Ondes dans des milieux particuliers (conducteur, plasma)

(les **vecteurs** sont en caractères **gras)**

Exercice 1: Onde dans un conducteur

1) On s'intéresse à la propagation d'une onde dans un milieu métallique conducteur globalement neutre de conductivité statique $\gamma_0 = ne^2\tau/m$ (voisine de 10^7 Sm^{-1}), en présence de courant, la densité de courant **j** étant reliée au champ électrique **E** par la loi d'Ohm. Dans l'expression de γ_0, n est la densité électronique (m^{-3}), tandis que $e = 1.6\ 10^{-19}$ C et $m = 9.1\ 10^{-31}$ kg sont respectivement la charge et la masse de l'électron; $\tau = 10^{-14}$ s est le temps moyen entre deux collisions. La conductivité en présence d'une onde de pulsation ω devient $\gamma = \gamma_0 / (1 + i\,\omega\tau)$. On a deux cas limite:
- si $\omega << 1/\tau = 10^{14}$ rd/s, $\gamma = \gamma_0$ (nombre réel)
- si $\omega >> 1/\tau = 10^{14}$ rd/s, $\gamma = \gamma_0 / (i\,\omega\tau) = - i\, n\, e^2 / m\omega$ (nombre imaginaire pur)

Comme dans l'exercice 2B, l'équation à laquelle obéit le champ électrique est:
$\Delta \mathbf{E} = \mu_0\, \gamma\, \partial \mathbf{E}/\partial t + \mu_0\, \varepsilon_0\, \partial^2 \mathbf{E}/\partial t^2$

On se place dans le cadre d'une OPPH en $e^{i(\omega t - \mathbf{k.r})}$. En utilisant la forme prise par les opérateurs $\partial/\partial t$, $\partial^2/\partial t^2$ et Δ pour une OPPH, en déduire la relation de dispersion des ondes liant k^2 à ω en fonction de C, μ_0 et γ (rappel: $\mu_0\, \varepsilon_0\, C^2 = 1$).
2) A quelle gamme de longueur d'onde λ la relation $\omega << 1/\tau = 10^{14}$ rd/s correspond-elle ? Nommer ce domaine du spectre électromagnétique; même question pour $\omega >> 1/\tau$.
3) Aux basses fréquences telles que $\omega << 1/\tau = 10^{14}$ rd/s, comparer les deux termes de la relation de dispersion (on donne $\gamma_0 = 10^7$ Sm^{-1}, $\varepsilon_0 = 8.84\ 10^{-12}$ SI); en déduire que $k^2 = - i\, \mu_0\, \gamma_0\, \omega$, puis en remarquant que $- i = (1 - i)^2/2$, exprimer k (nombre complexe) en fonction de $\delta = (2 / \mu_0\, \gamma\, \omega)^{1/2}$, longueur caractéristique d'amortissement de l'onde appelée épaisseur de peau, ainsi que les indices de dispersion et absorption n_1 et n_2; on rappelle que $k = (\omega/C)\,(n_1 - i\, n_2)$. Que vaut δ (en microns) pour une onde radio de fréquence 100 MHz ? Comparer δ à la longueur d'onde. Quelle est la nature de l'onde: propagation pure ? absorption pure ? évanescente ?
4) Aux hautes fréquences telles que $\omega >> 1/\tau$, montrer que $k^2 = (\omega^2 - \omega_p^2) / C^2$ où $\omega_p = (n\, e^2 / \varepsilon_0\, m)^{1/2}$ désigne la pulsation plasma. La calculer pour $n = 10^{29}$ m^{-3}. Donner la longueur d'onde λ_p correspondante en microns; nommer le domaine du spectre électromagnétique.
5) Considérons une onde telle que $\omega > \omega_p$; se propage t-elle ?
6) Considérons une onde telle que $\omega < \omega_p$; se propage t-elle ? Quelle est la nature de l'onde: absorption pure ou évanescente ?
Expliquer pourquoi les ondes lumineuses visibles sont réfléchies par un métal, alors que l'UV lointain y pénètre. Quel est l'ordre de grandeur de l'épaisseur caractéristique d'absorption, en comparaison de la longueur d'onde ?

Réponses:
1) $k^2 = \mu_0\, \varepsilon_0\, \omega^2 - i\, \mu_0\, \gamma\, \omega = \omega^2/C^2 - i\, \mu_0\, \gamma\, \omega$
2) $\omega << 1/\tau$ correspond à $\lambda >> 18.85$ microns (IR lointain et ondes radio)
$\omega >> 1/\tau$ correspond à $\lambda << 18.85$ microns (IR proche, visible, UV)
3) $\omega << 1/\tau$ implique $\gamma = \gamma_0$
Le rapport des termes ω^2/C^2 et $\mu_0\, \gamma_0\, \omega$ vaut $\omega\, \varepsilon_0 / \gamma_0 < 10^{-4}$. En conséquence, $k^2 = - i\, \mu_0\, \gamma_0\, \omega$ et $k = (1 - i) / \delta = n\, \omega/C$, d'où $n = n_1 - i\, n_2 = (1 - i)\, (C / \delta\omega) = (1 - i)\, (\gamma / 2\varepsilon_0\omega)^{1/2}$
$\nu = 10^8$ Hz, $\omega = 6.28\ 10^8$ rd/s, $\delta = 16$ microns $<< \lambda = 3$ m
l'onde est évanescente (propagation + absprption)
4) $\omega >> 1/\tau$ implique $\gamma = - i\, n\, e^2 / m\omega$ et $k^2 = (\omega^2 - \omega_p^2) / C^2$
$n = 10^{29}$ m^{-3}, $\omega_p = 1.78\ 1016$ rd/s et $\lambda_p = 0.106$ micron, dans l'UV
5) $\omega > \omega_p$; k^2 réel positif, propagation pure de l'onde
6) $\omega < \omega_p$; k^2 réel négatif, donc k imaginaire pur: absorption pure de l'onde
Les ondes lumineuses visibles sont telles que $\lambda > \lambda_p$; elles sont absorbées et l'épaisseur

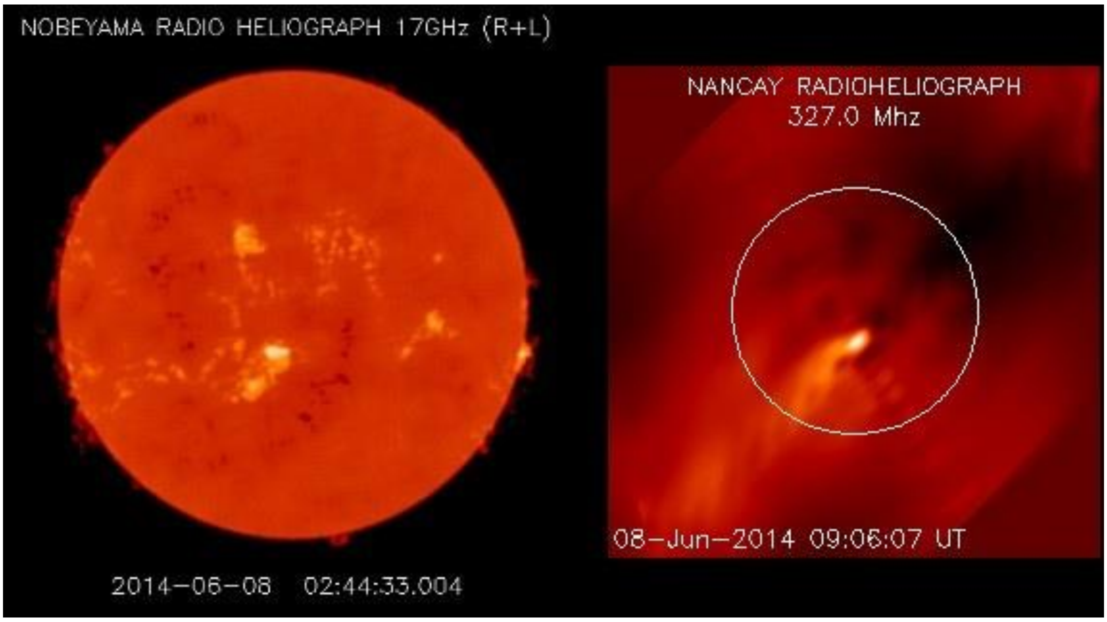
caractéristique d'absorption a pour ordre de grandeur la longueur d'onde.

