

Optimisation linéaire théorie et algorithmes du simplexe

Curiously, up to 1947 when I first proposed that a model based on linear inequalities be used for planning activities of large-scale enterprises, linear inequality theory had produced only 40 or so papers, in contrast to linear equation theory and the related subjects of linear algebra and approximation, which had produced a vast literature.

G.B. DANTZIG (1914-2005). Origins of the simplex method [154; 1990].

Connaissances supposées. Une grande partie de la section 2.4 nous sera utile, en particulier pour les notions de polyèdre convexe et de [sommet](#), ainsi que pour le résultat d'existence de solution de problème d'optimisation linéaire (théorème 2.20). Les conditions d'optimalité d'un problème d'optimalité linéaire seront directement déduites des conditions de Karush, Kuhn et Tucker (théorème 4.32 et proposition 4.33). Le problème dual d'un problème d'optimisation linéaire s'obtiendra par la dualité min-max (section 14.1).

17.1 Introduction

17.1.1 Le problème à résoudre

Un *problème d'optimisation linéaire* (OL) est un problème d'optimisation dans lequel le critère et les fonctions définissant les contraintes sont linéaires (on devrait dire affines) ; il s'agit donc de minimiser une fonction linéaire sur un polyèdre convexe. Comme nous le verrons, la formulation suivante du problème est tout à fait générale. Il s'agit de trouver la solution $x \in \mathbb{R}^n$ du problème

$$(P_L) \quad \begin{cases} \inf_x c^\top x \\ Ax = b \\ x \geq 0. \end{cases} \quad (17.1)$$

Un problème d'optimisation linéaire écrit de cette manière est dit sous *forme standard*. On appelle *critère* du problème, la fonction linéaire $x \mapsto c^\top x$. Les données dans (P_L) sont deux vecteurs $c \in \mathbb{R}^n$ (appelé *coût* du problème) et $b \in \mathbb{R}^m$ (en général $m \leq n$), et une matrice A de dimension $m \times n$. La contrainte d'inégalité $x \geq 0$ veut dire

que toutes les composantes de x doivent être positives : $x_i \geq 0$ pour tout $i \in [1:n]$. On notera $x > 0$, lorsque toutes les composantes de x seront strictement positives. L'ensemble

$$\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0\}$$

est appelé l'*orthant positif* de \mathbb{R}^n .

On rappelle que l'on dit que le problème (P_L) est *réalisable* si son *ensemble admissible*

$$\mathcal{F}_P := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$$

est non vide. Un point de \mathcal{F}_P est dit *admissible*. On dit que (P_L) est *borné* si la valeur optimale de (P_L) est finie.

Dans ce chapitre, nous allons étudier le problème (P_L) (structure et propriétés) et donner un algorithme pour le résoudre : l'algorithme du simplexe. Les algorithmes de points intérieurs seront décrits et étudiés au chapitre 18. Remarquons déjà que le problème (P_L) n'est « intéressant », c'est-à-dire qu'il mérite une étude approfondie, que par la présence des contraintes d'inégalité. En effet, sans ces contraintes le problème se réduit à deux cas complémentaires triviaux. Si $c \in \mathcal{N}(A)^\perp$, tout point x vérifiant $Ax = b$ est solution. Si $c \notin \mathcal{N}(A)^\perp$, il existe une direction d telle que $Ad = 0$ et $c^\top d < 0$ et donc $c^\top(x + td) \rightarrow -\infty$ lorsque $t \rightarrow +\infty$: si le problème est réalisable (en l'occurrence, il existe un x tel que $Ax = b$), il n'est pas borné.

En ce qui concerne les algorithmes de résolution de (P_L) , on distingue deux classes principales de méthodes.

- Les *méthodes de points-frontière* génèrent des itérés sur la frontière de l'ensemble admissible \mathcal{F}_P . La méthode typique de cette classe est l'*algorithme du simplexe*, introduit par Dantzig en 1947 [153 ; 1951] ; il consiste à faire des déplacements le long des arêtes du polyèdre convexe \mathcal{F}_P ; nous le présenterons et l'étudierons à la section 17.4. Cet algorithme n'est pas polynomial dans le pire des cas, bien qu'il soit polynomial en moyenne et en perturbations moyennées (section 17.4.5).
- Les *méthodes de points intérieurs*, développées à partir des travaux de Karmarkar [346 ; 1984], génèrent des itérés dans l'intérieur relatif de l'ensemble admissible \mathcal{F}_P . Ces méthodes peuvent être polynomiales et sont particulièrement intéressantes lorsqu'il y a beaucoup de contraintes d'inégalité, parce qu'elles ne ressentent pas l'irrégularité du bord de l'ensemble admissible. Nous présenterons et étudierons quelques algorithmes de points intérieurs au chapitre 18.

17.1.2 Formulations canoniques

Un problème d'optimisation linéaire se présente souvent sous l'une des deux formes suivantes : la forme standard (P_L) donnée ci-dessus et la *forme canonique*

$$(P'_L) \quad \begin{cases} \min (c')^\top x \\ A'x \leq b'. \end{cases}$$

Ces deux formulations sont équivalentes dans le sens où le problème (P_L) peut s'écrire sous la forme (P'_L) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min c^T x \\ \begin{pmatrix} A \\ -A \\ -I \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} b \\ -b \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

et inversement, le problème (P'_L) peut s'écrire sous la forme (P_L) en décomposant $x = u - v$, avec $u \geq 0$ et $v \geq 0$, et en introduisant des *variables d'écart* $z \geq 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min (c^T \quad -c^T \quad 0) \begin{pmatrix} u \\ v \\ z \end{pmatrix} \\ A'u - A'v + z = b' \\ u \geq 0, \quad v \geq 0, \quad z \geq 0. \end{array} \right.$$

On a pris l'habitude de décrire et d'étudier les algorithmes de résolution des problèmes d'optimisation linéaire mis sous forme standard (P_L) et c'est ce que nous ferons dans ce chapitre et le suivant. Cependant, il peut être plus avantageux de considérer une autre formulation, en fonction du problème que l'on a à résoudre. D'autre part, les codes d'optimisation linéaire généralistes acceptent le plus souvent des contraintes écrites sous la forme :

$$Ax = b \quad \text{et} \quad l \leq Bx \leq u,$$

où les matrices A et B et les vecteurs b , l et u ont des dimensions appropriées. Il faut donc parfois adapter les algorithmes au cadre que l'on considère ; ceci se fait en général sans difficulté.

17.1.3 Exemples : problèmes d'optimisation dans des réseaux

Un *réseau* n'est pas autre chose qu'un *graphe* (orienté ou non), c'est-à-dire une collection de nœuds et d'arcs qui relient ces nœuds. Disons qu'il y a m nœuds, indicés par $i = 1, \dots, m$, et n arcs, indicés par $j = 1, \dots, n$. Ces derniers peuvent aussi être spécifiés par des couples (ordonnés ou non, suivant que le graphe est ou n'est pas orienté) formés des nœuds qu'ils relient : l'arc (i_1, i_2) relie les nœuds i_1 et i_2 .

Dans la discussion qui suit, le réseau est supposé être utilisé comme support à l'acheminement d'un produit (eau, gaz, électricité, voitures, trains, avions, télécommunications, messages internet, quantité abstraite, *etc*). La quantité de produit qui transite par l'arc j est notée x_j . Il est normal de supposer que c'est une grandeur positive. L'équilibre du réseau s'exprime en écrivant que la quantité de produit qui sort du nœud i est égale à la quantité qui y entre plus la quantité b_i qui y est produite (« loi de Kirchhoff »). Pour tout i , on doit avoir

$$\sum_{\substack{j: \text{arc sortant} \\ \text{du nœud } i}} x_j = \sum_{\substack{j: \text{arc entrant} \\ \text{du nœud } i}} x_j + b_i. \quad (17.2)$$

La quantité b_i produite au nœud i peut représenter ce qui y est apporté (auquel cas $b_i > 0$) ou ce qui y est consommé ou demandé (auquel cas $b_i < 0$). Les équations précédentes s'écrivent sous forme matricielle :

$$Ax = b \quad \text{et} \quad x \geq 0, \quad (17.3)$$

où la matrice A est appelée la *matrice d'incidence du réseau*. Cette matrice peut avoir des dimensions considérables en pratique, mais elle est très creuse puisqu'elle n'a que deux éléments non nuls par colonne. En effet, au vu de (17.2), la colonne j associée à l'arc j contient $A_{ij} = +1$ si i est le nœud d'origine de l'arc j , $A_{ij} = -1$ si i est le nœud de destination de l'arc j et $A_{ij} = 0$ dans les autres cas. En particulier, la somme des lignes de A est nulle, ce qui implique que A n'est pas surjective. Ceci peut poser des difficultés algorithmiques et requiert au moins une condition de compatibilité sur b , à savoir $b \in \mathcal{R}(A)$, ce qui conduit à

$$\sum_{i=1}^m b_i = 0. \quad (17.4)$$

On montre cependant que A est de rang $m - 1$ lorsque le graphe associé au réseau est *connexe*, ce qui veut dire que deux nœuds distincts i et i' peuvent être reliés par un chemin (une suite d'arcs $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_{p-1}, i_p)$, avec $i_1 = i$ et $i_p = i'$); voir [57] par exemple.

Un exemple de problème d'optimisation linéaire classique dans les réseaux est le *problème du transport à coût minimal*. On cherche à acheminer des produits identiques depuis certains *nœuds d'origine* (disons pour $i \in O$) jusqu'à des *nœuds de destination* (disons pour $i \in D$, avec $O \cap D = \emptyset$). Ceci s'exprime par le positionnement des composantes de b aux valeurs désirées : $b_O > 0$, $b_D < 0$ et $b_i = 0$ si $i \notin O \cup D$, tout en respectant (17.4). D'autre part, en supposant que le coût de transport sur chaque arc est linéaire en x_j (coût c_j par unité transportée), le coût total du transport sera

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j = c^T x.$$

C'est la quantité que l'on cherche à minimiser. On reconnaît dans la minimisation de ce critère sous les contraintes de réseau (17.3), le problème d'optimisation linéaire sous forme standard (P_L).

Un autre exemple de problème d'optimisation linéaire classique est celui du *plus court chemin dans un graphe*. C'est un cas particulier du problème précédent : $b_{i_0} = +1$ au nœud de départ i_0 , $b_{i_1} = -1$ au nœud d'arrivée i_1 et les autres b_i sont nuls, tandis que $c_j > 0$ donne la longueur du chemin représenté par l'arc j . Si \bar{x} est la solution du problème, $\bar{x}_j = 0$ signifie que l'on ne passe pas par l'arc j et $\bar{x}_j = 1$ signifie que l'on y passe. On peut avoir des valeurs entre 0 et 1 si le problème a plusieurs solutions.

17.2 Étude du problème

17.2.1 Structure de l'ensemble admissible

L'ensemble admissible \mathcal{F}_P d'un problème d'optimisation linéaire est un polyèdre convexe (voir la section 2.4), exprimé dans une représentation duale. Les développements théoriques et algorithmiques en optimisation linéaire se font en général sur la forme suivante de l'ensemble admissible

$$\mathcal{F}_p = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\},$$

où A est $m \times n$ et $b \in \mathbb{R}^m$. On supposera alors toujours que

A est surjective.

