

Modélisation de la Dynamique de la Garniture

2.1. Modèle Dynamique

Comme on l'a montré dans le chapitre précédent, le modèle dynamique de la garniture de forage devrait permettre de calculer le comportement de la garniture dans le régime transitoire en prenant en compte le couplage entre les différents modes de vibrations. Dans ce chapitre seront développées les équations qui régissent le mouvement de la garniture.

2.1.1. Présentation et Hypothèses

On considère une garniture de forage de longueur donnée, dont les rayons extérieur et intérieur peuvent varier avec la profondeur. Dans la partie inférieure de la garniture, on y trouve des masse-tiges et des stabilisateurs alors que la partie supérieure est constituée exclusivement de tiges creuses. La garniture est introduite dans un trou cylindrique de rayon R_p et incliné d'un angle α par rapport à la verticale (Figure 2.1).

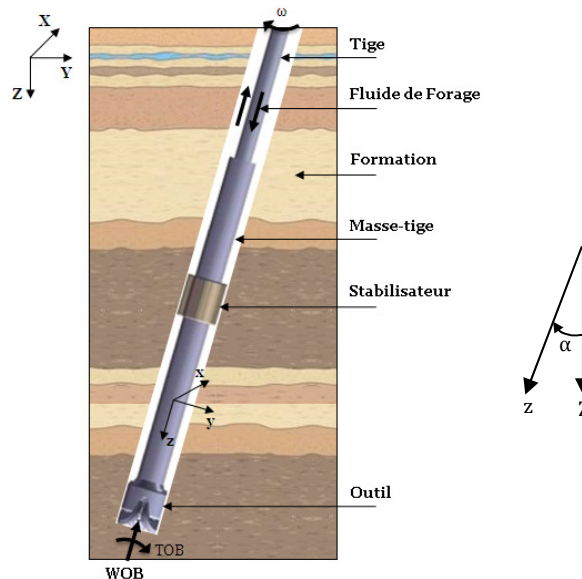


Figure 2.1: Garniture de Forage dans un Forage Incliné

La garniture est entraînée en rotation autour de son axe à une vitesse angulaire ω qui dépend du temps. Une force de compression, le poids sur l'outil, agit sur la partie inférieure de la garniture alors que l'outil est soumis à un couple nécessaire au forage de la roche. La garniture, étant creuse, achemine le fluide de forage de la surface vers l'outil à travers les

buses. Le fluide remonte, chargé de déblais de roche, dans l'espace annulaire laissé entre la tige et la paroi du puits foré. Ce fluide, généralement de la boue, est de masse volumique ρ_f et soumis à une certaine pression.

Pour établir les équations de mouvement de la tige, on définit deux repères (Figure 2.1) :

- un repère global fixe dont l'origine est à la surface du puits (centre de la table de rotation) ;
- un repère lié à la tige ; il dépend de l'abscisse curviligne s et du temps t .

La rotation de la garniture génère une force d'inertie à cause de l'excentricité, cette force d'inertie est responsable du déplacement latéral de la garniture c'est-à-dire dans un plan orthogonal à l'axe du forage pour une profondeur donnée. Le déplacement latéral de la tige peut être amplifié par la force de compression due au poids sur l'outil (phénomène de flambage). Cependant, ce déplacement ne peut pas dépasser le jeu garniture-formation. Quand la tige arrive en contact avec la formation ou le tubage, une force de contact se crée, la force s'annule quand le contact est rompu. Pendant son déplacement, la tige est en interaction avec le fluide de forage, cette interaction engendre des forces hydrodynamiques.

Pour étudier la dynamique d'une garniture de forage, nous l'assimilons à une structure élancée de type poutre. Nous établissons les équations de mouvement d'une poutre dans un cas général. Ensuite nous calculons les efforts extérieurs que subit la garniture pour les injecter dans les équations de mouvement de la poutre, ce qui permet d'obtenir les équations de mouvement de la garniture.

2.1.2. Dynamique d'une Poutre

On considère une poutre de longueur L , de rayons extérieur R_e et intérieur R_i ($R_i \leq r \leq R_e$).

Le centre d'une section donnée de la poutre, dans un état relâché, est situé sur le segment $\{\vec{sk}\}_{s \in [0, L]}$ où s est l'abscisse curviligne. La section a une surface $S = \pi(R_e^2 - R_i^2)$ et un moment

d'inertie polaire $J_0 = 2I$ tel que $I = \frac{\pi}{4}(R_e^4 - R_i^4)$.

Quand la poutre est déformée, le centre d'abscisse s occupe la position $\vec{x}(s, t)$. Les points

$\{\vec{sk} + \vec{\xi}\}_{\vec{\xi} \perp \vec{k}}$ de la section droite se retrouvent à l'instant t sur une surface de centre d'inertie $\vec{x}(s, t)$ et de vecteur normal unitaire $\vec{n}(s, t)$ conformément à la Figure 2.2.

Compte tenu du fort rapport entre la longueur de la tige et son diamètre, nous avons adopté la théorie de Bernoulli dans laquelle toute section droite non seulement reste plane (mouvement caractérisé par deux vecteurs : une translation et une rotation) mais aussi

reste droite (relation cinématique entre les deux vecteurs). Cette hypothèse signifie que l'on néglige l'effet de l'effort tranchant et donc du phénomène de gauchissement.

Comme le montre la Figure 2.2 on a :

- à l'état relâché : une poutre droite dont la longueur est décrite par la variable $s \in [0, L]$ et dont toutes les sections droites ont comme normale $\vec{k}$;
- à l'état déformé : les centres d'inertie sont sur $\vec{x}(s, t)$, la normale à la section droite est $\vec{n}(s, t)$ et l'abscisse curviligne de l'arc est $\sigma(s, t)$.

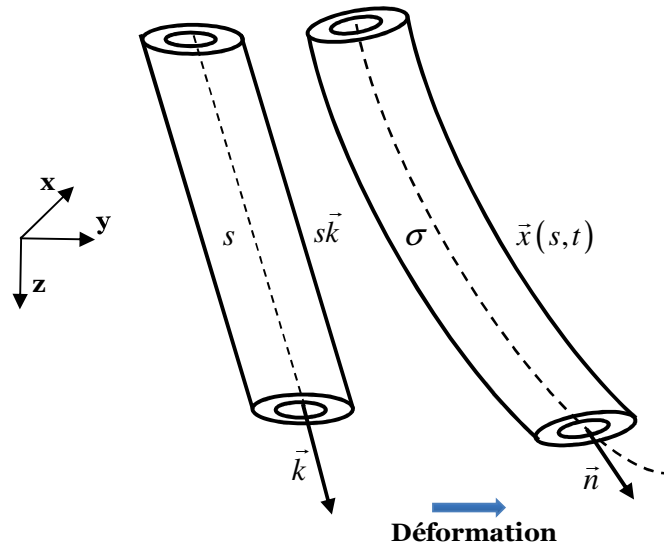


Figure 2.2: Tronçon de Poutre en Etat Déformé

2.1.2.1. Equations d'équilibre

La poutre est soumise à des actions extérieures exercées à distance (la gravité) ou par contact sur les faces latérales ($r = R_i$ et $r = R_e$) ainsi qu'à des efforts appliqués sur les sections $s = 0$ et $s = L$ (conditions aux limites). Les efforts répartis (gravité et contact sur les faces latérales) sont considérés par unité de longueur à l'état de référence (c.à.d. $s \in [0, L]$).

Chaque tronçon $[s, s + ds]$ de la poutre est donc soumis à la résultante des efforts extérieurs : $\vec{f}(s, t)ds$ et la résultante des moments extérieurs : $\vec{m}(s, t)ds$. Sachant que pour

toute fonction $\varphi(s, t)$ on note $\varphi' = \frac{\partial \varphi}{\partial s}$ et $\dot{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$, les équations d'équilibre s'écrivent :

$$\vec{T}' + \vec{f} = \rho S \ddot{\vec{x}} \quad (1)$$

$$\vec{M}' + \vec{x}' \wedge \vec{T} + \vec{m} = \rho I \frac{\partial}{\partial t} [\vec{\Omega} + \Omega \vec{n}] \quad (2)$$

où $\vec{T}$ l'effort résultant interne, $\vec{M}$ le moment résultant interne et $\vec{\Omega}$ le vecteur rotation de la section avec $\Omega = \vec{\Omega} \cdot \vec{n}$, ρ étant la masse volumique du matériau constitutif de la tige.

On va utiliser la loi de comportement de la poutre pour déterminer la relation entre les efforts internes et les déformations.

2.1.2.2. Loi de Comportement

On travaille dans le cadre de la théorie générale des poutres élastiques : matériau élastique linéaire et isotrope de module d'Young E et de coefficient de Poisson ν .

Soit $\vec{R}$ le vecteur déformation généralisée (flexion+torsion) du tronçon de poutre $[s, s+ds]$.

Dans ce cas, on montre que :

$$\vec{R} = \vec{n} \wedge \dot{\vec{n}} + R\vec{n} \quad (3)$$

$$\vec{\Omega} = \vec{n} \wedge \dot{\vec{n}} + \Omega\vec{n} \quad (4)$$

$$\vec{M} = EI(\vec{n} \wedge \dot{\vec{n}}) + M\vec{n} \quad (5)$$

$$\vec{T} = \frac{ES}{2(1+\nu)}(\vec{x}' - \sigma'\vec{n}) + T\vec{n} \quad (6)$$

sachant que le couple de torsion vérifie la relation : $M = \frac{EI}{1+\nu}R$ et l'effort axial vérifie la relation : $T = ES(\sigma' - 1)$.

