Optimisation semi-définie positive

L'optimisation semi-définie positive (optimisation SDP ou OSDP) a connu un essor important dans les années 1990 pour au moins quatre raisons. D'abord, bien qu'ils soient non linéaires, les problèmes d'optimisation SDP peuvent être résolus en un nombre d'itérations polynomial. Ensuite, un grand nombre de problèmes convexes ont pu être exprimés dans ce formalisme, ce qui montre par conséquent qu'ils sont polynomialement résolubles. Puis, certains problèmes non convexes (en particulier des problèmes combinatoires) ont une relaxation SDP précise, qui permet de leur trouver rapidement une solution approchée de qualité. Enfin, certains problèmes non convexes peuvent être approché par une hiérarchie de problèmes SDP dont les valeurs optimales convergent vers celle du problèmes original (mais se pose dans des espaces vectoriels de dimension de plus en plus grande).

Les problèmes d'optimisation SDP ont une structure assez semblable à celle de l'optimisation linéaire (OL), ce qui les rend très vite familiers. Les résultats que l'on connaît en OL ne s'étendent cependant pas tous tels quels à l'optimisation SDP ; on ne peut guère en être étonné, vu la généralité du formalisme. Notre compte-rendu s'attachera à relever quelques subtilités qui ne peuvent être ignorées.

Connaissances supposées. La dualité par perturbation (section 14.2) pour établir l'existence de solutions primale et duale ; la notion de fonction asymptotique (section 3.3.4) pour l'existence du chemin central.

20.1 Définition du problème d'optimisation SDP

20.1.1 Les problèmes primal et dual

Les cônes $\mathcal{S}^n_+$ et $\mathcal{S}^n_{++}$

On note $\mathcal{S}^n$ l'espace vectoriel des matrices d'ordre n symétriques, qui est de dimension $n(n+1)/2$, $\mathcal{S}^n_+$ le cône de $\mathcal{S}^n$ formé des matrices semi-définies positives et $\mathcal{S}^n_{++}$ le cône de $\mathcal{S}^n$ formé des matrices définies positives. On note aussi $A \succcurlyeq B$ [resp. $A \succ B$] au lieu de $A-B \in \mathcal{S}^n_+$ [resp. $A-B \in \mathcal{S}^n_{++}$]. La relation $\succcurlyeq$ introduit un ordre partiel sur $\mathcal{S}^n$, dit de *Löwner*. Les relations $\preccurlyeq$ et $\prec$ s'introduisent naturellement : $A \preccurlyeq B$ équivaut à $B - A \succcurlyeq 0$ et $A \prec B$ équivaut à $B - A \succ 0$. On munit $\mathcal{S}^n$ du produit scalaire $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr} AB = \sum_{i,j=1}^n A_{ij}B_{ij}$ ($\operatorname{tr} A$ désigne la trace de la matrice A). La norme associée à ce produit scalaire est le norme de Frobenius $\|A\|_F = (\sum_{i,j=1}^n A_{ij}^2)^{1/2}$.

Voici quelques propriétés des cônes $\mathcal{S}^n_+$ et $\mathcal{S}^n_{++}$ qui nous seront utiles.

Lemme 20.1 (cônes $\mathcal{S}^n_+$ et $\mathcal{S}^n_{++}$)
1) *$A \succcurlyeq 0 \iff \forall\, B \succcurlyeq 0$, on a $\langle A, B\rangle \geqslant 0$.*
2) *$A \succ 0 \iff \forall\, B \succcurlyeq 0$ non nulle, on a $\langle A, B\rangle > 0$.*
3) *Si A et $B \in \mathcal{S}^n_+$, on a $\langle A, B\rangle = 0 \iff AB = 0$.*

Démonstration. 1) C'est l'exercice 2.35.

2) Soit $A \succ 0$. Si $B \succcurlyeq 0$ est non nulle, elle a une factorisation spectrale $B = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i v_i^\mathsf{T}$ avec au moins un $\lambda_i > 0$ (les autres valeurs propres sont $\geqslant 0$). Alors $\langle A, B\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \operatorname{tr}(A v_i v_i^\mathsf{T}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i^\mathsf{T} A v_i > 0$, puisque tous les $v_i^\mathsf{T} A v_i > 0$ et au moins un des $\lambda_i > 0$.

Inversement, supposons que $\langle A, B\rangle > 0$ pour toute matrice $B \succcurlyeq 0$ non nulle. En prenant $B = vv^\mathsf{T} \succcurlyeq 0$, avec v quelconque non nul, on doit avoir $0 < \langle A, B\rangle = v^\mathsf{T} A v$, ce qui montre que $A \succ 0$.

3) Il est clair que $AB = 0$ implique que $\langle A, B\rangle = 0$. Réciproquement, avec la factorisation spectrale de $A = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i v_i^\mathsf{T}$ (les λ_i sont $\geqslant 0$) et $\langle A, B\rangle = 0$, on a $\sum_i \lambda_i v_i B v_i^\mathsf{T} = 0$. Comme $B \in \mathcal{S}^n_+$, on en déduit que $Bv_i = 0$ lorsque $\lambda_i > 0$. Alors $AB = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i v_i^\mathsf{T} B = 0$. □

La propriété du point 1, attribuée à Fejér, exprime l'*autodualité* du cône $\mathcal{S}^n_+$:

$$(\mathcal{S}^n_+)^+ = \mathcal{S}^n_+.$$

Si v est un vecteur, on notera $\operatorname{Diag}(v)$ la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les composantes v_i de v.

Le problème primal

On se donne $C \in \mathcal{S}^n$, $\mathcal{A} : \mathcal{S}^n \to \mathbb{R}^m$ une application linéaire, et $b \in \mathbb{R}^m$. Le problème primal consiste à trouver $X \in \mathcal{S}^n$ solution de

$$\boxed{(P) \quad \begin{cases} \inf\ \langle C, X\rangle \\ \mathcal{A}(X) = b \\ X \succcurlyeq 0. \end{cases}} \tag{20.1}$$

Ce problème a une structure très semblable à la forme standard (17.1) d'un problème d'optimisation linéaire. À première vue, les seules différences sont que l'on travaille sur l'espace des matrices $\mathcal{S}^n$ plutôt que $\mathbb{R}^n$ (mais cela reste un espace vectoriel) et que la contrainte de positivité est remplacée par la contrainte de semi-définie positivité de la matrice X (d'où le nom du problème). Il n'y en a pas d'autres en effet, mais cela implique que certaines propriétés de l'optimisation linéaire ne seront pas conservées en optimisation SDP. Examinons le problème plus en détail.

Le critère et la contrainte d'égalité sont linéaires (ou affines), mais la contrainte d'appartenance au cône $\mathcal{S}^n_+$ est « très » non linéaire, éventuellement non différentiable. Elle exprime en effet que $v^\mathsf{T} X v \geqslant 0$ pour tout $v \in \mathbb{R}^n$; de ce point de vue, (20.1) est un problème d'optimisation semi-infinie (il a un nombre infini de contraintes). Elle exprime aussi que toutes les valeurs propres de X (des fonctions non linéaires et non différentiables de X) doivent être positives ; de ce point de vue, le problème primal est non convexe et non différentiable. Elle exprime enfin que tous les mineurs principaux de X (des polynômes des éléments de X) doivent être positifs ; de ce point de vue, le problème primal est non linéaire, non convexe, à données polynomiales.

On note $\operatorname{val}(P)$ la valeur optimale de (P) et

$$\mathcal{F}_{\mathrm{P}} := \{X \in \mathcal{S}^n : \mathcal{A}(X) = b,\ X \succcurlyeq 0\} \tag{20.2a}$$
$$\mathcal{F}_{\mathrm{P}}^s := \{X \in \mathcal{S}^n : \mathcal{A}(X) = b,\ X \succ 0\}, \tag{20.2b}$$

les ensembles des matrices admissibles et strictement admissibles de (P).

On peut représenter $\mathcal{A}$ au moyen de m matrices $A_i \in \mathcal{S}^n$ (théorème A.3 de Riesz-Fréchet). On a

$$\mathcal{A}(X) = \begin{pmatrix} \langle A_1, X\rangle \\ \vdots \\ \langle A_m, X\rangle \end{pmatrix}. \tag{20.3}$$

Dans cette représentation, l'application $\mathcal{A}$ est surjective si, et seulement si, les matrices A_i sont linéairement indépendantes dans $\mathcal{S}^n$.

Le problème dual

On se donne un produit scalaire sur $\mathbb{R}^m$, également noté $\langle\cdot,\cdot\rangle$, et l'on introduit l'opérateur $\mathcal{A}^* : \mathbb{R}^m \to \mathcal{S}^n$ adjoint de $\mathcal{A}$, qui est défini par

$$\forall\, X \in \mathcal{S}^n,\ \forall\, y \in \mathbb{R}^m : \quad \langle \mathcal{A}(X), y\rangle = \langle X, \mathcal{A}^*(y)\rangle.$$

La méthode la plus simple pour obtenir un dual de (P) est d'utiliser la dualisation lagrangienne de sa contrainte d'égalité. On utilise le lagrangien $\ell : \mathcal{S}^n_+ \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ défini par

$$\ell(X, y) = \langle C, X\rangle - \langle y, \mathcal{A}(X) - b\rangle \tag{20.4}$$

et l'on écrit (P) comme un inf-sup :

$$\inf_{X\in\mathcal{S}^n_+} \sup_{y\in\mathbb{R}^m} \ \ell(X, y).$$

Le problème dual s'obtient alors en inversant l'infimum et le supremum (c'est la dualité min-max de la section 14.1). En utilisant le lemme 20.1, on obtient

$$\begin{aligned} \sup_{y\in\mathbb{R}^m} \inf_{X\in\mathcal{S}^n_+} \ell(X, y) &= \sup_{y\in\mathbb{R}^m} \inf_{X\in\mathcal{S}^n_+} \langle C - \mathcal{A}^*(y), X\rangle + \langle b, y\rangle \\ &= \sup_{y\in\mathbb{R}^m} \begin{cases} \langle b, y\rangle & \text{si } C - \mathcal{A}^*(y) \succcurlyeq 0 \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Le problème dual de (P) obtenu par ce procédé consiste donc à trouver $(y, S) \in \mathbb{R}^m \times \mathcal{S}^n$ solution de

$$\boxed{(D) \quad \begin{cases} \sup \langle b, y\rangle \\ \mathcal{A}^*(y) + S = C \\ S \succcurlyeq 0. \end{cases}} \tag{20.5}$$

On note $\operatorname{val}(D)$ sa valeur optimale et

$$\mathcal{F}_{\text{D}} \quad := \quad \{(y,S) \in \mathbb{R}^m \times \mathcal{S}^n : \mathcal{A}^*(y) + S = C,\ S \succcurlyeq 0\} \tag{20.6a}$$
$$\mathcal{F}^s_{\text{D}} \quad := \quad \{(y,S) \in \mathbb{R}^m \times \mathcal{S}^n : \mathcal{A}^*(y) + S = C,\ S \succ 0\}, \tag{20.6b}$$

les ensembles des couples admissibles et strictement admissibles de (D). On notera enfin

$$\mathcal{F} := \mathcal{F}_{\text{P}} \times \mathcal{F}_{\text{D}} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}^s := \mathcal{F}^s_{\text{P}} \times \mathcal{F}^s_{\text{D}}.$$

Si l'on utilise le produit scalaire euclidien dans $\mathbb{R}^m$ et si l'on prend la représentation (20.3) de $\mathcal{A}$, son adjoint $\mathcal{A}^*$ s'écrit

$$\mathcal{A}^*(y) = \sum_{i=1}^m A_i y_i.$$

Dans ce cas, le problème dual peut se voir comme celui cherchant à maximiser une forme linéaire en y sur $\mathcal{S}^n$, tout en imposant qu'une combinaison affine de matrices (avec coefficients y_i) soit semi-définie positive :

$$C - \sum_{i=1}^m A_i y_i \succcurlyeq 0. \tag{20.7}$$

Rappelons que cette dernière relation est ce que l'on appelle une *inégalité matricielle linéaire* (on devrait dire affine) ; IML en abrégé.

La proposition ci-dessous donne quelques conséquences simples de la dualisation lagrangienne de (P). Le point 1 est connu sous le nom de *dualité faible*. L'écart $\operatorname{val}(P) - \operatorname{val}(D)$ entre valeurs optimales primale et duale est appelé le *saut de dualité*. Le point 2 montre que $\langle X, S\rangle$ est l'écart entre valeurs primale et duale pour un triplet admissible $(X, y, S) \in \mathcal{F}$. Le point 3 donne une condition suffisante d'optimalité élémentaire, mais bien utile.

