

Problèmes non stationnaires

Notes — Dans ce chapitre, nous nous intéresserons au cas non stationnaire. Toutefois, nous n’aborderons pas les éléments finis espace-temps, car il s’agit d’une formulation gourmande en ressources, d’où sa très faible utilisation (bien que la méthode soit en elle-même intéressante).

Dans ce chapitre, nous aurons besoin de « dériver numériquement », i.e. de construire des schémas numériques approchant des dérivées. Le chapitre C en annexe permettra à certains de se rafraîchir la mémoire en regardant comment on résout les équations différentielles et aux dérivées partielles... puis numériquement. Nous utiliserons en effet la méthode de Newmark décrite au paragraphe C.2.5.

17.1 Équation non stationnaire de la dynamique

Considérons l’équation de la dynamique, sous forme non stationnaire (i.e. dépendant du temps) :

$$M\ddot{u}(t) + C\dot{u}(t) + Ku(t) = F(t) \quad (17.1)$$

qui sous forme discrétisée par éléments finis sera réécrite :

$$[M] \{\ddot{q}\}(t) + [C] \{\dot{q}\}(t) + [K] \{q\}(t) = \{F\}(t) \quad (17.2)$$

avec les conditions initiales $\{q\}(t=0) = \{q\}_0$ et $\{\dot{q}\}(t=0) = \{\dot{q}\}_0$.

On cherche à obtenir la discrétisation $\{q\}$ du champ u et ses dérivées temporelles $\{\dot{q}\}$ et $\{\ddot{q}\}$ à différents instants t et vérifiant l’équation de la dynamique.

Pour résoudre un tel problème, on se propose de réaliser une **discrétisation temporelle** qui pourra être explicite ou implicite.

Le schéma généralement utilisé pour la discrétisation temporelle est celui de Newmark, qui est présenté dans le cas de la résolution des équations différentielles au paragraphe C.2.5. Le schéma le plus général est, Δ_t représentant le pas de temps :

$$\begin{aligned} \{q\}_{t+\Delta_t} &= \{q\}_t + \Delta_t \{\dot{q}\}_t + \frac{\Delta_t^2}{2} ((1-2\beta) \{\ddot{q}\}_t + 2\beta \{\ddot{q}\}_{t+\Delta_t}) \\ \{\dot{q}\}_{t+\Delta_t} &= \{\dot{q}\}_t + \Delta_t ((1-\gamma) \{\ddot{q}\}_t + \gamma \{\ddot{q}\}_{t+\Delta_t}) \end{aligned} \quad (17.3)$$

que nous avons écrit sous la forme discrétisée, mais qui serait valable pour l’approximation continue (comme présenté au chapitre au paragraphe C.2.5).

Les différents **schémas de Newmark** correspondent à des valeurs particulières de β et γ .

17.2 Schéma explicite : différences finies centrées

Dans le cas où $\beta = 0$ et $\gamma = 1/2$, on retombe sur le schéma des [différences finies centrées](#).

On obtient :

$$\begin{aligned}\{\ddot{q}\}_t &= \frac{1}{\Delta_t^2} (\{q\}_{t+\Delta_t} - 2\{q\}_t + \{q\}_{t-\Delta_t}) \\ \{\dot{q}\}_t &= \frac{1}{2\Delta_t} (\{q\}_{t+\Delta_t} - \{q\}_{t-\Delta_t})\end{aligned}\quad (17.4)$$

et l'équation de la dynamique discrétisée s'écrit sous la forme d'une équation modifiée :

$$[\overline{K}] \{q\}_{t+\Delta_t} = \{R\} \quad (17.5)$$

avec :

$$[\overline{K}] = \frac{1}{\Delta_t^2} [M] + \frac{1}{2\Delta_t} [C] \quad (17.6)$$

et :

$$\{R\} = \{F\}_t - [K] \{q\}_t + \frac{1}{\Delta_t^2} [M] (2\{q\}_t - \{q\}_{t-\Delta_t}) + \frac{1}{2\Delta_t} [C] \{q\}_{t-\Delta_t} \quad (17.7)$$

qui ne dépendent bien que de données disponibles.

Le calcul se déroule donc comme suit :

- Solution initiale à $t = 0$:
 - connaissant $\{q\}_0$ et $\{\dot{q}\}_0$, on calcule $\{\ddot{q}\}_0$ en résolvant l'équation « classique » de la dynamique ;
 - on calcule ensuite $\{q\}_{-\Delta_t} = \{q\}_0 - \Delta_t \{\dot{q}\}_0 + \frac{\Delta_t^2}{2} \{\ddot{q}\}_0$.
- On dispose alors de tous les éléments pour, à chaque pas de temps $t + \Delta_t$:
 - résoudre l'équation modifiée, qui nous fournit $\{q\}_{t+\Delta_t}$;
 - puis obtenir $\{\dot{q}\}_t$ et $\{\ddot{q}\}_t$ par le schéma de Newmark adopté, ici celui des différences finies centrées.

On peut faire les remarques suivantes sur ce type de calcul :

- Pour un pas de temps donné, $\{q\}_t$ ne dépend que des données du temps passé, on a donc une résolution vectorielle rapide.
- Si les matrices $[M]$ et $[C]$ sont diagonales, alors cette méthode est très efficace même pour les problèmes de grande taille.
- Ce schéma est **inconditionnellement stable** si $\Delta_t \leq T_{\min}/\pi$, avec T_{\min} la plus petite période du système correspondant à l'équation de la dynamique (classique).
- la précision est de l'ordre de Δ_t^2 .
- L'amortissement numérique est nul.
- Il est possible d'introduire un amortissement numérique pour contrôler les hautes fréquences. Dans ce cas, il faut considérer le schéma avec $\beta = 0$ et $\gamma > 1/2$. Il n'y a pas automatiquement stabilité du schéma, celle-ci est à calculer pour chaque schéma.

17.3 Schéma implicite : schéma de Newmark classique

Dans le cas où $\beta = 1/4$ et $\gamma = 1/2$, on obtient le [schéma implicite de Newmark](#), qui est celui qui est utilisé généralement pour l'analyse dynamique des structures.

Il vient alors :

$$\begin{aligned}\{\ddot{q}\}_{t+\Delta_t} &= \frac{4}{\Delta_t^2} (\{q\}_{t+\Delta_t} - \{q\}_t) - \frac{4}{\Delta_t} (\{\dot{q}\}_t - \{\ddot{q}\}_t) \\ \{\dot{q}\}_{t+\Delta_t} &= \{\dot{q}\}_t + \frac{\Delta_t}{2} (\{\ddot{q}\}_{t+\Delta_t} + \{\ddot{q}\}_t)\end{aligned}\quad (17.8)$$

et l'équation de la dynamique discrétisée s'écrit encore sous la forme d'une équation modifiée :

$$[\overline{K}] \{q\}_{t+\Delta_t} = \{R\} \quad (17.9)$$

mais cette fois avec :

$$[\overline{K}] = [K] + \frac{4}{\Delta_t^2} [M] + \frac{2}{\Delta_t} [C] \quad (17.10)$$

et :

$$\{R\} = \{F\}_{t+\Delta_t} + [M] \left(\frac{4}{\Delta_t^2} \{q\}_t + \frac{4}{\Delta_t} \{\dot{q}\}_t + \{\ddot{q}\}_t \right) + [C] \left(\frac{2}{\Delta_t} \{q\}_t + \{\dot{q}\}_t \right) \quad (17.11)$$

qui dépendent également des données au même pas de temps.

Le calcul se déroule donc comme suit :

— Solution initiale à $t = 0$:

- connaissant $\{q\}_0$ et $\{\dot{q}\}_0$, on calcule $\{\ddot{q}\}_0$ en résolvant l'équation « classique » de la dynamique ;
- on construit $[\overline{K}]$ et, si $[M]$, $[C]$, $[K]$ et Δ_t sont constants (ce qui est généralement le cas), la triangulariser.

— À chaque pas de temps $t + \Delta_t$:

- calculer $\{R\}$ (que l'on appelle le **résidu**, d'où le choix de la notation) ;
- calculer $[\overline{K}]$ et triangulariser si nécessaire ;
- résoudre l'équation modifiée, qui nous fournit $\{q\}_{t+\Delta_t}$;
- puis obtenir $\{\dot{q}\}_t$ et $\{\ddot{q}\}_t$ par le schéma de Newmark adopté, ici celui de Newmark implicite.

On peut faire les remarques suivantes sur ce type de calcul :

- Pour un pas de temps donné, $\{q\}_t$ dépend également des données du même pas de temps, on a donc une résolution matricielle coûteuse.
- Ce schéma est **inconditionnellement stable**, et donc comme on peut utiliser de plus grands pas de temps, on réduit le coût mentionné à la ligne précédente.
- la précision est de l'ordre de Δ_t^2 , et donc comme on ne peut pas utiliser de trop grands pas de temps sans réduire la précision...
- L'amortissement numérique est nul.
- Il est possible d'introduire un amortissement numérique pour **contrôler les hautes fréquences**. Dans ce cas, il faut considérer le schéma avec $\gamma > 1/2$ et $\beta = (\gamma + \frac{1}{2})^2$. On obtient encore un schéma stable.

17.4 Comparaison des méthodes explicite et implicite

Concernant la méthode explicite, on retiendra d'abord que cette méthode nécessite moins de mémoire, est donc plus rapide et mieux adaptée aux **problèmes de grandes tailles**. Comme cette méthode nécessite moins de mémoire et des petits pas de temps (pour la stabilité), elle est bien adaptée au cas des **chocs**. Comme elle n'est que conditionnellement stable, elle est plutôt adaptée à la résolution élément par élément, donc au **traitement local**. Enfin, cette méthode est très robuste numériquement et permet de traiter le cas de **non linéarités couplées**.

Concernant la méthode implicite, on retiendra que puisque cette méthode est inconditionnellement stable, elle est bien adaptée à la résolution de **problèmes globaux** (qui nécessitent qu'il y ait convergence). De plus, cette méthode est bien moins robuste numériquement que la précédente (pivots nuls, divergence)... Enfin et surtout, on se souviendra que c'est une méthode **coûteuse** en mémoire et en temps...

La figure 17.1 donne, de manière imagée, les domaines d'utilisation des méthodes implicite et explicite.