Théoriquement, ce n'est pas une hypothèse restrictive (en pratique, c'est plus délicat). En effet si $b \notin \mathcal{R}(A)$, l'ensemble admissible est vide et le problème est mal posé. Sinon, on peut toujours éliminer les équations redondantes de $Ax = b$ pour se ramener à une matrice surjective (si des lignes de A sont linéairement dépendantes [$A^T y = 0$ pour un $y \neq 0$], les éléments de b obéissent à la même dépendance [$b^T y = 0$]).

On adopte une notation déjà utilisée. Si $x \in \mathbb{R}_+^n$, on écrit

$$I^+(x) := \{i : x_i > 0\} \quad \text{et} \quad I^0(x) := \{i : x_i = 0\}.$$

On rappelle que $x \in \mathcal{F}_p$ est un **sommet** de \mathcal{F}_p si la sous-matrice $A_{:I^+(x)}$, formée des colonnes de A avec indices dans $I^+(x)$, est injective (proposition 2.21). On a donc nécessairement $|I^+(x)| \leq m$, et on peut bien sûr avoir $|I^+(x)| < m$.

Définition 17.1 On dit qu'un sommet $x \in \mathcal{F}_p$ est *dégénéré* si $|I^+(x)| < m$ et qu'il est *non dégénéré* si $|I^+(x)| = m$. □

Un concept jouant un rôle-clé dans l'algorithme du simplexe (section 17.4) est celui de base d'indices.

Définitions 17.2 On appelle *base d'indices* un ensemble B de m indices pris dans $[1 : n]$ tels que la sous-matrice $A_{:B}$ formée des m colonnes correspondantes de A soit inversible.

Si $x \in \mathbb{R}^n$, les composantes x_i avec $i \in B$ sont alors dites *basiques* et celles avec $i \notin B$ sont dites *non basiques*.

On dit qu'une base d'indices B est *associée* à un sommet $x \in \mathcal{F}_p$ si $I^+(x) \subseteq B$. □

À une base d'indices B on associe l'ensemble d'indices complémentaire $N = [1 : n] \setminus B$. Après permutations éventuelles des colonnes, on pourra donc écrire

$$A = (A_{:B} \quad A_{:N}),$$

avec $A_{:B}$ inversible. On note (x_B, x_N) la partition correspondante d'un point $x \in \mathbb{R}^n$.

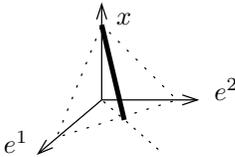
Un sommet non dégénéré n'a, bien sûr, qu'une seule base d'indices qui lui est associée, à savoir $I^+(x)$. Si x est un sommet dégénéré, le nombre de bases d'indices qui lui sont associées peut être très grand, bien que majoré par

$$\binom{n - |I^+(x)|}{m - |I^+(x)|} = \binom{n - |I^+(x)|}{n - m}.$$

Exemples 17.3 Dans \mathbb{R}^2 , $x = 0$ est un sommet dégénéré de l'ensemble défini par

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x \geq 0. \end{cases} \quad \begin{array}{c} \nearrow \\ \uparrow \\ \leftarrow x \end{array}$$

Dans \mathbb{R}^3 , le point $x = (0, 0, 1)$ est un sommet dégénéré de l'ensemble défini par

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x \geq 0. \end{cases}$$


□

On connaît des problèmes d'optimisation linéaire pratiques dans lesquels l'ensemble admissible a un nombre factoriel de sommets et chaque sommet a un nombre exponentiel de bases d'indices [34; 1972]. On a donc imaginé des techniques capables de faire face à cette dégénérescence.

L'optimisation linéaire a son propre jargon, que l'on doit reconnaître si l'on veut comprendre les ouvrages et articles écrits par les spécialistes de la discipline, en particulier les contributions fondatrices. Certains termes, chargés d'histoire, apportent pourtant d'inutiles complications et confusions ; nous les éviterons. Il en va ainsi de *solution* pour désigner un point (pour nous, une *solution* sera une solution du problème d'optimisation linéaire), de *solution admissible* pour désigner un point admissible ou encore de *solution basique admissible* pour désigner un **sommet** de \mathcal{F}_p . Plus d'un demi-siècle après l'introduction de cette terminologie compliquée, nous nous sommes permis de la simplifier et de l'accorder avec celle utilisée en analyse convexe et en optimisation non linéaire.

Jargon de l'optimisation linéaire	Terminologie adoptée
base	base d'indices
solution	point
solution admissible	point admissible
solution basique	—
solution basique admissible	sommet
solution admissible optimale	solution
solution basique admissible optimale	solution-sommet

On trouvera dans le lexique en fin d'ouvrage la terminologie anglo-saxonne dont sont issus les termes de la première colonne.

17.2.2 Existence de solution et conditions d'optimalité

On considère le problème (P_L) sous la forme standard

$$(P_L) \quad \begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0. \end{cases}$$

On note

$$\inf(P_L) := \inf_{x \in \mathcal{F}_p} c^T x$$

la valeur optimale de (P_L) .

Pour le problème (P_L) , l'existence de solution ne résulte pas directement du théorème sur la minimisation de fonctions continues sur un compact (théorème 1.2). En effet, l'ensemble admissible \mathcal{F}_P n'est pas nécessairement compact. De plus, $x \mapsto c^\top x$ ne tend pas nécessairement vers $+\infty$ lorsque $\|x\| \rightarrow \infty$ dans \mathcal{F}_P (sauf si l'ensemble des solutions est borné et si \mathcal{F}_P n'est pas borné, voir l'exercice 17.4). Il est donc nécessaire de donner une démonstration spécifique. Une possibilité est d'utiliser la remarque 2.19 comme dans la démonstration de la proposition 2.20. Nous rappelons le résultat ci-dessous.

Théorème 17.4 (existence de solution) *Le problème (P_L) a une solution si, et seulement si, il est réalisable ($\mathcal{F}_P \neq \emptyset$) et borné ($\inf f > -\infty$).*

L'algorithme du simplexe repose sur le résultat suivant. Cet algorithme va rechercher en effet une solution-sommet, dont l'existence est assurée par la proposition qui suit. Ce résultat dépend fortement de la représentation de l'ensemble admissible adoptée dans (P_L) et ne serait plus vrai pour un ensemble admissible de la forme $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$.

Proposition 17.5 (existence de solution-sommet) *Si le problème (P_L) a une solution, alors il a une solution en un sommet de \mathcal{F}_P .*

DÉMONSTRATION. L'ensemble des solutions de (P_L) ,

$$\text{Sol}(P_L) = \{x \in \mathbb{R}^n : c^\top x = \text{val}(P_L), Ax = b, x \geq 0\},$$

est un polyèdre convexe écrit sous forme standard. Il a donc un sommet (proposition 2.21), disons \hat{x} . D'autre part, $\text{Sol}(P_L)$ est une face de \mathcal{F}_P (exercice 2.11). Donc son sommet \hat{x} est aussi un sommet de \mathcal{F}_P (exercice 2.16, point 2). □

Voici le résultat donnant les conditions d'optimalité du problème (P_L) .

Proposition 17.6 (conditions d'optimalité) *Le point x est solution de (P_L) si, et seulement si, il existe $y \in \mathbb{R}^m$ et $s \in \mathbb{R}^n$ tels que*

$$\begin{cases} (a) & A^\top y + s = c, \quad s \geq 0 \\ (b) & Ax = b, \quad x \geq 0 \\ (c) & x^\top s = 0. \end{cases} \tag{17.5}$$

DÉMONSTRATION. Ce sont les conditions de KKT qui sont nécessaires (on utilise ici le fait que les contraintes de (P_L) sont qualifiées, car affines) et suffisantes (car le problème (P_L) est convexe). On les obtient en introduisant le *lagrangien*

$$\ell(x, y, s) = c^\top x - y^\top (Ax - b) - x^\top s. \tag{17.6}$$
□

La nécessité des conditions (17.5) peut aussi se voir en observant que, par optimalité de x , le critère augmente le long des directions d tangentes en x à l'ensemble admissible (voir le théorème 4.6), ce qui s'exprime par

$$c \in \{d : Ad = 0, d_I \geq 0\}^+, \quad \text{avec } I = \{i : x_i = 0\},$$

et en utilisant le **lemme de Farkas**. D'autre part, le fait que les conditions (17.5) soient suffisantes pour impliquer l'optimalité de x peut aussi se montrer directement : pour tout $x' \in \mathcal{F}_P$, on a

$$\begin{aligned} c^\top x &= s^\top x + y^\top Ax && \text{[par (a)]} \\ &= y^\top b && \text{[par (b) et (c)]} \\ &\leq s^\top x' + y^\top Ax' && \text{[par } Ax' = b, x' \geq 0 \text{ et } s \geq 0] \\ &= c^\top x' && \text{[par (a)].} \end{aligned}$$

Le couple (y, s) donné par la proposition précédente est appelé *solution duale* du problème linéaire (P_L) et x est alors appelé *solution primale*. La variable s est aussi appelée *variable d'écart duale*, car elle joue le rôle de variable d'écart dans la relation $A^\top y \leq c$, qui est une autre façon d'écrire l'équation (17.5)(a). On note $\mathcal{S}_P \subseteq \mathbb{R}^n$ l'ensemble des solutions primales et $\mathcal{S}_D \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ l'ensemble des solutions duales. On note aussi \mathcal{S}_{PD} l'ensemble des triplets (x, y, s) qui sont solutions du système d'optimalité (17.5). Malgré la non-linéarité de (17.5)(c), l'ensemble \mathcal{S}_{PD} est un convexe, comme le montre la proposition suivante.

Proposition 17.7 (produit cartésien des solutions) *On a*

$$\mathcal{S}_{PD} = \mathcal{S}_P \times \mathcal{S}_D,$$

en particulier, \mathcal{S}_{PD} est un polyèdre convexe. Autrement dit, si (x^1, y^1, s^1) et (x^2, y^2, s^2) sont des solutions primales-duales alors (x^1, y^2, s^2) et (x^2, y^1, s^1) le sont aussi.

DÉMONSTRATION. Par hypothèse, on a

$$\begin{cases} A^\top y^1 + s^1 = c, & s^1 \geq 0 \\ Ax^1 = b, & x^1 \geq 0 \\ (x^1)^\top s^1 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} A^\top y^2 + s^2 = c, & s^2 \geq 0 \\ Ax^2 = b, & x^2 \geq 0 \\ (x^2)^\top s^2 = 0. \end{cases}$$

On voit qu'il suffit de montrer que $(x^1)^\top s^2 = 0$ et $(x^2)^\top s^1 = 0$. Comme $c^\top x^1 = c^\top x^2$, on a

$$\begin{aligned} (x^1)^\top s^2 &= (x^1)^\top (c - A^\top y^2) \\ &= (x^1)^\top c - b^\top y^2 \\ &= (x^2)^\top c - (Ax^2)^\top y^2 \\ &= (x^2)^\top (c - A^\top y^2) \\ &= (x^2)^\top s^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

De même pour $(x^2)^\top s^1 = 0$.