Proposition 20.2 (conséquences de la dualisation lagrangienne)
1) $\operatorname{val}(D) \leqslant \operatorname{val}(P)$.
2) $(X, y, S) \in \mathcal{F} \quad \Longrightarrow \quad \langle C, X\rangle - \langle b, y\rangle = \langle X, S\rangle \geqslant 0$.
3) $(X, y, S) \in \mathcal{F}$ *et* $\langle X, S\rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad X \in \mathcal{S}_{\text{P}}$ *et* $(y, S) \in \mathcal{S}_{\text{D}}$.

Démonstration. 1) C'est l'inégalité de dualité faible, issue de la technique de dualité min-max utilisée pour définir (D) ; voir la proposition 14.2.

2) Si $(X, y, S) \in \mathcal{F}$, alors $\langle C, X\rangle = \langle \mathcal{A}^*(y) + S, X\rangle = \langle y, \mathcal{A}(X)\rangle + \langle X, S\rangle = \langle y, b\rangle + \langle X, S\rangle$. De plus $\langle X, S\rangle \geqslant 0$ car $X \succcurlyeq 0$ et $S \succcurlyeq 0$.

3) Si $(X, y, S) \in \mathcal{F}$, on a $\langle b, y\rangle \leqslant \operatorname{val}(D) \leqslant \operatorname{val}(P) \leqslant \langle C, X\rangle$. Comme $\langle X, S\rangle = 0$, $\langle b, y\rangle = \langle C, X\rangle$ et donc on a égalité partout dans la relation précédente, ce qui implique que $X \in \mathcal{S}_{\text{P}}$ et $(y, S) \in \mathcal{S}_{\text{D}}$. $\square$

La réciproque du point 3 est fausse en général (exemple 20.7-4), mais on verra qu'elle a lieu si $\mathcal{F}^s \neq \varnothing$ et $\mathcal{A}$ est surjective (corollaire 20.10). Losrqu'elle a lieu, (X, y) est un point-selle du lagrangien ℓ défini en (20.4) sur $\mathcal{S}^n_+ \times \mathbb{R}^m$ (exercice 20.3).

Dualisation par perturbation

On peut obtenir le même dual (20.5) en utilisant une technique de perturbation de la contrainte d'égalité. La fonction valeur associée s'écrit

$$v_{\text{SDP}} : \mathbb{R}^m \to \overline{\mathbb{R}} : p \mapsto v_{\text{SDP}}(p) = \inf_{\substack{X \in \mathcal{S}^n \\ \mathcal{A}(X)=b+p \\ X \succcurlyeq 0}} \langle C, X \rangle. \tag{20.8}$$

Sa conjuguée est la fonction $v^*_{\text{SDP}} : \mathbb{R}^m \to \overline{\mathbb{R}}$ définie par

$$\begin{aligned}
v^*_{\text{SDP}}(y) &= \sup_{p \in \mathbb{R}^m} \left(\langle y, p \rangle - \inf_{X \succcurlyeq 0} \Big[\langle C, X \rangle + \mathcal{I}_{\{X : \mathcal{A}(X)=b+p\}}(X) \Big] \right) \\
&= \sup_{X \succcurlyeq 0} \left(-\langle C, X \rangle + \sup_{p \in \mathbb{R}^m} \Big[\langle y, p \rangle - \mathcal{I}_{\{X : \mathcal{A}(X)=b+p\}}(X) \Big] \right) \\
&= \sup_{X \succcurlyeq 0} \Big(-\langle C, X \rangle + \langle y, \mathcal{A}(X) - b \rangle \Big) \\
&= -\langle b, y \rangle - \inf_{X \succcurlyeq 0} \langle C - \mathcal{A}^*(y), X \rangle \\
&= \begin{cases} -\langle b, y \rangle & \text{si } C - \mathcal{A}^*(y) \succcurlyeq 0 \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Avec cette technique de perturbation, le dual consiste à maximiser la fonction concave $y \mapsto -v^*_{\text{SDP}}(y)$, si bien que l'on retrouve le même problème dual que par la dualisation lagrangienne.

De même, on peut retrouver le primal (20.1) par perturbation la contrainte d'égalité du dual (20.5). La fonction valeur associée s'écrit

$$w_{\text{SDP}} : \mathcal{S}^n \to \overline{\mathbb{R}} : P \mapsto w_{\text{SDP}}(P) = \inf_{\substack{(y,S) \in \mathbb{R}^m \times \mathcal{S}^n \\ \mathcal{A}^*(y)+S+P=C \\ S \succcurlyeq 0}} -\langle b, y \rangle. \tag{20.9}$$

Sa conjuguée est la fonction $w^*_{\text{SDP}} : \mathcal{S}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ définie par

$$\begin{aligned}
w^*_{\text{SDP}}(X) &= \sup_{P \in \mathcal{S}^n} \left(\langle X, P \rangle - \inf_{\substack{(y,S) \\ S \succcurlyeq 0}} \Big[-\langle b, y \rangle + \mathcal{I}_{\{(y,S) : \mathcal{A}^*(y)+S+P=C\}}(y, S) \Big] \right) \\
&= \sup_{\substack{(y,S) \\ S \succcurlyeq 0}} \left(\langle b, y \rangle + \sup_{P \in \mathcal{S}^n} \Big[\langle X, P \rangle - \mathcal{I}_{\{(y,S) : \mathcal{A}^*(y)+S+P=C\}}(y, S) \Big] \right) \\
&= \sup_{\substack{(y,S) \\ S \succcurlyeq 0}} \left(\langle b, y \rangle + \langle X, C - \mathcal{A}^*(y) - S \rangle \right) \\
&= \langle C, X \rangle - \inf_{\substack{(y,S) \\ S \succcurlyeq 0}} \left(\langle \mathcal{A}(X) - b, y \rangle + \langle X, S \rangle \right) \\
&= \begin{cases} \langle C, X \rangle & \text{si } \mathcal{A}(X) = b \text{ et } X \succcurlyeq 0 \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Avec cette technique de perturbation, le primal consiste à minimiser la fonction convexe $X \mapsto w^*_{\text{SDP}}(X)$, qui est bien le problème (20.1).

20.1.2 Réalisabilités primale et duale

Intéressons-nous à présent à la question de la réalisabilité des problèmes primal et dual. Quand peut-on trouver une matrice $X \succcurlyeq 0$ telle que $\mathcal{A}(X) = b$? Quand peut-on trouver un vecteur $y \in \mathbb{R}^m$ tel que $\mathcal{A}^*(y) \preccurlyeq C$? Les contraintes sont-elles qualifiées et dans quel sens ?

Dans $(\mathbb{R}^n, \geqslant)$, une partie de ces questions trouve une réponse dans le lemme de Farkas (proposition 2.45). Une application de ce lemme à l'optimisation SDP s'obtient en prenant $\mathbb{E} := \mathcal{S}^n$, $\mathbb{F} := \mathbb{R}^m$, l'application linéaire $\mathcal{A} : \mathcal{S}^n \to \mathbb{R}^m$ et $K := \mathcal{S}^n_+$; cela donne

$$\{y \in \mathbb{R}^m : \mathcal{A}^*(y) \succcurlyeq 0\}^+ = \operatorname{adh} \mathcal{A}(\mathcal{S}^n_+). \tag{20.10}$$

On ne peut pas se passer de l'adhérence à droite, car $\mathcal{A}(\mathcal{S}^n_+)$ n'est pas nécessairement un fermé, alors que le cône dual à gauche est toujours fermé (point 1 de la proposition 2.43) ; voir l'exercice 2.23 pour un exemple de cône $\mathcal{A}(\mathcal{S}^n_+)$ non fermé.

L'identité (20.10) nous donnera de l'information sur l'admissibilité du problème primal (20.1). Pour avoir de l'information sur l'admissibilité du problème dual (20.5), on utilise le lemme de Farkas sous la forme du point 1 de l'exercice 2.38, avec $\mathbb{E} := \mathbb{R}^m$, $\mathbb{F} := \mathcal{S}^n$, l'application linéaire $\mathcal{A}^*$, $K = \mathbb{R}^m$ et $L = \mathcal{S}^n_+$; cela donne

$$\{X \in \mathcal{S}^n_+ : \mathcal{A}(X) = 0\}^+ = \operatorname{adh} \left(\mathcal{A}^*(\mathbb{R}^m) + \mathcal{S}^n_+\right), \tag{20.11}$$

Le résultat suivant est une conséquence directe des identités (20.10) et (20.11). La proposition s'énonce de manière plus concise si l'on introduit les définitions suivantes. On dit que le système en $X \in \mathcal{S}^n$,

$$\mathcal{A}(X) = b \quad \text{et} \quad X \succcurlyeq 0, \tag{20.12}$$

est *quasi-réalisable* si $b \in \operatorname{adh} \mathcal{A}(\mathcal{S}^n_+)$, c'est-à-dire si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $b_\varepsilon \in \mathbb{R}^m$ et $X_\varepsilon \in \mathcal{S}^n_+$ tels que $\|b_\varepsilon - b\| \leqslant \varepsilon$ et $\mathcal{A}(X_\varepsilon) = b_\varepsilon$. De même, on dit que le système en $(y, S) \in \mathbb{R}^m \times \mathcal{S}^n$,

$$\mathcal{A}^*(y) + S = C \quad \text{et} \quad S \succcurlyeq 0, \tag{20.13}$$

est *quasi-réalisable* si $C \in \operatorname{adh} (\mathcal{A}^*(\mathbb{R}^m) + \mathcal{S}^n_+)$, c'est-à-dire si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C_\varepsilon \in \mathcal{S}^n$, $y_\varepsilon \in \mathbb{R}^m$ et $S_\varepsilon \in \mathcal{S}^n_+$ tels que $\|C_\varepsilon - C\| \leqslant \varepsilon$ et $\mathcal{A}^*(y_\varepsilon) + S_\varepsilon = C_\varepsilon$. Évidemment, ces systèmes sont quasi-réalisables s'ils sont réalisables.

Proposition 20.3 (quasi-réalisabilités primale et duale)

1) *Le système primal (20.12) est quasi-réalisable si, et seulement si,* $\langle b, y \rangle \geqslant 0$ *pour tout* $y \in \mathbb{R}^m$ *tel que* $\mathcal{A}^*(y) \succcurlyeq 0$.
2) *Le système dual (20.13) est quasi-réalisable si, et seulement si,* $\langle C, X \rangle \geqslant 0$ *pour tout* $X \in \mathcal{S}^n_+$ *tel que* $\mathcal{A}(X) = 0$.

La quasi-réalisabilité des systèmes (20.12) et (20.13) n'est pas une propriété très forte (elle n'assure même pas leur réalisabilité !). Numériquement, il est certainement préférable d'avoir une réalisabilité plus robuste, insensible à de petites perturbations du second membre. On définit donc les concepts suivants. On dit que le système (20.12) est *fortement réalisable* si

$$b \in \operatorname{int} \mathcal{A}(\mathcal{S}^n_+).$$

De même, on dit que le système (20.13) est *fortement réalisable* si

$$C \in \operatorname{int} (\mathcal{A}^*(\mathbb{R}^m) + \mathcal{S}^n_+).$$

Comme le montre la proposition suivante, ces concepts ont un lien avec la condition de qualification de Robinson (4.100), notée (QC-R), pour les ensembles admissibles écrits sous la forme (4.65), à savoir

$$\mathcal{F}_{\mathrm{P}} = \{X \in \mathcal{S}^n : c_P(X) \in G_P\} \tag{20.14}$$
$$\mathcal{F}_{\mathrm{D}} = \{(y, S) \in \mathbb{R}^m \times \mathcal{S}^n : c_D(y, S) \in G_D\}, \tag{20.15}$$

avec

$$c_P : X \in \mathcal{S}^n \to (\mathcal{A}(X) - b, X) \in \mathbb{R}^m \times \mathcal{S}^n \quad \text{et} \quad G_P = \{0_{\mathbb{R}^m}\} \times \mathcal{S}^n_+,$$
$$c_D : (y, S) \in \mathbb{R}^m \times \mathcal{S}^n \to (\mathcal{A}^*(y) + S - C, S) \in \mathcal{S}^n \times \mathcal{S}^n \quad \text{et} \quad G_D = \{0_{\mathcal{S}^n}\} \times \mathcal{S}^n_+.$$

Ce lien n'est guère surprenant si l'on se remémore le corollaire 4.60 assurant la stabilité de l'ensemble admissible pour de petites perturbations (ce que l'on exprime dans ces conditions de réalisabilité fortes) lorsque la condition de Robinson est vérifiée. Ce corollaire a donc une réciproque dans le cas qui nous occupe ici. On notera bien que si la surjectivité est de rigueur dans la conditions (ii) de la proposition ci-dessous, elle ne l'est pas dans sa condition (ii').