Outre ces relations, pour que la déformation généralisée et la rotation de la section soient admissibles, il faut qu'une certaine condition de compatibilité géométrique soit vérifiée, cette condition est telle que : $\Omega' = \dot{R} + \vec{n} \cdot (\dot{\vec{n}} \wedge \vec{n}')$.

Par ailleurs, dans la suite on se place dans le cadre restreint de la théorie des poutres en admettant que :

- $\vec{x}' = \sigma'\vec{n}$: c'est-à-dire qu'une section droite reste droite ;
- $\sigma' \approx 1$: c'est-à-dire que l'on considère des faibles variations relatives de la longueur, par conséquent $T/ES \ll 1$.

L'égalité $\vec{x}' = \sigma'\vec{n}$ est à comprendre dans le sens que la quantité $\vec{x}' - \sigma'\vec{n}$ est petite et que $\vec{T} = \vec{Q} + T\vec{n}$ où l'effort tranchant $\vec{Q}$ est inconnu, avec $\vec{Q} \cdot \vec{n} = 0$.

Les équations vectorielles précédentes peuvent être réécrites en les décomposant en égalités scalaires dans la direction de $\vec{n}$ (en multipliant scalairement par $\vec{n}$) et dans la direction orthogonale à $\vec{n}$ (en multipliant vectoriellement par $\vec{n}$).

On pose $m = \vec{m} \cdot \vec{n}$ la partie du moment dans la direction de $\vec{n}$ et $\vec{m}_\perp = \vec{m} - m\vec{n}$ la partie du moment dans la direction orthogonale à $\vec{n}$. Pour un vecteur donné, le symbole « $\perp$ » désigne sa partie orthogonale.

Sachant que : $\vec{n} \cdot \vec{n} = 1$ alors $\vec{n}' \cdot \vec{n} = 0$ et $\dot{\vec{n}} \cdot \vec{n} = 0$. En utilisant ces derniers résultats et en dérivant l'équation (5) par rapport à l'espace, on obtient :

$$\vec{M}' = EI(\vec{n} \wedge \vec{n}'') + M\vec{n}' + M'\vec{n} \text{ et par conséquent } \vec{M}' \cdot \vec{n} = M'.$$

De la même façon, on dérive cette fois l'équation (4) par rapport au temps, on a donc :

$$\vec{\Omega} = \vec{n} \wedge \dot{\vec{n}} + \Omega\vec{n} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}[\vec{\Omega} + \Omega\vec{n}] = \vec{n} \wedge \ddot{\vec{n}} + 2\Omega\dot{\vec{n}} + 2\dot{\Omega}\vec{n} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}[\vec{\Omega} + \Omega\vec{n}] \cdot \vec{n} = 2\dot{\Omega}$$

Le théorème des moments conduit alors aux équations suivantes :

$$M' + m = 2\rho I \dot{\Omega} \quad (7)$$

$$EI(\vec{n} \wedge \vec{n}'') + M\vec{n}' + \sigma' \vec{n} \wedge \vec{Q} + \vec{m}_\perp = \rho I(\vec{n} \wedge \ddot{\vec{n}} + 2\Omega\dot{\vec{n}}) \quad (8)$$

La multiplication vectorielle à gauche par $\vec{n}$ de l'équation (8) conduit à :

$$-EI\vec{n}_\perp'' + M(\vec{n} \wedge \vec{n}') - \sigma' \vec{Q} + \vec{n} \wedge \vec{m}_\perp = -\rho I\vec{n}_\perp'' + 2\rho I\Omega\vec{n} \wedge \dot{\vec{n}} \quad (9)$$

$$\text{ce qui donne : } \sigma' \vec{Q} = -EI\vec{n}_\perp'' + \vec{n} \wedge (M\vec{n}' + \vec{m}_\perp - 2\rho I\Omega\dot{\vec{n}}) + \rho I\vec{n}_\perp'' \quad (10)$$

avec $\sigma' \approx 1$, $\vec{n}_\perp'' = \vec{n}_\perp'' - (\vec{n} \cdot \vec{n}_\perp'')\vec{n}$ et $\ddot{\vec{n}}_\perp = \ddot{\vec{n}} - (\vec{n} \cdot \ddot{\vec{n}})\vec{n}$.

Dans la suite du calcul, nous supposons que $\vec{m}_\perp = \vec{0}$. Cette hypothèse est justifiée dans notre cas, compte tenu de la nature des efforts extérieurs appliqués sur la structure.

2.1.2.3. Hypothèse des Petites Déformations

Etant donné que la tige est soumise à des efforts de tension T tels que $T/ES \ll 1$ et que son mouvement latéral est limité par le jeu qui est largement inférieur à la longueur de la poutre, il est légitime d'approximer $\vec{x}(s, t)$ sous la forme $\vec{x}(s, t) = (s + w(s, t))\vec{k} + \vec{u}$ avec $\vec{u} \cdot \vec{k} = 0$, $|w| \ll L$ et $\|\vec{u}\| \ll L$ et ce pour tout s et tout instant t . Nous admettons de plus que les dérivées $|w'|$ et $\|\vec{u}'\|$ sont des infiniment petits.

Par conséquent : $\vec{x}' = (1 + w')\vec{k} + \vec{u}'$ et $\sigma' = 1 + w' \approx 1$ au premier ordre. On en déduit que : $\vec{n} = \vec{k} + \vec{u}'$, alors on a : $\vec{n}' = \vec{u}''$ et $\dot{\vec{n}} = \dot{\vec{u}}'$.

Ce qui signifie que : $\vec{M} = EI(\vec{k} \wedge \vec{u}'') + M\vec{u}' + M\vec{k}$ d'où $M = \vec{M} \cdot \vec{k}$.

Au premier ordre aussi, on a : $\Omega' = \dot{R}$ puisque $\dot{\vec{n}} \wedge \vec{n}' = \dot{\vec{u}}' \wedge \vec{u}''$.

• Mouvement de Torsion

Soit θ un angle de rotation autour de $\vec{n}$ (donc autour de $\vec{k}$ au premier ordre), on a donc $\dot{\theta} = \Omega$ qui est la vitesse de rotation ; ce qui signifie que :

$$\frac{\partial(\theta' - R)}{\partial t} = 0.$$

Par ailleurs, si l'on considère un état initial non vrillé de la poutre c'est-à-dire $\theta' = 0$, l'égalité précédente donne : $\theta' = R$ et le couple de torsion devient donc :

$$M = \frac{EI}{1 + \nu} \theta'.$$

Alors l'équation (7) devient :

$$\frac{EI}{1 + \nu} \theta'' + m = 2\rho I \ddot{\theta} \quad (11)$$

Il s'agit donc de l'équation du mouvement de torsion, on peut déduire de cette équation que si le couple m est connu alors le mouvement de torsion de la poutre peut être étudié de manière autonome.

• Mouvement Axial

On a : $\vec{n}'' = \vec{u}^{(3)}$ et $\vec{n}'' \cdot \vec{n} = \vec{u}^{(3)} \cdot \vec{u}'$ (terme de second ordre) alors au premier ordre, on obtient : $\vec{n}_\perp'' = \vec{u}^{(3)}$. On démontre de la même façon l'égalité suivante : $\ddot{\vec{n}}_\perp = \ddot{\vec{u}}'$.

Par conséquent, l'effort tranchant (équation (10)) devient :

$$\vec{Q} = -EI\vec{u}^{(3)} + \vec{k} \wedge (M\vec{u}'' - 2\rho I \dot{\theta} \dot{\vec{u}}') + \rho I \ddot{\vec{u}}'$$

On a aussi : $\vec{T} = \vec{Q} + T\vec{u}' + T\vec{k}$, d'où $T = \vec{T} \cdot \vec{k}$ avec $T = ES w'$.

Finalement on obtient : $\vec{T} = T\vec{k} - EI\vec{u}^{(3)} + T\vec{u}' + \rho I \ddot{\vec{u}}' + \vec{k} \wedge (M\vec{u}'' - 2\rho I \dot{\theta} \dot{\vec{u}}')$

On remplace l'expression du vecteur $\vec{T}$ dans l'équation de mouvement (1) et on projette dans la direction de $\vec{k}$, on obtient donc : $T' + f = \rho S \ddot{w}$, avec $f = \vec{f} \cdot \vec{k}$ et $T = ES w'$, ce qui donne finalement :

$$ES w'' + f = \rho S \ddot{w} \quad (12)$$

Il s'agit ici de l'équation du mouvement axial, on peut déduire de cette équation que si l'effort f est connu alors le mouvement axial de la poutre peut être étudié de manière autonome, exactement comme le mouvement de torsion (même type d'équation).