On note finalement que, comme ensembles de solutions de problèmes d'optimisation linéaires, \mathcal{S}_p et \mathcal{S}_d sont des polyèdres convexes, si bien qu'il en est de même de \mathcal{S}_{PD} (point 8 de l'exercice 2.20). \square

On montrera plus loin (en section 17.3) que les couples formés des solutions primales et duales sont les points-selles du lagrangien ℓ sur $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+^n)$. Le résultat précédent peut donc aussi se déduire de cette observation puisque l'ensemble des points-selles est le produit cartésien de l'ensemble des solutions primales par l'ensemble des solutions duales (corollaire 14.4).

L'identité (17.5)(c) forme ce que l'on appelle les *conditions de complémentarité*. Comme $x \geq 0$ et $s \geq 0$, elle s'écrit de manière équivalente

$$\forall i \in [1:n], \quad x_i > 0 \implies s_i = 0,$$

qui exprime que si la i -ième contrainte d'inégalité n'est pas active, le multiplicateur associé est nul. On dit qu'une solution primale-duale (x, y, s) de (P_L) est *strictement complémentaire* si

$$\forall i \in [1:n], \quad x_i > 0 \iff s_i = 0.$$

Toutes les solutions ne sont pas nécessairement strictement complémentaires. Le résultat suivant montre cependant qu'en optimisation linéaire on peut toujours trouver une solution strictement complémentaire.

Introduisons deux ensembles d'indices \mathfrak{B} et \mathfrak{N} , qu'il faudra se garder de confondre avec la *base d'indices* B et son complémentaire N dans $[1:n]$, introduits au début de ce chapitre :

$$\begin{aligned} \mathfrak{B} &:= \{i \in [1:n] : \exists x \in \mathcal{S}_p \text{ vérifiant } x_i > 0\} \\ \mathfrak{N} &:= \{i \in [1:n] : \exists (y, s) \in \mathcal{S}_d \text{ vérifiant } s_i > 0\}. \end{aligned}$$

Par les conditions de complémentarité et du fait que l'ensemble des solutions primales-duales est un produit cartésien (proposition 17.7), ces deux ensembles n'ont pas d'indice commun : $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{N} = \emptyset$. En effet, si $i \in \mathfrak{B}$, alors $s_i = 0$ pour toute solution duale (y, s) , et donc $i \notin \mathfrak{N}$. Compte tenu de cette observation, montrer qu'il existe une solution primale-duale strictement complémentaire revient à montrer que $(\mathfrak{B}, \mathfrak{N})$ forme une partition de $[1:n]$.

Proposition 17.8 (existence d'une solution strictement complémentaire) *Si le problème (P_L) a une solution, alors il a une solution primale-duale strictement complémentaire, et donc*

$$\mathfrak{B} \cap \mathfrak{N} = \emptyset \quad \text{et} \quad \mathfrak{B} \cup \mathfrak{N} = [1:n]. \tag{17.6}$$

DÉMONSTRATION. Construisons d'abord la solution primale. Pour que celle-ci ait le plus grand nombre de composantes non nulles possible, on l'écrit comme combinaison convexe de solutions ayant chacune au moins une composante strictement positive :

par définition de \mathfrak{B} , on sait que pour tout $i \in \mathfrak{B}$, on peut choisir une solution \bar{x}^i de (P_L) avec $\bar{x}_i^i > 0$. On prend

$$\bar{x} = \frac{1}{|\mathfrak{B}|} \sum_{i \in \mathfrak{B}} \bar{x}^i,$$

où $|\mathfrak{B}|$ désigne le nombre d'éléments de \mathfrak{B} . C'est aussi une solution (c'est une combinaison convexe de solutions d'un problème convexe, ou on vérifie directement que $c^\top \bar{x} = \inf f$, $A\bar{x} = b$, $\bar{x} \geq 0$) et elle vérifie $\bar{x}_{\mathfrak{B}} > 0$ (c'est une solution avec le moins de contraintes actives possible, située dans l'intérieur relatif de la face optimale, voir l'exercice 17.7). D'après les conditions d'optimalité de la proposition 17.6, il existe $(y_0, s_0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ tel que

$$\begin{cases} A^\top y_0 + s_0 = c, \\ 0 \leq s_0 \perp \bar{x} \geq 0. \end{cases} \quad (17.7)$$

D'après la proposition 17.7, il reste à trouver une solution duale (\bar{y}, \bar{s}) avec $\bar{s}_i > 0$ pour $i \notin \mathfrak{B}$. Dans ce but, on considère le problème d'optimisation linéaire suivant

$$\begin{cases} \min_x -e_{\mathfrak{B}^c}^\top x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \\ c^\top x \leq \text{val}(P_L), \end{cases}$$

où l'on a noté $e_{\mathfrak{B}^c}$ le vecteur de \mathbb{R}^n dont toutes composantes avec indices dans le complémentaire \mathfrak{B}^c de \mathfrak{B} valent 1 et les autres composantes sont nulles. L'ensemble admissible de ce problème est formé des solutions de (P_L) et par définition de \mathfrak{B} , sa valeur optimale est nulle. Alors \bar{x} est solution de ce problème et l'on peut trouver des multiplicateurs optimaux $(y_1, s_1, t_1) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{cases} A^\top y_1 + s_1 + e_{\mathfrak{B}^c} = t_1 c \\ 0 \leq s_1 \perp \bar{x} \geq 0 \\ 0 \leq t_1 \perp (\text{val}(P_L) - c^\top \bar{x}) \geq 0. \end{cases}$$

Si t_1 n'est pas nul, on peut conclure avec la solution duale $(y_1, s_1 + e_{\mathfrak{B}^c})/t_1$, mais rien ne garantit que $t_1 \neq 0$. On combine alors cette solution duale avec celle donnée en (17.7) :

$$\bar{y} := \frac{1}{1+t_1}(y_0 + y_1) \quad \text{et} \quad \bar{s} := \frac{1}{1+t_1}(s_0 + s_1 + e_{\mathfrak{B}^c}),$$

qui est clairement une solution duale de (P_L) . De plus, comme $s_0 \geq 0$ et $s_1 \geq 0$, on a $\bar{s}_{\mathfrak{B}^c} > 0$. \square

En réalité, comme l'exercice 17.7 demande de le montrer, l'ensemble $\mathcal{S}_{\text{PD}}^{\text{sc}}$ des solutions primales-duales strictement complémentaires se confond avec l'intérieur relatif de l'ensemble des solutions primales-duales :

$$\mathcal{S}_{\text{PD}}^{\text{sc}} = \mathcal{S}_{\text{PD}}^\circ.$$

Les ensembles d'indices \mathfrak{B} et \mathfrak{N} permettent de donner une description simple de l'ensemble \mathcal{S}_p des solutions primales et l'ensemble \mathcal{S}_d des solutions duales de (P_L) . Pour une raison qui apparaîtra claire plus loin, on note

$$\mathcal{F}_D := \{(y, s) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n : A^\top y + s = c, s \geq 0\}.$$

Proposition 17.9 (faces optimales primale et duale) *Si (P_L) a une solution, alors l'ensemble de ses solutions primales est la face exposée de \mathcal{F}_P définie par*

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_P &= \{x \in \mathcal{F}_P : x_{\mathfrak{N}} = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x_{\mathfrak{B}} \geq 0, x_{\mathfrak{N}} = 0\} \end{aligned} \quad (17.8a)$$

et l'ensemble de ses solutions duales est la face exposée de \mathcal{F}_D définie par

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_D &= \{(y, s) \in \mathcal{F}_D : s_{\mathfrak{B}} = 0\} \\ &= \{(y, s) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n : A^\top y + s = c, s_{\mathfrak{B}} = 0, s_{\mathfrak{N}} \geq 0\}. \end{aligned} \quad (17.8b)$$

DÉMONSTRATION. Le fait que \mathcal{S}_P soit une face exposée de l'ensemble convexe \mathcal{F}_P provient de l'expression $\mathcal{S}_P = \{x \in \mathcal{F}_P : c^\top x \leq \text{val}(P_L)\}$ de l'ensemble des solutions primales.

Démontrons à présent la première égalité dans (17.8a) (la seconde se déduit facilement de la première et de (17.6)). Si $x \in \mathcal{S}_P$, alors $x \in \mathcal{F}_P$ et $x_{\mathfrak{N}} = 0$ (par la proposition 17.8 et la définition de \mathfrak{B}). Inversement, si $x \in \mathcal{F}_P$ et $x_{\mathfrak{N}} = 0$, alors en prenant une solution duale (y, s) arbitraire (elle existe car (P_L) a une solution), le triplet (x, y, s) vérifie les conditions d'optimalité (17.5) (car $s_{\mathfrak{B}} = 0$ d'après la proposition 17.8 et la complémentarité); donc x est solution de (P_L) .

Les affirmations concernant \mathcal{S}_D se démontrent de la même manière. \square

L'exercice 17.7 demande également de démontrer que l'intérieur relatif de \mathcal{S}_P est donné par

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_P^\circ &= \{x \in \mathcal{S}_P : x_{\mathfrak{B}} > 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x_{\mathfrak{B}} > 0, x_{\mathfrak{N}} = 0\} \end{aligned} \quad (17.9a)$$

et l'intérieur relatif de \mathcal{S}_D est donné par

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_D^\circ &= \{(y, s) \in \mathcal{S}_D : s_{\mathfrak{N}} > 0\} \\ &= \{(y, s) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n : A^\top y + s = c, s_{\mathfrak{B}} = 0, s_{\mathfrak{N}} > 0\}. \end{aligned} \quad (17.9b)$$

17.3 Dualité

17.3.1 Dualité en optimisation linéaire

Nous ferons référence ici aux notions vues à la section 14.1. On part du problème d'optimisation linéaire

$$(P_L) \quad \begin{cases} \min c^\top x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

et on introduit la fonction de couplage

$$\varphi(x, y) = c^\top x - y^\top (Ax - b),$$

par laquelle on n'a dualisé que les contraintes d'égalité. On a

$$\inf_{x \geq 0} \sup_y \varphi(x, y) = \inf_{x \geq 0} \begin{cases} c^\top x & \text{si } Ax = b \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

On retrouve donc le problème (P_L) , si l'on adopte la convention que la valeur minimale de (P_L) vaut $+\infty$ lorsque l'ensemble admissible est vide.

Alors, le problème dual de (P_L) pour la fonction φ ci-dessus s'écrit

$$\sup_y \inf_{x \geq 0} \left((c - A^\top y)^\top x + b^\top y \right) = \sup_y \begin{cases} b^\top y & \text{si } A^\top y \leq c \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

On trouve finalement comme problème dual

$$(D_L) \quad \begin{cases} \max b^\top y \\ A^\top y \leq c, \end{cases}$$

si l'on prend la convention que la valeur maximale dans (D_L) vaut $-\infty$ lorsque l'ensemble admissible de (D_L) est vide. C'est aussi un problème d'optimisation linéaire.