Proposition 20.4 (réalisabilités primale et duale fortes)

1) *Si $\mathcal{F}_{\mathrm{P}} \neq \varnothing$, les conditions suivantes sont équivalentes :*
   - (i) *le système primal (20.12) est fortement réalisable,*
   - (ii) $\mathcal{F}^s_{\mathrm{P}} \neq \varnothing$ *et $\mathcal{A}$ est surjective,*
   - (iii) *(QC-R) a lieu en un/tout point de $\mathcal{F}_{\mathrm{P}}$, exprimé sous la forme (20.14),*
   - (iv) $\{(d, D) \in \mathbb{R}^m \times \mathcal{S}^n : \langle b, d\rangle \geqslant 0,\ \mathcal{A}^*(d) + D = 0,\ D \succcurlyeq 0\} = \{0\}$.
2) *Si $\mathcal{F}_{\mathrm{D}} \neq \varnothing$, les conditions suivantes sont équivalentes :*
   - (i') *le système dual (20.13) est fortement réalisable,*
   - (ii') $\mathcal{F}^s_{\mathrm{D}} \neq \varnothing$,
   - (iii') *(QC-R) a lieu en un/tout point de $\mathcal{F}_{\mathrm{D}}$, exprimé sous la forme (20.15),*
   - (iv') $\{D \in \mathcal{S}^n : \langle C, D\rangle \leqslant 0,\ \mathcal{A}(D) = 0,\ D \succcurlyeq 0\} = \{0\}$.

Démonstration. 1) $[(i) \Rightarrow (ii)]$ Montrons la surjectivité de $\mathcal{A}$: soit $b' \in \mathbb{R}^m$. Comme $b \in \operatorname{int} \mathcal{A}(\mathcal{S}^n_+)$, il existe $X \in \mathcal{S}^n_+$ tel que $\mathcal{A}(X) = b$ et $(1-t)b + tb' = \mathcal{A}(X_t)$ avec $X_t \in \mathcal{S}^n_+$ pour $t > 0$ assez petit. Alors $b' = \mathcal{A}(X_t - (1-t)X)/t$, qui est donc bien dans $\mathcal{R}(\mathcal{A})$.

D'autre part, comme $b \in \operatorname{int} \mathcal{A}(\mathcal{S}^n_+)$, on peut trouver un $t > 0$ tel que $b - t\mathcal{A}(I) \in \mathcal{A}(X_t)$ pour un $X_0 \succcurlyeq 0$, ce qui s'écrit $\mathcal{A}(X_0 + tI) = b$. Comme $X_0 + tI \succ 0$, $\mathcal{F}^s_{\mathrm{P}}$ est non vide.

$[(ii) \Rightarrow (iii)]$ Soit $X_0 \in \mathcal{F}_{\mathrm{P}}$. On choisit de montrer que (QC-R) a lieu en X_0 dans son expression (4.101c), qui s'écrit ici sous « forme matricielle »

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A} \\ I \end{pmatrix} \mathcal{S}^n - \begin{pmatrix} 0_{\mathbb{R}^m} \\ \mathrm{T}_{X_0}\,\mathcal{S}^n_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{R}^m \\ \mathcal{S}^n \end{pmatrix}. \tag{20.16}$$

Il s'agit de montrer que, grâce à (ii), tout élément du membre de droite dans (20.16) peut s'exprimer sous la forme donnée dans le membre de gauche de cette identité. Soit $(v, S) \in \mathbb{R}^m \times \mathcal{S}^n$. Par la surjectivité de $\mathcal{A}$, supposée dans (ii), il existe une matrice $X \in \mathcal{S}^n$ telle que $\mathcal{A}(X) = v$. Par ailleurs, par (ii), il existe une matrice $\hat{X} \succ 0$ telle que $\mathcal{A}(\hat{X}) = b$. Alors la matrice $X_t = X + t(\hat{X} - X_0)$ vérifie la première équation de (20.16), à savoir $\mathcal{A}(X_t) = v$ quel que soit $t \in \mathbb{R}$, ainsi que la seconde équation pour $t > 0$ assez grand. En effet, grâce à (2.57), pour montrer que $X_t - S \in \mathrm{T}_{X_0}\,\mathcal{S}^n_+$, il suffit de constater que, pour tout $v \in \mathcal{N}(X_0)$, on a $v^\mathsf{T}(X_t - S)v = v^\mathsf{T}(X - S + t\hat{X})v \geqslant 0$ pour t assez grand.

$[(iii) \Rightarrow (iv)]$ Si (iii) a lieu en $X_0 \in \mathcal{F}_{\mathrm{P}}$, on a (20.16). Par ailleurs, la condition (iv) peut s'écrire

$$\left\{ \begin{pmatrix} d \\ D \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} \mathbb{R}^m \\ \mathcal{S}^n \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} b^\mathsf{T} & 0 \\ \mathcal{A}^* & I \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ D \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} \mathbb{R}_+ \\ \{0_{\mathcal{S}^n}\} \\ \mathcal{S}^n_+ \end{pmatrix} \right\} = \{0\}. \tag{20.17}$$

En prenant le dual de chaque membre et en utilisant le lemme de Farkas, on trouve (on peut ôter l'adhérence à gauche, voir le point 3 de l'exercice 2.12)

$$\begin{pmatrix} b & \mathcal{A} & 0 \\ 0 & I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{R}_+ \\ \mathcal{S}^n \\ \mathcal{S}^n_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{R}^m \\ \mathcal{S}^n \end{pmatrix}. \tag{20.18}$$

Pour démontrer (20.18), on prend $(v, S) \in \mathbb{R}^m \times \mathcal{S}^n$ dans son membre de droite et on cherche à le représenter par un élément de son membre de gauche. En prenant $-(v + \mathcal{A}(I), S) \in \mathbb{R}^m \times \mathcal{S}^n$ dans le second membre de (20.16), on obtient $X_1 \in \mathcal{S}^n$ tel que

$$\mathcal{A}(X_1) = -v - \mathcal{A}(I) \qquad \text{et} \qquad X_1 + S \succcurlyeq 0 \text{ dans } \mathcal{N}(X_0).$$

Alors $X_1 + S + I \succ 0$ dans $\mathcal{N}(X_0)$, si bien qu'il existe $t > 0$ tel que $X_1 + S + I + tX_0 \succ 0$ (lemme B.3 de Finsler). En définissant $X := -(X_1 + I + tX_0)$, on a

$$tb + \mathcal{A}(X) = v \qquad \text{et} \qquad S - X \succcurlyeq 0,$$

si bien que (20.18) est démontré.

$[(iv) \Rightarrow (i)]$ Il suffit de montrer que b est un point absorbant de $\mathcal{A}(\mathcal{S}^n_+)$ (proposition 2.15). Soit $d \in \mathbb{R}^m$. Il s'agit de trouver un scalaire $t > 0$ tel que $b + td \in \mathcal{A}(\mathcal{S}^n_+)$. On utilise l'expression (20.18) de (iv) et on prend $(-b - d, 0_{\mathcal{S}^n}) \in \mathbb{R}^m \times \mathcal{S}^n$ dans son membre de droite. Il existe donc $(\alpha, X_1) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{S}^n$ tel que

$$\alpha b + \mathcal{A}(X_1) = -b - d \qquad \text{et} \qquad -X_1 \succcurlyeq 0.$$

Alors $X := -X_1/(1 + \alpha)$ et $t = 1/(1 + \alpha) > 0$ vérifie $\mathcal{A}(X) = b + td$ et $X \succcurlyeq 0$, si bien que $b + td \in \mathcal{A}(\mathcal{S}^n_+)$.

2) La démonstration est proposée à l'exercice 20.4. □

Notons que l'on peut obtenir des caractérisations de réalisabilité en termes de géométrie algébrique [355 ; 2013].

20.2 Exemples de modélisation SDP

Beaucoup de problèmes *convexes* ont une formulation SDP. L'intérêt d'exhiber une telle formulation est de montrer que l'on peut les résoudre par des algorithmes polynomiaux, souvent efficaces. Les exemples ont été choisis pour leur diversité. Certains problèmes *non convexes* ont une *relaxation SDP* précise, c'est-à-dire qu'il existe un problème d'optimisation SDP dont la valeur optimale est proche de celle du problème original. Nous en présentons quelques-unes parmi les plus citées. On trouvera d'autres exemples dans [456, 84, 626, 44, 158].

Commençons par quelques remarques qui nous permettrons de voir plus facilement quand est-ce qu'un problème d'optimisation peut se mettre sous forme SDP.

1) On peut toujours *faire passer en contrainte* le critère d'un problème d'optimisation, comme à la proposition 1.13. On veut dire par là, que le problème

$$\inf\{f(x) : c(x) \in G\},$$

où $f : E \to \mathbb{R}$ et $c : E \to F$ sont des fonctions définies sur un ensemble E et G est une partie de l'ensemble F, est équivalent au problème

$$\inf\{t : f(x) \leqslant t,\ c(x) \in G\}.$$

Par conséquent, il s'agira de voir si les variables du problème d'optimisation dont on cherche une formulation SDP peuvent s'interpréter comme des variables matricielles et si les fonctions définissant le problème (dans le critère ou les contraintes) peuvent s'écrire comme des fonctions matricielles à valeurs dans un $\mathbb{R}^m$ (formulation primale) ou des IML (formulation duale). Souvent, dans les exemples qui suivent, on ne s'intéressera qu'à ce second aspect de la formulation SDP.

2) Une contrainte qui s'écrit sous la forme $F(y) \succcurlyeq 0$, avec $F : \mathbb{R}^m \to \mathcal{S}^n$ affine, est bien une IML puisqu'elle s'écrit sous la forme (20.7), avec

$$C = F(0) \in \mathcal{S}^n \quad \text{et} \quad A_i := -\frac{\partial F}{\partial y_i}(0) \in \mathcal{S}^n.$$

3) Dans les exemples que nous donnons ci-dessous, on utilise parfois l'équivalence suivante

$$K := \begin{pmatrix} A & B \\ B^\mathsf{T} & C \end{pmatrix} \succ 0 \qquad \iff \qquad A \succ 0 \quad \text{et} \quad A_K^s \succ 0, \tag{20.19}$$

dans laquelle A et C sont symétriques, B est de type adéquat et la matrice $A_K^s := C - B^\mathsf{T} A^{-1} B$ est le complément de Schur de A dans K.

Démonstration. D'abord, il est clair que la définie positivité de K entraîne celle de A. On peut donc montrer l'équivalence en supposant que $A \succ 0$. On a alors la *factorisation gaussienne* par blocs de K suivante

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^\mathsf{T} & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ B^\mathsf{T} A^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A_K^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Comme les deux matrices extrêmes dans le membre de droite sont inversibles et que $A \succ 0$, on a l'équivalence (20.19). □

Des conditions équivalentes à la semi-définie positivité de K sont données à l'exercice 20.7.

4) Si $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et $t \in \mathbb{R}$, l'équivalence (20.44) avec $C = tI_n$ et $A = tI_m$ permet de voir que

$$\|B\| \leqslant t \quad \Longleftrightarrow \quad t^2 - \lambda_{\max}(B^\mathsf{T} B) \succcurlyeq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} tI_m & B \\ B^\mathsf{T} & tI_n \end{pmatrix} \succcurlyeq 0, \qquad (20.20)$$

où $\|B\| := \max\{\|Bx\|_2 : \|x\|_2 \leqslant 1\}$, qui est aussi la plus grande valeur singulière de B.

5) Certains problèmes s'expriment au moyen de plusieurs matrices X^i, $i \in [1:s]$, d'ordre respectif n_i, qui doivent être semi-définies positives et d'un vecteur $x^l \in \mathbb{R}^{n_l}$ qui est requis d'être positif. Matrices et vecteurs sont reliés par une contrainte affine de la forme $\mathcal{A}(X^1,\ldots,X^s,x) = b$. On peut se ramener au problème SDP primal (20.1) en introduisant une matrice X d'ordre $\sum_{i=1}^s n_i + n_l$, contenant les matrices X^i et les composantes du vecteur x^l sur sa diagonale et en ajoutant des contraintes linéaires imposant la nullité des éléments en dehors de cette diagonale par blocs. Cependant, dans un but numérique, il est préférable de développer la théorie et l'algorithmique du problème avec les variables $(X^1,\ldots,X^s,x^l)$ considérées séparément [575, 591, 240].