• Mouvement Latéral

On remplace l'expression du vecteur $\vec{T}$ dans l'équation de mouvement (1) et on projette dans la direction orthogonale à $\vec{k}$ (c'est-à-dire on multiplie vectoriellement par $\vec{k}$) ; alors on obtient : $-EI \vec{u}^{(4)} + (T \vec{u}')' + \rho I \ddot{\vec{u}}'' + \vec{k} \wedge ((M \vec{u}'')' - 2\rho I (\dot{\theta} \vec{u}')') + \vec{f} - f \vec{k} = \rho S \ddot{\vec{u}}$

Cette équation peut s'écrire sous la forme suivante :

$$-EI \vec{u}^{(4)} + (T \vec{u}')' + \vec{k} \wedge (M \vec{u}'')' + \vec{f} - f \vec{k} + \vec{A}' = \rho S \ddot{\vec{u}} \quad (13)$$

où le vecteur $\vec{A}$ est donné par l'expression suivante : $\vec{A} = \rho I \ddot{\vec{u}}' - 2\rho I \dot{\theta} \vec{k} \wedge \vec{u}'$.

L'équation (13) est l'équation du mouvement latéral, il s'agit d'une équation vectorielle à deux dimensions. Elle concerne le vecteur déplacement latéral $\vec{u} = (u_1, u_2)$ et on peut la décomposer en deux équations scalaires couplées : une équation pour le déplacement latéral u_1 et une équation pour le déplacement latéral u_2 .

2.1.2.4. Méthodologie

Pour résoudre l'équation du mouvement latéral (équation 13), on doit disposer de l'effort axial T , du couple de torsion M et de la vitesse de rotation $\dot{\theta}$. Par conséquent, il faut résoudre l'équation du mouvement de torsion (équation 11) et l'équation du mouvement axial (équation 12) avant de déterminer le mouvement latéral. Pour résumer, on a quatre degrés de liberté :

- la rotation θ autour de $\vec{k}$;
- le déplacement w dans la direction de $\vec{k}$;
- les deux déplacements latéraux u_1 et u_2 dans le plan latéral (orthogonal à $\vec{k}$).

Dans la section suivante, on va calculer la résultante des efforts extérieurs $\vec{f}(s,t)$ et la résultante des moments extérieurs $\vec{m}(s,t)$. En effet, la force $\vec{f}(s,t)$ regroupe le poids, la force d'inertie, les forces hydrodynamiques et les forces de contact. En revanche, on considère que le moment $\vec{m}(s,t)$ provient uniquement du contact puisque l'on a supposé que $\vec{m}_\perp = \vec{0}$.

2.1.3. Forces Extérieures

Nous venons de voir que la mise en équation du problème compte tenu des diverses hypothèses s'effectue de manière naturelle dans le repère local lié à la poutre droite dans son état relâché (repère $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ où $\vec{z}$ est l'axe $\vec{k}$ de la poutre). Toutes les autres données du problème pratique à résoudre se définissent simplement dans ce repère hormis la gravité. Nous introduisons alors comme donnée l'inclinaison α de la poutre par rapport à la gravité et nous posons donc :

$$\vec{g} = g (\cos(\alpha)\vec{k} + \sin(\alpha)\vec{k}^*)$$

où $\vec{k}^*$ est un vecteur orthogonal à $\vec{k}$ arbitraire que l'on peut caractériser par son angle azimutal par rapport à l'axe $\vec{x}$ qui a été choisi.

2.1.3.1. Poids

Compte tenu de la présence du fluide, les forces de gravité utilisent la masse volumique déjàugée $\rho - \rho_f$ et sont donc par unité de longueur :

$$\vec{P} = (\rho - \rho_f) S \vec{g}$$

Ce chargement $\vec{P}$ est l'un des termes qui interviennent dans $\vec{f}$ (équations 12 et 13) et qui n'a aucune contribution au moment de torsion m (équation 11).

2.1.3.2. Force d'Inertie

La force d'inertie agit uniquement dans la direction latérale, quand la section de la tige tourne d'un certain angle θ autour de $\vec{k}$ alors le centre de gravité C_g tourne autour du centre géométrique C_o avec le même angle θ (Figure 2.3).

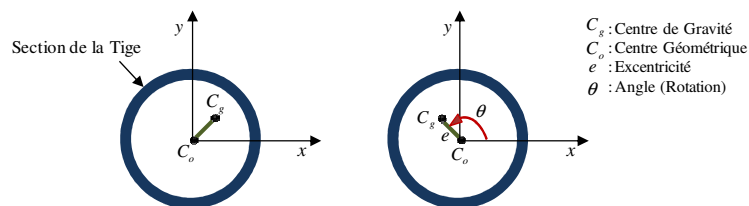


Figure 2.3: Excentricité et Rotation

Donc, la position du point C_g à chaque instant est donnée par : $\vec{u}_e = e \begin{pmatrix} \cos(\theta(s,t) + \psi(s)) \\ \sin(\theta(s,t) + \psi(s)) \end{pmatrix}$.

Dans cette écriture, le vecteur est caractérisé par ses deux composantes dans le repère local $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ et $\psi(s)$ représente un angle initial. En dérivant, on obtient l'accélération et on en

déduit la force d'inertie : $\vec{F}_e = \rho S e \begin{pmatrix} \dot{\theta}^2 \cos(\theta + \psi) + \ddot{\theta} \sin(\theta + \psi) \\ \dot{\theta}^2 \sin(\theta + \psi) - \ddot{\theta} \cos(\theta + \psi) \end{pmatrix}$.

Cette force $\vec{F}_e$ est une partie de la force $\vec{f}$ (équation 13) puisqu'elle n'a pas de composante tangentielle (équation 12) et on néglige son moment qui est en e^2 (pas d'intervention dans l'équation 11).

2.1.3.3. Forces Hydrodynamiques

En ce qui concerne l'action de la boue sur la structure que nous étudions et qui est donc un chargement externe, nous avons déjà admis que la boue qui circule à l'intérieur d'une partie de la structure peut être assimilée à une masse purement inertielle pour le mouvement latéral et qui exerce, en plus de la boue externe, une pression hydrostatique sachant que l'ensemble est alors traduit en poussée d'Archimède (masse volumique déjàugée). En revanche, le mouvement latéral du fluide extérieur dans l'espace annulaire, induit par le mouvement de la tige (Figure 2.4), doit être pris en compte.

Remarque : dans ce travail, on ne prend pas en compte le fluide déplacé par le mouvement axial et le mouvement de torsion.

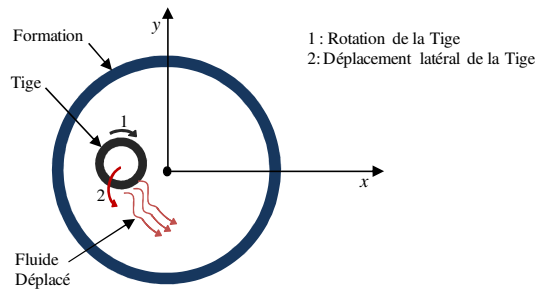


Figure 2.4: Fluide Déplacé par le Mouvement Latéral de la Tige

L'action de la boue externe n'étant pas mesurée, on se retrouve dans la situation où nous devons modéliser le fluide (la boue de forage). Nous avons alors opté pour une approche classique dans les publications du métier dans laquelle le raisonnement de base concerne la dynamique d'un fluide newtonien (linéaire) avec des conditions aux limites imposées. Or, même pour un simple mouvement en deux dimensions (dans le plan x, y) la solution générale n'est pas accessible analytiquement.

Nous savons que les chercheurs qui ont abordé ce problème (Chen et al., 1974) ont tenu compte d'un caractère semi-périodique du mouvement de la tige pour expliciter les efforts d'interaction entre la tige et le fluide et que de toutes les manières les expressions finales sont à caler (lois empiriques) à partir d'observations réelles. Chen et al. (1974) ont calculé analytiquement la force hydrodynamique nécessaire pour déplacer le fluide dans l'espace annulaire, en supposant que la tige est en mouvement de vibration latéral avec une pulsation $\bar{\omega}$ et une vitesse V . La force exercée par la tige sur le fluide est donnée par :

$F_{tige \rightarrow fluide} = m_f V \bar{\omega} [\text{Re}(H) \sin(\bar{\omega}t) + \text{Im}(H) \cos(\bar{\omega}t)]$, avec $m_f = \rho_f \pi R_e^2$ est la masse du fluide déplacé par la tige si l'espace annulaire est infini.

La fonction $H(s, t)$ qui apparaît dans l'expression de $F_{tige \rightarrow fluide}$ a des valeurs dans le corps des complexes (Annexe A1). Cette fonction dépend des caractéristiques du fluide (viscosité cinématique ν et masse volumique ρ_f), des paramètres géométriques (R_e et R_p) ainsi que de la pulsation $\bar{\omega}$.

D'après le principe de réciprocité des actions, l'expression de la force hydrodynamique qui s'exerce sur la tige peut s'écrire sous la forme suivante :

$$F_{fluide \rightarrow tige} = -F_{tige \rightarrow fluide} = -C_m m_f V \bar{\omega} \sin(\bar{\omega}t) + C_d m_f V \bar{\omega} \cos(\bar{\omega}t), \text{ où } C_m = \text{Re}(H) \text{ et } C_d = -\text{Im}(H).$$

La partie réelle de cette force est en phase avec le mouvement de la tige. Le terme $C_m m_f$ qui apparaît dans cette partie est défini comme la masse ajoutée. Il s'agit de la masse de fluide que la tige déplace pendant son mouvement. C_m est appelé coefficient de masse ajoutée.