On peut obtenir un problème dual de (P_L) en dualisant également la contrainte $x \geq 0$, c'est-à-dire en utilisant le lagrangien $\ell(x, y, s) = c^\top x - y^\top (Ax - b) - x^\top s$ comme fonction de couplage (il faut alors imposer $s \geq 0$ dans la dualité). On obtient alors comme problème dual

$$\begin{cases} \max b^\top y \\ A^\top y + s = c \\ s \geq 0, \end{cases}$$

qui est équivalent à (D_L) .

Remarquons enfin que les conditions d'optimalité de (D_L) sont aussi celles de (P_L) et que le dual du dual est le primal.

On dit que (y, s) est admissible pour le problème dual (D_L) , si $A^\top y + s = c$ et si $s \geq 0$. On note

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_p &:= \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}, \\ \mathcal{F}_d &:= \{(y, s) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n : A^\top y + s = c, s \geq 0\} \end{aligned}$$

les ensembles admissibles de (P_L) et de (D_L) respectivement.

Appliquons à présent les résultats obtenus dans le cadre général au problème d'optimisation linéaire (P_L) . De la proposition 14.2, on obtient le résultat suivant.

Proposition 17.10 (dualité faible en optimisation linéaire) *On a*

$$\sup_{A^\top y \leq c} b^\top y \leq \inf_{\substack{Ax=b \\ x \geq 0}} c^\top x. \tag{17.10}$$

Ce résultat s'obtient également facilement par calcul. En effet, si $x \in \mathcal{F}_P$ et si $(y, s) \in \mathcal{F}_D$, la différence entre la valeur du critère primal et celle du critère dual est positive et donnée par la formule

$$\boxed{c^\top x - b^\top y = x^\top s \geq 0.} \quad (17.11)$$

On a en effet, $c^\top x = (A^\top y + s)^\top x = b^\top y + x^\top s$. La positivité de $x^\top s$ conduit à l'inégalité de dualité faible (17.10).

Théorème 17.11 (dualité forte en optimisation linéaire) *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) (P_L) et (D_L) sont réalisables,
- (ii) (P_L) a une solution,
- (iii) (D_L) a une solution.

Lorsque ces propriétés ont lieu il n'y a pas de saut de dualité, c'est-à-dire que l'on a égalité en (17.10).

DÉMONSTRATION. [(i) \Rightarrow (ii)] Si (i) a lieu, l'inégalité de dualité faible (17.10) montre que (P_L) est réalisable et borné. Ce problème a donc une solution (théorème 17.4).

[(ii) \Rightarrow (iii)] Les conditions d'optimalité (17.5), qui ont lieu si (P_L) a une solution, sont aussi celles de (D_L) , qui a donc aussi une solution.

[(iii) \Rightarrow (i)] Les conditions d'optimalité (17.5) de (D_L) montrent que (P_L) est réalisable.

Supposons que \bar{x} soit une solution de (P_L) . Alors il existe un couple (\bar{y}, \bar{s}) tel que les conditions d'optimalité (17.5) soient vérifiées. Comme $\bar{x} \in \mathcal{F}_P$, $(\bar{y}, \bar{s}) \in \mathcal{F}_D$ et $\bar{x}^\top \bar{s} = 0$, (17.11) montre qu'il n'y a pas de saut de dualité. \square

D'après ce théorème, si $\text{val}(P_L) \in \mathbb{R}$ ou si $\text{val}(D_L) \in \mathbb{R}$, il n'y a pas de saut de dualité. Mais on peut très bien avoir

- $\text{val}(D_L) = \text{val}(P_L) = -\infty$ (pas de saut de dualité) : $A = 0$, $b = 0$ et $c < 0$,
- $\text{val}(D_L) = \text{val}(P_L) = +\infty$ (pas de saut de dualité) : $A = 0$, $b \neq 0$ et $c = 0$,
- $\text{val}(D_L) = -\infty$ et $\text{val}(P_L) = +\infty$ (saut de dualité infini) : $A = 0$, $b \neq 0$ et $c < 0$.

Dès lors, pour qu'il n'y ait pas de saut de dualité il faut et il suffit que (P_L) ou (D_L) soit réalisable.

Corollaire 17.12 *Il n'y a pas de saut de dualité si, et seulement si, (P_L) ou (D_L) est réalisable.*

DÉMONSTRATION. Supposons en effet que $\text{val}(P_L) = \text{val}(D_L)$. Si ces valeurs sont réelles, alors (P_L) et (D_L) sont réalisables. Si ces valeurs égalent $-\infty$ [resp. $+\infty$], seul (P_L) [resp. (D_L)] est réalisable.

Réciproquement, supposons que (P_L) soit réalisable (le raisonnement est le même si c'est (D_L) qui est réalisable). Si (P_L) est aussi borné, il a une solution et le résultat se déduit du théorème. Si (P_L) n'est pas borné, alors $\text{val}(P_L) = -\infty$, donc $\text{val}(D_L) = -\infty$ par dualité faible et il n'y a pas de saut de dualité. \square

Le point (i) est souvent un moyen commode de montrer qu'un problème d'optimisation linéaire a une solution : on montre qu'il est réalisable et que son dual l'est également. Ce théorème permet de retrouver le **lemme de Farkas** (voir l'exercice 17.8). Quelques conséquences de ce théorème sont données à l'exercice 17.10.

17.3.2 Une relation entre le primal et le dual

Le théorème de dualité forte a montré que les propriétés des problèmes primal et dual sont très liées. Dans cette section nous donnons d'autres exemples de relations entre les deux problèmes.

On dit que $x \in \mathcal{F}_p$ est *strictement admissible* pour le problème primal (P_L) si $x > 0$ (toutes les composantes de x sont > 0). De même, on dit que $(y, s) \in \mathcal{F}_d$ est *strictement admissible* pour le problème dual (D_L) si $s > 0$. On définit les ensembles de points strictement admissibles

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_p^s &:= \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x > 0\} \\ \mathcal{F}_d^s &:= \{(y, s) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n : A^T y + s = c, s > 0\}. \end{aligned}$$

S'ils sont non vides, ce sont les intérieurs relatifs de \mathcal{F}_p et \mathcal{F}_d respectivement.

Pour les problèmes d'optimisation convexes, le rapprochement des propositions 4.43 [(QC-S) \iff (QC-MF)] et 4.45 [(QC-MF) \iff Λ_* borné] suggère que l'existence d'un point *strictement* admissible primal équivaut au caractère *borné* de l'ensemble des solutions duales. En optimisation linéaire, le dual du dual est le primal, si bien que l'existence d'une solution duale strictement admissible devrait aussi équivaloir au caractère borné de l'ensemble des solutions primales. C'est une manière de trouver naturelles les équivalences énoncées dans la proposition suivante. Nous en donnons une démonstration directe ci-dessous ; l'exercice 17.11 propose d'autres approches moins techniques et qui pourront être utiles pour étendre ce résultat à d'autres problèmes. On y a noté

$$\mathcal{S}_{d,s} = \{s : \text{il existe } y \in \mathbb{R}^m \text{ tel que } (y, s) \in \mathcal{S}_d\}$$

la projection de \mathcal{S}_d sur \mathbb{R}^n . On note aussi $e = (1 \ \dots \ 1)^T$.

Proposition 17.13 *Supposons que les problèmes primal et dual soient réalisables ($\mathcal{F}_p \neq \emptyset$ et $\mathcal{F}_d \neq \emptyset$). Alors*

$$\mathcal{S}_p \text{ est borné} \iff \mathcal{F}_d^s \neq \emptyset, \tag{17.12}$$

$$\mathcal{S}_{d,s} \text{ est borné} \iff \mathcal{F}_p^s \neq \emptyset. \tag{17.13}$$

DÉMONSTRATION. Comme

$$\mathcal{S}_p = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0, c^T x \leq \text{val}(P_L)\}$$

est un convexe fermé non vide, \mathcal{S}_p est borné si, et seulement si, son **cône asymptotique** (exercice 2.20)

$$\mathcal{S}_p^\infty = \{d \in \mathbb{R}^n : Ad = 0, d \geq 0, c^T d \leq 0\}$$

est réduit au singleton $\{0\}$ (proposition 2.8). Si \mathcal{F}_D^s est non vide, il existe $(y, s) : c = A^T y + s$, avec $s > 0$. Alors pour $d \in \mathcal{S}_P^\infty$, on a $0 \geq c^T d = y^T A d + s^T d = s^T d$, ce qui implique que $d = 0$ (car $d \geq 0$ et $s > 0$). Inversement, si $\mathcal{S}_P^\infty = \{0\}$, son cône dual est \mathbb{R}^n . Celui-ci s'écrit (corollaire 2.46, de Farkas)

$$(\mathcal{S}_P^\infty)^+ = \{A^T y + s - \alpha c : s \in \mathbb{R}_+^n, \alpha \in \mathbb{R}_+\}.$$

Il existe donc $y \in \mathbb{R}^m, s \in \mathbb{R}_+^m$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tels que $A^T y + s - \alpha c = -e + c$, ce qui s'écrit aussi $A^T y + (s + e) = (\alpha + 1)c$. Alors $(y, s+e)/(\alpha+1) \in \mathcal{F}_D^s$.

La seconde partie de la proposition peut se démontrer de la même manière. \mathcal{S}_D étant un polyèdre convexe, il en est de même de $\mathcal{S}_{D,s}$ (proposition 2.18), qui est donc aussi fermé. Alors

$$\mathcal{S}_{D,s} = \{s \in \mathbb{R}_+^n : \text{il existe } y \in \mathbb{R}^m \text{ tel que } A^T y + s = c, b^T y \geq \text{val}(D_L)\}$$

est borné si, et seulement si, son cône asymptotique

$$\mathcal{S}_{D,s}^\infty = \{r \in \mathbb{R}_+^n : \text{il existe } z \in \mathbb{R}^m \text{ tel que } A^T z + r = 0 \text{ et } b^T z \geq 0\} \quad (17.14)$$

est réduit à $\{0\}$. Si $\mathcal{F}_P^s \neq \emptyset$, il existe $x > 0$ tel que $Ax = b$. Quel que soit $r \in \mathcal{S}_{D,s}^\infty$, on a $r^T x = -z^T Ax = -z^T b \leq 0$. Comme $x > 0$ et $r \geq 0$, on en déduit que $r = 0$. Donc $\mathcal{S}_{D,s}$ est borné. Inversement, si $\mathcal{S}_{D,s}^\infty$ est réduit à $\{0\}$, son cône dual (on a noté x_0 une solution particulière de $Ax_0 = b$)

$$(\mathcal{S}_{D,s}^\infty)^+ = \mathbb{R}_- x_0 + \mathcal{N}(A) + \mathbb{R}_+^n, \quad (17.15)$$

est \mathbb{R}^n . Alors, on peut écrire $-e = -\alpha x_0 + h + p$, avec $\alpha \in \mathbb{R}_+, h \in \mathcal{N}(A)$ et $p \in \mathbb{R}_+^n$; donc $A(p + e) = ab$ et $(x_0 + p + e)/(1 + \alpha) \in \mathcal{F}_P^s$. \square

Évidemment, si $\mathcal{S}_{D,s}$ n'est pas borné, \mathcal{S}_D ne l'est pas non plus, ni $\mathcal{S}_{D,y} := \{y : \text{il existe } s \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } (y, s) \in \mathcal{S}_D\}$ d'ailleurs. Par ailleurs, si A est surjective, il revient au même de dire que $\mathcal{S}_{D,s}$ est borné ou que \mathcal{S}_D est borné.