20.2.1 Optimisation linéaire

Le plus simple est d'obtenir une formulation SDP équivalente du problème d'optimisation linéaire dual

$$\begin{cases} \sup\ b^\mathsf{T} y \\ A^\mathsf{T} y \leqslant c. \end{cases}$$

Il suffit en effet d'exprimer la contrainte sous la forme d'une IML équivalente :

$$\begin{aligned} A^\mathsf{T} y \leqslant c \quad & \Longleftrightarrow \quad \operatorname{Diag}\left(c - \sum_{i=1}^m A_{i:}^\mathsf{T} y_i\right) \succcurlyeq 0 \\ & \Longleftrightarrow \quad \operatorname{Diag}(c) - \sum_{i=1}^m \operatorname{Diag}(A_{i:}^\mathsf{T}) y_i \succcurlyeq 0. \end{aligned}$$

20.2.2 Optimisation quadratique convexe

On considère un problème d'optimisation quadratique *convexe*, écrit sous la forme suivante (de manière à renforcer l'analogie avec le problème d'optimisation SDP équivalent que l'on obtient) :

$$\begin{cases} \sup\ b^\mathsf{T} y \\ y^\mathsf{T} C_i y - d_i^\mathsf{T} y - e_i \leqslant 0, \qquad \text{pour } i = [1:m], \end{cases}$$

où les $C_i \succcurlyeq 0$ (ce qui assure la convexité du problème). On aura une formulation SDP de ce problème (sous la forme du problème dual), si l'on montre que la contrainte peut s'écrire sous forme d'IML.

Première formulation SDP

On factorise $C_i = G_i^{\mathsf{T}} G_i$ (via une factorisation spectrale ou de Cholesky, par exemple), puis on observe que

$$y^{\mathsf{T}} C_i y - d_i^{\mathsf{T}} y - e_i \leqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} I & G_i y \\ y^{\mathsf{T}} G_i^{\mathsf{T}} & d_i^{\mathsf{T}} y + e_i \end{pmatrix} \succcurlyeq 0.$$

Cette équivalence vient du fait que $-(y^{\mathsf{T}} C_i y - d_i^{\mathsf{T}} y - e_i)$ est le complément de Schur de I dans la matrice à droite. Par ailleurs, la condition de droite est bien une IML (une combinaison affine de matrices doit être semi-définie positive).

Seconde formulation SDP

On conserve la factorisation $C_i = G_i^{\mathsf{T}} G_i$ et l'on observe que

$$y^{\mathsf{T}} C_i y - d_i^{\mathsf{T}} y - e_i \leqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} (1 + d_i^{\mathsf{T}} y + e_i) I & \begin{pmatrix} 1 - d_i^{\mathsf{T}} y - e_i \\ 2 G_i y \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 - d_i^{\mathsf{T}} y - e_i \\ 2 G_i y \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} & 1 + d_i^{\mathsf{T}} y + e_i \end{pmatrix} \succcurlyeq 0.$$

En effet, chacun des deux membres de cette équivalence implique que $1 + d_i^{\mathsf{T}} y + e_i > 0$: celui de gauche parce que $C_i \succcurlyeq 0$, celui de droite parce qu'autrement $1 + d_i^{\mathsf{T}} y + e_i$ serait nul et cela impliquerait que les sous-matrices sur la diagonale gauche devraient être nulles, ce qui est impossible dans ce cas. L'équivalence se déduit alors en utilisant le complément de Schur.

20.2.3 Minimisation de la valeur propre maximale

On se donne une application matricielle *affine* $x \in \mathbb{R}^n \mapsto M(x) = A_0 + \sum_{i=1}^m x_i A_i \in \mathcal{S}^n$ et l'on cherche à résoudre le problème d'optimisation

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n} \lambda_{\max}(M(x)).$$

On sait qu'il s'agit d'un problème *convexe non différentiable* ($\lambda_{\max}(M(\cdot))$ n'est pas différentiable lorsque son argument x est tel que $\lambda_{\max}(M(x))$ n'est pas simple).

La transformation se fait en plaçant dans un premier temps le critère en contrainte

$$\begin{cases} \inf_{(x,t)} \ t \\ \lambda_{\max}(M(x)) \leqslant t, \end{cases}$$

puis en exprimant la contrainte par une inégalité matricielle linéaire

$$\lambda_{\max}(M(x)) \leqslant t \quad \Longleftrightarrow \quad tI - M(x) \succcurlyeq 0.$$

20.2.4 Minimisation de la norme matricielle ℓ_2

On se donne une application matricielle *affine* $x \in \mathbb{R}^n \mapsto M(x) = A_0 + \sum_{i=1}^m x_i A_i \in \mathcal{S}^n$ et l'on cherche à résoudre le problème d'optimisation

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^n} \|M(x)\|_2.$$

Ce problème est équivalent au précédent si $M(x) \succcurlyeq 0$, ce que l'on ne suppose pas ici.

La transformation en problème d'optimisation SDP s'obtient à nouveau en faisant d'abord passer le critère en contrainte

$$\begin{cases} \inf_{(x,t)} \; t \\ \|M(x)\|_2 \leqslant t, \end{cases}$$

puis en exprimant la contrainte par une inégalité matricielle linéaire

$$\begin{aligned} \|M(x)\|_2 \leqslant t \quad &\iff \quad v^{\mathsf{T}} M(x)^2 v \leqslant t^2 \|v\|_2^2, \quad \forall\, v \\ &\iff \quad t^2 I - M(x)^2 \succcurlyeq 0 \\ &\iff \quad \begin{pmatrix} tI & M(x) \\ M(x) & tI \end{pmatrix} \succcurlyeq 0. \end{aligned}$$

La dernière équivalence se vérifie directement si $t = 0$ (car alors on doit avoir $M(x) = 0$) et en passant par le complément de Schur si $t > 0$.

20.2.5 Minimisation globale de polynômes

On note $\mathbb{R}[x]$ l'ensemble des *polynômes* à n indéterminées $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et à coefficients dans $\mathbb{R}$. Un tel prolynôme s'écrit

$$p(x) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} p_\alpha x^\alpha,$$

où $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ est un n-uple d'entiers, $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$ est appelé un *monôme* et il n'y a qu'un nombre fini de coefficients $p_\alpha \in \mathbb{R}$ non nuls. Le *degré* de p est défini par $\deg p := \max_\alpha \{|\alpha| : p_\alpha \neq 0\}$, où $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$.

Le problème de minimiser p sur $\mathbb{R}^n$ peut s'écrire comme un problème d'optimisation à une inconnue et un nombre infini de contraintes :

$$\begin{cases} \sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \; \lambda \\ p(x) - \lambda \geqslant 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{20.21}$$

On cherche donc un moyen d'exprimer la contrainte de ce problème, à savoir de caractériser la positivité de $p - \lambda$, si possible au moyen d'un nombre fini de conditions de manière à pouvoir le résoudre numériquement.

Un nombre réel positif est le carré d'un autre nombre réel (sa racine carrée). Mais un polynôme réel positif n'est pas nécessairement le carré d'un autre polynôme. Par exemple, même s'il n'y a qu'une seule indéterminé x, $x^2 + 1$ n'est pas de la forme $(ax + b)^2$, car il faudrait que $a^2 = 1$, $ab = 0$ et $b^2 = 1$ qui sont des conditions incompatibles entre elles. Mais un polynôme réel positif *à une indéterminée* peut s'écrire comme une *somme de deux carrés* de polynômes réels.

Proposition 20.5 (positivité sur $\mathbb{R}$) *Un polynôme $p \in \mathbb{R}[x]$ à une indéterminée x est positif sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, il est de degré pair, disons $2m$, et s'écrit $p = q^2 + r^2$, avec q, $r \in \mathbb{R}[x]$, $\deg q = m$ et $\deg r \leqslant m - 1$.*

Démonstration. Les conditions énoncées sont clairement suffisantes. Montrons qu'elles sont nécessaires.

Étant positif sur $\mathbb{R}$ le polynôme est nécessairement de degré pair, disons $2m$, et le coefficient dominant est positif. Il n'y a donc pas de perte de généralité à supposer que ce dernier vaut 1. Alors le polynôme se décompose en m facteurs de la forme

$$(x - a)^2 + b^2.$$

C'est en effet la forme que prend $(x-r)(x-\bar{r})$ lorsque r et $\bar{r}$ sont les deux racines complexes conjuguées $a \pm ib$. Par ailleurs toute racine réelle est de multiplicité paire sinon le polynôme changerait de signe dans le voisinage de cette racine. Chaque doublon de racines réelles a la forme ci-dessus avec $b = 0$.

On multiplie alors successivement les m facteurs de la forme $q^2 + r^2$ ci-dessus en utilisant la formule

$$(q_j^2 + r_j^2)(q^2 + r^2) = (q_j q + r_j r)^2 + (q_j r - r_j q)^2 =: q_{j+1}^2 + r_{j+1}^2.$$

Par récurrence, on voit que $\deg q_j = j$ et $\deg r_j \leqslant j-1$. C'est en effet le cas pour $j = 1$ car $\deg q_1 = 1$ et $\deg r_1 \leqslant 0$. Que r soit nul ou non, $\deg q_{j+1} = \deg q_j + 1$. Enfin, si $r = 0$, $\deg r_{j+1} = \deg r_j + 1 \leqslant j$ et, si $r \neq 0$, $\deg r_{j+1} \leqslant \max(\deg q_j, \deg r_j + 1) \leqslant j$. □

Ce résultat surprenant ne tient plus pour des polynômes à plus d'une indéterminée, même si l'on s'autorise à l'exprimer comme une somme de *plusieurs* carrés de polynômes ; autrement dit, un polynôme positif n'est pas nécessairement un élément de

$$\Sigma[x] := \left\{ \sum_{i=1}^{N} p_i^2 : p_i \in \mathbb{R}[x],\ N \in \mathbb{N} \right\}, \tag{20.22}$$

l'ensemble des polynômes qui peuvent s'écrire comme une somme d'un nombre fini de carrés de polynômes. On verra à la proposition 20.6 que l'on peut prendre $N = \binom{n+d}{d}$. Même si cela était connu dès 1920, le premier exemple de polynôme positif n'étant pas dans $\Sigma[x]$ n'a été trouvé qu'en 1967 par Motzkin ; il s'agit du polynôme à deux indéterminées suivant

$$p(x_1, x_2) = 1 + x_1^2 x_2^2 (x_1^2 + x_2^2 - 3). \tag{20.23}$$

On peut toutefois trouver des résultats de densité de $\Sigma[x]$ dans l'ensemble des polynômes positifs, pourvu que l'on se restreigne à un compact [48, 379]. L'intérêt de $\Sigma[x]$ vient du fait que l'appartenance à cet ensemble peut s'exprimer par une IML, alors que l'on ne connait pas de méthode simple pour exprimer la positivité de polynômes. On note $\Sigma_{2d}[x]$ la partie de $\Sigma[x]$ formée des polynômes de degré $\leqslant 2d$.

Proposition 20.6 (caractérisation des polynômes de $\Sigma_{2d}[x]$) *Un polynôme $p \in \mathbb{R}[x]$ de degré $\leqslant 2d$ est une somme de r carrés de polynômes si, et seulement si, il existe une matrice $S \succcurlyeq 0$ d'ordre $N := \binom{n+d}{d}$ et de rang $\leqslant r$ telle que $p(x) = v_d(x)^\mathsf{T} S v_d(x)$, où $v_d(x)$ est le vecteur des monômes à n variables de degré $\leqslant d$. En particulier, on peut restreindre la somme dans (20.22) à N termes.*

Démonstration. Observons d'abord que N est la dimension du vecteur des monômes $v_d(x)$, puisque le nombre de monôme de degré d est égal au nombre de combinaisons avec répétitions de n éléments pris d à d, c'est-à-dire à $\binom{n+d-1}{d}$. Alors la dimension de $v_d(x)$ vaut

$$\tbinom{n-1}{0} + \tbinom{n}{1} + \cdots + \tbinom{n+d-1}{d} = \tbinom{n+d}{d} = N.$$

Si p est une somme de r carrés de polynômes de degré $\leqslant d$, on a pour des vecteurs $s_i \in \mathbb{R}^N$:

$$p(x) = \sum_{i=1}^{r} (s_i^\mathsf{T} v_d(x))^2 = \sum_{i=1}^{r} v_d(x)^\mathsf{T} s_i s_i^\mathsf{T} v_d(x) = v_d(x)^\mathsf{T} S v_d(x),$$

où $S := \sum_{i=1}^{r} s_i s_i^\mathsf{T} \succcurlyeq 0$ est de rang $\leqslant r$.