En revanche, La partie imaginaire de la force hydrodynamique n'est pas en phase avec le mouvement, ce qui nous rappelle l'amortissement. Cet amortissement est dû à la viscosité du fluide de forage et mesuré à travers le coefficient : $C_d = -\text{Im}(H)$.

• Masse Ajoutée

Pour mieux comprendre cette notion de masse ajoutée, on va étudier son évolution en fonction du nombre de Reynolds associé à l'écoulement du fluide : $\text{Re} = \frac{\bar{\omega} R_e^2}{\nu}$ et le paramètre

géométrique adimensionnel : $\gamma = \frac{R_p}{R_e}$.

D'après la Figure 2.5, si le nombre de Reynolds augmente alors le facteur de masse ajoutée diminue légèrement, ce qui montre que le régime d'écoulement du fluide dans l'espace annulaire n'a pas une grande incidence sur la masse ajoutée. D'autre part, quand γ tend vers 1, c'est-à-dire que le jeu tige-formation se réduit, on note que le coefficient de masse ajoutée

augmente, ce qui augmente la masse en vibration et réduit sensiblement la fréquence propre (Allen, 1987). On en déduit alors que dans ce cas, le fluide est beaucoup plus difficile à déplacer à cause du confinement. En revanche, si γ tend vers l'infini, c'est-à-dire le jeu tige-formation est très grand, alors le facteur de masse ajoutée tend vers 1.

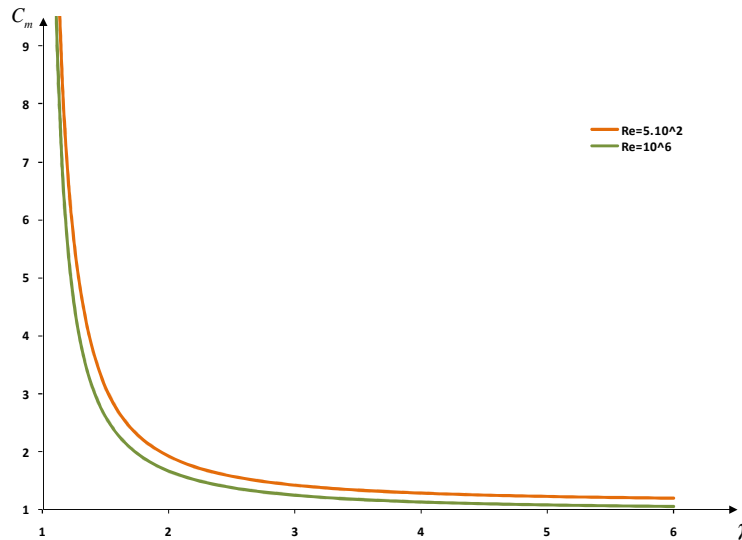


Figure 2.5: $C_m=f(\gamma)$ pour Différents Nombres de Reynolds (Chen et al., 1974)

- **Amortissement**

D'après la Figure 2.6, le coefficient d'amortissement devient négligeable quand le nombre de Reynolds est élevé et l'espace annulaire est grand (c'est-à-dire γ est grand). L'effet de la viscosité est plus marqué quand la fréquence de vibration de la tige est faible. D'après Booth (2009), le nombre de Reynolds qui apparaît dans l'expression de l'amortissement est de l'ordre de 10^4 dans le cas d'un forage pétrolier classique. Par conséquent, on peut déduire que si l'espace annulaire est grand, on peut négliger les effets de la viscosité. En admettant cette hypothèse, les chercheurs négligent souvent l'amortissement et calculent le coefficient de masse ajoutée pour un fluide de forage non visqueux.

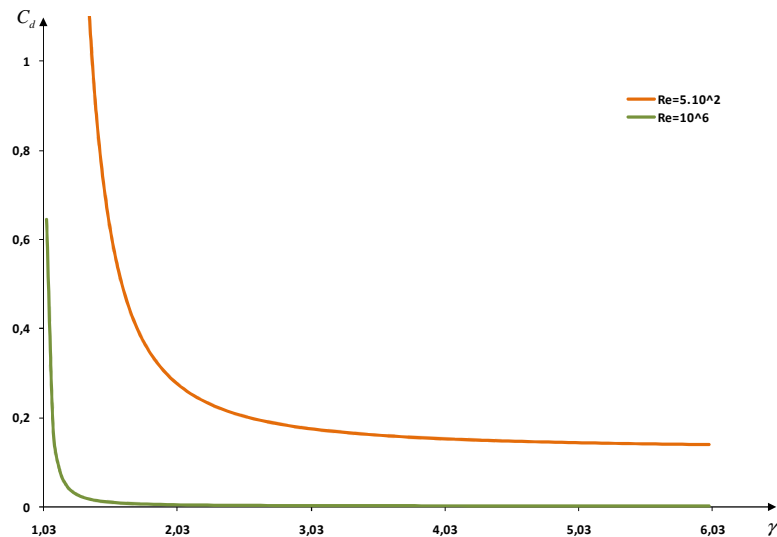


Figure 2.6: $C_d=f(\gamma)$ pour Différents Nombres de Reynolds (Chen et al., 1974)

- **Approximations et Etude Comparative**

En se basant sur le travail de Chen et al. (1974), d'autres expressions ont été développées pour calculer la masse ajoutée et l'amortissement. Shyu (1989) a fourni une approximation de la masse ajoutée pour un fluide visqueux avec un nombre de Reynolds relativement élevé. En revanche, Heisig et al. (2000) ont considéré un fluide non visqueux. Dans ce cas, le coefficient de masse ajoutée ne dépend que de γ et le coefficient d'amortissement ne peut pas être calculé.

Les expressions basées sur le modèle de Chen et al. (1974) admettent que la tige est en mouvement de vibration simple dans le puits. Cependant, Brennen (1976) considère un cas plus général où la tige vibre latéralement et effectue un mouvement de whirling en même temps. L'inconvénient de cette formulation réside dans le fait que la vitesse de whirling (supposée connue) varie en fonction du temps alors la masse ajoutée n'est plus constante, ce qui introduit une difficulté supplémentaire.

Pour choisir la meilleure approximation, on a réalisé une comparaison entre les différentes formulations pour un nombre de Reynolds assez élevé (de l'ordre de 10^6), le résultat est présenté dans la Figure 2.7. En effet, la courbe de Chen et al. (1974) et la courbe de Shyu (1989) sont pratiquement confondues, ce qui justifie l'approximation faite par Shyu (1989) si le nombre de Reynolds est assez élevé. En revanche, il y a une différence sensible entre la courbe de Heisig et al. (2000) et la courbe de Chen et al. (1974). On en déduit que l'approximation de Heisig et al. (2000) peut être justifiée seulement si le nombre de Reynolds tend vers l'infini (viscosité très faible).

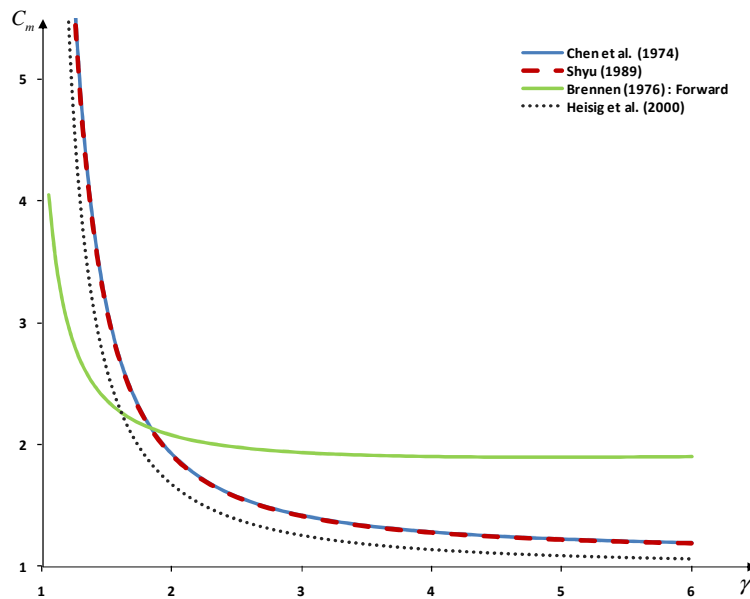


Figure 2.7: Coefficient de Masse Ajoutée Selon Différents Auteurs

En ce qui concerne la formulation de Brennen (1976), on a une grande différence dans le calcul de la masse ajoutée par rapport à la formulation de Chen et al. (1974). Cette différence est d'autant plus marquée si l'on modifie la nature du whirling (forward, backward...) comme le montre la Figure 2.8. En effet, la masse ajoutée est plus élevée pour un backward whirling que pour un forward whirling. Cette observation est importante mais il est difficile d'utiliser la formulation de Brennen (1976) dans notre cas. En effet, la vitesse de whirling est une inconnue dans notre problème ce qui nécessite un aménagement de notre logiciel qui est prévu en perspectives.