17.4 Algorithmes du simplexe

In the summer of 1947, when I began to work on the simplex method for solving linear programs, the first idea that occurred to me is one that would occur to any trained mathematician, namely the idea of step-by-step descent (with respect to the objective function) along edges of the convex polyhedral set from one vertex to an adjacent one. I rejected this algorithm outright on intuitive grounds—it had to be inefficient because it proposed to solve the problem by wandering along some path of outside edges until the optimal vertex was reached.

G.B. DANTZIG (1914-2005). Origins of the simplex method [154; 1990].

On considère le problème d'optimisation linéaire sous forme standard

$$(P_L) \quad \begin{cases} \min c^\top x \\ Ax = b \\ x \geq 0, \end{cases}$$

dont les conditions d'optimalité s'écrivent (proposition 17.6) : $\exists (y, s) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, tels que

$$\begin{cases} A^\top y + s = c, & s \geq 0 \\ Ax = b, & x \geq 0 \\ x^\top s = 0. \end{cases}$$

On sait que si ce problème a une solution il a une solution sur un sommet du polyèdre (proposition 17.5)

$$\mathcal{F}_P = \{x : Ax = b, x \geq 0\}.$$

Si m et n sont grands, il peut y avoir beaucoup de sommets, ce qui exclut de les explorer tous. L'*algorithme du simplexe* de Dantzig [153 ; 1951] sélectionne les sommets à explorer. L'algorithme se déroule en général en deux étapes :

- Phase I : trouver un sommet de \mathcal{F}_P ,
- Phase II : passer d'un sommet à l'autre de manière à faire décroître f , jusqu'à ce que l'on trouve une solution-sommet.

Dans la phase I, on résout un problème d'optimisation linéaire auxiliaire dont on connaît un sommet (voir la section 17.4.4). On peut donc utiliser l'algorithme du simplexe pour résoudre ce problème. Dans la phase II, on évite de parcourir tous les sommets en faisant décroître le critère à chaque itération, si possible strictement. On ne visite donc plus les sommets dont la valeur du critère est supérieure à celle au sommet courant.

17.4.1 Algorithme du simplexe primal

In my mind for example, solving a linear programming problem by the simplex method means moving from vertex to vertex of a vertical convex polyhedron until the bottom is reached. Therefore such terms as shadow prices, complementarity slackness, tableaux and nonbasic variables leave me cold.

M.J.D. POWELL [495 ; 1990].

Hypothèse. On suppose que A a plein rang $m < n$.

La version de l'algorithme du simplexe que nous présentons dans cette section est celle connue sous le nom d'*algorithme du simplexe révisé*. Cet algorithme est géométriquement très simple : chaque itération consiste à passer d'un sommet du polyèdre convexe, qu'est l'ensemble admissible, à un sommet adjacent en suivant une arête particulière de ce polyèdre, de manière à faire décroître la fonction coût. Il est bien de garder cette idée générale à l'esprit car la description algébrique d'une itération est relativement longue et doit prendre en compte quelques cas particuliers (problème non borné et pas nul) qui distraient.

Une itération de l'algorithme démarre donc en un sommet \hat{x} . Nous l'avons déjà dit : le calcul d'un tel sommet n'est pas une opération triviale, mais nous verrons à la section 17.4.4 comment on peut la réaliser. On note B une **base d'indices** associée à ce sommet et N le complémentaire de B dans $[1 : n]$. Au départ de l'itération, on a donc

$$\hat{x}_B \geq 0, \quad \hat{x}_N = 0 \quad \text{et} \quad A_{:B}\hat{x}_B = b \quad (\text{donc } \hat{x}_B = A_{:B}^{-1}b),$$

où, comme précédemment, $A_{:B}$ (resp. $A_{:N}$) désigne la sous-matrice de A formée de ses colonnes avec indices dans B (resp. N)

L'algorithme du simplexe génère en réalité une suite de **bases d'indices** plutôt qu'une suite de sommets. Il y a une distinction entre les deux notions lorsque le sommet est **dégénéré**, auquel cas il peut y avoir plusieurs bases d'indices correspondant à un même sommet. Si l'algorithme du simplexe visite un sommet dégénéré, il est possible qu'il ne change pas de sommet à l'itération suivante, mais il changera alors de base d'indices. Cependant décrire l'algorithme en termes de bases d'indices fait perdre l'aspect géométrique de l'algorithme, qu'il nous semble précieux de conserver. Dès lors, nous considérerons que l'itéré de l'algorithme est un sommet, mais que certaines itérations font un déplacement nul.

1 *Reconnaître l'optimalité.*

Soit x un point de l'ensemble admissible \mathcal{F}_p , qui vérifie donc $Ax = b$. Comme B est une **base d'indices**, on peut exprimer les composantes basiques x_B de x en fonction de b et de ses composantes non basiques x_N :

$$x_B = A_{:B}^{-1}(b - A_{:N}x_N).$$

On peut également exprimer le coût $c^T x$ en fonction de x_N :

$$c^T x = c_B^T A_{:B}^{-1}(b - A_{:N}x_N) + c_N^T x_N.$$

Son gradient par rapport à x_N est appelé le *coût réduit*. Il s'écrit

$$r = c_N - A_{:N}^T A_{:B}^{-T} c_B. \tag{17.16}$$

Dans l'algorithme du simplexe, ce coût réduit sert, d'une part, à détecter l'optimalité éventuelle de l'itéré courant \hat{x} (cette question est examinée dans la proposition 17.14 ci-dessous) et, d'autre part, à sélectionner une arête de \mathcal{F}_p le long de laquelle la fonction coût décroît lorsque \hat{x} n'est pas optimal (voir le point 2 ci-dessous).

Proposition 17.14 *Un sommet \hat{x} de \mathcal{F}_p est solution du problème (P_L) si, et seulement si, il existe une **base d'indices** $B \subseteq [1 : n]$ associée à \hat{x} telle que le coût réduit $r \geq 0$.*

DÉMONSTRATION. $[\Rightarrow]$ Supposons que \hat{x} soit un sommet de \mathcal{F}_p qui soit optimal pour le problème (P_L) . Alors, par les conditions d'optimalité (17.5), il existe une solution duale $(y, s) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ telle que

$$A^T y + s = c, \quad s \geq 0 \quad \text{et} \quad \hat{x}^T s = 0.$$

Comme \hat{x} est un sommet, $A_{:I^+(\hat{x})}$ est injective (en particulier $|I^+(\hat{x})| \leq m$).

Montrons que l'on peut trouver une base d'indices B associée à \hat{x} telle que, après modification éventuelle de y et s dans les conditions d'optimalité ci-dessus, on ait $s_B = 0$. On s'y prend en un nombre fini d'étapes en commençant par prendre $B' := \{i : s_i = 0\}$. De $\hat{x}_{I^+(\hat{x})} > 0$ et $\hat{x}^\top s = 0$, il vient $s_{I^+(\hat{x})} = 0$ et donc $I^+(\hat{x}) \subseteq B'$.

1. Si $\text{rg } A_{:B'} = m$, on n'a pas besoin de modifier y et s . En effet, l'affirmation est démontrée car, par le théorème de la base incomplète (théorème B.1), on peut trouver $B \subseteq B'$ tel que $I^+(\hat{x}) \subseteq B$, $|B| = m$ et $A_{:B}$ inversible (c'est-à-dire B est une base d'indices associée à \hat{x}). Cette base d'indices B est bien telle que $s_B = 0$.
2. Si $\text{rg } A_{:B'} < m$, on peut trouver une direction $\mu \in \mathbb{R}^m$ telle que $A_{:B'}^\top \mu = 0$ et $A_{:N'}^\top \mu \neq 0$ (avec $N' := [1:n] \setminus B'$); c'est possible car autrement on aurait $\mathcal{N}(A_{:B'}^\top) \subseteq \mathcal{N}(A^\top)$ ou $\mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(A_{:B'})$, ce qui contredirait $\dim \mathcal{R}(A) = m$ et $\dim \mathcal{R}(A_{:B'}) < m$. On peut supposer que $A_{:N'}^\top \mu \not\leq 0$. On prend alors le plus grand $t \geq 0$ tel que $s'_{N'} = s_{N'} - tA_{:N'}^\top \mu \geq 0$. Ce t est strictement positif, car $s_{N'} > 0$ par définition de B' et N' . On note j un indice de N' tel que $s'_j = 0$. Alors avec $y' = y + t\mu$ et $s' = s - tA^\top \mu$. Alors, on a

$$A^\top y' + s' = c, \quad s' \geq 0 \quad \text{et} \quad \hat{x}^\top s' = 0.$$

À la fin du point 2, on se retrouve avec des conditions d'optimalité vérifiées par le triplet (\hat{x}, y', s') et avec un ensemble d'indices $B'' := \{i : s'_i = 0\} \supseteq B' \cup \{j\}$. On peut alors revenir au point 1 avec B'' plutôt que B' . Comme chaque cycle augmente les ensembles d'indices B', B'', \dots d'au moins un indice et comme $\text{rg } A = m$, le cycle est nécessairement interrompu au point 1 après un nombre fini d'étapes.

Il reste à montrer que pour la base d'indices B associée à \hat{x} telle que $s_B = 0$, on a un coût réduit r positif. Comme $s_B = 0$, on a $y = A_{:B}^{-\top} c_B$, si bien $s_N = c_N - A_{:N}^\top A_{:B}^{-\top} c_B$ n'est autre que le coût réduit. Comme $s_N \geq 0$, on a ben montré que le coût réduit est positif.

[\Leftarrow] Supposons que, pour une base d'indice B associée à \hat{x} , le coût réduit $r \geq 0$. Si l'on introduit le multiplicateur $y = A_{:B}^{-\top} c_B$, on trouve $r = c_N - A_{:N}^\top y$. En réarrangeant ces deux dernières équations et en posant $s = (0, r)$, on trouve

$$A^\top y + s = c, \quad s \geq 0 \quad \text{et} \quad \hat{x}^\top s = 0.$$

Comme $A\hat{x} = b$ et $\hat{x} \geq 0$, (\hat{x}, y, s) vérifie les conditions d'optimalité (17.5), ce qui implique que \hat{x} est optimal. \square

Si le sommet optimal est **dégénéré**, il peut y avoir un coût réduit $r \not\geq 0$ pour une base d'indices arbitraire associée à ce sommet, comme le montre l'exemple suivant :

$$\begin{cases} \min 2x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x \geq 0. \end{cases} \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ \nearrow c = (2, 1) \\ \hat{x} \\ \searrow x_1 + x_2 = 0 \end{array}$$

L'ensemble admissible est réduit au singleton $\{(0, 0)\}$. La solution du problème est donc forcément $\hat{x} = (0, 0)$, qui est un sommet dégénéré. Si l'on prend pour **base d'indices** $B = \{1\}$, le coût réduit $r = -1$ strictement négatif. Ceci signifie que l'on

peut faire décroître le critère en augmentant $x_N = x_2$ tout en satisfaisant la contrainte d'égalité (c'est le sens du coût réduit). Mais ici, on ne peut pas augmenter x_2 sans sortir de l'ensemble admissible (ce ne serait pas le cas si le sommet était non dégénéré). À l'inverse, si l'on prend pour base d'indices $B = \{2\}$, le coût réduit $r = 1$ est positif, ce qui est annoncé par la proposition 17.14 (il n'y a pas d'autre base d'indices).