Exercice 2: ondes électromagnétiques dans l'eau; comportement diélectrique ou conducteur ?

On s'intéresse à la propagation d'une onde plane progressive harmonique (OPPH) dans l'eau dont la conductivité est très variable selon sa nature:
eau pure: $\gamma = 5\ 10^{-6}$ S m^{-1}
eau douce: $\gamma = 0.03$ S m^{-1}
eau de mer: $\gamma = 5$ S m^{-1}
De même, la permittivité relative de l'eau $\varepsilon_r = \varepsilon / \varepsilon_0$ (nombre sans dimension rapport de la permittivité à celle du vide) varie beaucoup en fonction de la fréquence de l'onde:
domaine 1: $\nu \approx 5\ 10^{14}$ Hz: $\varepsilon_r = 1.77$
domaine 2: $\nu \approx 2.5\ 10^9$ Hz: $\varepsilon_r = 78 - 7\ i$ (i nombre imaginaire)
domaine 3: $\nu < 10^6$ Hz: $\varepsilon_r = 80$
1) Donner la longueur d'onde $\lambda = C/\nu$ dans le vide correspondant au domaine 1; de quelle partie du spectre électromagnétique s'agit-il (X, UV, visible, IR, radio) ?
2) Donner la longueur d'onde $\lambda = C/\nu$ dans le vide correspondant au domaine 2; de quelle partie du spectre électromagnétique s'agit-il (X, UV, visible, IR, radio) ?
3) Donner la longueur d'onde $\lambda = C/\nu$ dans le vide correspondant au domaine 3: de quelle partie du spectre électromagnétique s'agit-il (X, UV, visible, IR, radio) ?
4) l'indice de réfraction n du milieu (éventuellement complexe) est défini par $n = \sqrt{\varepsilon_r}$; que vaut n dans le domaine 1 ?
5) dans le domaine 2, ε_r est un nombre complexe; que celà signifie t-il pour l'onde (progressive sans absorption, progressive avec absorption, absorption pure) ?
6) Pour une OPPH dans un milieu neutre, de conductivité γ et de permittivité relative ε_r, on obtient à partir des équations de Maxwell la relation de dispersion:
$k^2 = \varepsilon_r\ \omega^2/C^2 - i\ \mu_0\ \gamma\ \omega$
On suppose dans la suite que ε_r est un nombre réel; donner l'expression de ω_c pour laquelle les deux termes $\varepsilon_r\ \omega^2/C^2$ et $\mu_0\ \gamma\ \omega$ sont égaux (rappel: $\varepsilon_0\ \mu_0\ C^2 = 1$).
7) que vaut numériquement $\nu_c = \omega_c/2\pi$ pour l'eau douce et l'eau salée ?
8) lorsque $\omega > \omega_c$ les propriétés diélectriques l'emportent et $k \approx \sqrt{\varepsilon_r}\ (\omega/C)$; donner en fonction de C et ε_r la vitesse de phase v_φ de l'onde; pour une onde du <u>domaine 1</u>, le comportement de l'eau <u>salée</u> est-il diélectrique ou conducteur ? Que vaut numériquement v_φ en km s^{-1}?
9) si $\omega < \omega_c$ les propriétés conductrices l'emportent; $k \approx (1 - i)/\delta$ où $\delta = [2/ (\mu_0\ \gamma\ \omega)]^{1/2}$ et l'onde est absorbée sur la longueur caractéristique δ appelée <u>épaisseur de peau</u>. Pour une onde du <u>domaine 3</u>, le comportement de l'eau <u>salée</u> est-il diélectrique ou conducteur ? Que vaut numériquement l'épaisseur de peau δ pour $\omega = 10^4$ rd/s ? Cette faible épaisseur explique pourquoi les sous marins ne peuvent communiquer qu'aux basses fréquences.

Réponses:
1) $\lambda = 6\ 10^{-7}$ m = 600 nm, domaine visible
2) $\lambda = 0.12$ m, domaine radio (Wifi, téléphone portable)
3) $\lambda > 300$ m, domaine radio (émissions radiophoniques)
4) n = 1.33
5) progressive avec absorption
6) $\omega_c = \gamma / (\varepsilon_0\ \varepsilon_r)$
7) 10^7 Hz pour l'eau douce; 10^9Hz pour l'eau salée
8) $v_\varphi = C/\sqrt{\varepsilon_r}$
diélectrique, $v_\varphi = 225\ 000$ km s^{-1}
9) conducteur
$\delta = 5.6$ m

Exercice 3: ondes électromagnétiques dans la couronne solaire et l'ionosphère terrestre



Lorsqu'une onde électromagnétique se propage dans un gaz ionisé globalement neutre comme l'atmosphère solaire, avec autant d'électrons que de protons (plasma), les électrons sont mis en mouvement par l'onde. La relation de dispersion des Ondes Planes Progressives Harmoniques (OPPH) s'écrit:

$k^2 = (\omega^2 - \omega_p^2) / C^2$

où k est le module du vecteur d'onde, C la vitesse de la lumière ($3\ 10^8$ m s^{-1}), ω la pulsation de l'onde et ω_p la pulsation plasma donnée par la relation $\omega_p^2 = n e^2 / (\varepsilon_0 m)$. n est le nombre d'électrons par unité de volume (densité électronique, unité m^{-3}), m la masse de l'électron, -e sa charge et ε_0 la permittivité du vide. On donne les valeurs numériques suivantes: $m = 9.1\ 10^{-31}$ kg, $e = 1.6\ 10^{-19}$ C, et $1/(4\pi\varepsilon_0) = 9\ 10^9$ SI.