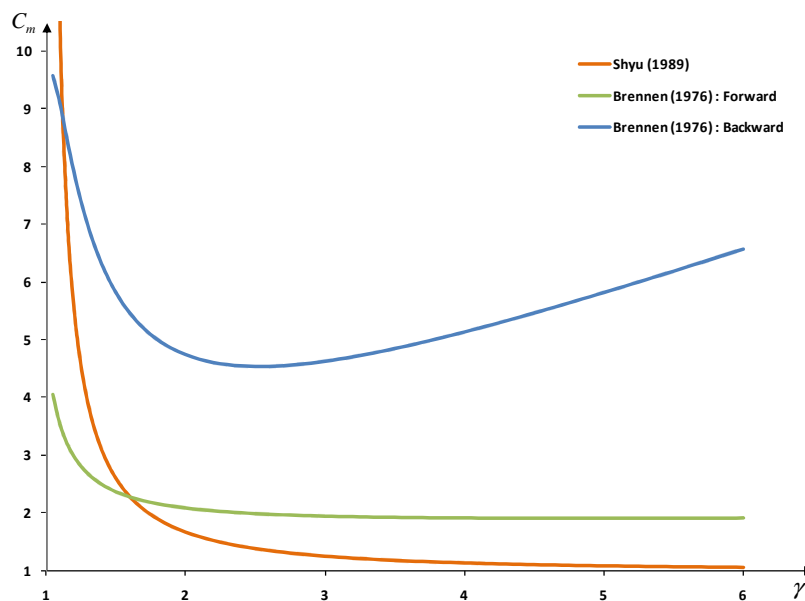


Figure 2.8: Coefficient de Masse Ajoutée en Fonction du Mode de Vibrations

En tenant compte des raisons que l'on vient d'évoquer, on va écarter la formulation de Brennen (1976). On écarte également l'approximation de fluide non-visqueux faite par Heisig et al. (2000). Cependant, l'approximation proposée par Shyu (1989) semble donner des résultats assez satisfaisants. Dans la suite, on utilisera cette approximation pour estimer le coefficient de la masse ajoutée et le coefficient d'amortissement.

Remarque : pour le mouvement latéral, la masse totale en mouvement regroupe donc la masse de la section d'acier de la tige, le fluide à l'intérieur de la tige et la masse ajoutée : $m_t = \rho S + \rho_f \pi R_i^2 + C_m \rho_f \pi R_e^2$; on rappelle que S est la section de la tige.

• Application Numérique : Effet de la Masse Ajoutée

L'application numérique proposée ici a pour objectif l'étude de l'effet de la masse ajoutée sur un calcul de fréquences propres latérales. Le cas étudié est une poutre en acier ($E=210$ MPa, $\nu=0.3$ et $\rho=7800$ Kg/m³) de longueur 100 m. La poutre a un diamètre intérieur de 3" et un diamètre extérieur de 4", elle est introduite dans un puits horizontal de diamètre 5"½ et immergée dans un fluide de masse volumique $\rho_f=1000$ Kg/m³.

En ce qui concerne les conditions aux limites, on considère des appuis simples pour les deux extrémités de la poutre. Dans ces conditions, Heisig et al. (2000) proposent une expression analytique pour calculer les fréquences propres latérales. Il faut signaler que l'expression analytique n'est possible à calculer qu'en absence de viscosité. Pour tenir compte de la viscosité on utilise la formulation de Shyu (1989). On compare ensuite les fréquences propres latérales pour les deux cas, les résultats sont présentés sur la Figure 2.9 pour les trois premières fréquences latérales. On en déduit que la fréquence propre est surestimée d'environ 3% quand on utilise l'approximation de Heisig et al. (2000). Cela signifie que si l'on néglige la viscosité du fluide de forage, on aura une surestimation des fréquences propres latérales.

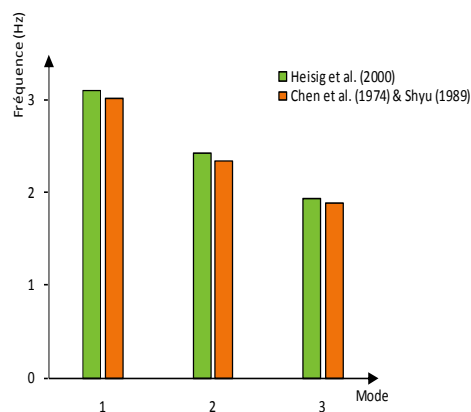


Figure 2.9: Masse Ajoutée et Fréquences Propres

2.1.3.4. Forces de Contact

La présence des zones de contact entre la garniture de forage et la paroi du puits entraîne une augmentation sensible des efforts dans la tige et surtout au niveau du couple de torsion (Dykstra et al., 1996). La présence du contact est aussi synonyme d'impacts violents garniture-formation. Dans la littérature, plusieurs modèles ont été proposés pour déterminer la force de contact. Dans ces modèles, on considère parfois que la paroi du puits est infiniment rigide (Yigit et al., 1996) mais on considère également que la paroi peut se déformer sous l'effet des vibrations de la garniture (Pastusek et al., 2003).

Les efforts de contact peuvent être représentés par : une force normale F_n , une force tangentielle F_t et un moment m qui s'oppose à la rotation de la tige (Figure 2.10).

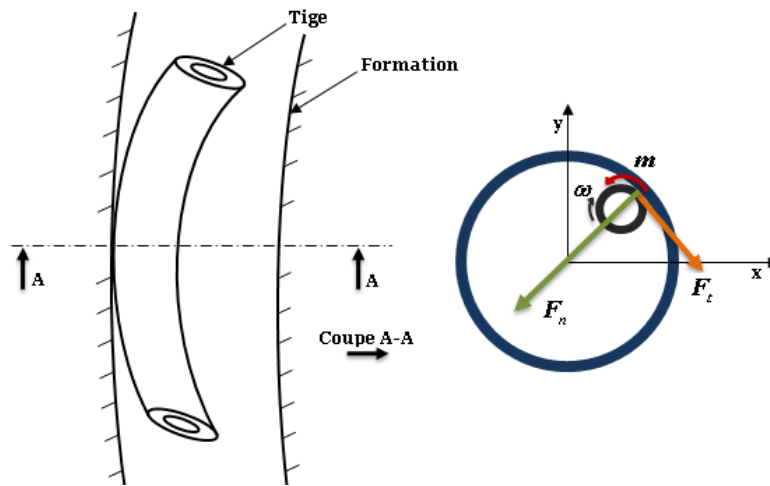


Figure 2.10: Efforts de Contact

- **Force Normale de Contact**

Les forces de contact n'existent pas si le déplacement latéral de la tige ne dépasse pas le jeu J tel que $J = R_p - R_e$ avec R_p le rayon du puits et R_e le rayon extérieur de la tige. En revanche, si le déplacement dépasse ce jeu, on applique une force de rappel (normale) pour remettre la tige dans le trou. La force de contact normale dépend de la rigidité du contact et elle est proportionnelle au dépassement, c'est-à-dire la différence entre le jeu et le déplacement latéral de la tige (Yigit et al., 1996). Un amortissement de contact a été considéré par Birades (1985) ainsi que par Kotsonis (1994), dans ce cas la force normale dépend non seulement du dépassement mais aussi de la vitesse de dépassement. Dans le cadre de ce travail, on va négliger l'amortissement de contact parce que l'on ne cherche que la norme de la force. On considère uniquement deux états soit un dépassement nul soit un dépassement non nul et on n'étudie pas l'évolution du dépassement dans le temps. En

partant de ces conditions, la théorie qui apparaît la mieux adaptée pour déterminer la force de contact normale est celle de Hertz utilisée par Yigit et al. (1996).

On suppose que le contact a un comportement élastique, alors la force normale dépend de la forme géométrique des éléments en contact, de la rigidité de chaque élément et de la nature du contact (ponctuel, linéaire, elliptique). On assimile la garniture et le puits à deux cylindres concentriques, ce qui permet de considérer que la zone de contact est de forme elliptique. Dans ce cas, la force normale de contact s'écrit :

$$\begin{cases} F_n = K_c \delta^{\frac{3}{2}} & \text{si } \delta > 0 \\ F_n = 0 & \text{si } \delta \leq 0 \end{cases}$$

Dans cette expression, le dépassement δ (Figure 2.11) est partout négatif sauf dans les zones de contact. La rigidité de contact (K_c) dépend de la géométrie de contact et des rigidités de la garniture et de la formation (ou le tubage si le puits est revêtu d'un tube en acier). En effet, selon la théorie de Hertz, la rigidité de contact peut être calculée avec la formule suivante :

$$K_c = \frac{4}{3} E_c R_c^{\frac{1}{2}}$$

avec E_c un module d'Young équivalent et R_c le rayon équivalent de contact (contact elliptique dans notre cas) : $\frac{1}{E_c} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}$ et $\frac{1}{R_c} = \frac{1}{R_e} - \frac{1}{R_p}$ où E_1, ν_1 sont respectivement le module d'Young et le coefficient de poisson de la garniture ; E_2, ν_2 sont respectivement le module d'Young et le coefficient de poisson de la formation.

La théorie de Hertz permet de déterminer analytiquement la rigidité de contact connaissant les données géométriques et mécaniques du problème. L'autre intérêt c'est que la paroi du puits n'est pas considérée infiniment rigide (on prend en compte sa déformabilité).

