (Bhatnagar-Gross-Krook), la distribution des particules après propagation est relaxée vers la distribution à l'équilibre f_i^{eq} , et on a :

$$\Omega_i = \frac{1}{\tau} (f_i(x, t) - f_i^{eq}(x, t)) \quad (23.7)$$

avec τ le paramètre de relaxation, qui détermine la viscosité cinématique ν du fluide selon la relation $\nu = (2\tau - 1)/6$. La distribution à l'équilibre est une fonction de la densité locale ρ et de la vitesse locale \vec{u} , qui sont les moments d'ordre 1 et 2 de la distribution des particules :

$$\rho(x, t) = \sum_i f_i(x, t) \quad \text{et} \quad \vec{u}(x, t) = \frac{\sum_i f_i(x, t) \vec{c}_i}{\rho(x, t)} \quad (23.8)$$

Cette distribution à l'équilibre est calculée par la relation :

$$f_i^{eq}(\rho, \vec{u}) = t_p \rho \left(1 + \frac{\vec{c}_i \cdot \vec{u}}{c_s^2} + \frac{(\vec{c}_i \cdot \vec{u})^2}{2c_s^4} - \frac{\vec{u} \cdot \vec{u}}{2c_s^2} \right) \quad (23.9)$$

où c_s est la vitesse du son, $p = \vec{c}_i \cdot \vec{c}_i$ et t_p est la densité à l'équilibre pour $\vec{u} = 0$.

23.6 FEEC

Le **Finite element exterior calculus**, introduit par Douglas N. Arnod, Richard S. Falk et Ragnar Winther en 2006, est une approche visant à expliquer (et à développer) des solutions éléments finis pour une grande variété d'équations aux dérivées partielles. Il s'agit de mettre à profit les outils de la géométrie différentielle, de la topologie algébrique et de l'algèbre homologique afin de développer des discrétisations compatibles avec les structures géométriques, topologiques et algébriques nécessaires pour que le problème aux équations aux dérivées partielles considéré soit bien posé.

Dans cette version de ce document, nous n'entrons pas plus avant dans cette méthode, qui reste sans doute trop mathématique dans sa présentation pour le public visé. Néanmoins, les articles, notamment ceux de 2006 [76] et de 2010 [77], bien que longs, sont extrêmement pédagogiques et leur lecture ne peut qu'être un plus.

23.7 Systèmes multi-corps

Le concept de système multicorps est utilisé en mécanique du solide, plus particulièrement dans les domaines de la robotique, de l'automobile, de la biomécanique... pour modéliser le comportement dynamique de corps rigides et/ou flexibles connectés les uns aux autres par des liaisons mécaniques, chacun de ces corps décrivant de grands déplacements à la fois en translation et en rotation. Une analyse peut inclure plusieurs milliers de corps rigides. **Dans une telle approche, ce n'est plus le comportement local qui est visé mais plutôt le comportement de plusieurs corps formant un « mécanisme ».**

Un corps représente donc une partie rigide ou flexible d'un système mécanique. Un lien désigne une connexion entre au moins deux corps ou entre un corps et le sol : on retrouve donc les liaisons mécaniques classiques comme l'appui ponctuel, la rotule, le glissement, le cardan...

Dans cette approche, le terme de **degré de liberté** désigne le nombre de mouvements cinématiques possibles, autrement dit le nombre de rotations ou déplacements qu'il reste à fixer pour définir complètement la position dans l'espace. De manière complémentaire, une **condition de contrainte** désigne une restriction des libertés de mouvement du corps. Ce terme désigne également les contraintes pouvant porter sur les vitesses ou les accélérations de ces mouvements. Enfin, pour parfaire l'analyse, des contraintes supplémentaires peuvent être introduites comme des contraintes de glissement et de contact, entre autres.

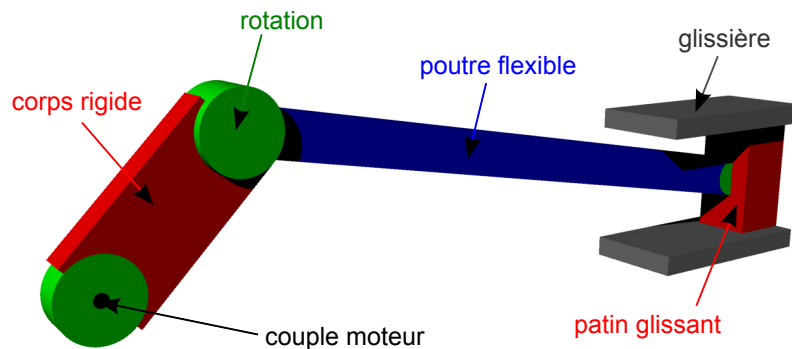


FIGURE 23.1: Exemple de système multi-corps

La dynamique d'un système multicorps est décrite par les équations du mouvement. On obtient alors un système de la forme :

$$\begin{cases} M\ddot{u} - Q_{\dot{u}} + C_q\lambda = F \\ C(u, \dot{u}) = 0 \end{cases} \quad (23.10)$$

où M est la matrice de masse, C , la matrice des conditions de contraintes, C_u la matrice jacobienne (dérivée de C par rapport à u) permettant d'appliquer les forces λ correspondant à des multiplicateurs de Lagrange et $Q_{\dot{u}}$, le vecteur de vitesse quadratique utilisé pour introduire les termes de Coriolis et les termes centrifuges.

Nous n'entrons pas plus en avant, car le système à résoudre doit sembler suffisamment simple pour le lecteur à ce niveau du document et parce que cette méthode est d'application très particulière.