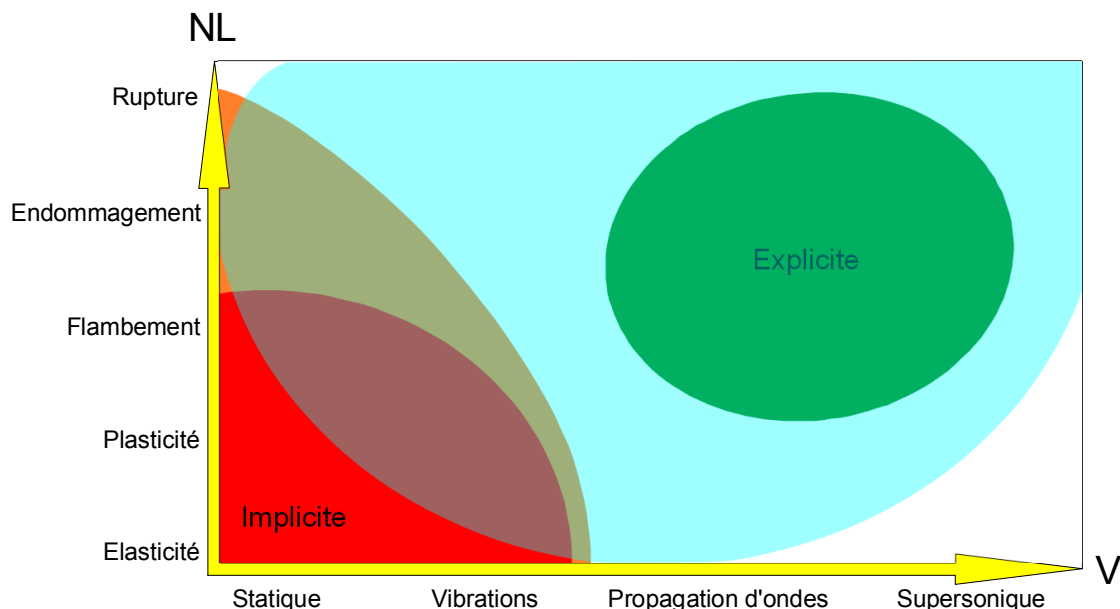


FIGURE 17.1: Domaines d'utilisation des méthodes implicite et explicite

17.5 Exemple : un calcul de propagation avec FREEFEM++

Quelque soit le logiciel utilisé¹, il y a toujours un grand nombre d'exemples traités fournis avec, sans compter le nombre d'ouvrages disponibles.

Nous avons souhaité néanmoins présenter un listing (qui sera discuté oralement) correspondant à un calcul réalisé sous FREEFEM++. Ce logiciel gratuit vous permettra de faire vos calculs par éléments finis... mais c'est également un outil pédagogique sans équivalent : sa manipulation se fait en des termes proches de la formulation mathématique, et en cela, il est une passerelle parfaite entre la théorie et la pratique de codes plus « industriels ». Le fait de pouvoir discrétiser à loisir une formulation variationnelle que l'on rentre soi-même est également un argument qui nous semble un vrai plus, même si cela commence à exister dans des codes commerciaux (mais reste confidentiel).²

Voici donc un petit listing sur lequel nous pourrions revenir de vive voix. Commençons donc, comme il se doit, par définir la géométrie du problème, paramétrée par a et b , que nous maillons :

```

1 real mu=1.;
2 real ro=0. , ro=1.;
3 // taille du maillage
4 int ncuts = 20;
5
6 // construction du domaine
7 real a=pi*0.8, b=1.2*pi ;
8
9 border gam1(t=0.,a){x=t;y=0; label =1;};
10 border gam2(t=0.,b){x=a;y=t; label =2;};
11 border gam3(t=a,0.){x=t;y=b; label =3;};
12 border gam4(t=b,0.){x=0.;y=t; label =4;};
13
14 // Maillage
15 mesh Th=buildmesh(gam1(ncuts)+gam2(ncuts)+gam3(ncuts)+gam4(ncuts));
16 // plot(Th, ps="mesh.eps");
17 // plot(Th, wait=1);

```

Nous définissons quelques valeurs afin de pouvoir définir le chargement (le chargement défini par la fonction w_1 ne sera pas utilisée dans le calcul effectué). Notons comme il est aisé de définir des fonctions :

1. Lorsque l'on parle de codes éléments finis, on cite les grands noms du domaine... et ils correspondent à des codes extraordinairement puissants, mais souvent chers.

Or un certain nombre de codes éléments finis professionnels sont disponibles gratuitement (au téléchargement et à l'utilisation). Les deux plus connus sont CAST3M (anciennement castem) et CODE ASTER développés et maintenus par le CEA et par EDF respectivement.

2. Notons que pour ceux qui préfèrent, il existe aussi RHEOLEF, un environnement C++ pour le calcul par éléments finis, qui reste proche, dans sa philosophie, de ce que propose FREEFEM++. Nous ne le connaissons pas assez pour fournir des exemples dans ce document.

```

18 // conditions aux limites essentielles
19 real r0=a/10., r, xc=a/3., yc=3.*b/4.;
20
21 // chargement initial sinusoidal
22 func real pertb(real r)
23 { if(r<r0) {return (1.+cos(pi*r/r0));}
24   else return 0.;}
25
26 //func real w1( real x, real y)
27 func real w11( real x, real y)
28 {
29   return pertb(sqrt((x-xc)^2+(y-yc)^2));
30 }
31
32 // chargement constant sur un carre
33 // pas utilise sur cet exemple

```

```

34 func real w1( real c, real d)
35 {
36   if(c>(0.8*xc))
37     {if (c<(1.2*xc))
38       {if (d>(0.8*yc))
39         {if (d<(1.2*yc)) {return 0.8;}
40         else return 0.;}
41       else return 0.;}
42     else return 0.;}
43   else return 0.;
44 }
45
46 func real w0( real x, real y)
47 {
48   return 0.*sin(x)*sin(y) ;
49 }

```

Ensuite, nous définissons l'espace des éléments finis utilisés, et les variables appartenant à ces espaces. L'analogie avec la « formulation mathématique » saute aux yeux... et c'est pourquoi cet outil nous semble particulièrement intéressant sur le plan pédagogique.

```

50 // Espaces elements finis
51 fespace Vh(Th,P2);
52 fespace Wh(Th,P1dc);
53
54 Vh w, wa, wd, wda, wdd, wdda, fi ;
55 Wh sxz, syz ;

```

Il s'agit d'un exemple non stationnaire, nous allons donc faire une boucle sur le temps. Dans FREEFEM++, nous entrons directement la formulation variationnelle du problème sous forme « mathématique »... le lien entre pratique des éléments finis et théorie est beaucoup plus clair. La boucle de temps est basée sur un schéma de Newmark implicite. Le temps « courant » est le temps $t + \Delta_t$ et le temps précédent est le temps t pour rester cohérent avec les notations du chapitre 17.

Il s'agit d'un problème de déplacement hors plan, dont le champ inconnu est traditionnellement noté w . Ainsi, dans le listing, w représente $q_{t+\Delta_t}$, $w_a \equiv q_t$, $w_d \equiv \dot{q}_{t+\Delta_t}$, $w_{da} \equiv \dot{q}_t$, $w_{dd} \equiv \ddot{q}_{t+\Delta_t}$ et $w_{dda} \equiv \ddot{q}_t$. $fi \equiv \varphi$ est la fonction test. La formulation variationnelle, en n'indiquant pas le temps actuel et en utilisant l'indice a pour le pas de temps précédent (a comme avant), est :

$$\begin{aligned}
\text{antiplane}(\dot{w}, \varphi) = & \int_{Th} \rho \dot{w} \varphi + \frac{\Delta_t^2}{4} \int_{Th} \mu \left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \\
& - \frac{\Delta_t}{2} \int_{Th} \rho g \varphi - \int_{Th} \rho \left(\dot{w}_a + \frac{\Delta_t}{2} \ddot{w}_a \right) \varphi \\
& + \frac{\Delta_t}{2} \int_{Th} \mu \left(\frac{\partial w_a}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial w_a}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \\
& + \frac{\Delta_t^2}{4} \int_{Th} \mu \left(\frac{\partial \dot{w}_a}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_a}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)
\end{aligned} \tag{17.12}$$

+Condition ($\dot{w} = 0$ sur les lignes 1, 2, 3, 4)

```

56 int n, k, Ntemps=100;
57 real T=2.*pi/sqrt(2.), pastemps=T/Ntemps
58 real dpt=0.5*pastemps;
59
60 problem antiplane(wd,fi, init=1)=int2d(Th)(ro*wd*fi)+
61   int2d(Th)(dpt^2*mu*(dx(wd)*dx(fi)+dy(wd)*dy(fi))) +
62   int2d(Th)(-dpt*rog*fi)+
63   int2d(Th)(ro*(-wda-dpt*wdda)*fi)+
64   int2d(Th)(dpt*mu*(dx(wa)*dx(fi)+dpt*dx(wda)*dx(fi)+
65   dy(wa)*dy(fi)+dpt*dy(wda)*dy(fi)))+
66   on(1,2,3,4,wd=0.);
67
68 // formulation du probleme en temps
69 // conditions initiales en temps
70 w=w0(x,y);
71 wd=w11(x,y);
72 wdd=0.;

```

```

73
74 real errorw, errorwd, temps, enerC, enerP, enerT;
75 real[int] visoS(20);
76 int ivi;
77 for (ivi=0;ivi<10;ivi++){
78     visoS[ivi]=-1+0.1*ivi;
79     visoS[ivi+10]=(ivi+1)*0.1;
80 }

```

Enfin, pour tester la qualité des résultats, il nous faut quelques indicateurs... Sans entrer dans le détail, des noms comme enerC, enerP, et enerT doivent vous mettre sur la piste.

```

81 real[int] Ec(Ntemps), Ep(Ntemps), Et(Ntemps), tt(Ntemps);
82
83 for (n=0;n<Ntemps;n++){
84     wa=w; wda=wd; wdda=wdd;
85     temps=n*pastemps;
86
87     enerC=0.5*int2d(Th)(ro*wd^2);
88     enerP=0.5*int2d(Th)(mu*(dx(w)*dx(w)+ dy(w)*dy(w)));
89     enerT=enerC+enerP;
90     Ec(n)=enerC; Ep(n)=enerP; Et(n)=enerT; tt(n)=temps;
91
92     cout << " iteration n= " << n << " enerP= " << enerP <<
93 "enerC= " << enerC << " enerTotale= " << enerT
94 << endl;
95
96     temps=(n+1.)*pastemps;
97
98 // resolution du probleme
99 antiplane;
100
101 w=wa+dpt*(wda+wd);
102 wdd=(wd-wda)/dpt-wdda;
103
104 sxz=mu*dx(w);
105 syz=mu*dy(w);
106 plot(Th,wd,fill=true, value=1, viso=visoS, nbiso=visoS.n,
107 ps=n, wait=0);
108 }
109
110 // Energie
111 //plot([tt,Ec],[tt,Ep],[tt,Et], ps="energie.eps");

```

À la figure 17.2 se trouve une illustration de ce que nous venons de calculer.