Inversement, supposons que $p(x) = v_d(x)^\mathsf{T} S v_d(x)$, avec $S \succcurlyeq 0$ de rang $\leqslant r$. La décomposition spectrale de $S = \sum_{i=1}^{r} s_i s_i^\mathsf{T}$ permet d'écrire

$$p(x) = \sum_{i=1}^{r} v_d(x)^\mathsf{T} s_i s_i^\mathsf{T} v_d(x) = \sum_{i=1}^{r} (s_i^\mathsf{T} v_d(x))^2.$$

Comme S est d'ordre N, son rang r est nécessairement plus petit que N, c'est-à-dire qu'un polynôme de $\Sigma[x]$ peut s'exprimer comme somme d'au plus N carrés de polynômes. □

Montrons que le résultat précédent permet d'exprimer l'appartenance à $\Sigma_{2d}[x]$ par une IML. La proposition affirme que $p \in \Sigma_{2d}[x]$ si, et seulement si, on peut trouver une matrice $S \in \mathcal{S}_+^N$ telle que

$$\begin{aligned} p(x) &= v_d(x)^\mathsf{T} S v_d(x) \\ &= \sum_{|\alpha|,\, |\beta| \leqslant d} S_{\alpha,\beta} x^{\alpha+\beta} \\ &= \sum_{|\gamma| \leqslant 2d} \left(\sum_{\substack{|\alpha|,\, |\beta| \leqslant d \\ \alpha+\beta=\gamma}} S_{\alpha,\beta} \right) x^\gamma \\ &= \sum_{|\gamma| \leqslant 2d} \langle B_\gamma, S \rangle x^\gamma, \end{aligned}$$

où on a noté

$$B_\gamma := \sum_{\substack{|\alpha|,\,|\beta|\leqslant d\\ \alpha+\beta=\gamma}} E^{\alpha,\beta},$$

$E^{\alpha,\beta}$ étant la matrice élémentaire d'ordre N dont tous les éléments sont nuls sauf celui en positition (α,β), qui vaut 1. Il reste à identifier les coefficients de même puissance :

$$\boxed{p \in \Sigma_{2d}[x] \qquad \iff \qquad \exists\, S \in \mathcal{S}^N_+,\ \forall\,|\gamma| \leqslant 2d: \quad \langle B_\gamma, S\rangle = p_\gamma.} \tag{20.24}$$

On a bien une IML à droite, dans laquelle on recherche une matrice symétrique semi-définie positive S d'ordre $\binom{n+d}{d}$ soumise à $\binom{n+2d}{2d}$ contraintes affines.

Comme $\Sigma[x]$ est inclus dans l'ensemble des polynômes positifs, on obtient une *relaxation* du problème de minimisation globale de p, exprimé par (20.21), en transformant sa contrainte $p-\lambda \geqslant 0$ par $p-\lambda \in \Sigma_{2d}[x]$: la valeur optimale du problème relaxé sera donc plus petite. Grâce à (20.24), on obtient le problème relaxé suivant [375] :

$$\begin{cases} \sup_{(S,\lambda)\in\mathcal{S}^N\times\mathbb{R}}\ \lambda \\ S_{00} = p_0 - \lambda \\ \langle B_\gamma, S\rangle = p_\gamma, \quad \forall\,\gamma \in \mathbb{N}^n : 0 < |\gamma| \leqslant 2d \\ \mathcal{S} \succcurlyeq 0. \end{cases}$$

On peut facilement le transformer en un problème SDP primal de la forme (20.1).

L'approche décrite brièvement ci-dessus peut s'étendre à la minimisation globale de polynôme sur un ensemble défini par des inégalités polynomiales. Cette extention peut se faire, par exemple, au moyen de notions fines de géométrie algébrique (théorème de Putinar [501]) [474, 375, 376] ou pas [543].

20.2.6 Relaxation SDP de problèmes non convexes

Relaxation de rang d'un problème quadratique en variables binaires

On considère un problème quadratique ($Q \in \mathcal{S}^n$) en nombres $\{-1,1\}$:

$$\begin{cases} \min\ x^\mathsf{T} Q x \\ x \in \{-1,1\}^n. \end{cases} \tag{20.25}$$

Ce problème est NP-ardu [626 ; chapitre 12, page 344]. La technique de relaxation SDP présentée ci-dessous s'utilise dans des contextes variés.

On peut écrire $x^\mathsf{T} Q x = \langle Q, xx^\mathsf{T}\rangle$. D'autre part $x_i \in \{-1,1\}$ si, et seulement si, $x_i^2 = 1$, dès lors

$$X = xx^\mathsf{T} \text{ et } x_i \in \{-1,1\} \quad \iff \quad X \succcurlyeq 0,\ \operatorname{diag}(X) = e \text{ et } \operatorname{rg}(X) = 1.$$

La contrainte $\operatorname{rg}(X) = 1$ n'est pas convexe (le rang est à valeurs entières !). On obtient cependant une relaxation assez précise du problème (20.25) en abandonnant cette contrainte et en considérant à la place le problème d'optimisation SDP :

$$\begin{cases} \min\ \langle Q, X\rangle \\ \operatorname{diag}(X) = e \\ X \succcurlyeq 0. \end{cases}$$

Relaxation de rang du problème tout quadratique

Nous allons donner ici la *relaxation de rang*, parfois dite *de Shor* et que l'on pourrait qualifier de *lagrangienne* (voir l'exercice 20.8), du problème tout quadratique ; c'est une relaxation SDP. Le terme *relaxation* veut dire que la valeur optimale du problème relaxé est plus petite que celle du problème original.

Le *problème tout quadratique*, s'écrit

$$\begin{cases} \inf_x \; q_0(x) \\ q_i(x) = 0, \quad \forall\, i \in E \\ q_i(x) \leqslant 0, \quad \forall\, i \in I, \end{cases} \tag{20.26a}$$

où E et I sont des ensembles d'indices, finis et disjoints, et les $q_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont des fonctions quadratiques définies en $x \in \mathbb{R}^n$ par

$$q_i(x) = x^\mathsf{T} A_i x + 2b_i^\mathsf{T} x + c_i, \tag{20.26b}$$

avec des matrices $A_i \in \mathcal{S}^n$, des vecteurs $b_i \in \mathbb{R}^n$ et des scalaires $c_i \in \mathbb{R}$. Comme les matrices symétriques A_i ne sont pas nécessairement semi-définies positives, le problème n'est pas nécessairement convexe. Cette formulation inclut l'optimisation linéaire (matrices A_i nulles), les problèmes en variables $(0,1)$ (la contrainte $x_i \in \{0,1\}$ peut s'exprimer par la contrainte quadratique $x_i^2 - x_i = 0$) et plus généralement toute l'optimisation polynomiale (on peut en effet réduire d'une unité le degré d'un monôme de degré > 2 en remplaçant un produit $x_i x_j$ par une nouvelle variable y_k et en ajoutant la contrainte quadratique $x_i x_j = y_k$ [548]). Il s'agit donc de problèmes très difficiles, en tout cas NP-ardus (chapitre **??**).

Observons qu'une fonction quadratique peut s'écrire comme suit

$$x^\mathsf{T} A_i x + 2b_i^\mathsf{T} x + c_i = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}^\mathsf{T} \begin{pmatrix} A_i & b_i \\ b_i^\mathsf{T} & c_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} A_i & b_i \\ b_i^\mathsf{T} & c_i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}^\mathsf{T} \right\rangle .$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire dans $\mathcal{S}^{n+1}$. Si l'on note

$$\tilde{A}_i = \begin{pmatrix} A_i & b_i \\ b_i^\mathsf{T} & c_i \end{pmatrix}, \tag{20.27}$$

on peut récrire le problème d'optimisation quadratique (20.26) de la manière suivante

$$\begin{cases} \inf_{(X,x) \in \mathcal{S}^n \times \mathbb{R}^n} \; \langle \tilde{A}_0, X \rangle \\ \langle \tilde{A}_i, X \rangle = 0, \quad \forall\, i \in E \\ \langle \tilde{A}_i, X \rangle \leqslant 0, \quad \forall\, i \in I \\ X = \binom{x}{1} \binom{x}{1}^\mathsf{T}. \end{cases}$$

La dernière condition n'est pas linéaire en (X,x) et la relaxation proposée consiste à n'en garder qu'une partie, qui peut s'exprimer linéairement. On constate en effet que l'élément $(n+1, n+1)$ de $\binom{x}{1}(x^\mathsf{T}\ 1)$ vaut 1, si bien que les (X,x) vérifiant $X = \binom{x}{1}(x^\mathsf{T}\ 1)$ vérifient aussi $\operatorname{rg} X = 1$ et $X_{n+1,n+1} = 1$ (on agrandit l'ensemble admissible). La *relaxation de rang* consiste à se débarrasser de la contrainte de rang (à valeurs entières, donc non continue et certainement très désagréable) et à ne garder que $X_{n+1,n+1} = 1$ (on agrandit encore l'ensemble admissible). La formulation relaxée obtenue ainsi s'écrit :

$$\begin{cases} \inf_{(X,x)\in\mathcal{S}^n\times\mathbb{R}^n} \langle \tilde{A}_0, X\rangle \\ \langle \tilde{A}_i, X\rangle = 0, \quad \forall\, i \in E \\ \langle \tilde{A}_i, X\rangle \leqslant 0, \quad \forall\, i \in I \\ X_{n+1,n+1} = 1 \\ X \succcurlyeq 0. \end{cases} \tag{20.28}$$

C'est bien un problème SDP (généralisé, à cause des inégalités pour les indices dans I, que l'on peut transformer en égalités avec des variables d'écart : $\langle \tilde{A}_i, X\rangle + s_i = 0$ et $s_i \geqslant 0$, pour $i \in I$ – voir la remarque 5 à la page 726). On peut montrer que c'est le bidual lagrangien du problème (20.26), voir l'exercice 20.8.

L'erreur commise sur la valeur optimale par cette relaxation a été estimée dans [255, 40, 454, 634, 635].

20.3 Existence de solution et CNS d'optimalité

En optimisation linéaire, les résultats d'existence de solution et de dualité forte (théorèmes 17.4 et 17.11) assurent que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (P) et (D) sont réalisables,
- (P) est réalisable et borné,
- (D) est réalisable et borné,
- (P) a une solution,
- (D) a une solution.

De plus, dans chacun de ces cas, il n'y a pas de saut de dualité. Bien que l'OL et l'OSDP aient une structure très semblable, ces résultats ne tiennent plus pour les problèmes d'optimisation SDP. Voici quelques contre-exemples qui pourront servir de garde-fous.

Exemples 20.7 On peut avoir les situations suivantes.

(1) (P) est fortement réalisable (par la matrice identité) et borné, mais n'a pas de solution ; (D) a une unique solution ; il n'y a pas de saut de dualité. Voici un exemple avec $n = 2$ et $m = 1$:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = 2.$$

(2) (P) a une solution ; (D) est réalisable et borné, mais n'a pas de solution ; il n'y a pas de saut de dualité (cas symétrique du précédent). Voici un exemple avec $n = 2$ et $m = 2$:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(3) (P) n'est pas réalisable ; (D) a une solution. Voici un exemple avec $n = 2$ et $m = 2$:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(4) (P) et (D) ont une solution ; il y a un saut de dualité. Voici un exemple avec $n = 3$ et $m = 2$:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Les difficultés viennent en partie du fait observé dans l'exercice 2.23 que l'image par une application linéaire d'un cône convexe fermé, comme $\mathcal{S}^n_+$, n'est pas nécessairement fermée (alors que l'image par une application linéaire de l'orthant positif est fermée, ce qui rend l'OL plus aisée). Si l'image de $\mathcal{S}^n_+$ par l'application linéaire $X \mapsto (\langle C, X\rangle, A(X))$ était fermée, le seul fait d'avoir (P) réalisable et borné entraînerait l'existence d'une solution de (P) (même démonstration qu'à la proposition 17.4). Mais en toute généralité, on ne peut pas étendre la proposition 17.4 à l'optimisation SDP.

On fera bien attention au fait que l'absence de saut de dualité au point 1 (resp. au point 2) de la proposition ci-dessous n'implique pas que le problème dual (resp. primal) a une solution, mais seulement que sa valeur optimal est identique à celle du problème primal (resp. dual).

Proposition 20.8 (existence de solution)

1) *Si $\mathcal{F}_{\rm P} \times \mathcal{F}^s_{\rm D} \neq \varnothing$, alors $\mathcal{S}_{\rm P}$ est un compact non vide.*

2) *Si $\mathcal{F}^s_{\rm P} \times \mathcal{F}_{\rm D} \neq \varnothing$ et si $\mathcal{A}$ est surjective, alors $\mathcal{S}_{\rm D}$ est un compact non vide.*

3) *Si $\mathcal{F}^s \neq \varnothing$ et si $\mathcal{A}$ est surjective, alors $\mathcal{S}_{\rm P}$ et $\mathcal{S}_{\rm D}$ sont des compacts non vides.*

Dans chacun de ces cas, il n'y a pas de saut de dualité : $\operatorname{val}(P) = \operatorname{val}(D)$.

Démonstration. Les problèmes primal et dual pouvant être obtenus par une technique de perturbation, les points 1 et 2 peuvent se déduire de la proposition 14.11, point 1.d (on pourrait aussi utiliser la dualité de Fenchel dont le résultat de dualité forte dérive en fait de la même proposition).