1) les ondes se propagent-elles si $\omega < \omega_p$?
2) dans l'atmosphère solaire, la densité électronique n décroît avec l'altitude; quand on divise n par 100, par quel facteur varie la pulsation plasma ω_p ?
3) observer à des fréquences plasma diverses permet ainsi de sonder les différentes couches de l'atmosphère du soleil. A haute fréquence, observe t-on bas ou haut ?
4) quelle est la valeur de la densité électronique n qui correspond à la fréquence de 17 GHz (image de gauche) ?
5) quelle est la valeur de la densité électronique n qui correspond à la fréquence de 327 MHz (image de droite) ?
6) l'ionosphère terrestre est une couche ionisée située à plus de 100 km d'altitude du sol. La densité électronique n y est de 10^{11} m^{-3}. Calculer la pulsation plasma ω_p, puis la fréquence plasma associée ν_p. Une onde radio de fréquence ν =1 MHz peut-elle s'y propager ?
aide: la pulsation ω vaut $2\pi\ \nu$, où ν est la fréquence

Réponses

1) non, ω_p est une pulsation de coupure.
2) 10
3) bas
4) $n = 3.6\ 10^{18}$ m^{-3}

c'est la chromosphère solaire
5) $n = 1.3\ 10^{15}\ m^{-3}$
c'est la basse couronne solaire
6) $\nu_p = 2.8$ MHz
Une onde de fréquence $\nu = 1$ MHz $< \nu_p$ ne s'y propage pas; elle est réfléchie. On met à profit cette propriété pour propager sur des longues distances les ondes radiophoniques par réflexion.

Exercice 4: comportement diélectrique ou conducteur de l'eau

L'eau possède à la fois des propriétés diélectriques et conductrices. Soit ε_r sa permittivité relative et γ sa conductivité.

1) Donner les 4 équations de Maxwell dans un milieu diélectrique LHI neutre ($\rho = 0$) et conducteur (régi par la loi d'Ohm $\mathbf{j} = \gamma\ \mathbf{E}$), de permittivité complexe ε.
2) Sachant que $\mathbf{rot}\ \mathbf{rot}\ \mathbf{E} = \mathbf{grad}\ \mathrm{div}\ \mathbf{E} - \Delta\mathbf{E}$, déduire des équations de Maxwell une équation pour le champ électrique **E**.
3) en recherchant **E** sous la forme d'une OPPH de la forme $\mathbf{E} = \mathbf{E_0}\ e^{i(\omega t - \mathbf{k.r})}$, et en utilisant la formulation des opérateurs Δ, $\partial/\partial t$ et $\partial^2/\partial t^2$ pour les OPPH, montrer que la relation de dispersion s'écrit:

$$k^2 = \varepsilon_r\ (\omega/C)^2 - i\ (\mu_0\ \gamma\ \omega)$$

Rechercher l'expression de la pulsation ω_c (en fonction de γ, ε_0 et ε_r) qui égalise les deux termes de la relation de dispersion, $\varepsilon_r\ (\omega/C)^2$ et $\mu_0\ \gamma\ \omega$, et qui définit ainsi deux domaines:
$\omega << \omega_c$ comportement conducteur avec $k \approx (1 - i)\ (\mu_0\ \gamma\ \omega / 2)^{1/2}$
$\omega >> \omega_c$ comportement diélectrique avec $k \approx \sqrt{\varepsilon_r}\ (\omega/C)$
4) pour une eau douce et des ondes décimétriques (micro ondes) de pulsation $\omega = 10^{10}$ rd/s, on donne: $\gamma = 0.001\ S\ m^{-1}$ et $\varepsilon_r = (80 - 10\ i) = (8.96 - 0.56\ i)^2$
- calculez ω_c (on prendra pour simplifier ce calcul $\varepsilon_r \approx 80$ et $\varepsilon_0 \approx 10^{-11}$ SI)
- quel comportement domine (diélectrique ? conducteur ?)
- que signifie pour le milieu l'existence d'une partie imaginaire dans ε_r ?
- que vaut la profondeur typique de pénétration des micro ondes $\delta = C / (n_2\ \omega)$ dans l'eau ?
remarque: cette propriété est mise à profit dans les fours à micro ondes
5) pour une eau de mer et des ondes kilométriques de pulsation $\omega = 10^6$ rd/s, on donne $\gamma = 5\ S\ m^{-1}$ et $\varepsilon_r = 80$
- calculez ω_c (on prendra $\varepsilon_0 \approx 10^{-11}$ SI)
- quel comportement domine (diélectrique ? conducteur ?)
- que vaut l'épaisseur de peau (ou profondeur de pénétration typique) de l'onde kilométrique dans l'eau de mer, $\delta = [2/(\mu_0\ \gamma\ \omega)]^{1/2}$? (on prendra $\mu_0 \approx 10^{-6}$ SI)
remarque: les sous marins doivent remonter une antenne sous la surface pour communiquer avec leur base à cette pulsation, où bien utiliser des pulsations beaucoup plus basses, ce qui réduit beaucoup le débit de données

Réponses:
1) $\mathrm{div}\ \mathbf{E} = 0$
$\mathbf{rot}\ \mathbf{E} = -\ \partial\mathbf{B}/\partial t$
$\mathrm{div}\ \mathbf{B} = 0$
$\mathbf{rot}\ \mathbf{B} = \mu_0\ \gamma\ \mathbf{E} + \mu_0\ \varepsilon\ \partial\mathbf{E}/\partial t$
2) $\Delta\mathbf{E} = \mu_0\ \gamma\ \partial\mathbf{E}/\partial t + \mu_0\ \varepsilon\ \partial^2\mathbf{E}/\partial t^2$
3) $k^2 = \varepsilon_r\ (\omega/C)^2 - i\ (\mu_0\ \gamma\ \omega)$
$\omega_c = \gamma / (\varepsilon_0\ \varepsilon_r)$
4) $\omega_c = 1.25\ 10^6$ rd/s $<< \omega$
comportement diélectrique

milieu diélectrique absorbant
$\delta = 5.4$ cm
5) $\omega_c = 6.25\ 10^9$ rd/s >> ω
comportement conducteur
$\delta = 63$ cm

Annexes

Formulaires

CPES 2 - Rappels de trigonométrie - formules en bleu à savoir par coeur

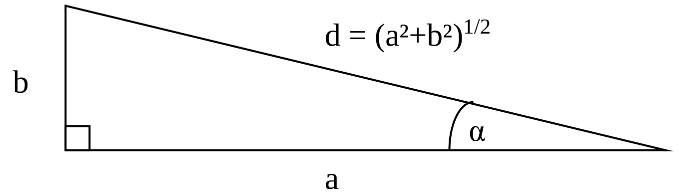
Dans le triangle rectangle

$\sin(\alpha)$ = côté opposé/hypoténuse et $\cos(\alpha)$ = côté adjacent/hypoténuse
et $\tan(\alpha)$ = côté opposé/adjacent = $\sin(\alpha)/\cos(\alpha)$

Remarque: $\text{cotan}(\alpha) = 1/\tan(\alpha)$

Projections (a, b, d sont les longueurs des côtés du triangle rectangle):

$d\cos(\alpha) = a$
$d\sin(\alpha) = b$
$\tan(\alpha) = b/a$



Quelques formules de base

Les angles s'expriment en radians (rd); π rd = 180°; $\pi \sim 3.1415926535$

$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$
$e^{-ix} = \cos(x) - i\sin(x)$ $\rightarrow \cos(x) = [e^{ix} + e^{-ix}] / 2$ et $\sin(x) = [e^{ix} - e^{-ix}] / 2i$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$\rightarrow 1 + \tan^2 x = 1 / \cos^2 x$ (diviser par $\cos^2 x$ la formule ci dessus)

$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$ $\rightarrow$ $\cos(x-y)$ en changeant y en -y

$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$ $\rightarrow$ $\sin(x-y)$ en changeant y en -y

Cas particulier de l'angle double (x = y); on déduit des deux formules ci dessus:

$x = y \rightarrow \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$
$\rightarrow \cos^2 x = [1 + \cos(2x)] / 2$
$\rightarrow \sin^2 x = [1 - \cos(2x)] / 2$
$x = y \rightarrow \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

Dérivées usuelles comportant une fonction u(x) de dérivée notée u'(x)

$(\sin u)' = u' \cos u$ $\rightarrow$ $(\sin x)' = \cos x$
$(\cos u)' = - u' \sin u$ $\rightarrow$ $(\cos x)' = - \sin x$ (attention au signe !)
$(\tan u)' = u' / \cos^2 u$ $\rightarrow$ $(\tan x)' = 1/\cos^2 x$

Primitives usuelles (à déduire des dérivées)

la primitive de $(u' \cos u)$ est $\sin u$ $\rightarrow$ la primitive de $\cos x$ est $\sin x$
la primitive de $(u' \sin u)$ est $- \cos u$ $\rightarrow$ la primitive de $\sin x$ est $- \cos x$ (attention au signe !)
la primitive de $u' / \cos^2 u$ est $\tan u$ $\rightarrow$ la primitive de $1 / \cos^2 x$ est $\tan x$

CPES 2 - Révisions de mécanique du point matériel

(les vecteurs sont en caractères **gras**)

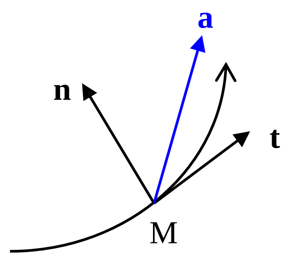
Cinématique

- vitesse $\mathbf{v}$ d'une particule de masse m située au point M dans un repère d'origine O
  $\mathbf{v} = d\mathbf{OM}/dt$ (unité: m s^{-1})

- quantité de mouvement ou impulsion $\mathbf{p} = m\,\mathbf{v}$ (unité: kg m s^{-1})

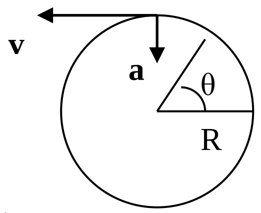
- accélération $\mathbf{a}$ d'une particule de masse m située au point M dans un repère d'origine O
  $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt = d^2\mathbf{OM}/dt^2$ (unité: m s^{-2})

- Dans le repère de Frênet lié à la masse m (repère **t, n** où **t** est le vecteur unitaire tangent à la trajectoire et **n** est le vecteur unitaire normal en M), on a:
  $\mathbf{v} = v\,\mathbf{t}$ (**v** vitesse vectorielle, v vitesse algébrique)
  $\mathbf{a} = (dv/dt)\;\mathbf{t} + (v^2/R)\;\mathbf{n}$



  R est le rayon de courbure (varie le long de la trajectoire)

- mouvement circulaire de rayon R
  la vitesse angulaire est $d\theta/dt$ (unité: radian s^{-1}) de sorte que
  $\mathbf{v} = R\,(d\theta/dt)\,\mathbf{t}$
  $\mathbf{a} = R\,(d^2\theta/dt^2)\,\mathbf{t} + R\,(d\theta/dt)^2\;\mathbf{n}$



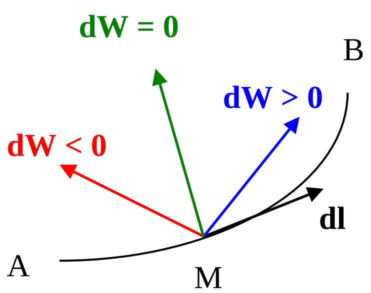
  exemple: à vitesse angulaire $d\theta/dt = \omega =$ constante (rd s^{-1})
  le vecteur vitesse est $\mathbf{v} = \omega R\,\mathbf{t}$ et en valeur algébrique $v = \omega R$
  le vecteur accélération $\mathbf{a}$ est normal au cercle et centripète: $\mathbf{a} = \omega^2 R\,\mathbf{n} = (v^2/R)\,\mathbf{n}$

Dynamique

- PFD ou Principe Fondamental de la Dynamique:
  $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}$ (somme des forces appliquée au point matériel, unité N ou Newton)
  ou encore $d\mathbf{p}/dt = m\,d\mathbf{v}/dt = m\,\mathbf{a} = \mathbf{F}$

- Travail d'une force $dW = \mathbf{F}\,.\,\mathbf{dl}$
  lors d'un déplacement du point A vers le point B

  $W_{AB} = \int_A^B \mathbf{F}\,.\,\mathbf{dl}$ (unité: J ou Joule)



  c'est un produit scalaire, le travail est moteur si > 0
  résistant si < 0

  *La force **F** appliquée à la masse m en M est représentée par les vecteurs colorés.*
  dl** est tangent à la trajectoire: c'est le déplacement élémentaire de la masse m qui subit **F

  *exemple: lors d'un déplacement horizontal, le poids m **g** ne travaille pas*

- Puissance instantanée d'une force $P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ (unité: W ou Watt)
(produit scalaire de la force avec la vitesse du point matériel, peut être > 0 ou < 0)

- Energie cinétique $Ec = 1/2\ m\ v^2$ (unité: J ou Joule)

- théorème de l'énergie cinétique de la position A vers B: $Ec_B - Ec_A = W_{AB}$

démonstration simple à partir du PFD: $m\ d\mathbf{v}/dt = \mathbf{F}$
effectuons le produit scalaire avec le vecteur vitesse $\mathbf{v} = d\mathbf{OM}/dt$:
$m\ \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}/dt = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$
donc $dEc/dt = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{OM}/dt$
$dEc = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{OM}$

et de A vers B: $\int_A^B dEc = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{OM}$ c'est à dire $Ec(B) - Ec(A) = W_{AB}$

- Force dérivant d'une énergie potentielle: $\mathbf{F} = -\ \mathbf{grad}\ Ep$
Ep est la fonction énergie potentielle (unité: J ou Joule); elle dépend des variables de position.

exemples de forces et d'énergie potentielle associée :
* poids $m\ \mathbf{g}$, $Ep(z) = m\ g\ z$ (z = hauteur de la massse m)
* force de gravitation entre deux masses m et m' distantes de r
loi de Newton $\mathbf{F} = -\ K\ m\ m'/r^2\ \mathbf{u}$, $Ep(r) = -\ Km\ m' / r$
* force électrique entre deux charges q et q' distantes de r
loi de Coulomb $\mathbf{F} = q\ q'/4\pi\varepsilon_0 r^2\ \mathbf{u}$, $Ep(r) = (1/4\pi\varepsilon_0)\ q\ q' / r$
* force de rappel d'un ressort d'allongement x
$F = -\ k\ x$, $Ep(x) = 1/2\ k\ x^2$

- Principe de conservation de l'énergie mécanique lorsque la force dérive d'une énergie potentielle :
on a vu ci dessus dans la démonstration du théorème de l'énergie cinétique que:
$dEc = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{OM}$
Pour une force dérivant d'une énergie potentielle, $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{OM} = -\ \mathbf{grad}(Ep) \cdot \mathbf{dOM} = -\ dEp$
D'où $dEc + dEp = 0$

$Ec + Ep = \text{constante}$ (unité: J ou Joule)

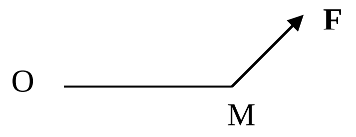
Il n'y a pas conservation de l'énergie mécanique en cas de dissipation par frottement
(les forces de frottement ne dérivent pas d'un potentiel).

exemple: masse m dans le champ de pesanteur : $1/2\ m\ v^2 + m\ g\ z = \text{constante}$

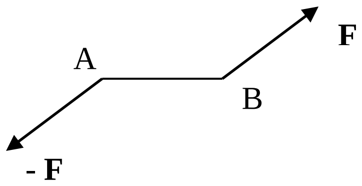
Dynamique des mouvements de rotation

Imaginons que la masse m en M effectue un mouvement de rotation autour du point O.