La technique utilisée par l'algorithme du simplexe pour détecter l'optimalité éventuelle du sommet courant \hat{x} est la positivité du coût réduit, calculé en utilisant la base d'indices B courante. Il s'agit d'un critère essentiellement primal (il ne fait pas intervenir de multiplicateur ou variable duale). Lorsque l'itéré courant est un sommet-solution non dégénéré, il n'y a qu'une seule base d'indices associée à ce sommet, si bien que le coût réduit est positif et l'algorithme s'interrompt. À l'inverse, lorsque l'itéré courant est un sommet-solution *dégénéré*, il se peut que la base d'indices courante ne permette pas d'avoir un coût réduit positif. Il est donc important que l'algorithme dispose d'un mécanisme lui permettant de changer de base d'indices si cela est nécessaire jusqu'à en trouver une permettant d'avoir un coût réduit positif (comme dans l'exemple ci-dessus). Un mécanisme permettant d'obtenir la convergence de l'algorithme du simplexe (c'est-à-dire d'éviter son cyclage) est appelé *règle d'anti-cyclage*; les principales règles d'anti-cyclage seront vues à la section 17.4.2.

2 Déplacement le long d'une arête.

Si r a une composante strictement négative, disons $r_j < 0$, cela veut dire que l'on peut faire décroître le coût en augmentant la composante j de \hat{x}_N . On est donc tenté de chercher un nouveau point admissible en faisant un déplacement suivant une direction d , c'est-à-dire

$$x(\alpha) = \hat{x} + \alpha d,$$

telle que la composante non basique de d soit

$$d_N = e_N^j. \quad (17.17)$$

On a noté e^j le j -ième vecteur de base de \mathbb{R}^n et $e_N^j = (e^j)_N$. Pour que ce déplacement $d = (d_B, d_N)$ soit acceptable, il faut d'abord que l'on ait $Ax(\alpha) = b$, donc $Ad = 0$, ce qui détermine sa composante basique :

$$d_B = -A_{:,B}^{-1} A_{:,N} e_N^j. \quad (17.18)$$

Sur le choix de l'indice j . Remarquons que le coût décroît bien le long de d puisque l'on a

$$c^\top d = r_j < 0.$$

Si r a plusieurs composantes strictement négatives, il semble donc raisonnable de choisir l'indice j parmi ceux donnant la composante de r la plus négative. C'est ce que l'on appelle la *règle du coût réduit minimal*. Cette règle ne garantit cependant pas l'efficacité globale de l'algorithme qui est principalement liée au nombre total d'itérations, c'est-à-dire au nombre de sommets visités (aspect global), ce qui ne peut se déduire d'un calcul de dérivée (aspect local). D'autres règles existent (comme celles introduites par les règles d'anti-cyclage décrites à la section 17.4.2) et les algorithmes du simplexe diffèrent en particulier par l'heuristique adoptée à cette étape.

Il est intéressant d'observer que le déplacement porté par la direction d se fait le long d'une arête de \mathcal{F}_P .

Proposition 17.15 Soient d défini comme ci-dessus et $D := \{\hat{x} + \alpha d \in \mathcal{F}_P : \alpha \geq 0\}$. Alors soit D est réduit au sommet $\{\hat{x}\}$, soit c'est une arête de \mathcal{F}_P .

DÉMONSTRATION. Si $\hat{x} + \alpha d \notin \mathcal{F}_P$ pour tout $\alpha > 0$, on a $D = \{\hat{x}\}$.

Supposons maintenant que $\hat{x} + \alpha d \in \mathcal{F}_P$ pour tout $\alpha > 0$ petit. D'après la proposition 2.21, il suffit de montrer que pour $\alpha > 0$ petit :

$$\dim \mathcal{N}(A_{:I+(\hat{x}+\alpha d)}) = 1.$$

Observons que, si $(\hat{x} + \alpha d)_i = 0$, on a nécessairement $d_i = 0$ (c'est clairement le cas si $i \in N \setminus \{j\}$; ce l'est aussi si $i \in B$ car alors $\hat{x}_i = 0$) ; alors, le fait que $Ad = 0$ montre que

$$A_{:I+(\hat{x}+\alpha d)}d_{I+(\hat{x}+\alpha d)} = 0, \quad d_{I+(\hat{x}+\alpha d)} \neq 0,$$

et donc que $\dim \mathcal{N}(A_{:I+(\hat{x}+\alpha d)}) \geq 1$. Par ailleurs, l'inversibilité de $A_{:B}$ et $I^+(\hat{x}+\alpha d) \subseteq B \cup \{j\}$, montre que $\dim \mathcal{N}(A_{:I+(\hat{x}+\alpha d)}) \leq 1$. □

3 Détection d'un problème non borné ($d_B \geq 0$).

Si $d_B \geq 0$, alors

$$\forall \alpha > 0 : \quad x(\alpha) \geq 0,$$

et comme le coût $c^T x(\alpha) = c^T \hat{x} + \alpha c^T d$ décroît strictement le long de la direction de descente d , le problème n'est pas borné.

4 Pivotage ($d_B \not\geq 0$).

Si $d_B \not\geq 0$, on ne peut plus prendre un pas arbitrairement grand. Pour que l'on ait $x(\alpha)_B \geq 0$, il faut que $\alpha \leq \hat{\alpha}$, où

$$\hat{\alpha} = \min \left\{ -\frac{\hat{x}_i}{d_i} : i \in B, d_i < 0 \right\}. \tag{17.19}$$

Lorsque le sommet \hat{x} est dégénéré (il y a des $\hat{x}_i = 0$ pour $i \in B$), ce pas maximal $\hat{\alpha}$ peut être nul (voir ci-après). Soit k un indice donnant le min ci-dessus. Alors, $\hat{x}_k + \hat{\alpha}d_k = 0$ et on peut faire sortir l'indice k de la base d'indices B , et y faire entrer l'indice j . La nouvelle base d'indices s'écrit

$$B_+ = (B \cup \{j\}) \setminus \{k\}.$$

Proposition 17.16 L'ensemble B_+ est une base d'indices.

DÉMONSTRATION. Il s'agit de montrer que $A_{:B_+}$ est inversible. Si ce n'est pas le cas, l'inversibilité de $A_{:B}$ implique que A^j est combinaison linéaire des $\{A^i : i \in B \setminus \{k\}\}$, c'est-à-dire

$$A_{:N}e_N^j = A_{:B}u, \quad \text{avec } u_k = 0.$$

On en déduit que $u = -d_B$. On a alors une contradiction, car d'une part $d_k = 0$ (car $u_k = 0$) et $d_k < 0$ (car k donne le min en (17.19)). \square

L'opération de mise à jour de la base d'indices B en B_+ , qui consiste à lui adjoindre l'indice j et à lui ôter l'indice k , est parfois appelée *pivotage* et la règle déterminant le choix des indices j et k est alors appelée *règle de pivotage*.

5 Progrès ou stagnation.

Deux situations peuvent maintenant se présenter.

Si $\hat{\alpha} > 0$, le coût décroît strictement et on peut passer à l'itération suivante avec $\hat{x}_+ := \hat{x} + \hat{\alpha}d$ comme nouveau sommet et B_+ comme nouvelle base d'indices.

Si $\hat{\alpha} = 0$ (ceci ne peut se produire que si le sommet \hat{x} est dégénéré), il y a un changement de base d'indices sans changer de sommet (le pas $\hat{\alpha}$ est nul). Si l'on ne prend pas quelques précautions, l'algorithme peut cycler (par exemple en faisant entrer k dans la base et en faisant sortir j à l'itération suivante). On a mis au point des règles d'anti-cyclage pour faire face à cette situation. Certaines d'entre elles sont présentées dans la section suivante.

17.4.2 Règles d'anti-cyclage \blacktriangle

Nous énonçons ci-dessous quelques règles d'anti-cyclage et renvoyons le lecteur aux articles qui les introduisent pour une démonstration de leur propriété d'anti-cyclage. Ces articles sont souvent difficiles à comprendre, si l'on n'est pas familier avec le jargon développé par les spécialistes de l'algorithme du simplexe, en particulier avec la description de l'algorithme sous forme de tableau.

Règle des petites perturbations \blacktriangle

Règle lexicographique \blacktriangle

Règle des plus petits indices de Bland

La règle consiste à faire entrer dans la base B_+ le plus petit indice $j \in N$ tel que le coût réduit $r_j < 0$ (voir le point 2 ci-dessus) et à en faire sortir le plus petit indice $k \in \arg \min\{-\hat{x}_i/d_i : i \in B, d_i < 0\}$ (voir la formule (17.19)). Cette règle a été proposée par Bland [64; 1977].

17.4.3 Énoncé de l'algorithme

On peut résumer l'algorithme décrit ci-dessus comme suit.

Algorithme 17.17 (simplexe révisé) On suppose au départ de l'itération que l'on dispose d'un **sommet** \hat{x} de \mathcal{F}_P et d'une **base d'indices** associée B . Une itération calcule un nouveau sommet \hat{x}_+ et une nouvelle base d'indices B_+ , à moins qu'il ne soit observé que \hat{x} est solution ou que le problème est non borné. Voici les différentes étapes de cette itération.

1. *Coût réduit.* Calculer le multiplicateur $y \in \mathbb{R}^m$, solution du système linéaire

$$A_{:B}^T y = c_B$$

et en déduire le coût réduit

$$r = c_N - A_{:N}^T y.$$

2. *Optimalité.* Si $r \geq 0$, on s'arrête : \hat{x} est solution du problème (P_L) .
3. *Direction de descente.* Soit j un indice tel que $r_j < 0$, respectant une règle d'anti-cyclage de la section 17.4.2. On définit la direction de descente $d \in \mathcal{N}(A)$ du critère $x \mapsto c^T x$ par

$$d_B = -A_{:B}^{-1} A_{:N} e_N^j \quad \text{et} \quad d_N = e_N^j,$$

où e^j est le j -ième vecteur de base de $\mathbb{R}^{|N|}$.