1) La fonction valeur $w_{\rm SDP}$ définie en (20.9) est convexe, parce qu'elle est la fonction marginale de la fonction convexe

$$(y, S, P) \in \mathbb{R}^m \times \mathcal{S}^n \times \mathcal{S}^n \mapsto -\langle b, y\rangle + \mathcal{I}_{\{(y,S):\mathcal{A}^*(y)+S+P=C\}}(y, S) + \mathcal{I}_{\mathcal{S}^n_+}(S) \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Il suffit alors de montrer que $0 \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} w_{\rm SDP})$ et que $w_{\rm SDP}$ ne prend pas la valeur $-\infty$. On voit facilement que $\operatorname{dom} w_{\rm SDP} = C - \mathcal{S}^n_+ - \mathcal{A}^*(\mathbb{R}^m)$, si bien que la première condition s'écrit

$$C \in \operatorname{int}(\mathcal{A}^*(\mathbb{R}^m) + \mathcal{S}^n_+).$$

Cette relation exprime la réalisabilité duale forte qui, par la proposition 20.4, est équivalente à $\mathcal{F}^s_{\rm D} \neq \varnothing$, qui fait partie des hypothèses. Par ailleurs, comme $\mathcal{F}_{\rm P} \neq \varnothing$, $\operatorname{val}(P) < +\infty$ et donc, par dualité faible, $w_{\rm SDP}(0) = -\operatorname{val}(D) > -\infty$. Ensuite, le fait que $0 \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} w_{\rm SDP})$ empêche $w_{\rm SDP}$ de prendre la valeur $-\infty$ (exercice 3.3).

2) On s'y prend de la même manière. La fonction valeur v_{SDP} définie en (20.8) est convexe comme fonction marginale de la fonction convexe

$$(X,p) \in \mathcal{S}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \langle C, X\rangle + \mathcal{I}_{\{X:\mathcal{A}(X)=b+p\}}(X) + \mathcal{I}_{\mathcal{S}^n_+}(X) \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Il reste à montrer que $0 \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} v_{\text{SDP}})$ et que v_{SDP} ne prend pas la valeur $-\infty$. On a $\operatorname{dom} v_{\text{SDP}} = \mathcal{A}(\mathcal{S}^n_+) - b$, si bien que la première condition s'écrit

$$b \in \operatorname{int} \mathcal{A}(\mathcal{S}^n_+).$$

Cette relation exprime la réalisabilité primale forte qui, par la proposition 20.4, est équivalente à la surjectivité de $\mathcal{A}$ et à $\mathcal{F}^s_{\text{P}} \neq \varnothing$. Par ailleurs, comme $\mathcal{F}_{\text{D}} \neq \varnothing$, $\operatorname{val}(D) > -\infty$ et donc, par dualité faible, $v_{\text{SDP}}(0) = \operatorname{val}(P) > -\infty$. Ensuite, le fait que $0 \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} v_{\text{SDP}})$ empêche v_{SDP} de prendre la valeur $-\infty$.

3) C'est une conséquence immédiate des points 1 et 2. □

Il est intéressant de comparer les résultats de la proposition précédente avec ce que donnent les conditions d'optimalité des problèmes primal et dual, vus comme des problèmes « abstraits » de la section 4.5.1. Le théorème 4.56 sur lequel repose les conditions d'optimalité ci-dessous suppose d'emblée que le problème considéré a une solution pour pouvoir énoncer ses conditions d'optimalité et d'autres informations sur son dual. L'hypothèse de départ est donc plus forte que dans la proposition précédente, qui ne suppose sur le problème considéré qu'une hypothèse sur sa contrainte (rien sur l'existence de solution), mais elle a aussi une conséquence supplémentaire, à savoir la relation de complémentarité $\langle X, S\rangle = 0$, laquelle n'est pas assurée aux points 1 et 2 de la proposition précédente (et ne peut l'être comme le montre l'exemple 20.7 (1)).

Proposition 20.9 (CN d'optimalité)
1) *Si $\mathcal{S}_{\text{D}} \neq \varnothing$, alors $\mathcal{F}^s_{\text{D}} \neq \varnothing \iff \mathcal{S}_{\text{P}} \neq \varnothing$ et compact.*
2) *Si $\mathcal{S}_{\text{P}} \neq \varnothing$, alors $\mathcal{F}^s_{\text{P}} \neq \varnothing$ et $\mathcal{A}$ est surjective $\iff \mathcal{S}_{\text{D}} \neq \varnothing$ et compact.*
Dans chacun de ces cas, il n'y a pas de saut de dualité et l'on a complémentarité entre les solutions primale X et duale (y, S), c'est-à-dire $\langle X, S\rangle = 0$.

Démonstration. 1) Supposons que le problème dual ait une solution (y, S). Si $\mathcal{F}^s_{\text{D}}$ est non vide, ses contraintes sont qualifiées (équivalence $(ii') \Leftrightarrow (iii')$ de la proposition 20.4). En utilisant le lagrangien du problème dual $(y, S, X, X') \mapsto \langle b, y\rangle - \langle X, \mathcal{A}^*(y) + S - C\rangle + \langle X', S\rangle$, on obtient l'existence d'un $X \succcurlyeq 0$ tel que $\mathcal{A}(X) = b$ et $\langle X, S\rangle = 0$ (théorème 4.56), si bien que $\mathcal{S}_{\text{P}} \neq \varnothing$. Par ailleurs $\mathcal{S}_{\text{P}}$ est borné par la propriété de Gauvin (proposition 4.70). Inversement, si $\mathcal{S}_{\text{P}}$ est non vide et borné, (QC-R) a lieu par cette même propriété et donc $\mathcal{F}^s_{\text{D}} \neq 0$ par l'équivalence $(ii') \Leftrightarrow (iii')$ de la proposition 20.4.

2) On raisonne de la même manière que pour le point 1, mais sur le problème primal cette fois. □

On est à présent en mesure de donner des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité et d'avoir ainsi une réciproque du point 3 de la proposition 20.2.

Corollaire 20.10 (CNS d'optimalité) *Si $\mathcal{F}_{\mathrm{P}}^s \times \mathcal{F}_{\mathrm{D}}^s \neq \varnothing$, alors (X, y, S) est solution primale-duale de* (20.1) *si, et seulement si,*

$$\begin{cases} \mathcal{A}^*(y) + S = C, \quad S \succcurlyeq 0 \\ \mathcal{A}(X) = b, \quad X \succcurlyeq 0 \\ \langle X, S \rangle = 0. \end{cases} \tag{20.29}$$

Démonstration. *Les conditions* (20.29) *sont nécessaires*. En effet, on peut supposer que l'opérateur $\mathcal{A}$ est représenté par des matrices $A_i \in \mathcal{S}^n$ comme en (20.3) et éliminer les contraintes redondantes sans modifier le problème ni l'hypothèse $\mathcal{F}_{\mathrm{P}}^s \neq \varnothing$. L'opérateur $\mathcal{A}$ est alors remplacé par un opérateur $\tilde{\mathcal{A}}$ surjectif. En vertu du point 3 de la proposition 20.8, $\mathcal{S}_{\mathrm{P}} \times \mathcal{S}_{\mathrm{D}} \neq \varnothing$. Alors la proposition 20.9 assure la relation de complémentarité $\langle X, S \rangle = 0$. On retrouve la relation d'admissibilité duale $\mathcal{A}^*(y) + S = C$ avec l'opérateur $\mathcal{A}$ original en complétant les y_i trouvés par des zéros.

Les conditions (20.29) *sont suffisantes* d'après le point 3 de la proposition 20.2. □

Soit $z = (X, y, S)$ une solution primale-duale, sans saut de dualité : $\langle X, S \rangle = 0$. Alors $XS = SX = 0$ (lemme 20.1), en particulier X et S commutent. Il existe donc une matrice orthogonale V qui diagonalise à la fois X et S :

$$V^{\mathsf{T}} X V = \operatorname{diag}(\xi_1, \ldots, \xi_n) \quad \text{et} \quad V^{\mathsf{T}} S V = \operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n).$$

De plus

$$\xi_i \sigma_i = 0, \quad \xi_i \geqslant 0, \quad \sigma_i \geqslant 0, \quad \text{pour tout } i = [1:n], \tag{20.30}$$

ce qui rappelle les conditions de complémentarité en optimisation linéaire. Il y a n relations de complémentarité et non pas $\dim \mathcal{S}^n = n(n+1)/2$. On peut rapprocher cette observation avec le fait que la complexité itérative des algorithmes de points intérieurs en OSDP sera proportionnelle à n^ω et non pas à $(\dim \mathcal{S}^n)^\omega$.

Les relations de complémentarité (20.30) impliquent que $\operatorname{rg}(X) + \operatorname{rg}(S) \leqslant n$. On dit qu'une solution primale-duale (X, y, S) sans saut de dualité est *strictement complémentaire* si

$$\operatorname{rg}(X) + \operatorname{rg}(S) = n.$$

20.4 Algorithmes de points intérieurs

20.4.1 Le chemin central

Définition, existence et régularité

Le *chemin central* est l'ensemble des solutions de

$$\begin{cases} \mathcal{A}^*(y) + S = C, \quad S \succ 0 \\ \mathcal{A}(X) = b, \quad X \succ 0 \\ XS = \mu I. \end{cases} \tag{20.31}$$

pour des $\mu > 0$. La relaxation de la condition $XS = 0$, qui est équivalente à $\langle X, S\rangle = 0$ (voir le lemme 20.1), sous la forme $XS = \mu I$ est moins naturelle qu'en OL. Elle est motivée par un argument de pénalisation intérieure (comme en OL d'ailleurs, voir la proposition 20.12).

On introduit la *fonction log-déterminant* $\mathrm{ld} : \mathcal{S}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, définie par

$$\mathrm{ld}(X) := \begin{cases} -\log\det(X) & \text{si } X \succ 0 \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

C'est la *barrière logarithmique* pour le cône $\mathcal{S}^n_{++}$. On se rappelle que si $X \succ 0$ et $H \in \mathcal{S}^n$:

$$\det{}'(X) \cdot H = (\det X)(\operatorname{tr} X^{-1} H).$$

On en déduit que, pour $X \succ 0$ et H, K, $L \in \mathcal{S}^n$, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{ld}'(X) \cdot H &= -\langle X^{-1}, H\rangle \\ \mathrm{ld}''(X) \cdot (H, K) &= \langle X^{-1} H X^{-1}, K\rangle \\ \mathrm{ld}'''(X) \cdot (H, K, L) &= -\langle X^{-1} H X^{-1} K X^{-1} + X^{-1} K X^{-1} H X^{-1}, L\rangle. \end{aligned}$$

On a donc $\nabla \mathrm{ld}(X) = -X^{-1}$ et $\nabla^2 \mathrm{ld}(X) = X^{-1} \otimes X^{-1}$, si $(X \otimes Y)$ est l'application linéaire de $\mathcal{S}^n \to \mathcal{S}^n$ définie pour X et Y dans $\mathcal{S}^n$ par

$$(X \otimes Y)H = \frac{1}{2}(XHY + YHX). \tag{20.32}$$

Il s'agit d'un produit tensoriel (exercice 20.9). On montre que $\mathrm{ld} \in \overline{\mathrm{Conv}}(\mathcal{S}^n)$ et que ld est strictement convexe. Il sera aussi utile de calculer la fonction asymptotique de ld (exercice 20.10)

$$\mathrm{ld}^\infty = \mathcal{I}_{\mathcal{S}^n_+}. \tag{20.33}$$

Pour chaque $\mu > 0$, on associe à (P) le problème-barrière suivant

$$(P_\mu) \quad \begin{cases} \inf_{X \in \mathcal{S}^n} \langle C, X\rangle + \mu\, \mathrm{ld}(X) \\ \mathcal{A}(X) = b \quad (X \succ 0). \end{cases}$$

On vérifie aisément (en utilisant un lagrangien) que X est solution de (P_μ) si, et seulement si, il existe $(y, S) \in \mathbb{R}^m \times \mathcal{S}^n$ tel que que l'on ait (20.31). Il s'agit de conditions nécessaires et suffisantes, du fait de la convexité de (P_μ). Ce fait justifie a posteriori la perturbation du système d'optimalité (20.29) adoptée dans (20.31).

De même, pour chaque $\mu > 0$, on associe à (D) le problème-barrière suivant

$$(D_\mu) \quad \begin{cases} \sup_{(y,S) \in \mathbb{R}^m \times \mathcal{S}^n} \langle b, y\rangle - \mu\, \mathrm{ld}(S) \\ \mathcal{A}^*(y) + S = C \quad (S \succ 0). \end{cases}$$

On montre qu'à la constante additive $n\mu(1 - \log \mu)$ près dans le critère de (D_μ), ce dernier est le dual de (P_μ), obtenu par relaxation lagrangienne de sa contrainte.

Le lemme suivant donne des conditions pour que le système (20.31) linéarisé (après d'éventuelles modifications) ait une solution unique. Cette solution est le pas de Newton.