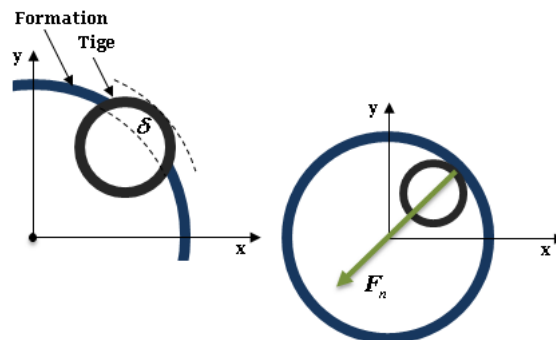


Figure 2.11: Dépassement δ et Force Normale de Contact

Sur la Figure 2.12, la force normale est calculée pour une tige en acier en contact avec un tubage en acier pour le premier cas ($E=210$ MPa et $\nu=0.3$) et avec une formation rocheuse pour le deuxième cas ($E=50$ MPa et $\nu=0.4$).

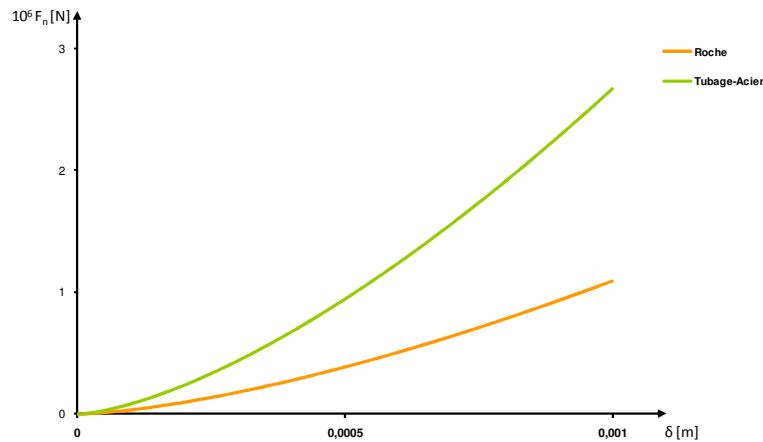


Figure 2.12 : Force Normale de Contact $F_n=f(\delta)$

- **Force Tangentielle de Contact**

L'étude du contact entre deux solides (ici la tige et la formation ou le tubage) avec ou sans présence d'un troisième corps (la boue de forage par exemple) relève de la tribologie avec deux notions : le mouvement relatif entre deux solides caractérisé par un vecteur vitesse $\vec{V}_r$ tangent au contact et l'effort exercé par un solide sur l'autre qui a une composante normale $F_n > 0$ (compression) et une composante $\vec{F}_t$ (vecteur tangent à la surface de contact). La science de la tribologie conduit à une relation qui exprime $\vec{F}_t$ en fonction de $F_n, \vec{V}_r$, des propriétés du troisième corps ainsi que non seulement l'état de la surface de contact (à l'échelle microscopique) mais aussi des courbures macroscopiques locales de cette surface. Dans le cas qui nous intéresse, cela nous amène à distinguer la composante axiale de $\vec{F}_t$ (dans la direction de la tige) de celle qui est dans la section droite de la tige et qui contribue entre autre au couple de la torsion m . Pour chacune de ces composantes, nous disposons donc de loi qui relie F_t, F_n, V_r et au troisième corps, loi que nous puissions dans la bibliographie du métier « forage pétrolier » à cause des ordres de grandeur des efforts de contact et de l'existence de diverses validations de l'approche. Pour les deux directions (axiales et de rotation) la phénoménologie est la même, seule la courbure est différente. En suivant les spécialistes nous adoptons donc la même forme pour la loi et seuls les paramètres de cette loi (coefficient de frottement par exemple) auront des valeurs différentes selon la direction. Dans la suite, nous présentons la loi choisie en l'exprimant par rapport au mécanisme de rotation.

En présence du whirling, la tige peut rouler et/ou glisser sur la paroi du puits, ce mouvement crée donc une force tangentielle de contact. Le modèle le plus commun pour exprimer cette force est celui de Coulomb (Théron et al., 2001). La force tangentielle dépend de la vitesse relative V_r entre la garniture et la paroi du puits, si la vitesse relative est nulle alors on n'a pas de mouvement relatif (adhérence). En revanche, si la vitesse relative est non nulle alors on a un glissement et/ou roulement de la tige sur la paroi du puits.

La force de frottement s'écrit donc :

$$\begin{cases} F_t = -\text{sgn}(V_r)\mu_c F_n & \text{si } V_r \neq 0 \\ F_t = \mu_s F_n & \text{si } V_r = 0 \end{cases}$$

où μ_c et μ_s sont respectivement les coefficients de frottement cinétique et statique sachant que $\text{sgn}(x) = \frac{x}{|x|}$.

Pour tenir compte de l'effet du fluide de forage sur le contact, on ajoute un frottement visqueux proportionnel à la vitesse, on aboutit alors à un modèle de frottement classique, le même que celui de de Marchi (1998) :

$$\begin{cases} F_t = -\text{sgn}(V_r)\mu_c F_n + \eta V_r & \text{si } V_r \neq 0 \\ F_t = \mu_s F_n & \text{si } V_r = 0 \end{cases}$$

où η est le facteur de frottement visqueux (Figure 2.13).

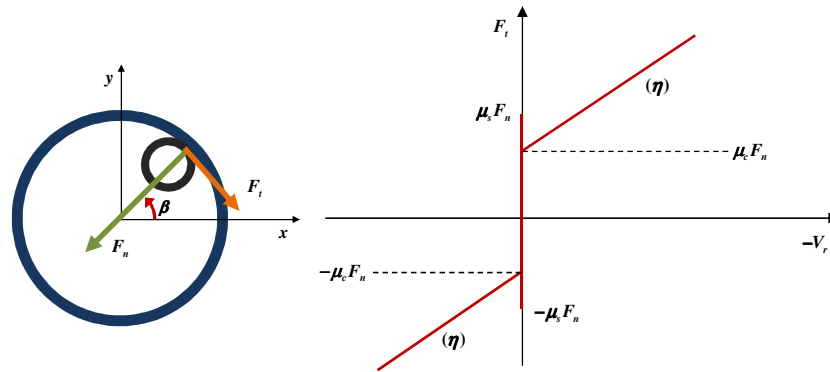


Figure 2.13: Modèle Classique de Frottement

Si l'on a du roulement entre les deux surfaces en contact alors le coefficient de frottement cinétique μ_c sera remplacé par le coefficient de frottement de roulement μ_r qui dépend de l'état de déformation de la zone de contact. Généralement le coefficient statique est supérieur au coefficient cinétique et il est indépendant de la vitesse de glissement. D'autre part, le coefficient de frottement de roulement est généralement inférieur au coefficient de glissement (Samuel, 2010).

Les coefficients de frottement dépendent de la nature des surfaces en contact et de leur état. La présence du fluide de forage dans l'espace annulaire a aussi un effet sur les coefficients de frottement, on parle du contact lubrifié. En effet, pour un contact acier-acier sec, le coefficient de frottement statique est de l'ordre de 0.78, il est seulement de 0.1 pour un contact acier-acier lubrifié (Samuel, 2010). Un recensement des coefficients de frottement suivant la nature du fluide de forage et du contact est présenté dans le Tableau 2.1.

Tableau 2.1: Valeurs du Coefficient de Frottement (Samuel, 2010)

Type de Fluide	Coefficient de Frottement	
	Tubage	Roche
A Base d'Huile	0.16-0.20	0.17-0.25
A Base d'Eau	0.25-0.35	0.25-0.40
Saumure	0.30-0.40	0.30-0.40
A Base de Polymères	0.15-0.22	0.20-0.30
Synthétique	0.12-0.18	0.15-0.30
Mousses	0.30-0.40	0.35-0.55
Air	0.35-0.55	0.40-0.60

On rencontre dans la littérature des modèles de frottement qui prennent en compte le frottement visqueux et l'effet lubrifiant du fluide de forage tels que le modèle de Stribeck (Figure 2.14). Le modèle de Stribeck (de Marchi, 1998) est l'un des plus utilisés en cas de contact lubrifié (Nenad, 2005). La lubrification introduit un amortissement négatif dans les forces de frottement quand la vitesse relative entre les deux surfaces est faible. C'est l'effet de Stribeck. Il est souvent présenté sous la forme suivante :

$$F_t = F_c + (F_s - F_c) e^{-\left|\frac{V_r}{V_s}\right|^{\delta_s}} + \eta V_r$$

avec $F_c = \mu_c F_n$ est la force de frottement dynamique et $F_s = \mu_s F_n$ est la force de frottement statique. Quand la vitesse relative est nulle, on a $F_t = F_s$, la force statique. Deux paramètres importants apparaissent dans ce modèle, le facteur de forme de Stribeck δ_s et la vitesse de Stribeck V_s .

Le modèle de Stribeck est utilisé généralement pour modéliser certains phénomènes vibratoires particuliers comme le stick-slip (Heisig et al., 2000). L'effet de Stribeck assure la décroissance de frottement quand la vitesse relative est faible, c'est une condition nécessaire pour développer le stick-slip.