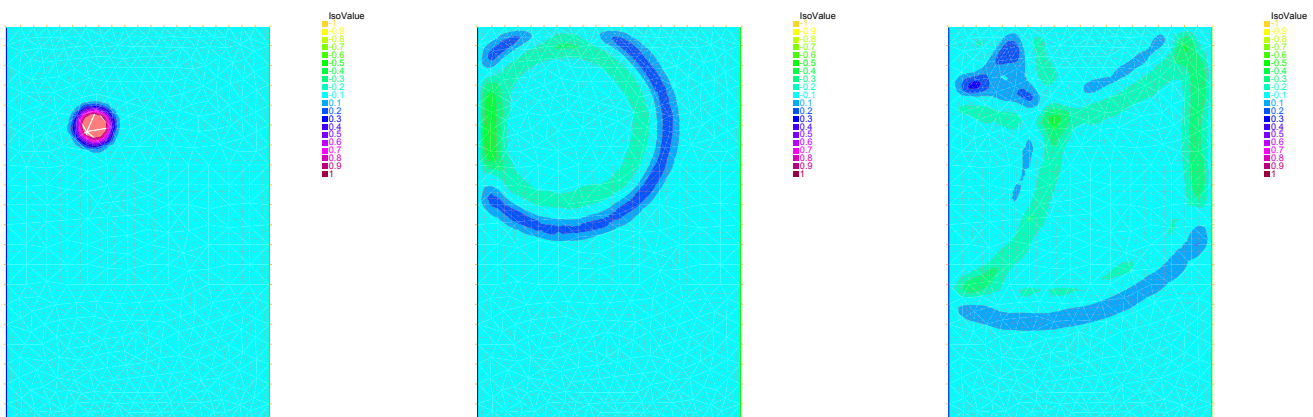


FIGURE 17.2: Propagation : pas de temps 0, 20 et 40

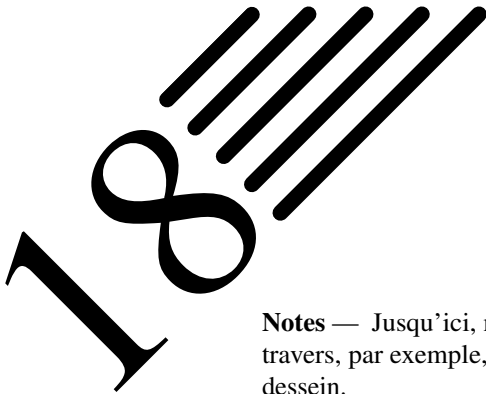
17.6 Décomposition modale

Pour le public visé, le lecteur devrait, à ce moment du document, se demander pourquoi il n'a pas encore été question de projection sur les modes propres.

On peut montrer que les modes de vibration de la structure forment une base. Il peut paraître intéressant de chercher la solution en temps du problème sous forme d'une approximation par projection sur la base des quelques N premiers modes propres, i.e. de rechercher N fonctions scalaires du temps.

Lorsque l'on dispose déjà des N premiers modes et lorsque le nombre n de degrés de liberté est important, cette approche peut s'avérer particulièrement efficace. Par ailleurs, lorsque les modes sont associés à des mouvements simples de la structure, il peut être facile pour un ingénieur un peu expérimenté d'imaginer le nombre de modes à utiliser pour représenter le phénomène.

La méthode de la décomposition modale sera exposée au paragraphe 18.3.4, lorsque nous aurons fait quelques rappels sur les modes propres.



Notes — Jusqu'ici, nous n'avons quasiment pas parlé de mode propre cela est plus ou moins évoqué à travers, par exemple, « la plus petite période du système » au chapitre précédent... mais cela a été fait à dessein.

En effet, nous avons voulu, dans ce chapitre, regrouper les approches modales, car cela nous a semblé plus en cohérence.

18.1 Introduction

Dans la mesure où ce document s'adresse à des ingénieurs en mécanique (ou en acoustique), la notion de mode propre est une notion relativement maîtrisée.

Un système mécanique atteint un **mode propre de vibration** lorsque tous les points de ce système sont à une fréquence donnée appelée **fréquence propre** du système. Une fréquence propre est **fondamentale** si elle n'est pas le multiple d'une autre fréquence propre ; dans le cas contraire, c'est une **harmonique**.

On appelle **résonance** le phénomène selon lequel certains systèmes physiques sont particulièrement sensibles à certaines fréquences. Un système résonant peut accumuler une énergie, si celle-ci est appliquée sous forme périodique, et proche d'une fréquence propre. Soumis à une telle excitation, le système est alors le siège d'oscillations de plus en plus importantes, jusqu'à atteindre un régime d'équilibre qui dépend des éléments dissipatifs du système, ou bien jusqu'à rupture d'un composant du système.

Si l'on soumet un système résonant à une percussion (pour les systèmes mécaniques) ou à une impulsion (pour les systèmes électriques), et non plus à une excitation périodique, alors le système sera le siège d'oscillations amorties sur des fréquences proches de ses fréquences propres et retournera progressivement à son état stable. **Physiquement, c'est le coup de marteau de choc donné sur une structure pour en déterminer les modes.**

Un système susceptible d'entrer en résonance, i.e. susceptible d'être le siège d'oscillations amorties, est un **oscillateur**. Un tel système a la particularité de pouvoir emmagasiner temporairement de l'énergie sous deux formes : potentielle ou cinétique. L'oscillation est le phénomène par lequel l'énergie du système passe d'une forme à l'autre, de façon périodique.

Si l'on injecte une énergie potentielle au moment où l'énergie potentielle déjà emmagasinée est maximale, l'énergie ainsi injectée s'ajoute à l'énergie déjà emmagasinée et l'amplitude de l'oscillation va augmenter, ainsi que l'énergie totale. Idem pour l'énergie cinétique. Ainsi, si l'on apporte de l'énergie avec une périodicité égale (ou proche) de la périodicité propre du système, l'énergie totale va augmenter régulièrement et l'amplitude des oscillations du système va ainsi croître. L'exemple le plus simple est celui d'une balançoire : l'énergie de chaque poussée s'ajoute à l'énergie totale, à condition de pousser au bon moment...

Le phénomène de **résonance** n'est rien d'autre que cet effet d'accumulation de l'énergie en injectant celle-ci au moment où elle peut s'ajouter à l'énergie déjà accumulée, i.e. « en phase » avec cette dernière.

Quand l'excitation aura cessé, le système résonant sera le siège d'**oscillations amorties** : il va revenir plus ou moins vite à son état d'équilibre stable. En effet, l'énergie de départ sera peu à peu absorbée par les éléments dissipatifs du système (amortisseur visqueux en mécanique, résistances en électricité...). Un système peu amorti sera le siège d'un grand nombre d'oscillations qui diminueront lentement avant de disparaître complètement.

La **représentation modale** est pertinente dans le domaine des basses fréquences, i.e. pour les premiers modes propres. Dans les domaines moyennes et hautes fréquences, on utilise des méthodes adaptées à la **densité spectrale** élevée.

Les domaines moyennes fréquences et hautes fréquences sont définis par la densité spectrale. En effet, l'expression en fréquences n'a pas de sens pour définir ces domaines, une similitude sur un système physique modifie les fréquences propres mais le spectre reste semblable, à un facteur près. Dans le cas de fréquences multiples, il existe un sous-espace propre donc les modes propres sont arbitraires dans ce sous espace. Dans le cas de fréquences voisines (densité spectrale élevée), la représentation modale n'est pas robuste car de faibles perturbations du domaine physique vont entraîner un changement important des modes propres associés à ces fréquences. **Donc la représentation modale n'est pertinente que pour le domaine des basses fréquences, domaine défini par la densité spectrale.** Le domaine basses fréquences s'étendra jusqu'à quelques Hz en génie civil, jusqu'à des milliers de Hz pour de petites structures mécaniques.

Le phénomène de **synchronisation**, ou **accrochage de fréquences** est un phénomène par lequel deux systèmes excités chacun selon une fréquence se mettent à osciller selon la même fréquence. On trouve de nombreux exemples de ce phénomène dans la nature :

- Le plus connu et le plus facilement observable concerne la Lune : celle-ci présente toujours la même face à la Terre. Cela signifie que la période de rotation de la Lune sur elle-même T_0 est égale à la période de rotation de la lune autour de la Terre $T \cong 28$ jours. Il s'agit d'une résonance 1 : 1. L'analyse montre que ce n'est pas une coïncidence, et que cela est dû à un faible couplage gravitationnel entre ces deux mouvements.
- Le règne animal n'est pas en reste et fournit lui-aussi des exemples de synchronisation, auxquels on ne pense pas spontanément. Citons le vol d'oiseaux ou le clignotement des lucioles...

Histoire

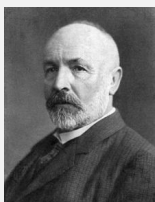
On trouve d'autres exemples historiques relatifs à ce phénomène de synchronisation. En voici deux parmi les plus connus.

Le premier est celui de la synchronisation des balanciers de deux pendules accrochées au même mur d'une pièce. Un faible couplage par les vibrations transmises dans le mur, et une dissipation faible, expliquent cet accrochage de fréquences et cette résonance 1 : 1.

C'est Huygens qui a remarqué et expliqué ce phénomène : le système composé des deux balanciers et du mur a deux fréquences voisines faiblement couplées, et il possède, par le couplage, deux modes propres correspondant aux mouvements en phase et en opposition de phase des deux pendules. C'est sur le premier mode que se produit la synchronisation.



Huygens



Cantor

L'escalier de Cantor, ou escalier du diable est un exemple mathématique incontournable en analyse. Il correspond au graphe d'une fonction continue f , sur $[0; 1]$, telle que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, qui est dérivable presque partout, la dérivée étant presque partout nulle.

L'escalier de Cantor peut également être vu comme la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle continue qui n'est pas à densité, et qui est même étrangère à la mesure de Lebesgue.

Enfin, l'escalier du diable peut aussi être vu comme résultant d'un phénomène de synchronisation. Si l'on change un paramètre extérieur du système de façon lente et continue, par exemple l'amplitude $\alpha_0 \in \mathbb{R}$, alors la valeur de l'accrochage $a = p/q$ va dépendre de ce paramètre. On obtient alors une fonction $a(\alpha_0)$ de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$. Cette fonction très étrange comporte une multitude de paliers plus ou moins larges... et correspond à l'escalier du diable.

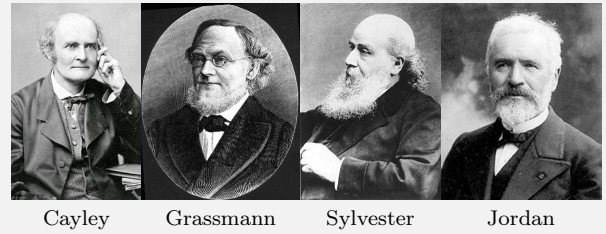
En mathématiques, le concept de vecteur propre est une notion portant sur une application linéaire d'un espace dans lui-même. Il correspond à l'étude des axes privilégiés, selon lesquels l'application se comporte comme une dilatation, multipliant les vecteurs par une même constante. Ce rapport de dilatation est appelé valeur propre ; les vecteurs auxquels il s'applique s'appellent vecteurs propres, réunis en un espace propre.