Lemme 20.11 *Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux opérateurs linéaires de $\mathcal{S}^n \to \mathcal{S}^n$ tels que $\mathcal{P}$ soit inversible et $\mathcal{P}^{-1}\mathcal{Q}$ soit défini positif (sans être nécessairement auto-adjoint). On suppose que $\mathcal{A}$ est surjective. Alors pour $r_D \in \mathcal{S}^n$, $r_P \in \mathbb{R}^m$ et $r_C \in \mathcal{S}^n$, le système*

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathcal{A}^* & I \\ \mathcal{A} & 0 & 0 \\ \mathcal{P} & 0 & \mathcal{Q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_X \\ d_y \\ d_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_D \\ r_P \\ r_C \end{pmatrix} \tag{20.34}$$

a une solution unique, donnée par

$$\begin{aligned} d_y &= (\mathcal{A}\mathcal{P}^{-1}\mathcal{Q}\mathcal{A}^*)^{-1}(r_P - \mathcal{A}\mathcal{P}^{-1}(r_C - \mathcal{Q}(r_D))) \\ d_S &= r_D - \mathcal{A}^*(d_y) \\ d_X &= \mathcal{P}^{-1}(r_C - \mathcal{Q}d_S). \end{aligned}$$

Démonstration. Il suffit d'exhiber la solution. La troisième équation et l'inversibilité de $\mathcal{P}$ permet d'écrire

$$d_X + \mathcal{P}^{-1}\mathcal{Q}d_S = \mathcal{P}^{-1}(r_C).$$

Alors, comme $d_X \in \mathcal{S}^n$ et $\mathcal{P}^{-1}\mathcal{Q}d_S \in \mathcal{S}^n$, on peut appliquer $\mathcal{A}$ aux deux membres, ce qui donne en tenant compte de la seconde équation

$$\mathcal{A}\mathcal{P}^{-1}\mathcal{Q}d_S = \mathcal{A}\mathcal{P}^{-1}(r_C) - r_P.$$

En appliquant $\mathcal{A}\mathcal{P}^{-1}\mathcal{Q}$ à la première équation, on trouve alors

$$\mathcal{A}\mathcal{P}^{-1}\mathcal{Q}\mathcal{A}^*(d_y) = \mathcal{A}\mathcal{P}^{-1}\mathcal{Q}(r_D) + r_P - \mathcal{A}\mathcal{P}^{-1}(r_C) = r_P - \mathcal{A}\mathcal{P}^{-1}(r_C - \mathcal{Q}(r_D)). \tag{20.35}$$

D'après les hypothèses, il existe des constantes $\gamma_1 > 0$ et $\gamma_2 > 0$ telles que $\langle \mathcal{P}^{-1}\mathcal{Q}(X), X\rangle \geqslant \gamma_1 \|X\|_F^2$ pour tout $X \in \mathcal{S}^n$ et $\|\mathcal{A}^*(y)\| \geqslant \gamma_2\|y\|$ pour tout $y \in \mathbb{R}^m$. On en déduit que $\langle \mathcal{A}\mathcal{P}^{-1}\mathcal{Q}\mathcal{A}^*(y), y\rangle \geqslant \gamma_1\|\mathcal{A}^*(y)\|^2 \geqslant \gamma_1\gamma_2^2\|y\|^2$, si bien que $\mathcal{A}\mathcal{P}^{-1}\mathcal{Q}\mathcal{A}^*$ est inversible. Alors (20.35) permet de déterminer d_y. La première équation donne alors d_S et la troisième d_X. □

Observons que $X \in \mathcal{S}^n_{++}$ est solution de (P_μ) si, et seulement si, il existe $(y, S) \in \mathbb{R}^m \times \mathcal{S}^n_{++}$ tel que l'on ait (20.31). De même $(y, S) \in \mathbb{R}^m \times \mathcal{S}^n_{++}$ est solution de (D_μ) si, et seulement si, il existe $X \in \mathcal{S}^n_{++}$ tel que l'on ait (20.31). On peut maintenant montrer l'existence du chemin central et en étudier la régularité, sous l'hypothèse suivante :

$$\mathcal{F}^s := \mathcal{F}^s_{\mathrm{P}} \times \mathcal{F}^s_{\mathrm{D}} \neq \varnothing. \tag{20.36}$$

Proposition 20.12 (existence et régularité du chemin central) *Si $\mathcal{F}^s_{\mathrm{D}} \neq \varnothing$ et $\mu > 0$, alors le système (20.31) a une solution ; celle-ci est unique en X et S.*

Si, de plus, $\mathcal{A}$ est surjective, la solution est également unique en y et l'application qui à $\mu > 0$ fait correspondre cette solution (X, y, S) est de classe C^∞.

Démonstration. Le lien entre les solutions X de (P_μ) et celles (X, y, S) de (20.31), nous permet de nous intéresser à (P_μ). L'unicité de (X, S) est due à la stricte convexité de ld dans le critère de (P_μ). Pour l'existence, on récrit le problème (P_μ) comme celui qui consiste à minimiser la fonction $\varphi : \mathcal{S}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ définie en $X \in \mathcal{S}^n$ par

$$\varphi(X) = \langle C, X \rangle + \mu \operatorname{ld}(X) + \mathcal{I}_{\mathscr{A}}(X).$$

where $\mathscr{A} := \{X \in \mathcal{S}^n : \mathcal{A}(X) = b\}$. Il suffit de vérifier que $\varphi^\infty(D) > 0$ lorsque $D \in \mathcal{S}^n \setminus \{0\}$ (proposition 3.29). En utilisant (20.33), on obtient

$$\varphi^\infty(D) = \langle C, D \rangle + \mathcal{I}_{\mathcal{S}^n_+}(D) + \mathcal{I}_{\mathcal{N}(\mathcal{A})}(D).$$

Dès lors, si $\varphi^\infty(D) \leqslant 0$, on a

$$\langle C, D \rangle \leqslant 0, \quad D \succcurlyeq 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{A}(D) = 0.$$

Comme $\mathcal{F}^s_{\rm D} \neq \varnothing$, on peut trouver $(y_0, S_0) \in \mathbb{R}^m \times \mathcal{S}^n_{++}$ tel que $\mathcal{A}^*(y_0) + S_0 = C$. En multipliant scalairement cette équation par D, on trouve $\langle S_0, D \rangle \leqslant 0$ et donc $D = 0$ car $S_0 \succ 0$ et $D \succcurlyeq 0$ (proposition 20.1).

Supposons maintenant que $\mathcal{A}$ soit surjective. Alors la solution de (20.31) est clairement également unique en y. Pour la régularité du chemin central, on récrit (20.31) sous la forme d'un système d'équations non linéaires $F(X, y, S, \mu) = 0$, paramétrées par $\mu > 0$. La fonction F est définie par

$$F(X, y, S, \mu) = \begin{pmatrix} \mathcal{A}^*(y) + S - C \\ \mathcal{A}(X) - b \\ -\mu X^{-1} + S \end{pmatrix}.$$

Prendre $XS - \mu I$ comme dernière composante pose des difficultés par la suite, car XS n'est pas symétrique et l'on ne peut pas appliquer $\mathcal{A}$. Comme F est de classe C^∞, la régularité du chemin central sera une simple conséquence du théorème des fonctions implicites (théorème C.14), si l'on montre que

$$F'_{(X,y,S)}(X, y, S, \mu) = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{A}^* & I \\ \mathcal{A} & 0 & 0 \\ \mu X^{-1} \otimes X^{-1} & 0 & I \end{pmatrix}$$

est inversible. Le lemme 20.11 répond à cette question par l'affirmative, puisque $X^{-1} \otimes X^{-1}$ est un opérateur défini positif sur $\mathcal{S}^n$. $\square$

20.4.2 Remarques générales sur les algorithmes

Opérateur de Lyapounov

L'*opérateur de Lyapounov* associé à une matrice $A \in \mathcal{S}^n$ est l'application linéaire $L_A : \mathcal{S}^n \to \mathcal{S}^n$ dont la valeur en $X \in \mathcal{S}^n$ est donnée par

$$L_A(X) = AX + XA.$$

Étant donné $B \in \mathcal{S}^n$, on s'intéresse au système linéaire en $X \in \mathcal{S}^n$ suivant, appelé *système de Lyapounov*

$$AX + XA = B. \tag{20.37}$$

C'est un cas particulier d'*équation de Sylvester*, laquelle est une équation en X de la forme $A_1X + XA_2 = B$. Le lemme ci-dessous donne une condition sur A pour que ce système ait une solution unique dans $\mathcal{S}^n$. On y a noté $\lambda(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A. L'hypothèse $0 \notin \lambda(A) + \lambda(A)$ est donc vérifiée si $A \in \mathcal{S}^n_{++}$.

Lemme 20.13 *Si $A \in \mathcal{S}^n$ vérifie $0 \notin \lambda(A) + \lambda(A)$ et si $B \in \mathcal{S}^n$, alors le système de Lyapounov (20.37) a une solution et une seule dans $\mathcal{S}^n$.*

Démonstration. Il suffit d'exhiber la solution. Soit $A = V\Lambda V^\mathsf{T}$ la factorisation spectrale de A. Le système (20.37) devient alors

$$\Lambda Y + Y\Lambda = C,$$

où $Y = V^\mathsf{T}XV$ et $C = V^\mathsf{T}BV$. En prenant l'élément (i, j), on trouve $(\lambda_i + \lambda_j)Y_{ij} = C_{ij}$, ce qui permet de déterminer Y (car $\lambda_i + \lambda_j \neq 0$ lorsque $0 \notin \lambda(A) + \lambda(A)$) donc $X = VYV^\mathsf{T}$. □

Si A vérifie la condition du lemme, A est inversible. Dans ce cas, la solution du système de Lyapounov avec $B = A^p$, $p \in \mathbb{N}$, se calcule aisément :

$$L_A^{-1}(A^p) = \tfrac{1}{2}A^{p-1}.$$

Mesures du saut de dualité et du centrage

La *mesure du saut de dualité* est la quantité

$$\bar{\mu} \equiv \bar{\mu}(z) := \frac{1}{n}\langle X, S\rangle.$$

On observe que $z \in \mathcal{F}^s$ est sur le chemin central si, et seulement si, $X^{1/2}SX^{1/2} = \bar{\mu}(z)I$. On préfère cette expression à $XS = \bar{\mu}(z)I$, car $X^{1/2}SX^{1/2}$ est symétrique, ce qui n'est pas nécessairement le cas de XS. Ceci conduit à la définition de divers voisinages du chemin central, permettant de mesurer le centrage de $z \in \mathcal{F}^s$.

Pour $\theta \in]0, 1[$, on définit le « *petit voisinage* »

$$V_F(\theta) := \{z \in \mathcal{F}^s : \|X^{1/2}SX^{1/2} - \bar{\mu}(z)I\|_F \leqslant \theta\bar{\mu}(z)\},$$

où $\|\cdot\|_F$ désigne la norme de Frobenius : pour une matrice A symétrique, elle est définie par $\|A\|_F := \langle A, A\rangle^{1/2} = (\sum_{i=1}^n \lambda_i^2(A))^{1/2}$.

Pour $\theta \in]0, 1[$, on définit le « *grand voisinage* »

$$\begin{aligned} V_\infty^-(\theta) &:= \{z \in \mathcal{F}^s : \|X^{1/2}SX^{1/2} - \bar{\mu}(z)I\|_{-\infty} \leqslant \theta\bar{\mu}(z)\} \\ &= \{z \in \mathcal{F}^s : \lambda_{\min}(XS) \geqslant (1-\theta)\bar{\mu}(z)\}, \end{aligned}$$

où $\|\cdot\|_{-\infty}$ est définie en $A \in \mathcal{S}^n$ par $\|A\|_{-\infty} := -\lambda_{\min}(A)$. La dernière identité vient du fait que $z \in \mathcal{F}^s$ est dans $V_\infty^-(\theta)$ si, et seulement si, $\bar{\mu}(z) - \lambda_{\min}(X^{1/2}SX^{1/2}) \leqslant \theta\bar{\mu}(z)$ ou encore si, et seulement si, $(1-\theta)\bar{\mu}(z) \leqslant \lambda_{\min}(XS)$ (on a utilisé le fait que XS, SX et $X^{1/2}SX^{1/2}$ ont le même spectre).

Schéma algorithmique

Il est temps de concrétiser la structure d'un algorithme de points-intérieurs primal-dual de suivi de chemin pour résoudre le problème SDP (20.1). C'est l'objectif du schéma algorithmique ci-dessous, qui laisse cependant beaucoup de points dans le vague : le voisinage du chemin central n'est pas présisé et le système sur lequel est calculé la direction de Newton n'est pas donné.