4. *Problème non borné.* Si $d_B \geq 0$, on s'arrête car le problème (P_L) n'est pas borné : $c^T(\hat{x} + \alpha d) \rightarrow -\infty$ lorsque $\alpha \rightarrow \infty$.
5. *Pas maximal.* On calcule le pas maximal $\hat{\alpha}$ jusqu'à la frontière de l'ensemble admissible \mathcal{F}_P :

$$\hat{\alpha} := \min \left\{ -\frac{\hat{x}_i}{d_i} : i \in B, d_i < 0 \right\}.$$

Ce pas peut être nul. On note k un des indices donnant le minimum ci-dessus et respectant une règle d'anti-cyclage de la section 17.4.2.

6. *Nouveau sommet.* $\hat{x}_+ = \hat{x} + \hat{\alpha}d$.
7. *Nouvelle base d'indices.* $B_+ = (B \cup \{j\}) \setminus \{k\}$.

Théorème 17.18 (convergence de l'algorithme du simplexe révisé) Si le problème d'optimisation linéaire, écrit sous la forme standard (P_L) , est réalisable (c'est-à-dire $\mathcal{F}_P \neq \emptyset$), l'algorithme du simplexe révisé décrit ci-dessus termine après un nombre fini d'étapes, soit en déterminant que le problème (P_L) est non borné, soit en trouvant une solution-sommet.

17.4.4 Démarrage de l'algorithme du simplexe

Pour utiliser l'algorithme du simplexe présenté ci-dessus, il faut disposer d'un itéré initial qui est un **sommet** de l'ensemble admissible $\mathcal{F}_P := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$.

Nous présentons dans cette section plusieurs manières de faire face à cette exigence. Certaines méthodes de pivotage se déroulent en une seule phase, comme l'*algorithme en croix* [115, 578, 579, 615; 1979-1987].

Technique des deux phases

Comme son nom l'indique, la technique des deux phases décompose la résolution d'un problème d'optimisation linéaire en deux étapes. La phase/étape I consiste à résoudre un problème d'optimisation linéaire auxiliaire, dont on connaît un sommet, par l'algorithme du simplexe. La résolution de ce problème auxiliaire fournit un sommet du polyèdre convexe \mathcal{F}_p (pourvu que celui-ci soit non vide) ou indique que $\mathcal{F}_p = \emptyset$. Dans la phase II, on résout le problème (P_L) par l'algorithme du simplexe, à partir du sommet obtenu dans la première phase.

La phase I consiste donc à trouver un point du polyèdre convexe écrit sous forme standard, à trouver un $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $Ax = b$ et $x \geq 0$. Elle réalise cette tâche en résolvant le problème d'optimisation linéaire suivant :

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^m z_i \\ Ax + Dz = b \\ x \geq 0, \quad z \geq 0, \end{cases} \quad (17.20a)$$

où D est la matrice diagonale définie par

$$D_{ii} = \begin{cases} 1 & \text{si } b_i \geq 0 \\ -1 & \text{si } b_i < 0. \end{cases} \quad (17.20b)$$

Proposition 17.19 *Le point $(0, Db)$ est un sommet de l'ensemble admissible du problème (17.20a), lequel a toujours une solution. Si ce problème est résolu par l'algorithme du simplexe en partant de ce point, il obtient pour solution un point (\hat{x}, \hat{z}) . Si $\hat{z} \neq 0$, le problème (P_L) n'est pas réalisable. Si $\hat{z} = 0$, \hat{x} est un sommet de l'ensemble admissible de (P_L) .*

DÉMONSTRATION. Il est clair que $(0, Db)$ est un sommet de l'ensemble admissible de (17.20a), car les colonnes de D sont linéairement indépendantes (proposition 2.21). Comme (17.20a) est borné ($\sum_{i=1}^m z_i \geq 0$), il a une solution (proposition 17.4). Si l'algorithme du simplexe est démarré en $(0, Db)$, il trouve une solution (\hat{x}, \hat{z}) .

Si $\hat{z} \neq 0$, la valeur optimale de (17.20a) est non nulle et le problème (P_L) n'est pas réalisable (car si $x \in \mathcal{F}_p$, $(x, 0)$ est admissible pour (17.20a) et donne une valeur nulle au critère).

Si $\hat{z} = 0$, on a $A\hat{x} = b$ et $\hat{x} \geq 0$, donc $\hat{x} \in \mathcal{F}_p$. D'autre part, $(\hat{x}, 0)$ étant un sommet de l'ensemble admissible de (17.20a), les colonnes $\{A^j : \hat{x}_j > 0\}$ sont linéairement indépendantes; donc \hat{x} est un sommet de \mathcal{F}_p . \square

Technique du grand M

Cette technique combine les phases I et II de manière à ne devoir résoudre qu'un seul problème d'optimisation linéaire, à savoir le problème

$$\begin{cases} \min c^T x + M (\sum_{i=1}^m z_i) \\ Ax + Dz = b \\ x \geq 0, \quad z \geq 0, \end{cases} \quad (17.21)$$

où D est pris comme en (17.20b) et $M > 0$ est une constante choisie « suffisamment grande ». On ne connaît pas a priori la valeur qu'il faut donner à M pour que les problèmes (17.21) et (P_L) soient équivalents, c'est-à-dire pour qu'en une solution (\hat{x}, \hat{z}) de (17.21) on ait $\hat{z} = 0$. Le raisonnement suivant montre pourquoi ils le seront si M est « suffisamment grand ».

On peut en effet voir (17.21) comme la pénalisation exacte, au moyen de la norme ℓ_1 , de la contrainte $z = 0$ dans

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax + Dz = b \\ z = 0 \\ x \geq 0, \quad z \geq 0. \end{cases}$$

Ce dernier problème est équivalent à (P_L) . Dès lors, selon la théorie développée à la section 13.5, si M est supérieur à la norme ℓ_∞ (norme duale de la norme ℓ_1 pour le produit scalaire euclidien) de tout multiplicateur optimal associé à la contrainte $z = 0$ dans ce dernier problème, et si $\mathcal{F}_p \neq \emptyset$, alors toute solution (\hat{x}, \hat{z}) de (17.21) sera telle que $\hat{z} = 0$ et donc \hat{x} sera solution de (P_L) .

17.4.5 Complexité

L'algorithme du simplexe n'est pas polynomial. Klee et Minty [354; 1972] ont en effet construit un problème, dans lequel l'ensemble admissible est un cube de \mathbb{R}^n légèrement déformé, pour lequel l'algorithme du simplexe avec la règle du coût réduit minimal visite les 2^n sommets de l'ensemble admissible. Des variantes de l'exemple de Klee et Minty existent pour la plupart des règles de pivotage autres que celle du coût réduit minimal, bien que l'on ne sache pas s'il n'existe pas de règle permettant d'éviter ce comportement exponentiel (voir [581] et ses références). Le nombre d'opérations pour résoudre le problème par l'algorithme du simplexe dans le pire des cas n'est donc pas nécessairement borné par un polynôme dépendant des dimensions de celui-ci ou de la longueur des données le définissant. On parle de *complexité pire-cas*, celle que l'on peut observer dans le cas le moins favorable.

Cependant, en pratique, ces algorithmes sont souvent très efficaces. La raison tient peut-être au fait que, bien que non polynomial dans le pire des cas, il est polynomial *en moyenne* pour des données distribuées aléatoirement suivant diverses lois de probabilité (voir Borgwardt [75, 76], Smale [556], Megiddo [418] et Sharmir [544]) et en *perturbations moyennées* (technique qualifiée d'*analyse lisse* par ses auteurs [566] et qui consiste à étudier la complexité moyenne de l'algorithme pour des données variant aléatoirement autour de données fixées arbitraires).

La non-polynomialité pire-cas de l'algorithme du simplexe a stimulé la recherche d'algorithmes pouvant être polynomiaux en optimisation linéaire, un problème jugé suffisamment « simple » pour admettre un tel algorithme. Ceci a conduit aux algorithmes de points intérieurs, que nous verrons au chapitre 18.

Notes

L'énoncé du problème dual d'un problème d'optimisation linéaire est attribué à J. Von Neumann. L'existence de solutions strictement complémentaires (proposition 17.8) a été montré par Goldman et Tucker (1956).

On pourra trouver d'autres résultats sur l'optimisation linéaire dans les références suivantes : Minoux [422 ; 1983] ; Chvátal [125 ; 1983] a une approche très opérationnelle de l'optimisation linéaire et de l'algorithme du simplexe et s'intéresse à la modélisation de problèmes concrets sous forme de problèmes d'optimisation linéaire, notamment des problèmes de transport dans les réseaux ; Schrijver [540 ; 1986] ; Fletcher [212 ; 1987] ; Ciarlet [127 ; 1988] ; Goldfarb et Todd [260 ; 1989] ; Nering et Tucker [451 ; 1993] ; Saigal [534 ; 1995], Helgason et Kennington [308 ; 1995] discutent de l'utilisation de l'algorithme du simplexe dans divers problèmes d'optimisation linéaire rencontrés dans les réseaux ; le même commentaire s'applique à l'ouvrage de Bertsimas et Tsitsiklis [57 ; 1997], qui contient des chapitres sur les problèmes de grande taille avec leurs méthodes de décomposition, sur les problèmes d'OL dans les réseaux et sur les problèmes en nombres entiers ; Vanderbei [604 ; 1997] ; Martin [408 ; 1999] aborde, dans la partie IV de son ouvrage, les méthodes de décomposition pour résoudre les grands problèmes linéaires (décomposition de Benders, de Dantzig-Wolfe et lagrangienne) et traite, dans le chapitre 14, de l'optimisation dans les réseaux ; Padberg [468 ; 1999].

Exercices

- 17.1.** *Optimisation linéaire et admissibilité polyédrique.* Montrez que résoudre un problème d'optimisation linéaire revient à trouver un point admissible d'un polyèdre convexe, dont les données se déduisent aisément de celles du problème d'optimisation linéaire.
- 17.2.** *Effet d'une perturbation du coût.* On considère le problème d'optimisation linéaire, sous sa forme standard (P_L) . On s'intéresse à la valeur optimale $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \varphi(c) := \inf \{c^\top x : Ax = b, x \geq 0\} \in \mathbb{R}$, comme fonction du coût c .
- (i) La fonction φ est concave.
 - (ii) Le point \bar{x} est l'unique solution de (P_L) si, et seulement si, il existe $\epsilon > 0$ tel que si l'on remplace c par \tilde{c} dans (P_L) , avec $\|\tilde{c} - c\| \leq \epsilon$, \bar{x} est encore (l'unique) solution du problème.
 - (iii) Si pour $c = c_0$, (P_L) a une unique solution \bar{x}_0 , alors φ est *linéaire* dans un voisinage de c_0 et $\nabla \varphi(c_0) = \bar{x}_0$.
- 17.3.** *Hypothèse de non dégénérescence et qualification des contraintes.* Soient $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ et x un sommet du polyèdre convexe $\{x : Ax = b, x \geq 0\}$. Montrez que x est non dégénéré si, et seulement si, $(A^\top I_{I^0(x)})$ est injective, où $I_{I^0(x)}$ est la matrice formée des colonnes d'indices $i \in I^0(x)$ de la matrice identité (ce qui n'est autre que la condition de qualification des contraintes (QC-IL)).