Histoire

Bien qu'existant sous une forme non formalisée depuis longtemps, il aura fallu attendre l'invention des structures algébriques nécessaires pour vraiment pouvoir parler des valeurs propres (issues par exemple de la clôture algébrique de \mathbb{C} démontrée par Gauß).

L'exemple immédiat qui vient à l'esprit est le traitement de l'équation de la chaleur par Fourier qui utilise déjà une base de vecteurs propres, bien que le concept n'ait pas encore été défini. Hamilton introduira la notion de polynôme caractéristique, ce qui permet de déterminer ce que l'on appelle maintenant les valeurs propres associées à l'endomorphisme d'une équation différentielle linéaire.

Plusieurs aller-retour permettront de définir les notions d'espace vectoriel (Cayley, Grassmann, Cauchy), de matrice (Sylvester, Cayley) et de valeurs propres (Sylvester, Jordan). Hilbert finalement fera prendre conscience de la profondeur de la notion de valeur propre. L'analyse fonctionnelle naît dans la foulée, et elle est l'objet de la première partie de ce document.



Cayley Grassmann Sylvester Jordan

18.2 Notions de valeur, vecteur, mode et fréquence propres

Étant donné une matrice carrée $[A]$ d'ordre n (à coefficients dans un anneau commutatif), on cherche un polynôme dont les racines sont précisément les valeurs propres de $[A]$. Ce polynôme est appelé **polynôme caractéristique** de $[A]$ et est défini par :

$$p_A(X) := \det(X [I]_n - [A]) \quad (18.1)$$

avec X l'indéterminée du polynôme et $[I]_n$ la matrice identité d'ordre n .

Si λ est une **valeur propre** de $[A]$, alors il existe un **vecteur propre** $\{V\}$ non nul tel que $[A] \{V\} = \lambda \{V\}$, i.e. tel que l'on ait $(\lambda [I]_n - [A]) \{V\} = \{0\}$.

Puisque $\{V\}$ est non nul, cela implique que la matrice $(\lambda [I]_n - [A])$ est singulière, donc de déterminant nul.

Cela montre que les valeurs propres de $[A]$ sont des zéros de la fonction $\lambda \mapsto \det(\lambda [I]_n - [A])$ i.e. des racines du polynôme $\det(X [I]_n - [A])$.

La propriété la plus importante des polynômes caractéristiques est que les valeurs propres de $[A]$ sont exactement les racines du polynôme $p_A(X)$.

Quelques propriétés importantes :

- $p_A(X)$ est un polynôme unitaire (coefficient dominant égal à 1) et son degré est égale à n .
- $[A]$ et sa transposée ont le même polynôme caractéristique.
- Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique. ($[A]$ et $[B]$ sont semblables s'il existe une matrice inversible $[P]$ telle que $[A] = [P][B][P]^{-1}$). Attention, la réciproque n'est pas vraie en général.
- Si $p_A(X)$ peut être décomposé en produit de facteurs de degré 1, alors $[A]$ est semblable à une matrice triangulaire (et même à une matrice de Jordan).

Pour aller un peu plus loin. Le théorème de Cayley-Hamilton (dont la première démonstration est due à Frobenius) affirme que tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps commutatif quelconque annule son propre polynôme caractéristique.

En termes de matrice, cela signifie que : si $[A]$ est une matrice carrée d'ordre n et si $p_A(X)$ est son polynôme caractéristique, alors en remplaçant formellement X par la matrice $[A]$ dans le polynôme, le résultat est la matrice nulle, i.e. :

$$p_A([A]) = [A]^n + p_{n-1} [A]^{n-1} + \dots + p_1 [A] + p_0 [I]_n = [0]_n \quad (18.2)$$

Cela signifie que le polynôme caractéristique est un polynôme annulateur de $[A]$. Les applications sont importantes car le polynôme minimal (qui est l'unique polynôme unitaire qui engendre l'idéal annulateur de l'ensemble des polynômes qui annulent l'endomorphisme dont $[A]$ est la représentation) cache une décomposition en somme directe de sous-espaces stables.

18.3 Vibration des structures

Revenons sur l'équation de la dynamique sous forme matricielle :

$$[M] \{\ddot{q}\} + [C] \{\dot{q}\} + [K] \{q\} = \{F\} \quad (18.3)$$

qui peut être vue comme l'équation de la statique $[K] \{q\} = \{F\}$ à laquelle on ajoute des forces *extérieures* d'inertie $-[M] \{\ddot{q}\}$ et des forces *extérieures* visqueuses $-[C] \{\dot{q}\}$.

D'un point de vue pratique, on distingue trois types de problèmes :

- détermination d'une **réponse libre** : dans ce cas, la sollicitation est nulle $\{F\} = \{0\}$;
- détermination d'une **réponse périodique** : dans ce cas, la sollicitation $\{F\}$ est périodique ;
- détermination d'une **réponse transitoire** : dans ce cas, la sollicitation $\{F\}$ est quelconque.

Dans les deux premiers cas, les conditions initiales du système n'ont **aucune importance**. On cherche à déterminer une solution générale.

On pourrait considérer que le chapitre 17 répond à ces trois types de problèmes, ce qui n'est pas fondamentalement faux. Toutefois, il est plus judicieux de considérer que seul le cas de la **dynamique transitoire** y a été explicité, et encore uniquement pour l'aspect non modal (qui sera développé dans ce chapitre un peu plus loin).

En effet, dans les cas des **vibrations libres (amorties ou non) ou périodique forcées**, il est possible d'utiliser la notion de mode, qui n'avait pas été abordée dans les chapitres précédents.

Définition 76 — Méthode spectrale. Une méthode spectrale consiste à transformer le problème considéré en un problème nécessitant de calculer des valeurs et fonctions propres d'un opérateur.

Si l'opérateur en question est linéaire, la fonction dont on cherche à calculer les valeurs (i.e. la solution du problème considéré) peut être exprimée comme combinaison linéaire des fonctions sur lesquelles l'opérateur agit de façon facilement calculable : si ce sont les fonctions propres de l'opérateur on parle vraiment de **méthode spectrale**, si ce sont d'autres fonctions on parle de **méthodes pseudo-spectrales**. C'est pourquoi la méthode des éléments finis stochastiques présentée au chapitre 22 est bien elle-aussi une méthode spectrale.

18.3.1 Vibrations libres non amorties

En l'absence de sollicitation et d'amortissement, l'équation de la dynamique devient :

$$[M] \{\ddot{q}\} + [K] \{q\} = \{0\} \quad (18.4)$$

dont la solution générale est harmonique et s'écrit :

$$\{q\} = \{\bar{q}\} e^{i\omega t} \quad (18.5)$$

En injectant la forme de la solution générale dans l'équation de la dynamique, on voit que la pulsation ω est solution du problème de valeurs propres suivant :

$$[K] \{\bar{q}\} = \omega^2 [M] \{\bar{q}\} \quad (18.6)$$

ce qui conduit à :

$$\det ([K] - \omega^2 [M]) = 0 \quad (18.7)$$

On obtient ainsi les n **valeurs propres** $\omega_1, \dots, \omega_n$, où n est la taille du système (i.e. les matrices $[M]$ et $[K]$ sont $n \times n$).

On trouve également les n vecteurs $\{\bar{q}\}_i$ appelés **modes propres du système** et que l'on **norme par rapport à la masse**, i.e. tels que :

$$\langle \bar{q} \rangle_i [M] \{\bar{q}\}_i = 1 \quad \forall i \in [1, n] \quad (18.8)$$

La détermination des valeurs propres ω_i se fait rarement en cherchant les zéros de l'équation du déterminant en raison de la très grande taille du système dans le cas général, et des considérables différences d'ordre de grandeur entre les valeurs propres.

De toutes façons, ce sont les premières fréquences qui déterminent le comportement du système.

Rappel du cas unidimensionnel L'équation différentielle à résoudre est $M\ddot{u} + Ku = 0$, dont la solution s'écrit :

$$u = A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t) \quad (18.9)$$

La pulsation propre du système ω_0 , sa fréquence propre f_0 et sa période propre T_0 sont définies et reliées par les relations :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}} \quad f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \quad T_0 = \frac{1}{f_0} \quad (18.10)$$

Les constantes d'intégration sont déterminées à l'aide des conditions aux limites sur le déplacement u_0 et la vitesse \dot{u}_0 . Il vient :

$$A = \frac{\dot{u}_0}{\omega_0} \quad \text{et} \quad B = u_0 \quad (18.11)$$

Des méthodes permettant de trouver les premiers zéros d'un polynôme de degré n ont donc été mises au point. La majeure partie de ces méthodes consiste à écrire la relation du déterminant sous la forme suivante :

$$[H] \{X\} = \lambda \{X\} \quad (18.12)$$

où $[H]$ est une matrice définie positive.

On se sert pour cela de la décomposition de Cholesky de $[K]$, i.e. en l'écrivant à partir d'une matrice triangulaire inférieure $[L]$ sous la forme $[K] = [L][L]^T$.

L'équation du déterminant conduit alors à :

$$[L]^{-1} [M] [L]^{-T} [L]^T \{\bar{q}\} = \frac{1}{\omega^2} [L]^T \{\bar{q}\} \quad (18.13)$$

et l'on obtient la forme cherchée en posant $\lambda = \omega^{-2}$, $\{X\} = [L]^T \{\bar{q}\}$ et $[H] = [L]^{-1} [M] [L]^{-T}$, où $[H]$ est bien symétrique.

Si $[M]$ et $[K]$ sont définies positives (ce qui est le cas habituel des problèmes en dynamique des structures), il existe n valeurs propres réelles positives. Ces solutions sont appelées pulsations propres du système.

Remarque. Si $[K]$ est singulière (elle ne possède pas d'inverse), alors, afin de pouvoir utiliser les méthodes précédentes, on utilise un artifice qui consiste à introduire un paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ du même ordre de grandeur que ω^2 . On doit alors résoudre :

$$([K] + \alpha [M]) \{\bar{q}\} = (\omega^2 + \alpha) [M] \{\bar{q}\} \quad (18.14)$$

La nouvelle matrice $[K] + \alpha [M]$ est alors inversible et la solution cherchée est $\omega^2 + \alpha$.

18.3.2 Vibrations libres amorties

Problèmes du premier ordre

Si $[M] = [0]$, l'équation de la dynamique se transforme en celle de la chaleur :

$$[C] \{\dot{q}\} + [K] \{q\} = \{0\} \quad (18.15)$$

dont on cherche une solution générale sous la forme :

$$\{q\} = \{\bar{q}\} e^{-\omega t} \quad (18.16)$$

ce qui conduit au problème de valeurs propres :

$$([K] - \omega [C]) \{\bar{q}\} = 0 \quad (18.17)$$

Les matrices $[C]$ et $[K]$ sont généralement définies positives, donc ω est réelle positive. La solution présente un terme de décroissance exponentielle qui ne correspond pas réellement à un état de régime permanent.