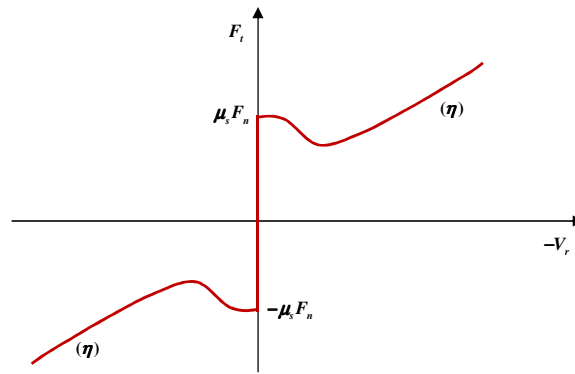


Figure 2.14: Modèle de Frottement avec Effet de Stribeck

Dans le modèle classique comme dans le modèle de Stribeck, la force de frottement dépend de la vitesse relative des deux surfaces en contact. Si la vitesse relative est nulle alors le coefficient de frottement est égal au frottement statique μ_s . En revanche si la vitesse relative est non nulle, alors deux cas se présentent suivant la vitesse de glissement $V_g = (R_p - R_c)\Omega + R_c\omega$ (Théron, 1996) :

- $V_g = 0$: mouvement de roulement sans glissement alors le coefficient de frottement est $-\mu_r \operatorname{sgn}(V_r)$ ou $\operatorname{sgn}(V_r)$ désigne le signe de la vitesse de roulement ;
- $V_g \neq 0$: mouvement de glissement alors le coefficient de frottement est $-\mu_c \operatorname{sgn}(V_g)$.

Remarques :

- 1- le moment m est déduit directement à partir de la force de frottement tangentielle.
- 2- une autre force de frottement est mise en œuvre quand la tige effectue un mouvement axial, cette force est proportionnelle à la force normale via un coefficient de frottement axial μ_a et elle est similaire à la force tangentielle.
- 3- pour résumer, on a un coefficient de frottement statique quand la tige n'est pas en mouvement, un coefficient de frottement de roulement quand la tige roule sans glisser et un coefficient de frottement cinétique quand la tige glisse. A cela s'ajoute le coefficient de frottement axial.

2.2. Résolution par Éléments Finis

Les équations du mouvement forment un système de quatre équations aux dérivées partielles couplées et non linéaires, sa résolution impose le recours à une méthode numérique. Cela consiste à approcher la solution continue des équations par une solution discrète donnée en un nombre fini de points appelés nœuds. On passe donc d'un problème exact (continu) à un problème approché (discret) et on dispose de plusieurs techniques

numériques telles que la méthode des différences finies, la méthode des éléments finis et la méthode des volumes finis.

2.2.1. Méthodes Numériques

2.2.1.1. Méthode des Différences Finis

La méthode des différences finies consiste à remplacer les dérivées apparaissant dans le problème continu par des différences divisées ou combinaisons de valeurs ponctuelles de la fonction en un nombre fini de points discrets ou nœuds du maillage.

Cette méthode est la plus accessible grâce à sa simplicité d'écriture et son faible coût de calcul (Shyu, 1989). En revanche, la géométrie des domaines de calcul doit être simple. En plus, la méthode présente des difficultés de prise en compte des conditions aux limites variées.

2.2.1.2. Méthode des Volumes Finis

La méthode des volumes finis permet d'intégrer, sur des volumes élémentaires de forme simple, les équations écrites sous forme de loi de conservation. Elle fournit ainsi de manière naturelle des formulations discrètes conservatives et est donc particulièrement adaptée aux équations de la mécanique des fluides (conservation de la masse, conservation de la quantité de mouvement, conservation de l'énergie).

La méthode des volumes finis est relativement simple si les volumes élémentaires sont des rectangles. Néanmoins, l'utilisation de volumes élémentaires de forme quelconque permet de traiter des géométries complexes, ce qui est un grand avantage sur les différences finies. Selon (Saiac, 2006), l'inconvénient de la méthode reste l'absence de résultats théoriques de convergence.

2.2.1.3. Méthode des Éléments Finis

La méthode des éléments finis est largement utilisée pour résoudre numériquement des problèmes de calcul des structures, de mécanique de fluides ou de physique. La méthode est utilisée parce qu'elle permet de résoudre des systèmes complexes et donne des résultats fiables (Bathe, 1996).

La méthode des éléments finis consiste à approcher, dans un sous-espace de dimension finie, un problème écrit sous forme variationnelle (minimisation de l'énergie) dans un espace de champs. La solution approchée est dans ce cas une fonction déterminée par un nombre fini de paramètres comme, par exemple, ses valeurs en certains nœuds. La méthode des éléments finis peut traiter des domaines de géométries complexes avec prise en compte

de diverses conditions aux limites. D'autres aspects importants selon (Saiac, 2006) comme la démonstration mathématique de convergence et de majoration d'erreurs sont possibles contrairement à la méthode des différences finis. Les inconvénients de la méthode sont principalement sa complexité de mise en œuvre et son coût en temps de calcul et en mémoire.

Compte tenu des avantages procurés par la méthode des éléments finis, nous avons retenu cette méthode pour résoudre nos équations du mouvement. La résolution se fait en trois étapes : la discrétisation spatiale des équations, la discrétisation temporelle et enfin l'intégration.

2.2.2. Discrétisation Spatiale

La discrétisation spatiale par la méthode des éléments finis transforme une équation aux dérivées partielles qui dépend du temps et de l'espace en une équation matricielle qui ne dépend que du temps. En effet, on discrétise la structure en un nombre fini de nœuds N et on détermine la solution des équations de mouvement dans chaque nœud, c'est la solution discrète qui correspond à l'équation générale :

$$M \ddot{X}(t) + C \dot{X}(t) + K X(t) = F(t) \quad (14)$$

avec M , C , K , X et F sont respectivement la matrice de masse, la matrice d'amortissement, la matrice de rigidité, le vecteur de déplacements nodaux et le vecteur des forces nodales. Pour une équation non linéaire, la matrice de rigidité n'est pas constante et dépend de X .

Le système matriciel est d'ordre kN , avec N est le nombre de nœuds et k le nombre de degrés de liberté et $(N-1)$ est le nombre d'éléments issus de la discrétisation spatiale de la structure. Quand N augmente, certes on gagne en précision mais le temps de calcul augmente.

Pour la construction de ce système, on n'a pas besoin de fonctions d'interpolation dans chaque élément fini et l'expérience montre que dans le cas des corps élancés il est préférable d'opter pour des fonctions polynomiales qui assurent la continuité de la dérivée entre deux éléments (polynômes de Hermite).

Remarque : la solution discrète de l'équation du mouvement dépend du nombre de nœuds et des fonctions d'interpolations. La précision peut être améliorée en raffinant le maillage, c'est la version h de la méthode des éléments finis. En revanche, la version p consiste à augmenter le degré du polynôme d'interpolation (Xing et al., 2010). Nous avons opté pour la version h qui est plus simple à mettre en place.

2.2.3. Discrétisation Temporelle

La méthode de Newmark est utilisée pour déterminer l'inconnue X , le temps est discrétisé tel que : $t_n = t_{n-1} + \Delta t_n$ où $t \in [t_i, t_f]$ avec t_i et t_f sont respectivement l'instant de début et de fin de la simulation et à l'instant t_n , le vecteur X vaut X_n .

Connaissant les variables X , $\dot{X}$, $\ddot{X}$ et F à l'instant t_n , on détermine X et $\dot{X}$ à l'instant t_{n+1} :

$$X_{n+1} = X_n + \Delta t_n \dot{X}_n + (1 - \beta_2) \frac{\Delta t_n^2}{2} \ddot{X}_n + \beta_2 \frac{\Delta t_n^2}{2} \ddot{X}_{n+1}$$

$$\dot{X}_{n+1} = \dot{X}_n + (1 - \beta_1) \Delta t_n \ddot{X}_n + \beta_1 \Delta t_n \ddot{X}_{n+1}$$

Dans ces équations, β_1 et β_2 sont les paramètres de la discrétisation temporelle de Newmark.

En général, on prend $\beta_1 = 1/2$ et $\beta_2 = 1/2$.

Sachant qu'à l'instant t_{n+1} , l'équation matricielle (14) s'écrit : $M\ddot{X}_{n+1} + C\dot{X}_{n+1} + KX_{n+1} = F_{n+1}$

Alors il suffit donc de remplacer X_{n+1} et $\dot{X}_{n+1}$ par leurs expressions pour obtenir l'équation suivante :

$$\left(M + \beta_1 \Delta t_n C + \beta_2 \frac{\Delta t_n^2}{2} K \right) \ddot{X}_{n+1} = F_{n+1} - KX_n - (C + \Delta t_n K) \dot{X}_n - \left((1 - \beta_1) \Delta t_n C + (1 - \beta_2) \frac{\Delta t_n^2}{2} K \right) \ddot{X}_n$$

On se ramène à un simple système linéaire pour obtenir $\ddot{X}_{n+1}$ puis par les expressions ci-dessus X_{n+1} et $\dot{X}_{n+1}$. Et nous sommes alors ramenés à la même situation pour passer au pas suivant de temps.