- Moment de la force au point O: $\mathcal{M}_O = \mathbf{OM} \wedge \mathbf{F}$
(unité N m)
La force $\mathbf{F}$ est appliquée au point M.
En norme, le moment est maximal lorsque
OM et **F** sont orthogonaux (il est nul s'ils sont colinéaires)



- Notion de <u>couple</u> de forces
Il s'agit de la somme des moments en O de deux forces **F** et **- F** égales en norme mais opposées en direction



$\mathcal{M}_O = \mathbf{OA} \wedge (-\mathbf{F}) + \mathbf{OB} \wedge \mathbf{F} = (\mathbf{AO} + \mathbf{OB}) \wedge \mathbf{F} = \mathbf{AB} \wedge \mathbf{F}$

est indépendant de O (unité N m); on écrira alors que le couple de forces est $\mathcal{C} = \mathbf{AB} \wedge \mathbf{F}$

exemple: action d'un tournevis sur la tête d'une vis.

- <u>Moment cinétique</u> en O de la masse m située au point M: $\mathbf{K_O} = \mathbf{OM} \wedge \mathbf{p}$
C'est le moment en O de la quantité de mouvement $\mathbf{p} = m\,\mathbf{v}$ (unité: $m^2\ kg\ s^{-1}$)
Le moment cinétique est une notion utile pour décrire les mouvements de rotation.

exemple1: dans un mouvement circulaire uniforme de rayon R à la vitesse angulaire ω, on a en norme: $v = \omega R$, $p = m v = m \omega R$, $K_O = R p = m \omega R^2$

exemple2: dans un mouvement à force centrale, la valeur du moment cinétique est lié à la constante des aires $C = r^2\, d\theta/dt$ par la relation simple $K_O = m r^2\, d\theta/dt = m C =$ constante.

exemple3: le moment cinétique de l'électron de l'atome d'Hydrogène est quantifié par la relation de Bohr: $K_O = n \hbar$ où n est un nombre entier positif. La constante de Planck réduite $\hbar = h/2\pi$ apparaît donc comme un <u>quantum</u> de moment cinétique.

- <u>théorème du moment cinétique</u>: $d\mathbf{K_O}/dt = \mathbf{OM} \wedge \mathbf{F}$
c'est l'analogue du PFD, pour les mouvements de rotation d'une masse m située au point M.

démonstration simple:
$\mathbf{K_O} = \mathbf{OM} \wedge \mathbf{p}$
dérivons par rapport au temps:
$d\mathbf{K_O}/dt = d\mathbf{OM}/dt \wedge \mathbf{p} + \mathbf{OM} \wedge d\mathbf{p}/dt$
or $d\mathbf{OM}/dt = \mathbf{v}$ et $\mathbf{p} = m\,\mathbf{v}$ sont colinéaires (produit vectoriel nul) et d'après le PFD, on a:
$d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}$ d'où
$d\mathbf{K_O}/dt = \mathbf{OM} \wedge \mathbf{F}$

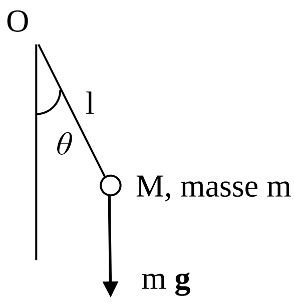
exemple: mouvement du pendule de longueur l dans le champ de pesanteur g

On a un mouvement de rotation circulaire :

$K_O = m l^2\, d\theta/dt$ *(en valeur algébrique)*

$\rightarrow\ dK_O/dt = m l^2\, d^2\theta/dt^2$

le moment du poids par rapport à O est:
$\mathcal{M}_O = - m g l \sin\theta$ *(en valeur algébrique)*



$\rightarrow\ m l^2\, d^2\theta/dt^2 + m g l \sin\theta = 0$

et pour les petits mouvements ($\theta << 1$), $d^2\theta/dt^2 + (g/l)\,\theta = 0$

c'est un mouvement périodique de période $T = 2\pi\,(l/g)^{1/2}$

Utilisation de la notation complexe pour les quantités harmoniques rencontrées en électromagnétisme

1 - Représentation complexe d'une quantité harmonique

Soit un signal harmonique $\boxed{x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)}$

A est l'amplitude du signal, φ est sa phase (entre 0 et 2π radians) et ω sa pulsation (en radians/s). La période de ce signal est $T = 2\pi/\omega$ et sa fréquence est $\nu = 1/T = \omega/2\pi$.

Il est beaucoup plus facile de résoudre des équations différentielles linéaires en utilisant la notation complexe suivante:

posons $\boxed{x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) = \mathrm{Re}\,[A\, e^{i(\omega t+\varphi)}] = \mathrm{Re}\,(X\, e^{i\omega t})}$

où Re désigne la <u>partie réelle</u> de la quantité complexe; X désigne <u>l'amplitude complexe</u> du signal. Cette amplitude complexe X est reliée à l'amplitude réelle A et à la phase φ par:

$\boxed{X = A\, e^{i\varphi}}$

En physique, on confond souvent $x(t) = X\, e^{i\omega t} = A\, e^{i(\omega t+\varphi)}$ avec sa partie réelle qu'on écrit souvent *par abus de langage de la même manière*, soit $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$. Il faut simplement se souvenir que seule la partie réelle de $x(t) = X\, e^{i\omega t}$ avec $X = A\, e^{i\varphi}$ possède un sens physique.

2 - Valeur moyenne et valeur quadratique moyenne

a - <u>valeur moyenne de $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ sur une période $T = 2\pi/\omega$</u>

On la note $<x>$ et elle est nulle.

La notation complexe $x(t) = X\, e^{i\omega t}$ où $X = A\, e^{i\varphi}$ ne perturbe pas ce résultat, sa moyenne est bien nulle sur une période.

b - <u>valeur moyenne de $x^2(t) = A^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$ sur une période $T = 2\pi/\omega$</u>

On la note $<x^2>$ et elle vaut $A^2/2$.

Cependant, $x^2(t) = A^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$ <u>n'est pas</u> la partie réelle de $(X\, e^{i\omega t})^2$, en effet la valeur moyenne de cette quantité complexe est nulle, car sa partie réelle est un cosinus de l'angle double !

La formule qui donne la valeur quadratique moyenne de la représentation complexe $x(t) = X\, e^{i\omega t}$ est:

$$\boxed{<x^2> = 1/2\ \mathrm{Re}\,(x\, x^*) = 1/2\ \mathrm{Re}\,(X\, X^*) = 1/2\ |X|^2 = A^2/2}$$

où * désigne la quantité <u>conjuguée</u> (changer i en -i).

c - <u>valeur moyenne d'un produit de deux signaux harmoniques</u> $x(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ et $y(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$ sur une période $T = 2\pi/\omega$

On la note $<xy>$ et elle vaut $1/2\ A_1A_2 \cos(\varphi_1-\varphi_2)$; cette quantité peut être négative.