Problèmes du second ordre

Dans le cas général ($[M] \neq [\mathbb{O}]$), on doit donc résoudre l'équation de la dynamique sans sollicitation :

$$[M] \{\ddot{q}\} + [C] \{\dot{q}\} + [K] \{q\} = \{0\} \quad (18.18)$$

dont on cherche une solution générale sous la forme :

$$\{q\} = \{\bar{q}\} e^{-\alpha t} \quad (18.19)$$

avec $\alpha \in \mathbb{C}$. Cela conduit au problème de valeurs propres :

$$(\alpha^2 [M] + \alpha [C] + [K]) \{\bar{q}\} = 0 \quad (18.20)$$

où $\{\bar{q}\} \in \mathbb{C}$.

La partie réelle de la solution représente une vibration amortie. Ce problème est plus délicat à résoudre que les précédents si bien que la résolution explicite est peu courante.

Rappel du cas unidimensionnel L'équation différentielle à résoudre est : $M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = 0$, que l'on réécrit, en introduisant le coefficient d'amortissement ξ :

$$\ddot{u} + 2\xi\omega_0\dot{u} + \omega_0^2 u = 0 \quad (18.21)$$

La solution s'écrit :

$$u = [A \sin(\omega_D t) + B \cos(\omega_D t)] e^{-\xi\omega_0 t} \quad (18.22)$$

où ω_D , la pseudo-pulsation, est définie par :

$$\omega_D = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} \quad (18.23)$$

On remarquera que ω_D n'est définie que pour $\xi < 1$, i.e. dans le cas des systèmes sous-critiques ou sous-amortis.

Les constantes d'intégration sont déterminées à l'aide des conditions aux limites sur le déplacement u_0 et la vitesse \dot{u}_0 . Il vient :

$$A = \frac{\dot{u}_0 + u_0 \xi \omega_0}{\omega_0} \quad \text{et} \quad B = u_0 \quad (18.24)$$

Le système amorti oscille à une pulsation ω_D (légèrement) inférieure à la pulsation du système non amorti ω_0 . Si l'amortissement est positif (ce qui n'est parfois pas le cas pour des systèmes instables), l'amplitude du mouvement décroît dans le temps de façon exponentielle (en atteignant une amplitude nulle mais pour un temps infini).

Dans le cas d'un système sur-amorti ($\xi > 1$), alors, en posant $\omega'_D = \sqrt{\xi^2 - 1}$, la solution est du type :

$$u = [Ae^{\omega'_D t} + Be^{-\omega'_D t}] e^{-\xi\omega_0 t} \quad (18.25)$$

avec les constantes d'intégration :

$$A = \frac{\dot{u}_0 + (\omega'_D + \xi\omega_0)u_0}{2\omega'_D} \quad \text{et} \quad B = \frac{-\dot{u}_0 + (\omega'_D - \xi\omega_0)u_0}{2\omega'_D} \quad (18.26)$$

Un système sur-amorti n'est pas un oscillateur...

Dans le cas d'un système critique ($\xi = 1$), alors la solution s'écrit :

$$u = (u_0 + \omega_0 u_0 t + \dot{u}_0 t) e^{-\omega_0 t} \quad (18.27)$$

Ce système n'est pas lui non plus un oscillateur...

18.3.3 Vibrations périodiques forcées

Il s'agit du cas où la sollicitation est périodique. Nous l'écrivons sous la forme :

$$\{F\} = \{\overline{F}\} e^{\alpha t} \quad (18.28)$$

avec $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2 \in \mathbb{C}$.

La solution générale s'écrit :

$$\{q\} = \{\overline{q}\} e^{\alpha t} \quad (18.29)$$

En substituant cette forme de solution dans l'équation de la dynamique, il vient :

$$(\alpha^2 [M] + \alpha [C] + [K]) \{\overline{q}\} = [D] \{\overline{q}\} = -\{\overline{F}\} \quad (18.30)$$

qui n'est pas un problème de valeurs propres, mais ce système peut être résolu comme un problème statique, i.e. en inversant la matrice $[D]$. Attention, la solution appartient à \mathbb{C} .

On sépare alors les parties réelle et imaginaire en notant : $e^{\alpha t} = e^{\alpha_1 t} (\cos(\alpha_2 t) + i \sin(\alpha_2 t))$, $\{\overline{F}\} = \{\overline{F}\}_1 + i \{\overline{F}\}_2$ et $\{\overline{q}\} = \{\overline{q}\}_1 + i \{\overline{q}\}_2$.

On obtient alors le système suivant :

$$\begin{bmatrix} (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) [M] + \alpha_1 [C] + [K] & -2\alpha_1\alpha_2 [M] - \alpha_2 [C] \\ 2\alpha_1\alpha_2 [M] + \alpha_2 [C] & (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) [M] + \alpha_1 [C] + [K] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\overline{q}\}_1 \\ \{\overline{q}\}_2 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \{\overline{F}\}_1 \\ \{\overline{F}\}_2 \end{Bmatrix} \quad (18.31)$$

dans lequel toutes les quantités sont réelles.

Il est ainsi possible de déterminer la réponse à toute excitation périodique par résolution directe.

Pour une excitation périodique, la réponse après une phase transitoire initiale n'est plus influencée par les conditions initiales. La solution obtenue représente la réponse qui s'établit. Ceci est valable aussi bien pour les problèmes en dynamique des structures que pour les problèmes de conduction de chaleur.

Rappel du cas unidimensionnel L'équation différentielle à résoudre est : $M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = F(t)$, que l'on réécrit :

$$\ddot{u} + 2\xi\omega_0\dot{u} + \omega_0^2 u = F_0/M \cos(\omega t) \quad (18.32)$$

en supposant que $F(t)$ est un chargement mono fréquentiel.

La solution est somme d'une solution particulière, appelée régime permanent ou forcé, et d'une combinaison linéaire de l'équation sans second membre, dit régime transitoire.

On voit alors, de manière intuitive, que :

- La fréquence du régime permanent (ou forcé) est celle de la fréquence d'excitation (qui « force » le système) ;
- La fréquence du régime transitoire est la fréquence propre du système (puisque'il n'y a pas de second membre).

La solution s'écrit :

$$u = \frac{F_0}{M} \frac{\cos(\omega t - \theta)}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} + [A \sin(\omega_D t) + B \cos(\omega_D t)] e^{-\xi\omega_0 t} \quad (18.33)$$

En présence d'amortissement, le régime transitoire disparaît après quelques périodes d'oscillation.

18.3.4 Régimes transitoires

Le lecteur aura sans doute remarqué que dans les méthodes présentées ci-dessus, les conditions initiales du problème ne sont pas prises en compte. Par exemple le comportement sismique des structures ou l'évolution transitoire d'un problème de conduction de chaleur nécessitent de prendre en compte à la fois les conditions initiales et le caractère non périodique des sollicitations.

L'obtention d'une solution à ce genre de problème nécessite soit l'utilisation d'une discrétisation dans le domaine temporel (voir chapitre 17), soit l'utilisation de méthodes adaptées. Dans ce dernier cas, il existe deux approches :

- la méthode de réponse en fréquence ;
- la méthode d'analyse modale.

Nous allons maintenant présenter cette dernière méthode.

Décomposition modale

La méthode de décomposition modale est sans doute l'une des plus importantes et des plus employées.

Nous partons toujours de notre équation de la dynamique sous la forme :

$$[M] \{\ddot{q}\} + [C] \{\dot{q}\} + [K] \{q\} + \{F\} = \{0\} \quad (18.34)$$

Nous avons vu qu'en réponse libre ($\{F\} = \{0\}$), la solution s'écrit :

$$\{q\} = \{\bar{q}\} e^{-\alpha t} = \sum_{i=1}^n \{\bar{q}\}_i e^{-\alpha_i t} \quad (18.35)$$

où α_i sont les valeurs propres et $\{\bar{q}\}_i$ les vecteurs propres.

Pour la réponse forcée, l'idée consiste à **chercher la solution sous la forme d'une combinaison linéaire des modes propres**, i.e. sous la forme :

$$\{q\} = \sum_{i=1}^n \{\bar{q}\}_i y_i(t) \quad (18.36)$$

où la quantité $y_i(t)$ représente la contribution de chaque mode.

En injectant cette forme de solution dans l'équation de la dynamique (puis en composant à gauche par $\langle \bar{q} \rangle_i$), on obtient un **ensemble d'équations scalaires indépendantes** :

$$m_i \ddot{y}_i + c_i \dot{y}_i + k_i y_i + f_i = 0 \quad (18.37)$$

dont les paramètres sont, grâce à l'orthogonalité des modes :

$$\begin{cases} m_i = \langle \bar{q} \rangle_i [M] \{\bar{q}\}_i \\ c_i = \langle \bar{q} \rangle_i [C] \{\bar{q}\}_i \\ k_i = \langle \bar{q} \rangle_i [K] \{\bar{q}\}_i \\ f_i = \langle \bar{q} \rangle_i \{F\} \end{cases} \quad (18.38)$$

Les équations scalaires se résolvent ensuite par des méthodes élémentaires indépendamment les unes des autres. Le vecteur total est ensuite obtenu par superposition.

Toutefois, pour effectuer cette superposition, il n'aura pas échappé au lecteur qu'il faut avoir résolu les problèmes des valeurs propres. Dans le cas général, le calcul des valeurs et des vecteurs propres **complexes** est loin d'être facile. La méthode habituelle consiste à déterminer les valeurs propres **réelles** du problème vu précédemment :

$$\omega^2 [M] \{\bar{q}\} = [K] \{\bar{q}\} \quad (18.39)$$

On montre que le problème est découplé en y seulement si on a la **propriété d'orthogonalité de [C]** :

$$\langle \bar{q} \rangle_i [C] \{\bar{q}\}_i = 0 \quad (18.40)$$

Or ceci n'est pas vrai en général car les vecteurs propres assurent uniquement l'orthogonalité de $[M]$ et $[K]$. En revanche, si la matrice d'amortissement $[C]$ est une combinaison linéaire des matrices $[M]$ et $[K]$, la propriété d'orthogonalité est alors évidemment satisfaite. C'est l'hypothèse de Basile.

Dans la suite on suppose que la propriété d'orthogonalité de $[C]$ est satisfaite. L'équation sur ω devient alors :

$$\omega_i^2 [M] \{\bar{q}\}_i = [K] \{\bar{q}\}_i \quad (18.41)$$

et par suite :

$$\omega_i^2 m_i = k_i \quad (18.42)$$

En supposant que les modes sont normalisés de telle sorte que $m_i = 1$ et en posant $c_i = 2\omega_i^2 c'_i$ (où c'_i correspond au pourcentage d'amortissement par rapport à sa valeur critique), on montre que les équations scalaires se mettent sous forme d'une équation différentielle du second ordre :

$$\ddot{y}_i + 2\omega_i^2 c'_i \dot{y}_i + \omega_i^2 y_i + f_i = 0 \quad (18.43)$$

dont la solution générale est :

$$y_i = \int_0^t f_i e^{-c'_i \omega_i (t-\tau)} \sin \omega_i (t - \tau) d\tau \quad (18.44)$$

Une intégration numérique permet de déterminer une réponse, puis la superposition de ces termes donne la réponse transitoire totale (en principe !).