Schéma algorithmique 20.14 (PI en OSDP, approche primale-duale) On se donne un voisinage du chemin central $V(\theta)$, avec $\theta \in]0,1[$. L'itéré courant z est supposé dans $V(\theta)$. L'itéré suivant $z_+ \in V(\theta)$ s'obtient par les étapes suivantes.

1. Calcul d'une direction de Newton d, pour une valeur de $\mu = \sigma\bar{\mu}(z)$ avec $\sigma \in]0.1[$.
2. Calcul d'un pas $\alpha \in]0,1]$ tel que $z + \alpha d \in V(\theta)$.
3. Nouvel itéré : $z_+ = z + \alpha d$.

Les directions de Newton primales-duales ▲

Si en optimisation linéaire, la direction de Newton primale-duale (18.34) s'impose comme solution des équations (18.3) linéarisées, il n'en va pas de même en optimisation SDP. La difficulté vient du fait que XS n'est pas nécessairement symétrique si l'équation

$$XS = \mu I \tag{20.38}$$

n'est pas vérifiée par l'itéré courant (ce qui est bien le cas, on le verra), si bien que le système (20.31) a plus d'équations que d'inconnues. D'ailleurs, si le système (20.31) linéarisé a une solution (d_X, d_y, d_S), la matrice d_S sera symétrique par la première équation linéarisée (car $d_S = C - \mathcal{A}^*(y+d_y) - S \in \mathcal{S}^n$), mais on connait des exemples qui dans lesquels la troisième équation linéarisée (à savoir $d_X\, S + X\, d_S = \mu I - XS$) peut avoir une solution d_X non symétrique [395]. La question centrale est donc de savoir comment linéariser cette équation.

Une première possibilité serait de prendre comme troisième équation

$$-\mu X^{-1} + S = 0,$$

comme on l'a fait dans la démonstration de la proposition 20.12. On retrouve alors la méthode primale : la direction de Newton est identique à celle que l'on aurait en appliquant l'algorithme de Newton sur (P_μ). Des algorithmes utilisant cette direction ont été proposés, mais uniquement avec de petits déplacements. En pratique, les pas qu'elle autorise ne sont pas aussi grands que ceux acceptables par les méthodes primales-duales que nous considérons plus loin, ce qui ralentit la convergence.

Les algorithmes primaux-duaux cherchent à symétriser l'équation (20.38), sans utiliser d'inverse de matrice. La première approche de ce type est due à Alizadeh, Haeberly et Overton [9] et la direction de Newton qu'elle calcule porte le nom de *direction d'AHO*. La dernière équation est dans un premier temps symétrisée[1],

$$\frac{1}{2}(XS + SX) = \mu I,$$

et ensuite linéarisée :

$$\frac{1}{2}(Sd_X + d_X S + Xd_S + d_S X) = \mu I - \frac{1}{2}(XS + SX). \tag{20.39}$$

Le membre de gauche est de la forme $\mathcal{P}d_X + \mathcal{Q}d_S$ avec $\mathcal{P} = S \otimes I$ et $\mathcal{Q} = X \otimes I$. Malheureusement ce système peut être mal défini en certain point de $\mathcal{F}^s$ [590] (il est cependant bien défini dans un petit voisinage du chemin central [432]).

Une approche plus générale consiste à procéder en trois étapes.

1) *Transformation par similitude.* On se donne une matrice R inversible, dépendant de X et S, et l'on remplace l'équation (20.38) par l'équation similaire

$$RXSR^{-1} = \mu I.$$

2) *Symétrisation.* L'équation précédente devient

$$\frac{1}{2}(RXSR^{-1} + R^{-\mathsf{T}}SXR^{\mathsf{T}}) = \mu I.$$

Si l'on introduit l'opérateur linéaire de symétrisation $\mathcal{S}_R : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathcal{S}^n$ défini en $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ par

$$\mathcal{S}_R(U) = \frac{1}{2}(RUR^{-1} + R^{-\mathsf{T}}U^{\mathsf{T}}R^{\mathsf{T}}),$$

l'équation symétrisée précédente s'écrit

$$\mathcal{S}_R(XS) = \mu I.$$

3) *Pseudo-linéarisation.* On linéarise l'équation précédente, sans linéariser R (qui dépend pourtant de (X, S)) :

$$\mathcal{S}_R(d_X S + Xd_S) = \mu I - \mathcal{S}_R(XS). \tag{20.40}$$

Cette procédure en trois étapes conduit à ce que l'on appelle la *famille de directions de MZ* (Monteiro et Zhang).

Que prendre pour matrice R ? Dans les trois propositions suivantes, qui sont les plus implémentées, R est choisi de telle sorte que $RXSR^{-1}$ soit symétrique.

- *Direction de HKM primale* [309, 361, 428] : $R = S^{1/2}$. Par ce choix, (20.40) devient

$$\boxed{d_X + \tfrac{1}{2}\left(Xd_S S^{-1} + S^{-1}d_S X\right) = \mu S^{-1} - X.} \tag{20.41}$$

  Ceci correspond à $\mathcal{P} = \mathrm{I}_{\mathcal{S}^n}$ et $\mathcal{Q} = X \otimes S^{-1}$ dans (20.34).

[1] L'opération $\circ : (X, S) \in \mathcal{S}^n \mapsto X \circ S := \frac{1}{2}(XS + SX)$ fait de $(\mathcal{S}^n, \circ)$ une algèbre de Jordan [201, 357, 8 ; 1994-2012].

- *Direction de HKM duale* [309, 361, 428] : $R = X^{-1/2}$. Par ce choix, (20.40) devient

$$\boxed{\tfrac{1}{2}\left(X^{-1}d_X S + S d_X X^{-1}\right) + d_S = \mu X^{-1} - S.} \tag{20.42}$$

  Ceci correspond à $\mathcal{P} = X^{-1} \otimes S$ et $\mathcal{Q} = \mathrm{I}_{\mathcal{S}^n}$ dans (20.34).
- *Direction de NT* [457, 590] : $R = W^{-1/2}$, où W est l'unique matrice symétrique définie positive telle que $WSW = X$, c'est-à-dire

$$W = X^{1/2}(X^{1/2}SX^{1/2})^{-1/2}X^{1/2} = S^{-1/2}(S^{1/2}XS^{1/2})^{1/2}S^{-1/2}.$$

  Par ce choix, (20.40) devient

$$\boxed{d_X + W d_S W = \mu S^{-1} - X.} \tag{20.43}$$

  Ceci correspond à $\mathcal{P} = \mathrm{I}_{\mathcal{S}^n}$ et $\mathcal{Q} = W \otimes W$ dans (20.34).

Complexité : NT en $O(nL)$ itérations, HKM en $O(n^{3/2}L)$ itérations.

Notes

Les équivalences $(ii) \Leftrightarrow (iv)$ et $(ii') \Leftrightarrow (iv')$ proposition 20.4 sont des expressions équivalentes aux alternatives de Trnovská [595]. Nos présentation et démonstration (laquelle utilisent directement le lemme de Farkas) sont toutefois différentes.

La dualité lagrangienne présentée à la section 20.1.1 remonte à Bellman et Fan [41 ; 1963] qui utilisaient déjà une hypothèse de qualification à la Slater pour garantir l'absence de saut de dualité. Ramana [504, 505 ; 1997] a proposé une théorie de la dualité en optimisation SDP, différente de la dualité lagrangienne ordinaire proposée ici, sans saut de dualité même lorsque $\mathcal{F}^s$ est vide. Cependant, la taille du problème dual le rend moins accessible au calcul.

Ce chapitre doit beaucoup aux revues d'Alizadeh [7 ; 1995], de Vandenberghe et Boyd [603 ; 1996], de Monteiro et Todd [431 ; 2000], de Todd [589 ; 2001] et au livre de Nemirovskii et Nesterov [456 ; 1994]. Les monographies de Saigal, Vandenberghe et Wolkowicz [626 ; 2000], de de Klerk [158 ; 2002] et d'Anjos et Lasserre [15 ; 2012] sont riches en information sur la théorie, l'algorithmique et les applications. Monteiro [429 ; 2003] passe en revue les méthodes récentes de résolution des problèmes d'OSDP, incluant des approches n'utilisant pas la notion de points intérieurs.

Exercices

20.1. *Faces du cône $\mathcal{S}^n_+$*. Pour une partie F de $\mathcal{S}^n$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) F est une face de $\mathcal{S}^n_+$,

(ii) (caractérisation par les matrices de rang 1) $F = \operatorname{cone}\{vv^\mathsf{T} : v \in E\}$, où E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$; dans ce cas,
- $\operatorname{aff} F = \operatorname{vect}\{vv^\mathsf{T} : v \in E\}$,
- $\dim F = d(d+1)/2$ où $d := \dim E$;

(*iii*) (caractérisation par l'image) $F = \{A \in \mathcal{S}^n_+ : \mathcal{R}(A) \subseteq E\}$, où E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$; dans ce cas,
- $\operatorname{aff} F = \{A \in \mathcal{S}^n : \mathcal{R}(A) \subseteq E\}$,
- $\dim F = d(d+1)/2$ où $d := \dim E$;

(*iv*) (caractérisation par le noyau) $F = \{A \in \mathcal{S}^n_+ : E \subseteq \mathcal{N}(A)\}$, où E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$; dans ce cas,
- $\operatorname{aff} F = \{A \in \mathcal{S}^n : E \subseteq \mathcal{N}(A)\}$,
- $\dim F = d(d+1)/2$ où $d := n - \dim E$.

Ce résultat a pour corollaires :

1) toute face F de $\mathcal{S}^n_+$ est exposée : il existe $S \in \mathcal{S}^n$ telle que $F = \arg\min\{\langle S, A\rangle : A \in \mathcal{S}^n_+\}$,
2) si $A \in \mathcal{S}^n_+$, la face engendrée par A s'écrit $F(A) = \{B \in \mathcal{S}^n_+ : \mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{R}(A)\} = \{B \in \mathcal{S}^n_+ : \mathcal{N}(A) \subseteq \mathcal{N}(B)\}$.

20.2. *Dualisation de la contrainte d'appartenance au cône* $\mathcal{S}^n_+$. Montrez que l'on peut retrouver le dual (20.5) en dualisant la contrainte $X \succcurlyeq 0$ de (20.1), plutôt que la contrainte $\mathcal{A}(X) = b$.

20.3. *Point-selle du lagrangien.* Le couple (X, y) est un point-selle du lagrangien ℓ défini en (20.4) sur $\mathcal{S}^n_+ \times \mathbb{R}^m$ si, et seulement si, $X \in \mathcal{F}_{\mathrm{P}}$, $(y, S) \in \mathcal{F}_{\mathrm{D}}$ et $\langle X, S\rangle = 0$ (on a noté $S := C - \mathcal{A}^*(y)$).

20.4. Démontrez le point 2 de la proposition 20.4.

20.5. *Semi-définie positivité et rang.* Pour $X \in \mathcal{S}^n$, on a l'équivalence suivante :

$$X \succcurlyeq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists\, A \in \mathbb{R}^{n\times n} : \ \operatorname{rg}\begin{pmatrix} I_n & A \\ A^\mathsf{T} & X \end{pmatrix} \leqslant n.$$

20.6. *Formulation autoduale.* On suppose que $b \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$. Montrez que l'on peut écrire les problèmes primal et dual de l'optimisation SDP de manière similaire, comme ci-dessous :

$$(P) \quad \begin{cases} \inf\ \langle C, X\rangle \\ X \in D + \mathcal{L}^\perp \\ X \succcurlyeq 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad (D) \quad \begin{cases} \inf\ \langle D, S\rangle \\ S \in C + \mathcal{L} \\ S \succcurlyeq 0, \end{cases}$$

où $D \in \mathcal{S}^n$, $\mathcal{L}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{S}^n$ et $\mathcal{L}^\perp$ son orthogonal dans $\mathcal{S}^n$.

20.7. *Complement de Schur singulier*. Soient $A \in \mathcal{S}^n$, $C \in \mathcal{S}^m$ et $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$. On note $A^\dagger$ le pseudo-inverse de A. Montrez que

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^\mathsf{T} & C \end{pmatrix} \succcurlyeq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad A \succcurlyeq 0,\ \ \mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{R}(A) \ \text{ et } \ C - B^\mathsf{T} A^\dagger B \succcurlyeq 0. \tag{20.44}$$

20.8. *Relaxation de rang du problème tout quadratique*. Montrez que le bidual lagrangien du problème (20.26) est le problème (20.28).

20.9. *Produit tensoriel*. Montrez que l'application de $\mathcal{S}^n \times \mathcal{S}^n \to L(\mathcal{S}^n, \mathcal{S}^n) : (X, Y) \mapsto X \otimes Y$, où $X \otimes Y$ est définie par (20.32), est un produit tensoriel.

20.10. *Fonction asymptotique de* ld. Montrez que ld^∞ est donné par la formule (20.33).