En notation complexe,

$x(t) = X\, e^{i\omega t}$ et $y(t) = Y\, e^{i\omega t}$

où $X = |X|\, e^{i\varphi_1} = A_1\, e^{i\varphi_1}$ et $Y = |Y|\, e^{i\varphi_2} = A_2\, e^{i\varphi_2}$

$$\boxed{\langle xy\rangle = 1/2\ \mathrm{Re}\,(x\, y^*) = 1/2\ \mathrm{Re}\,(X\, Y^*) = 1/2\ |X|\,|Y|\ \mathrm{Re}\,(e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}) = 1/2\ A_1A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Remarque: $\mathrm{Re}\,(x\, y^*) = \mathrm{Re}\,(x^*\, y)$.

3 - Dérivées temporelles

La notation complexe est très commode en ce qui concerne la dérivation.

En effet si $x(t) = X\, e^{i\omega t}$, on aura :

$dx(t)/dt = i\omega\, X\, e^{i\omega t}$ et $d^2x(t)/dt^2 = -\ \omega^2\, X\, e^{i\omega t}$

donc la dérivation est une opération multiplication par $i\omega$

$$\boxed{dx(t)/dt = i\omega\, x(t) \quad \text{et} \quad d^2x(t)/dt^2 = -\ \omega^2\, x(t)}$$

<u>*Conséquence*</u>:

$\langle x\, dx/dt\rangle = 1/2\ \mathrm{Re}\,(x\, dx/dt^*) = 1/2\ \mathrm{Re}\,[x\,(-i\omega\, x^*)] = \omega/2\ |x|^2\ \mathrm{Re}\,(-i) = 0$

De même, l'intégration est une division par $i\omega$

Constantes physiques

Constante de Planck	h	$= 6,62617 \,.\, 10^{-34}$ J.s
Vitesse de la lumière	c	$= 2,99792458 \,.\, 10^{8}$ m.s^{-1}
Charge élémentaire	e	$= 1,60219 \,.\, 10^{-19}$ C
Constante gravitationnelle	G	$= 6,672 \,.\, 10^{-11}$ N.m^{2}.kg^{-2}
Nombre d'Avogadro	$\mathcal{N}_A$	$= 6,02204 \,.\, 10^{23}$ mol^{-1}
Constante de Boltzmann	k_B	$= 1,38066 \,.\, 10^{-23}$ J.K^{-1}
Constante de Faraday	$\mathcal{F}$	$= 96\,484$ C.mol^{-1}
Constante des gaz parfaits	R	$= 8,3144$ J.K^{-1}.mol^{-1}
Masse de l'électron	m_e	$= 9,10953 \,.\, 10^{-31}$ kg
Masse du neutron	m_n	$= 1,675 \,.\, 10^{-27}$ kg
Masse du proton	m_p	$= 1,673 \,.\, 10^{-27}$ kg
Permittivité du vide	ε_0	$= 8,85419 \,.\, 10^{-12}$ F.m^{-1}
Perméabilité du vide	μ_0	$= 4\,\pi \,.\, 10^{-7}$ H.m^{-1}

Unités

Unités fondamentales

Grandeur physique	Unité	Symbole
Temps	Seconde	s
Longueur	Mètre	m
Masse	Kilogramme	kg
Température	Kelvin	K
Quantité de matière	Mole	mol
Courant électrique	Ampère	A
Intensité lumineuse	Candela	cd

Unités dérivées courantes

Grandeur physique	Unité (Symbole)	Expression
Fréquence	Hertz (Hz)	s^{-1}
Force	Newton (N)	kg m s^{-2}
Énergie	Joule (J)	kg m^{2} s^{-2}
Puissance	Watt (W)	J s^{-1}
Pression	Pascal (Pa)	N m^{-2}
Charge électrique	Coulomb (C)	A s
Potentiel électrique	Volt (V)	kg m^{2} A^{-1} s^{-3}
Champ magnétique	Tesla (T)	kg A^{-1} s^{-2}
Flux magnétique	Weber (Wb)	T m^{2}
Conductivité électrique	Siemens (S)	A^{2} kg^{-1} s^{3} m^{-3}
Résistance électrique	Ohm (Ω)	kg m^{2} A^{-2} s^{-3}
Capacité électrique	Farad (F)	A^{2} s^{4} kg^{-1} m^{-2}
Inductance	Henry (H)	kg m^{2} A^{-2} s^{-2}

Cours détaillé du MOOC Electromagnétisme PSL

Niveau L2, MOOC ouvert en permanence
(mais sans forum ni évaluation des apprenants, il suffit de s'inscrire sur la page d'accueil, c'est gratuit)

Comprend 10 semaines de cours en vidéo et des exercices auto corrigés à cette adresse :

https://www.fun-mooc.fr/courses/OBSPM/62002/session01/about

- Analyse vectorielle
- Force de Lorentz, mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique et dans un champ magnétique (1)
- Mouvement d'une particule chargée (2) : équation horaire, oscillateur harmonique, effet Zeeman, effet d'une onde sur un électron
- Electrostatique : les charges source de champ électrique
- Magnétostatique : les courants source de champ magnétique
- Équations de Maxwell en régime variable, locales et globales
- Force de Laplace, loi d'Ohm, Induction et régime ARQS
- Ondes dans le vide et dans un milieu diélectrique
- Aspects énergétiques des ondes : équation de conservation de l'énergie électromagnétique

1 - Analyse vectorielle

Champs scalaires et vectoriels
Produit scalaire, produit vectoriel
Produit mixte, double produit vectoriel
Dérivées partielles et différentielles
Gradient
Potentiel
Lignes de champ et lignes ou surfaces équipotentielles

Opérateur divergence
Opérateur rotationnel
Formules d’utilisation courante
Opérateur Laplacien

Coordonnées cylindriques, polaires
Coordonnées sphériques

Circulation d’un champ vectoriel sur un chemin
Flux d’un champ vectoriel à travers une surface fermée ou ouverte

Théorème de Stokes « circulation / rotationnel »
Théorème d'Ostrogradski « flux / divergence »

2 - charges dans un champ électrique et magnétique (I)

Force de Lorentz
Orientation de la force magnétique
Travail et puissance de la force de Lorentz
Loi de conservation de l'énergie mécanique
Application : Le canon à électrons

Mouvement dans un champ électrique uniforme et constant
Équations horaires
Application : Oscilloscope à écran cathodique
Application : Expérience de Millikan

Mouvement dans un champ magnétique uniforme et constant
Vitesse de dérive et vitesse de giration
Pulsation gyromagnétique et rayon de giration
Application : Effet de miroirs magnétiques
Application : Chambre à bulles
Application : Cyclotron et synchrotron

3 - charges dans un champ électrique et magnétique (II)

Équations horaires du mouvement dans un champ magnétique uniforme et constant
Application : Guidage par un champ magnétique

Oscillateur harmonique dans un champ magnétique : effet Zeeman
Écart de pulsations et mesure du champ magnétique à distance

Oscillateur harmonique excité par une onde électromagnétique
Section efficace d'interaction matière-rayonnement
Application : Profil d'amortissement d'une raie en fréquence
Application : le profil des raies spectrales du soleil
Application : Exploration en altitude de l’atmosphère solaire