On rappelle que la méthode de décomposition modale nécessiterait la détermination de l'ensemble des valeurs et modes propres, ce qui représenterait des calculs considérables. D'un point de vue pratique, on ne prend en compte qu'un nombre limité de modes étant donné que les réponses à des fréquences élevées sont souvent très amorties et prennent par conséquent des valeurs négligeables. Par ailleurs le problème des hautes fréquences n'est souvent abordé que de manière statistique.

18.3.5 Calcul des modes propres et méthodes de réduction modale

Les méthodes de réduction modale ont pour but d'effectuer un changement de base dans l'étude d'une structure : on souhaite remplacer l'espace vectoriel initial, dont la dimension est égale au nombre de degrés de liberté, par un autre, dont la taille sera inférieure. En d'autres termes, on cherche une base plus optimale afin de diminuer la taille de cet espace vectoriel, tout en s'assurant que ce qui n'est pas pris en compte est bien négligeable. Or, physiquement, on s'aperçoit que les modes propres (et surtout les premiers modes propres) réalisent cet optimal.

Il existe deux principaux types de méthodes :

- les méthodes à interfaces libres (Craig...);
- et les méthodes à interfaces fixes (Craig-Bampton).

Dans ce document, nous ne présenterons que cette dernière, qui, de plus, est particulièrement adaptée au cas de sous-structuration, i.e. lorsque le système considéré est scindé en sous-structures.

Mais tout d'abord, commençons par présenter succinctement quelques méthodes de calcul des modes propres, ce qui n'est pas si aisé que cela, et peut s'avérer coûteux selon les méthodes et le nombre de modes calculés.

Quotient de Rayleigh

Définition 77 — Matrice hermitienne. Une matrice hermitienne, ou auto-adjointe, est une matrice $[A]$ carrée à éléments complexes telle que cette matrice est égale à la transposée de sa conjuguée, i.e. :

$$[A] = \overline{[A]}^T \quad (18.45)$$

En particulier, une matrice à éléments réels est hermitienne si et seulement si elle est symétrique.

Une matrice hermitienne est orthogonalement diagonalisable et toutes ses valeurs propres sont réelles. Ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux.

Définition 78 — Quotient de Rayleigh. Soit $[A]$ une matrice hermitienne et $\{x\}$ un vecteur non nul, on appelle quotient de Rayleigh $R([A], \{x\})$ le scalaire :

$$R([A], \{x\}) = \frac{\langle \bar{x} | [A] | x \rangle}{\langle \bar{x} | x \rangle}. \quad (18.46)$$

où $\langle \bar{x} |$ désigne le vecteur adjoint de $\{x\}$, c'est-à-dire le conjugué du vecteur transposé.

Dans le cas où $[A]$ et $\{x\}$ sont à coefficients réels, alors $\langle \bar{x} |$ se réduit au vecteur transposé, i.e. $\langle x |$.

Le quotient de Rayleigh atteint un minimum λ_{\min} (qui n'est autre que la plus petite valeur propre de $[A]$) lorsque $\{x\}$ est un vecteur propre $\{v\}_{\min}$ associé à cette valeur.

De plus, quel que soit le vecteur $\{x\}$, le quotient de Rayleigh $R([A], \{x\}) \leq \lambda_{\max}$ (où λ_{\max} est la plus grande valeur propre de $[A]$ de vecteur propre associé $\{v\}_{\max}$) et $R([A], \{v\}_{\max}) = \lambda_{\max}$. Ainsi, le quotient de Rayleigh, combiné au théorème du minimax de von Neumann, permet de déterminer une à une toutes les valeurs propres d'une matrice.

On peut également l'employer pour calculer une valeur approchée d'une valeur propre à partir d'une approximation d'un vecteur propre. Ces idées forment d'ailleurs la base de l'algorithme d'itération de Rayleigh.

Méthode itérative de Rayleigh

On utilise l'algorithme suivant :

1. choix d'un vecteur initial $\{x\}_i$;
2. résolution de $[K] \{x\}_{i+1} = [M] \{x\}_i$;
3. test de convergence :
 - si $|\{x\}_{i+1} - \{x\}_i| < \varepsilon$, alors aller au point 4 ;
 - sinon retourner au point 1 pour choisir un nouveau vecteur ;
4. $\{\varphi\} = \{x\}_{i+1}$ et $\omega^2 = \frac{\langle \{\Phi\}, [K] \{\Phi\} \rangle}{\langle \{\Phi\}, [M] \{\Phi\} \rangle}$

Ce processus converge vers le mode propre fondamental.

Lorsque l'on veut déterminer le mode le plus proche d'une pulsation donnée ϖ , il suffit de remplacer la matrice de rigidité par $[\tilde{K}] = [K] - \varpi^2 [M]$.

Le processus converge alors vers le mode de pulsation $\tilde{\omega}^2 = \omega^2 - \varpi^2$.

Itérations des sous-espaces

La méthode précédente peut être étendue en prenant plusieurs vecteurs initiaux et en se plaçant dans le sous-espace qu'ils définissent. Les pulsations propres doivent alors être calculées à chaque itération en calculant tous les modes propres du système réduit au sous-espace étudié.

Sous-structuration : méthode de Craig et Bampton

Considérons une structure comportant n degrés de liberté et ayant une matrice masse $[M]$ et une matrice de rigidité $[K]$. L'utilisation de la méthode de Craig-Bampton impose de décomposer les degrés de liberté de la structure en deux parties :

- les **degrés de liberté « frontière »** : on considère que ces degrés de liberté sont ceux pouvant potentiellement être chargés au cours du temps et ceux sur lesquels s'appliquent des conditions aux limites (encastrement, appui simple...). Les chargements volumiques (tel le poids) n'influent pas sur la détermination des degrés de liberté frontière, sans quoi cette décomposition n'aurait pas de sens. Ces degrés de liberté sont rangés dans le vecteur $\{q\}_L$ (L comme liaison).

Dans le cas de la sous-structuration, les degrés de liberté frontières correspondent trivialement aux degrés de liberté aux interfaces entre les différentes sous-structures.

- les **degrés de liberté « intérieurs »** : il s'agit de tous les autres degrés de liberté (un chargement volumique peut éventuellement s'appliquer sur ces degrés de liberté). Ces degrés de liberté constituent le vecteur noté $\{q\}_I$ (I comme intérieur).

La base de réduction se compose de deux types de modes :

- Les **modes encastrés** : il s'agit des modes propres de la structure calculés en considérant les degrés de liberté frontière encastrés.
- Les **modes statiques** : ces modes sont obtenus en calculant la déformée statique de la structure lorsqu'un degré de liberté frontière est imposé à 1, tous les autres étant imposés à 0.

Avantages de la méthode :

- elle est facile à programmer
- sa stabilité est connue.
- elle apporte de bons résultats pour des structures de taille raisonnable.
- elle permet d'obtenir les degrés de liberté frontière dans le vecteur réduit ce qui peut s'avérer très utile dans le cas de problèmes de contacts par exemple.

Inconvénients de la méthode :

- cette méthode n'est pas celle qui permet d'obtenir la meilleure réduction du système et peut donc s'avérer coûteuse en temps de calcul.
- sans amortissement structural, la méthode peut diverger au voisinage des fréquences propres de la structure (à cause du gain infini à la résonance sans amortissement).

18.4 Remarques sur l'amortissement

Vous avez peut-être déjà rencontré des cas pour lesquels ont été développés des modèles vibratoires adaptés au problème à traiter. En voici quelques exemples :

- vibration transversale des cordes ;
- vibration longitudinale dans les barres ;
- vibration de torsion dans les barres ;
- vibration de flexion dans les poutres ;
- vibration des membranes ;
- vibration des plaques ;
- propagation des ondes quasi-longitudinales dans les barres ;
- propagation des ondes de flexion dans les poutres...

Histoire

Il ne faut pas négliger ces modèles simplifiés. Ne serait-ce que c'est eux qui ont vu le jour en premier...

C'est en 1787 à Leipzig que Chladni met en évidence expérimentalement la formation de lignes nodales sur une plaque libre avec du sable. Wheatstone et Rayleigh, respectivement en 1833 et 1873, utiliseront des modes de poutre libre pour essayer de comprendre et d'expliquer les figures de Chladni.



Chladni Wheatstone Ritz Warburton Leissa

En 1909, Ritz, toujours sur ce problème de la plaque libre, utilisera pour la première fois la méthode qui porte son nom. Les premiers résultats concernant la plaque encastré ne viendront qu'en 1931, et sont dus à Sezawa.

En 1939, Igushi développe une méthode pour obtenir certains résultats analytiques, mais les premières synthèses complètes sur les méthodes utilisables pour calculer les fréquences naturelles et les déformées modales de plaques ne viendront qu'en 1954 par Warburton, et 1969 par Leissa.

La méthodologie est toujours la même et se base sur la **technique de séparation des variables** qui permet de dire que les variables d'espace et de temps peuvent être séparées. On écrira donc un déplacement transversal $w(x, y)$ comme produit d'une fonction dépendant de l'espace $X(x)$ et d'une fonction dépendant du temps $T(t)$: $w(x, t) = X(x)T(t)$. Ainsi, il sera « aisé » de résoudre le problème (en ayant pris en compte les conditions aux limites évidemment).

Généralement, dans un premier temps, lors du développement de ces modèles de cordes, barres, poutres, membranes et plaques, l'amortissement n'est pas pris en compte. Les solutions obtenues pour les réponses libres ne présentent donc pas de décroissance de l'amplitude des mouvements dans le temps. Il est possible d'intégrer cet amortissement de plusieurs façons :

Facteur d'amortissement modal : il s'agit de la manière la plus simple d'introduire l'amortissement en incluant un terme dissipatif correspondant à un modèle d'amortissement visqueux sur la fonction dépendant du temps **uniquement**. Dans ce cas, la fonction de dépendance temporelle $T(t)$, qui avait pour équation différentielle $\ddot{T}_n(t) + \omega_n^2 T_n(t) = 0$, pour les modes $n \geq 1$, devra désormais répondre à l'équation $\ddot{T}_n(t) + 2\xi_n \omega_n \dot{T}_n(t) + \omega_n^2 T_n(t) = 0$, où ξ_n est le facteur d'amortissement modal ;

Coefficient d'amortissement dans l'équation d'onde : un terme dissipatif est introduit directement dans l'équation des ondes. Celui-ci peut être proportionnel au milieu externe dans lequel se produit le phénomène (par exemple proportionnel à la vitesse de déformation hors plan d'une membrane vibrant dans un fluide, comme l'air), ou proportionnel au milieu interne considéré (par exemple proportionnel à la vitesse de fluctuation des contraintes dans une poutre : modèle de Kelvin-Voigt) ;

Dissipation aux limites : l'amortissement peut également être introduit dans la définition des conditions aux limites, par exemple pour prendre en compte le mode de fixation de la structure. (Par exemple, dans le cas des ondes longitudinales dans une barre, on introduit un ressort et un amortisseur à chaque bout de la barre).