17.4. *Ensemble de solutions borné.* Supposons que l'ensemble admissible \mathcal{F}_p du problème d'optimisation linéaire (P_L) ne soit pas borné et que son ensemble de solution \mathcal{S}_p le soit. Montrez qu'alors le critère $c^\top x$ tend vers l'infini à l'infini dans \mathcal{F}_p .

17.5. *Polyèdres convexes imbriqués.* Soient P_A et P_B deux polyèdres convexes de \mathbb{R}^n définis par

$$P_A := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq a\} \quad \text{et} \quad P_B := \{x \in \mathbb{R}^n : Bx \leq b\},$$

où $A \in \mathbb{R}^{m_A \times n}$, $a \in \mathbb{R}^{m_A}$, $B \in \mathbb{R}^{m_B \times n}$ et $b \in \mathbb{R}^{m_B}$. On suppose que $P_A \neq \emptyset$. Montrez que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) $P_A \subseteq P_B$,
- (ii) $\exists Y \in \mathbb{R}_+^{m_B \times m_A}$ tel que $YA = B$ et $Ya \leq b$.

17.6. *Inclusions polaires.*

1) Soient \mathbb{E} un espace euclidien et A et B deux ensembles convexes fermés non vides de \mathbb{E} . On note σ_A et σ_B les **fonctions d'appui** de ces ensembles. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) $A \subseteq B$,
- (ii) $\sigma_A \leq \sigma_B$,
- (iii) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \{d \in \mathbb{E} : \sigma_B(d) \leq \alpha\} \subseteq \{d \in \mathbb{E} : \sigma_A(d) \leq \alpha\}$,
- (iv) $\forall \alpha \in \{-1, 1\}, \{d \in \mathbb{E} : \sigma_B(d) \leq \alpha\} \subseteq \{d \in \mathbb{E} : \sigma_A(d) \leq \alpha\}$.

Les équivalences (i) \Leftrightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv) permettent d'associer des inclusions, *polaires* l'une de l'autre, dans certains cas.

2) Si $P := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ est le polyèdre convexe non vide, formé à partir de $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $b \in \mathbb{R}^m$, et si $\alpha \in \mathbb{R}$, alors

$$\{d \in \mathbb{R}^n : \sigma_P(d) \leq \alpha\} = A^\top \{y \in \mathbb{R}_+^m : b^\top y \leq \alpha\}. \quad (17.22)$$

3) On note $\mathcal{E}(M) := \{x \in \mathbb{R}^n : x^\top Mx \leq 1\}$ l'ellipsoïde de \mathbb{R}^n centré en 0, façonné par une matrice $M \succ 0$ d'ordre n . Alors, pour $H \succ 0$, on a

$$\{d \in \mathbb{R}^n : \sigma_{\mathcal{E}(H)}(d) \leq 1\} = \mathcal{E}(H^{-1}). \quad (17.23)$$

4) *Polyèdres convexes imbriqués.* Avec les notations de l'exercice 17.5, on a

$$P_A \subseteq P_B \iff \begin{cases} \forall \alpha \in \mathbb{R}, \\ B^\top \{z \in \mathbb{R}_+^{m_B} : b^\top z \leq \alpha\} \subseteq \\ A^\top \{y \in \mathbb{R}_+^{m_A} : a^\top y \leq \alpha\}. \end{cases} \quad (17.24a)$$

$$\iff \begin{cases} \forall \alpha \in \{-1, 1\}, \\ B^\top \{z \in \mathbb{R}_+^{m_B} : b^\top z \leq \alpha\} \subseteq \\ A^\top \{y \in \mathbb{R}_+^{m_A} : a^\top y \leq \alpha\}. \end{cases} \quad (17.24b)$$

On peut retrouver l'équivalence de l'exercice 17.5 à partir de (17.24).

5) *Circonscription ellipsoïdique d'un polyèdre convexe.* Soient $H \succ 0$ et $P := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\} \neq \emptyset$ le polyèdre convexe de \mathbb{R}^n défini au moyen de $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $b \in \mathbb{R}^m$. Alors

$$P \subseteq \mathcal{E}(H) \iff \mathcal{E}(H^{-1}) \subseteq A^\top \{y \in \mathbb{R}_+^m : b^\top y \leq 1\}. \quad (17.25)$$

17.7. *Solutions strictement complémentaires.* Soit \mathcal{S}_{pD}^{sc} l'ensemble des solution primales-duales strictement complémentaires (proposition 17.8). Montrez

- 1) les formules de \mathcal{S}_p° et \mathcal{S}_D° données par (17.9),
- 2) $\mathcal{S}_{pD}^{sc} = \mathcal{S}_{pD}^\circ = \mathcal{S}_p^\circ \times \mathcal{S}_D^\circ$,
- 3) $x \in \mathcal{S}_p^\circ \Leftrightarrow \exists (y, s) \in \mathcal{S}_D$ tel que $(x, y, s) \in \mathcal{S}_{pD}^{sc}$ (nécessairement $(y, s) \in \mathcal{S}_D^\circ$),
- 4) $(y, s) \in \mathcal{S}_D^\circ \Leftrightarrow \exists x \in \mathcal{S}_p$ tel que $(x, y, s) \in \mathcal{S}_{pD}^{sc}$ (nécessairement $x \in \mathcal{S}_p^\circ$).

17.8. *Dualité linéaire et lemme de Farkas.*

- 1) Retrouvez le lemme de Farkas, sous la forme $\{Ax : x \geq 0\} = \{y : A^T y \geq 0\}^+$ (voir le corollaire 2.46), à partir des résultats de dualité en optimisation linéaire (théorèmes 17.10 et 17.11).
- 2) Soient A une matrice $m \times n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, tels que $\{x : Ax \geq b\} \neq \emptyset$. Montrez que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
 - (i) tout x vérifiant $Ax \geq b$ vérifie aussi $c^T x \geq \alpha$.
 - (ii) il existe $y \in \mathbb{R}_+^m$ tel que $A^T y = c$ et $b^T y \geq \alpha$.

17.9. *Théorèmes de l'alternative par l'optimisation linéaire*, que l'on écrit ici sous la forme d'équivalences. Voir aussi l'exercice 2.39.

- 1) *Théorème de l'alternative de Motzkin non-homogène* [295 ; théorème 3.17]. Soient $A \in \mathbb{R}^{m_A \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m_B \times n}$ et $C \in \mathbb{R}^{m_C \times n}$ des matrices ayant un même nombre de colonnes et $a \in \mathbb{R}^{m_A}$, $b \in \mathbb{R}^{m_B}$ et $c \in \mathbb{R}^{m_C}$ des vecteurs. Alors, les affirmations suivantes sont équivalentes :
 - (i) $\exists x \in \mathbb{R}^n : Ax = a, Bx \leq b$ et $Cx < c$,
 - (ii) $\forall (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^{m_A} \times \mathbb{R}_+^{m_B} \times \mathbb{R}_+^{m_C}$ vérifiant $A^T \alpha + B^T \beta + C^T \gamma = 0$ et $a^T \alpha + b^T \beta + c^T \gamma \leq 0$, on a $a^T \alpha + b^T \beta = 0$ et $\gamma = 0$.

17.10. *Dualité.* On considère le problème d'optimisation linéaire (P_L) et son dual (D_L) . Démontrez les affirmations suivantes.

- 1) Si (P_L) est réalisable et non borné, alors (D_L) n'est pas réalisable,
- 2) Si (P_L) n'est pas réalisable et (D_L) est réalisable, alors (D_L) est non borné.

17.11. *Contributions à la proposition 17.13.*

- 1) Vérifiez l'identité (17.14).
- 2) Vérifiez l'identité (17.15).
- 3) Autre démonstration de (17.12).
 - (i) Montrez que \mathcal{F}_D^s est vide si, et seulement si, il existe un indice $i \in [1 : n]$ tel que le problème $\inf\{-s_i : A^T y + s = c, s \geq 0\}$ est réalisable et a une valeur optimale nulle.
 - (ii) Conclure en utilisant un argument de dualité.
- 4) Autre démonstration de (17.13).
 - (i) Montrez que \mathcal{F}_P^s est vide si, et seulement si, il existe un indice $i \in [1 : n]$ tel que le problème $\min\{-x_i : Ax = b, x \geq 0\}$ est réalisable et a une valeur optimale nulle.
 - (ii) Conclure en utilisant un argument de dualité.

17.12. *Identité du minimax de von Neumann* [612 ; 1928]. Soient A une matrice de type $m \times n$ et Δ_p le simplexe unitaire de \mathbb{R}^p . Montrez que

$$\max_{y \in \Delta_m} \min_{x \in \Delta_n} y^T Ax = \min_{x \in \Delta_n} \max_{y \in \Delta_m} y^T Ax. \tag{17.26}$$

17.13. *Détection d'une solution unique par l'algorithme du simplexe* [260 ; corollaire 3.1]. Montrez que si le coût réduit r défini par (17.16) a ses composantes strictement positives, alors le sommet courant est l'unique solution de (P_L) .

17.14. *Lemme de Hoffman* [319 ; 1952]. Le lemme de Hoffman est une borne d'erreur, c'est-à-dire une estimation (ici, une majoration) de la distance à un ensemble par des quantités plus facilement calculables que la distance elle-même. On s'intéresse ici à la distance au polyèdre convexe, défini par $P_{A,b} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$, où $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $b \in \mathbb{R}^m$. On note \mathcal{B}_A le cône convexe des vecteurs $b \in \mathbb{R}^m$ tels que $P_{A,b} \neq \emptyset$. On se donne également une norme $\|\cdot\|$ sur \mathbb{R}^n . Enfin, on note

$$d_{P_{A,b}}(x) := \min_{z \in P_{A,b}} \|z - x\|$$

la distance de $x \in \mathbb{R}^n$ à $P_{A,b}$, mesurée au moyen de la norme $\|\cdot\|$. Le lemme de Hoffman affirme que

$$\forall A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \exists h > 0, \forall b \in \mathcal{B}_A, \forall x \in \mathbb{R}^n : d_P(x) \leq h \|(Ax - b)^+\|_2, \quad (17.27)$$

où $(\cdot)^+ = \max(0, \cdot)$, composante par composante, et $\|\cdot\|_2$ est la norme euclidienne sur \mathbb{R}^m . La constante h ne dépend donc que de A . Autrement dit, on peut estimer la distance de x à $P_{A,b}$ par la norme du résidu $(Ax - b)^+$.

- (i) Montrez que l'on peut trouver des $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tels que h est arbitrairement grand.
(ii) Démonstration de (17.27) [295 ; 2010, section 11.8].

(a) On note $\|\cdot\|_D$ la **norme duale** de la norme $\|\cdot\|$. Montrez que

$$\exists u \in \mathbb{R}^n : \|u\|_D = 1 \quad \text{et} \quad d_P(x) = \sup_{\substack{y \geq 0 \\ A^T y = u}} (Ax - b)^T y. \quad (17.28)$$

- (b) Montrez que l'on peut *choisir* une solution du problème d'optimisation linéaire dans (17.28), qui soit majorée en norme par une constante ne dépendant que de A .
(c) Démontrez (17.27).