4 - ELECTROSTATIQUE

Équations de Maxwell en régime stationnaire
Électrostatique
Champ et potentiel électrostatiques
Théorème de Gauss de l'électrostatique
Utilisation du théorème de Gauss

Analogie électrostatique/gravitation
Théorème de Gauss de la gravitation

5 - MAGNETOSTATIQUE

Loi de Biot et Savart
Exemple : Les champs potentiels
Dipôle magnétique
Théorème d'Ampère de la magnétostatique
Application : Champ magnétique crée par un cylindre infini

6 - Equations de Maxwell en régime variable, locales et globales

Les équations de Maxwell locales
Relation champs-potentiels et équation de conservation de la charge
Milieu conducteur et charge électrique
Équations de Maxwell globales dans un milieu conducteur
Comparaison équations locales - équations globales

7 - Force de Laplace, loi d’OHM, régime ARQS et induction magnétique

Force de Laplace
Application : Protubérances solaires
Loi d'Ohm pour un milieu conducteur
Approximation des Régimes Quasi Stationnaires (ARQS)
ARQS et Loi des nœuds

Loi de Faraday
Exemple d'induction magnétique
Loi d'Ohm généralisée pour un circuit
Exemple : Induction dans un circuit fermé

8 - Ondes dans le vide et dans un milieu diélectrique

Équations de Maxwell et ondes électromagnétiques dans le vide
Composante électrique et magnétique de l'onde, OPPH
Spectre des ondes électromagnétiques

Équations de Maxwell et ondes électromagnétiques dans un diélectrique
Milieu LHI et solution de type OPPH
Paquet d'ondes
Application : Ondes dans la couronne solaire (approche diélectrique du plasma)

9 – Aspects énergétiques des ondes, équation de conservation de l'énergie électromagnétique

Vecteur de Poynting (puissance transportée), énergie électrique et magnétique
Forme locale et globale de l'équation de conservation de l'énergie électromagnétique
Application : Plasma d'électrons mobiles
Application : Spire de courant dans un champ magnétique extérieur
Application : Transport de l'énergie par une onde en milieu LHI

MOOC (ASTRO)PHYSIQUE I : ÉLECTROMAGNÉTISME

J.M. Malherbe*

Automne 2016

COURS

AV I Éléments d'analyse vectorielle

Ci dessous, $f(x, y, z)$ désigne un champ scalaire : c'est une fonction des variables (x, y, z).
$\vec{A}(A_x, A_y, A_z)$, $\vec{B}(B_x, B_y, B_z)$ et $\overrightarrow{C}(C_x, C_y, C_z)$ désignent des champs vectoriels, chaque composante est un champ scalaire dépendant des variables spatiales (x, y, z).

AV I.1 Rappels sur les vecteurs

Le produit scalaire

Le produit scalaire de deux vecteurs est un nombre positif ou négatif

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = \|\vec{A}\| \times \|\vec{B}\| cos(\vec{A}, \vec{B})$$

Le produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux est nul.

$$\|\vec{A}\|^2 = \vec{A}^2 = \vec{A} \cdot \vec{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$$

Le produit vectoriel

Le produit vectoriel de deux vecteurs est un vecteur

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y, A_z B_x - A_x B_z, A_x B_y - A_y B_x)$$

$\vec{A} \wedge \vec{B}$ est un vecteur orthogonal à la fois à $\vec{A}$ et à $\vec{B}$

$$\|\vec{A} \wedge \vec{B}\| = \|\vec{A}\| \times \|\vec{B}\| \times |sin(\vec{A}, \vec{B})|$$

Le produit vectoriel de deux vecteurs colinéraires est nul. $\|\vec{A} \wedge \vec{B}\|$ représente l'aire du parallélogramme généré par $\vec{A}, \vec{B}$.

Orientation du produit vectoriel : Règle des doigts de la main droite : $\vec{A}$ = pouce ; $\vec{B}$ = index ; $\vec{A} \wedge \vec{B}$ = majeur.

*LESIA, Observatoire de Paris, PSL Research University, CNRS, Université Pierre et Marie Curie, Université Denis Diderot, 92195 Meudon cedex, France

Le produit mixte

Le produit mixte de trois vecteurs est un nombre

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\wedge\vec{C}) = \vec{C}\cdot(\vec{A}\wedge\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\vec{C}\wedge\vec{A})$$

est invariant par permutation circulaire
$\|\vec{A}\cdot(\vec{B}\wedge\vec{C})\|$ représente le volume du prisme droit généré par $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$.
Dès que deux vecteurs sont colinéaires, le produit mixte est nul.

Le double produit vectoriel

Le double produit vectoriel de trois vecteurs est un vecteur

$$\vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B} - (\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$$

n'a pas de composante sur $\vec{A}$ puisqu'il lui est orthogonal.

AV I.2 Dérivées partielles, différentielle d'une fonction

Dérivées partielles

Soit $f(x,y,z)$ une fonction des variables spatiales x,y,z
- $\partial f/\partial x$ est la dérivée de la fonction par rapport à x en considérant y et z comme des constantes,
- $\partial f/\partial y$ est la dérivée de la fonction par rapport à y en considérant x et z comme des constantes,
- $\partial f/\partial z$ est la dérivée de la fonction par rapport à z en considérant x et y comme des constantes.

Différentielle

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

est la différentielle de $f(x,y,z)$; elle représente les variations de $f(x,y,z)$ lorsque x varie de x à $x+dx$, y de y à $y+dy$ et z de z à $z+dz$.

AV I.3 Les opérateurs

Ils agissent soit sur des champs scalaires, soit sur des champs vectoriels. En coordonnées cartésiennes, on définit :

L'opérateur « *nabla* » :

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

L'opérateur *gradient* :

$$\overrightarrow{grad}\, f = \vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

Remarque : $df = \overrightarrow{grad}\, f \cdot \overrightarrow{dOM}$ avec $\overrightarrow{dOM}(dx, dy, dz)$

L'opérateur *divergence* :

$$div\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

(produit scalaire de $\vec{\nabla}$ et $\vec{A}$).

L'opérateur *rotationnel* :

$$\overrightarrow{rot}\vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

(produit vectoriel de $\vec{\nabla}$ et $\vec{A}$) tel que :

$$\overrightarrow{rot}\vec{A} = \begin{pmatrix} \partial A_z/\partial y - \partial A_y/\partial z \\ \partial A_x/\partial z - \partial A_z/\partial x \\ \partial A_y/\partial x - \partial A_x/\partial y \end{pmatrix}$$

Remarques :

— Le gradient s'applique à un champ scalaire et le résultat est un champ vectoriel.

— La divergence s'applique à un champ vectoriel et le résultat est un champ scalaire.

— Le rotationnel s'applique à un champ vectoriel et le résultat est un champ vectoriel.