Ces remarques, bien que générales, nécessitent d'être correctement prises en compte pour ces modèles simplifiés.

18.5 Pour aller plus loin : cas des chocs large bande

On s'intéresse au cas des chocs, car il constitue un cas plus compliqué que de la « dynamique lente », sans rien enlever en généralité aux méthodes.

En dynamique transitoire, lorsque le contenu fréquentiel de la sollicitation est large, on montre que les erreurs numériques faites sur chaque longueur d'onde se cumulent, d'où une dégradation de la qualité attendue du résultat plus rapide que prévue. De plus, une erreur sur la périodicité des oscillations due à un trop faible nombre de pas de temps et un déphasage des oscillations à cause de cette accumulation des erreurs numériques au cours des pas de temps peuvent être observées.

Dans de tels cas, il est possible de **se placer dans le domaine fréquentiel** (à l'aide de la FFT), ce qui conduit à résoudre un problème de vibrations forcées sur une très large bande de fréquences incluant à la fois les basses et les moyennes fréquences pour l'étude des chocs. La solution temporelle est ensuite reconstruite par transformée de Fourier inverse.

Les deux domaines fréquentiels ayant des propriétés différentes, on recourt à des **outils de résolution différents**.

Dans le domaine des **basses fréquences**, les phénomènes vibratoires générés par l'excitation ont une longueur d'onde grande face à la structure donc uniquement quelques oscillations sont observables. De plus la structure présente un comportement modal (modes bien distincts les uns des autres). La modélisation est maîtrisée : **éléments finis** sur base modale, complété si besoin de modes statiques.

Pour les **hautes fréquences**, les longueurs d'ondes sont petites et une centaine d'oscillations est présente sur une dimension de la structure. Il n'est pas approprié de regarder les grandeurs locales, mais plutôt les grandeurs moyennées en espace et en fréquence. On utilise généralement la **SEA** qui donne un niveau énergétique vibratoire moyen par sous-structure. Cette méthode ne permet pas d'obtenir une solution prédictive car elle requiert la connaissance *a priori* de facteurs de couplages mesurés.

En **moyennes fréquences**, plusieurs dizaines d'oscillations apparaissent sur une dimension de la structure, et la déformée est très sensible aux conditions aux limites et aux paramètres matériaux de la structure. Si un

comportement modal est encore visible, les modes sont moins bien séparés (par exemple plusieurs modes présents par Hertz, ces modes étant couplés par l'amortissement) : la méthode des éléments finis est mal adaptée à cause du raffinement de maillage nécessaire, et le calcul de la base modal est également hors de portée. Les méthodes énergétiques quant à elles sont trop globales et ne permettent pas une description satisfaisante de la solution.

Si la structure est divisible en sous-structures homogènes, on peut utiliser la [Théorie Variationnelle des Rayons Complexes \(TVRC\)](#) introduite par Ladevèze en 1996 [49] : les conditions de continuité en déplacements et en efforts aux interfaces entre sous-structures n'ont pas besoin d'être vérifiées a priori, mais uniquement au sens faible par une formulation variationnelle.

La TVRC permet l'utilisation d'approximations indépendantes par sous-structure. La solution est supposée bien décrite par la superposition d'un nombre infini de modes locaux, appelés rayons, issus de la vérification des équations d'équilibre dynamique et des relations de comportement par sous-structure. Ces rayons sont à deux échelles : une lente et une rapide. L'échelle rapide est traitée analytiquement (sinon coût numérique élevé), et l'échelle lente numériquement, car elle conduit à un problème à faible nombre d'inconnues.

On profitera de la rapide dispersion des modes moyennes fréquences dans les milieux dispersifs amortis ainsi que de la version large bande de la TVRC développée en 2004 et 2005 [48]

18.5.1 Approches temporelles

Discrétisation spatiale

Une discrétisation par la méthode des éléments finis est mal adaptée aux phénomènes à fort gradient tels que les chocs, car il faut soit un maillage très fin, soit une interpolation par des polynômes de degré élevé, ce qui dans les deux cas augmente considérablement l'effort de calcul.

Étant donné le caractère très localisé des ondes propagatives en dynamique transitoire, la [méthode des éléments finis adaptatifs](#) répond au besoin d'enrichir le modèle localement en raffinant le maillage uniquement sur les fronts d'onde de manière contrôlée et automatique.

Ces méthodes recourent à un estimateur d'erreur *a priori* :

- estimateur construit sur les résidus d'équilibre pour l'adaptation de maillage dans le cadre de la propagation d'ondes ;
- estimateur utilisant le lissage des contraintes ;
- estimateur basé sur l'erreur en relation de comportement.

Décomposition de domaine en dynamique transitoire

Le domaine est décomposé en sous-domaines plus petits à calculer. On pourra se servir de la parallélisation du problème. [Le problème est donc condensé sur les quantités d'interface entre sous-domaines, ce qui conduit à un problème de taille réduite.](#)

La plupart des méthodes utilisées sont des méthodes sans recouvrement ; elles peuvent être primales, duales ou mixtes. Le problème d'interface est résolu de façon itérative, ce qui évite la construction explicite du complément de Schur¹, mais nécessite un taux de convergence élevé pour être efficace.

Dans la méthode duale, les efforts sont privilégiés : la méthode propose a priori des efforts en équilibre aux interfaces et cherche à écrire la continuité en déplacements. L'inconnue principale, i.e. les inter-efforts entre sous-structures, sont les multiplicateurs de Lagrange aux interfaces.

1. En algèbre linéaire et plus précisément en théorie des matrices, le complément de Schur est défini comme suit. Soit :

$$[M] = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [C] & [D] \end{bmatrix} \quad (18.47)$$

une matrice de dimension $(p + q) \times (p + q)$, où les blocs $[A]$, $[B]$, $[C]$, $[D]$ sont des matrices de dimensions respectives $p \times p$, $p \times q$, $q \times p$ et $q \times q$, avec $[D]$ inversible. Alors, le complément de Schur du bloc $[D]$ de la matrice $[M]$ est constitué par la matrice de dimension $p \times p$ suivante :

$$[A] - [B][D]^{-1}[C] \quad (18.48)$$

Lorsque $[B]$ est la transposée de $[C]$, la matrice $[M]$ est symétrique définie-positive si et seulement si $[D]$ et son complément de Schur dans $[M]$ le sont.

Discrétisation temporelle

Les méthodes d'intégration directe sont nombreuses et mieux adaptées que les techniques de bases réduites pour les chocs relativement rapides qui mettent en jeu des fréquences élevées.

Notons qu'il existe des méthodes qui s'affranchissent de la discrétisation temporelle et s'appuient sur une méthode asymptotique numérique pour déterminer la réponse transitoire de la structure ; ces méthodes demandent encore à être développées pour les variations temporelles rapides comme les chocs.

Parmi les méthodes d'intégration directes, on utilise classiquement :

- les **schémas de Newmark** (voir chapitre précédent) pour une intégration d'ordre 2 : les schémas précis au second ordre des différences centrées et de l'accélération moyenne sont privilégiés pour les faibles erreurs d'amplitude et de périodicité qu'ils engendrent.

Le schéma des différences centrées est explicite et adapté pour les chargements de dynamique rapide et les problèmes non linéaires (car la matrice dynamique à inverser est diagonale), mais nécessite de vérifier que le signal ne se propage pas de plus d'un élément pendant un pas de temps (condition de Courant, ou condition CFL dont nous reparlerons au chapitre suivant).

Le schéma de l'accélération moyenne est implicite mais inconditionnellement stable, bien adapté pour les chargement peu rapides.

- la **méthode de Galerkin discontinue** : Elle autorise les variables du problème déplacement et vitesse à être discontinues en temps. À l'ordre zéro (champs constants sur chaque intervalle de temps), elle permet de s'affranchir des oscillations numériques occasionnées lors du traitement d'un front d'onde. Toutefois, ce schéma dissipe énormément et demande une discrétisation très fine pour bien représenter les irrégularités.
- la **TXFEM (Time eXtended FEM)** : Elle utilise une base de fonctions de forme en temps enrichie formant une partition de l'unité. Le schéma est équivalent à certaines méthodes de Galerkin discontinues, le nombre de pas de temps inférieur à Newmark, et les oscillations numériques atténuées. Elle est bien adaptée pour le traitement des discontinuités en temps et notamment les chocs. Voir le paragraphe 23.4 pour une courte description.

18.5.2 Approches fréquentielles

Afin de s'affranchir de l'intégration temporelle et des soucis numériques associés, il est possible de réécrire le problème temporelle en un problème fréquentiel (grâce à la FFT).

L'approche fréquentielle est également plus adaptée dans les situations pour lesquelles des paramètres physiques dépendent de la fréquence.

En appliquant la transformée de Fourier à toutes les quantités dépendant du temps, on obtient des quantités qui dépendent de la fréquence. Ce faisant, le problème à résoudre devient un problème de vibration forcée sur une bande de fréquence. Il faut alors calculer des fonctions de réponse en fréquence (FRF) sur une large plage de fréquences.

Cas des basses fréquences

Compte tenu de la grande taille des longueurs d'ondes et du fait que l'on a peu de modes, bien séparés, les méthodes utilisées sont basées sur les **éléments finis**.

En réécrivant le problème dynamique dans le cas d'une sollicitation harmonique de pulsation ω , il vient (comme nous venons de le présenter avant) :

$$(-\omega^2 [M] + i\omega [C] + [K]) \{q\} = \{F\} \quad (18.49)$$

En utilisant l'**hypothèse de Basile**² sur l'amortissement, il est possible de calculer les premiers modes propres associés aux plus petites fréquences propre du système. La solution approchée est alors projetée sur les sous-espaces propres associés. On résout alors un système diagonale de petite taille.

2. Si le seul amortissement entrant en jeu est un amortissement structurel (dissipation interne du matériau pour une structure homogène), il est alors licite de faire l'hypothèse d'un amortissement proportionnel, encore appelé hypothèse de Basile. Dans ce cas $[C]$ s'exprime comme combinaison linéaire de $[M]$ et $[K]$, et sa projection sur les modes propres est diagonale.

Cas des moyennes fréquences

En moyennes fréquences, l'approche précédente (par éléments finis) nécessiterait d'utiliser une grande quantité de polynômes à cause du caractère très oscillant, ou à augmenter le degré d'interpolation. De plus, il faut prendre en compte plus de modes, qui sont de moins en moins bien séparés.

Notons que l'on peut minimiser l'influence du raffinement du maillage en localisant celui-ci uniquement où la dynamique locale le demande. Pour cela, des estimateurs d'erreur *a posteriori* ont été développés pour les structures, mais également pour l'acoustique.

La dispersion numérique est moindre avec les éléments finis stabilisés : tels que les [Galerkin Least Squares](#) et [Galerkin Gradient Least Squares](#)... qui n'intervienne pas sur la forme variationnelle mais sur les matrices issues de celle-ci.

On peut également essayer de diminuer la taille de la base modale à prendre en compte en ne retenant que les modes propres qui maximisent l'opérateur d'excitabilité ; mais pour cela il faut d'abord calculer la base complète...

On peut également utiliser un autre espace de projection que les modes propres classiques : par exemple les premiers modes d'un opérateur d'énergie relatif à une bande de fréquence (Soize 98 [58]). Cette approche peut être couplée à la [théorie des structures floues](#) (Soize 86 [59]) pour prendre en compte la complexité de la structure de manière probabiliste.

On peut également sous-structurer le domaine. Dans la [Component Modal Synthesis](#), les modes propres de chaque sous-structures servent de base pour la solution de la structure entière.

Une « deuxième » approche consiste à utiliser des [éléments enrichis](#) (voir encore une fois le chapitre 23). Ces éléments sont développés pour pouvoir prendre en compte le caractère oscillant de la solution en enrichissant les fonctions de base utilisées afin de pouvoir mieux reproduire la solution.

Les [éléments finis hiérarchiques, issus des méthodes \$p\$](#) (voir le paragraphe 13.1 : [l'augmentation du degré polynomial des fonctions de forme peut se voir comme une substitution à un raffinement de maillage, mais les estimateurs d'erreur des méthodes \$p\$ sont meilleurs que ceux des méthodes \$h\$](#)), permettent une réutilisation à l'ordre $p + 1$ des matrices de masse et de raideur élémentaires issues de l'ordre p .

Les [éléments finis multi-échelles](#) (voir paragraphe 13.4) où la solution est recherchée comme somme d'une composante calculable à l'échelle grossière en espace et d'une composante non calculable associée à l'échelle fine.

La [Méthode de partition de l'unité \(PUM\)](#) (voir paragraphe 23.3) utilise un recouvrement du domaine initial en un ensemble de maillages, chacun étant enrichi et vérifiant la partition de l'unité. La méthode des éléments finis associée à la méthode de partition de l'unité donne naissance à deux grandes familles d'approches : la G-FEM (Generalized FEM) et la X-FEM (eXtended FEM), voir paragraphe 23.4. Si les fonctions d'enrichissement ne sont pas activées, on se retrouve avec la méthode des éléments finis classique.

la [Méthode d'enrichissement discontinu](#) (Discontinuous Enrichment Method) est une méthode de Galerkin éléments finis discontinue avec multiplicateurs de Lagrange dédiée aux application de forts gradients ou oscillations rapides.

La [méthode des éléments frontières](#) ou BEM (voir paragraphe 23.1) est encore une « troisième » approche. Seuls les bords sont maillés afin de réduire le nombre de degrés de liberté. La formulation intégrale de la frontière établit un lien entre les champs intérieurs et les quantités sur les bords. La matrice obtenue est petite, mais pleine et non symétrique.

Les [méthodes sans maillage](#) (voir paragraphe 23.2) : Dans la EFGM (Element Free Galerkin Method ou méthode de Galerkin sans maillage), on n'a plus qu'un nuage de points sans connectivité entre eux. On utilise des fonctions de formes construites selon la méthode des moindres carrés mobiles et formant une partition de l'unité, qui peuvent être polynomiales ou sinusoidales. Néanmoins, comme elle est basée sur une discrétisation nodale, elle nécessite également un grand nombre de nœuds aux fréquences plus élevées.

Les [méthodes des éléments discontinus](#) : Pour des géométries simples (utilisation en construction navale), on utilise des solutions analytiques ou semi-analytiques sur des sous-domaines simples (poutres, plaques rectangulaires...) pour construire la structure complète. Lorsque cette méthode est applicable [elle donne de bon résultats aussi bien en basses fréquences, en moyennes fréquences et en hautes fréquences.](#)

Les **méthodes de Trefftz** : Elles utilisent des fonctions de base définies sur tout le domaine de la sous-structure considérée et vérifiant exactement l'équation dynamique et la loi de comportement : la solution est représentée par la superposition de ces fonctions ; mais il faut encore vérifier les conditions aux limites et de transmission. Les matrices sont de petite taille mais très mal conditionnées.

Les T-éléments lient la démarche Trefftz et la méthode des éléments finis : Trefftz au sein de chaque élément..

Pour les problèmes de **vibroacoustique**, la **WBT (Wave Based Technique)** a été développée : la structure n'est pas discrétisée comme pour les T-éléments mais est décomposée en éléments de grande taille par rapport à la dimension de la structure. les fonctions de base particulières utilisées améliorent le conditionnement des matrices, ce qui conduit à des matrices de petite taille pleines et non symétriques. L'intégration sur les bords coûte cher en moyennes fréquences et le conditionnement de la matrice en hautes fréquences se dégrade du fait de la discrétisation des amplitudes (seules certaines directions de propagation sont prises en compte).

Cas de hautes fréquences

Comme dit précédemment, on ne représente pas la solution localement mais on ne s'intéresse qu'à des grandeurs moyennées.

La **SEA (Statistical Energy Analysis)** est la **méthode de référence pour les hautes fréquences**. La structure est découpée en sous-structures. Ensuite des regroupements de modes sont construits tels que statistiquement le niveau de chacun des groupes de modes soit semblable : la méthode repose donc sur l'hypothèse d'une forte densité modale dans la bande de fréquence étudiée. Chaque groupe de mode est associé à un degré de liberté : le problème à résoudre issu de l'équilibre énergétique est par conséquent à faible nombre de degrés de liberté. Cet équilibre se traduit par un bilan de puissance dans lequel la puissance injectée à une sous-structure par des forces extérieures, aléatoires et stationnaires sur de larges bandes de fréquences, est égale à la somme de la puissance dissipée dans cette sous-structure par amortissement et la puissance transmise à l'ensemble des sous-structures voisines avec lesquelles elle est connectée, appelée puissance de couplage. **L'hypothèse forte de la SEA concerne cette puissance de couplage entre deux sous-structures qui est supposée proportionnelle à la différence de leurs énergies par mode, le facteur de proportionnalité étant le coefficient de couplage.**

La SEA est parfaitement adaptée aux hautes fréquences, mais trop globale et trop imprécise pour décrire finement le comportement en moyennes fréquences.

De plus les coefficients de couplages ne sont connus explicitement *a priori* que pour des géométries très particulières et nécessitent donc en général de recourir à des expériences, ce qui fait de la SEA une méthode non prédictive.

Des stratégies de calcul de ces coefficients de couplage existent, mais pour certains régimes d'excitation la notion même de coefficient de couplage n'est plus réaliste.

La **méthode de diffusion d'énergie** : Elle apporte un effet local à la SEA en décrivant de manière continue les variables énergétiques. Elle a été appliquée à des cas simples et l'analogie avec la thermique n'est pas démontrée pour des sollicitations et des géométries quelconques.

L'**analyse ondulatoire de l'énergie** : Elle généralise la SEA en ce qu'elle considère le champ d'ondes non plus diffus mais directionnel en introduisant un champ d'ondes aléatoires propagatives dans les sous-structures et des coefficients de couplages qui varient selon les angles d'incidence aux interfaces.

Les **Méthodes Énergétiques Simplifiées** ou MES : Elles se proposent de pallier les insuffisances de la méthode de diffusion de l'énergie en donnant une représentation locale des phénomènes. Le bilan de puissance est écrit aussi bien à l'intérieur des sous-structures que de leurs couplages. La connaissance des coefficients de couplages *a priori* demeure un problème.

D'autres méthodes existent encore : développements asymptotiques, méthode de l'enveloppe, méthode des chemins structuraux.

La **méthode des rayons** : consiste à suivre les rayons vibratoires le long de leur parcours par l'étude de leur propagation, réflexion et transmission entre sous-structures par les lois de Snell-Descartes³ de l'optique

3. Selon Huygens, Snell découvrit le premier des lois de la réfraction en 1621. Il semble par ailleurs qu'on lui doive également, avant Neper, l'écriture actuelle des nombres décimaux, en France tout au moins : *e, dcm...* distinguant, séparées par une virgule, les parties entière *e* et décimale (*d* = dixièmes, *c* = centièmes, *m* = millièmes,....).

géométrique jusqu'à l'amortissement des ondes. La RTM permet de connaître la direction privilégiée de transfert et de répartition spatiale de l'énergie, mais à un coût numérique très élevé. De plus, les coefficients de transmissions ne sont pas connus a priori...

18.5.3 Remarques

Dans l'approche fréquentielle, il faut déterminer les fréquences déterminant la jonction BF/MF et MF/HF.

La fréquence BF/MF agit sur le coût de calcul : elle doit être la plus grande possible, mais telle qu'à partir de cette fréquence, les modes de la structure deviennent locaux, tout en conservant la séparation des modes (en pratique entre 300 et 600 Hz).

Le choix de la fréquence MF/HF joue sur la qualité de la vitesse calculée et donc sur l'énergie cinétique qui sert pour restaurer la réponse temporelle. Cette fréquence doit être au moins égale à $1/T$ où T est la durée du choc d'entrée (si $T = 1$ ms, alors MF/HF = 2000 Hz mini).

La méthode des éléments finis utilisée en basses fréquences doit utiliser les n premiers modes pour la base réduite avec n tel que la fréquence de ce mode soit de $2\times$ la fréquence BF/MF. On utilisera également la règle classique d'**au moins 10 éléments linéaires par longueur d'onde pour le maillage**.

La FFT requiert par ailleurs que le chargement soit périodique. Le temps correspondant à cette période, T_0 , doit être choisi judicieusement. Dans le cas d'un choc, on a donc $T_0 > T$, mais il faut également le choisir tel que la réponse transitoire de la structure s'éteigne avant la fin de cet intervalle de temps. De plus, ce temps influe sur l'échantillonnage fréquentiel du calcul de la FRF. Les pulsations pour lesquelles la FRF est calculée doivent être telles que $\omega_n = 2\pi n f_0$ avec $f_0 = 1/T_0$. Il faut également que le nombre de pas de fréquences N soit une puissance de 2 pour utiliser la FFT et son efficacité, et N soit être tel que $N/T_0 \geq 2f_{\max}$ avec f_{\max} la fréquence maximale contenue dans le signal.

Le choix judicieux de T_0 influe directement sur la reconstruction temporelle de la réponse. Pour les structures peu amorties ou pour des chargements longs, T_0 est grand, et donc la FFT coûteuse. Dans ces cas, des méthodes ont été développées : les fonctions de Green ; la Implicit Fourier Transform ; et l'amortissement artificiel.