Quelques formules très utiles

Le rotationnel d'un gradient est nul :

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{grad}\, f\right) = \vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla} f\right) = \vec{0}$$

La divergence d'un rotationnel est nulle :

$$div\left(\overrightarrow{rot}\vec{A}\right) = \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{A}\right) = 0$$

Divergence et rotaionnelle du produit $f\vec{A}$ d'un champ scalaire f par un champ vectoriel $\vec{A}$:

$$div(f\vec{A}) = f\, div\vec{A} + \overrightarrow{grad}\, f \cdot \vec{A}$$

$$\overrightarrow{rot}(f\vec{A}) = f\, \overrightarrow{rot}\vec{A} + \overrightarrow{grad}\, f \wedge \vec{A}$$

Cas particulier : si $\vec{A}$ est un vecteur fixe indépendant des coordonnées de l'espace :

$$div(f\vec{A}) = \overrightarrow{grad}\, f \cdot \vec{A}$$

$$\overrightarrow{rot}(f\vec{A}) = \overrightarrow{grad}\, f \wedge \vec{A}$$

Divergence d'un produit vectoriel :

$$div\,(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B}\, \overrightarrow{rot}\vec{A} - \vec{A}\, \overrightarrow{rot}\vec{B}$$

Carré d'un champ vectoriel :

$$\overrightarrow{grad}\,(\vec{A}^2/2) = \vec{A} \wedge \overrightarrow{rot}\vec{A} + \left(\vec{A} \cdot \overrightarrow{grad}\right) \vec{A}$$

Rotationnel d'un rotationnel :

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\vec{A}) = \overrightarrow{grad}(div\vec{A}) - \Delta\vec{A}$$

Laplacien scalaire

Il est défini par

$$\Delta f = \vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = div(\overrightarrow{grad}\, f)$$

Laplacien vectoriel

Il est défini par

$$\Delta\vec{A} = \overrightarrow{grad}(div\vec{A}) - \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\vec{A})$$

En coordonnées cartésiennes, on peut écrire $\Delta\vec{A} = (\Delta A_x, \Delta A_y, \Delta A_z)$ ou Δ est le Laplacien scalaire ; ce n'est pas vrai dans les autres systèmes de coordonnées (cylindriques et sphériques).
Le Laplacien s'applique à un champ scalaire ou vectoriel et le résultat est de même nature.

AV I.4 Systèmes de coordonnées

Coordonnées cylindriques $M(r, \theta, z)$**, trièdre mobile** $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$

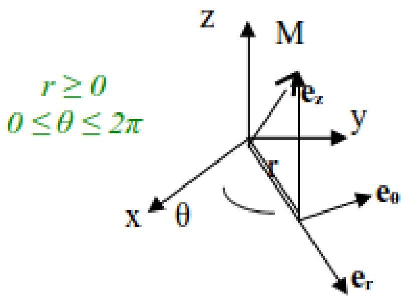


FIGURE 1 – Système de coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e_r} + z\vec{e_z}$$

$$\overrightarrow{grad}\, f = \left[\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{\partial f}{\partial z}\right]$$

$$div\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right) \end{pmatrix}$$

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial(r\partial f/dr)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Coordonnées polaires $M(r,\theta)$ **planes, repère mobile** $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta})$

Ce sont les coordonnées cylindriques sans la 3ème dimension z

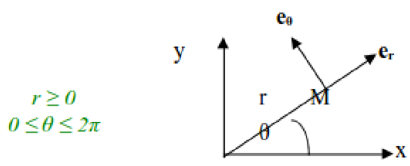


FIGURE 2 – Système de coordonnées polaires

$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r}$$

$$\overrightarrow{grad}\, f = \left[\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right]$$

$$div\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta}$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{A} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{e_z}$$

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial(r\partial f/dr)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$

Coordonnées sphériques $M(r, \theta, \varphi)$, trièdre mobile $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi})$

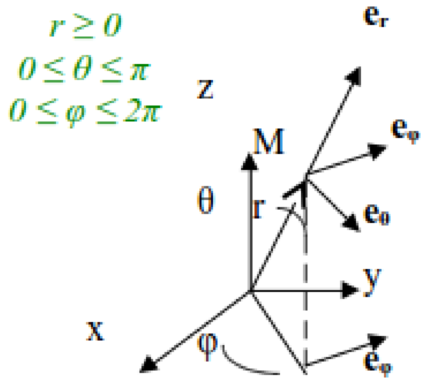


FIGURE 3 – Système de coordonnées sphériques

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e_r} \qquad (\vec{e_\varphi} \text{ appartient au plan } xOy)$$

$$\overrightarrow{grad}\, f = \left[\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{1}{r sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right]$$

$$div\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r sin\theta}\frac{\partial(sin\theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r sin\theta}\left(\frac{\partial(sin\theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right) \\ \frac{1}{r sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right) \end{pmatrix}$$

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(rf)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 sin\theta}\frac{\partial(sin\theta \partial f/\partial\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

AV I.5 Circulation et flux d'un champ vectoriel

Circulation d'un champ vectoriel $\vec{A}$ sur un contour

la circulation d'un champ vectoriel $\vec{A}$ sur un contour est l'intégrale curviligne $\int \vec{A}\cdot\overrightarrow{dl}$ où $\overrightarrow{dl}$ désigne un élément de contour ($\overrightarrow{dl}$ est tangent au contour en tout point). L'intégrale curviligne s'évalue entre un point de départ P et un point d'arrivée Q.

Si le contour est fermé, alors $P = Q$ et le signe $\int$ est barré d'un rond et la circulation s'écrit :

$$\boxed{\oint \vec{A}\cdot\overrightarrow{dl}}$$

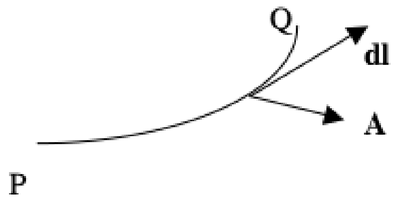


FIGURE 4 – Circulation sur un contour

Un champ vectoriel $\vec{A}$ dont la circulation est nulle sur tout contour fermé est dit à circulation conservative. C'est toujours vrai si $\vec{A}$ est un champ défini par $\vec{A} = \overrightarrow{grad}\, f$ où f est une fonction "potentiel" (exemple : champ de pesanteur, champ de gravitation, champ électrostatique).

Flux d'un champ vectoriel $\vec{A}$ sur une surface

Le flux d'un champ vectoriel $\vec{A}$ sur une surface est l'intégrale surfacique

$$\iint \vec{A} \cdot \overrightarrow{dS}$$

où $\overrightarrow{dS}$ désigne un élément de surface (le vecteur $\overrightarrow{dS} = \vec{n}\, dS$ est normal en tout point de la surface). Une surface qui entoure un volume est fermée : le vecteur $\overrightarrow{dS}$ est orienté vers l'extérieur. Une surface qui s'appuie sur un contour fermé est ouverte ; $\overrightarrow{dS}$ est orienté par le contour.

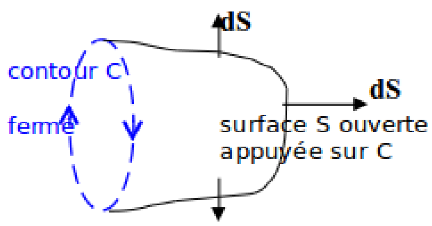


FIGURE 5 – Surface ouverte

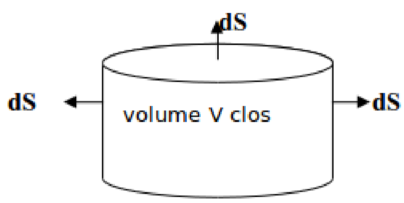


FIGURE 6 – Volume clos