2.2.4. Algorithme de Contact

2.2.4.1. Principe

Dans cette section, on se propose de présenter l'algorithme de contact que nous avons adopté et qui représente un point essentiel dans la modélisation du comportement dynamique de la garniture. Il faut rappeler que beaucoup de modèles de la littérature ne prennent pas en compte les forces de contact (Dykstra et al., 1996). Cette hypothèse peut être justifiée si la tige est dans un puits de faible inclinaison (pseudo-vertical) avec une vitesse de rotation et un poids sur l'outil relativement faibles. Certains modèles supposent que le contact est permanent (Dunayevsky et al., 1993). Cette situation se produit généralement quand la tige est dans un puits d'inclinaison élevée (pseudo-horizontal) avec un poids sur l'outil élevé (Heisig et al., 2000). Une généralisation de cette solution a été proposée par Tikhonov et al. (2002). En effet une solution statique est calculée, ce qui

permet de déterminer les forces de contact. Ensuite, l'équation de mouvement est résolue en supposant un contact permanent avec des forces de contact calculées en statique. Il est évident que dans les situations précédemment mentionnées, aucun algorithme de contact n'est nécessaire. En revanche, dans un forage réel, les impacts tige-formation sont fréquents, ce qui nous amène à adopter l'hypothèse d'un contact discontinu. Pour une section donnée de la garniture, le contact peut donc apparaître comme il peut disparaître.

Dans son modèle analytique, Théron (1996) considère que la tige est initialement en contact avec la paroi et reste en contact tant que le critère de rupture de contact n'est pas vérifié. Cet algorithme de contact ne considère que la force normale et ne fonctionne que pour des équations du mouvement linéaires ou linéarisées.

Dans le cas général, les forces de contact sont appliquées sur la garniture quand le déplacement latéral dépasse le jeu garniture-formation. L'algorithme de contact aura pour rôle de tester le dépassement pour toute la structure et l'application des efforts de contact là où le dépassement est positif. Ce processus est appliqué à chaque étape du calcul.

L'équation de mouvement est résolue en utilisant un schéma numérique à partir d'un état initial, la solution trouvée est testée par l'algorithme de contact. Ainsi, quand le déplacement latéral d'une section donnée dépasse le jeu radial alors une force de contact est appliquée au niveau de la section pour annuler le dépassement (Figure 2.15). Les nouvelles équations du mouvement avec contact sont résolues et la solution est testée de nouveau avec l'algorithme de contact, on a donc un calcul itératif qui s'arrête quand l'algorithme de contact ne trouve plus de dépassement. Cet algorithme est exécuté à chaque étape du calcul et le temps de calcul est d'autant plus important que le nombre de points de contacts augmente.

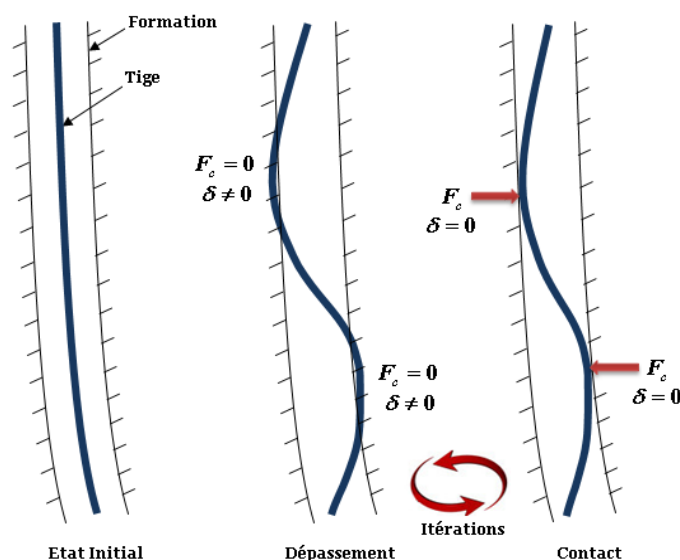


Figure 2.15: Gestion de Contact

L'utilisation de ce type d'algorithmes nous permet de déterminer les zones de contacts et les efforts de contact correspondants. Les impacts tige-formation sont également détectés, ces impacts correspondent à une création et rupture rapide d'un contact.

2.2.4.2. Application Numérique

On propose ici une application numérique pour tester l'algorithme de contact que nous avons choisi. On utilise une tige creuse en acier ($E=210$ MPa, $\nu=0.3$ et $\rho=7800$ Kg/m³) de longueur 50 m, avec un diamètre extérieur de 5" et un diamètre intérieur de 4". On choisit un puits pseudo vertical (inclinaison $\alpha=1^\circ$ et azimuth nul) et de diamètre égal à 8". En effet, c'est important de choisir un puits pseudo vertical si l'on veut étudier l'apparition et la rupture du contact car la tige a tendance à garder un contact permanent avec la paroi inférieure du puits quand l'inclinaison est élevée (puits pseudo-horizontal par exemple). Le reste des paramètres utilisés pour l'application numérique est détaillé dans le Tableau 2.2.

Tableau 2.2: Paramètres de l'application Numérique

Poids sur l'outil / Couple sur l'outil	1 tonne/100 dNm
Vitesse de Rotation	120 RPM
Coefficient de Frottement	0.3
Module d'Young de la Roche	246 MPa
Coefficient de Poisson de la Roche	0.4
Rigidité du Contact / Rayon du Contact	100 MPa/0.34 m

- **Contact Statique**

Les efforts statiques de contact sont présentés en fonction de la profondeur (Figure 2.16) ; on a deux forces latérales, une force axiale et un couple de contact. Les forces de contact représentées sur cette figure ne sont autres que la projection sur le repère global de la force normale (modèle de Hertz) et la force tangentielle (modèle de Coulomb avec lubrification). Par conséquent, ces forces sont nulles en absence de contact.

Dans le cas présent, on remarque que les efforts de contact sont nuls partout sauf pour la section située à 30 m de profondeur, c'est l'unique section où le déplacement latéral atteint le jeu comme le montre la Figure 2.17. Il s'agit d'un point de contact statique qui pourrait disparaître quand la structure est sollicitée par une perturbation dynamique.

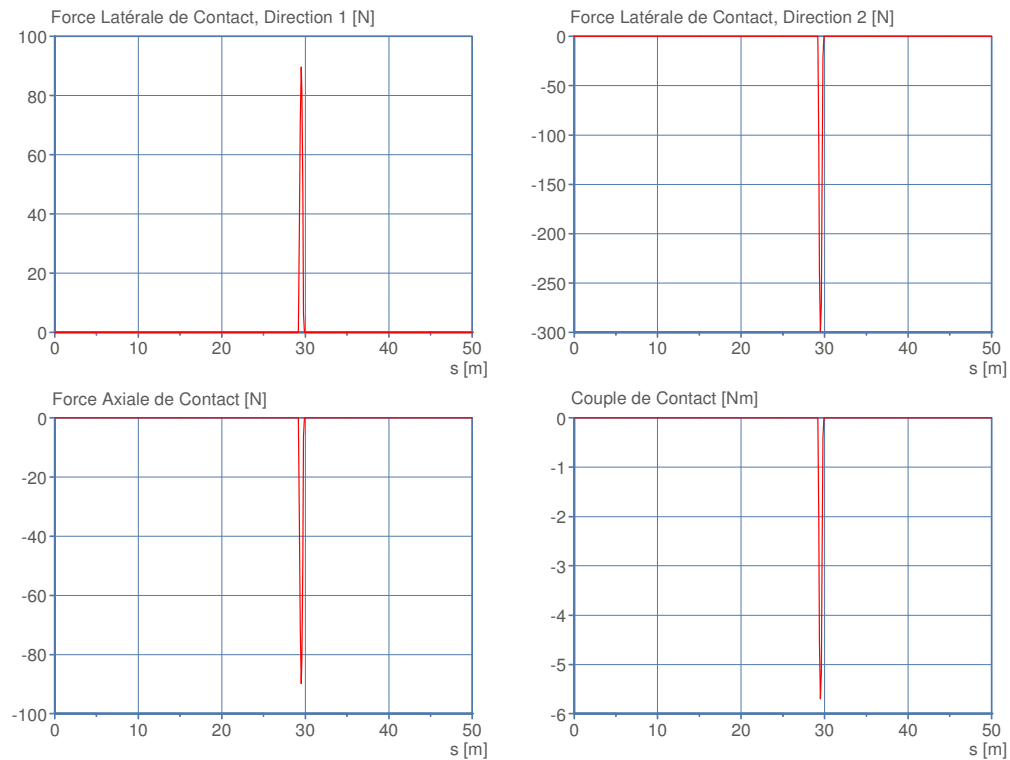


Figure 2.16: Efforts de Contact, Calcul Statique

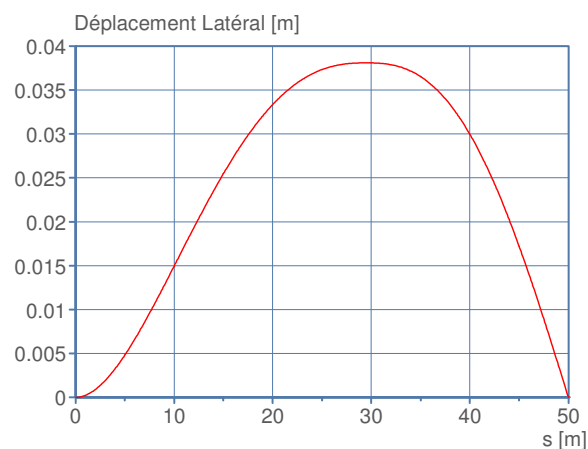


Figure 2.17: Déplacement Latéral, Calcul Statique

- **Contact Dynamique : Apparition/Rupture**

Les résultats qui seront présentés ici concernent une section située à 31 m de profondeur, cette section n'était pas en contact initialement (Figure 2.16). Nous allons voir l'évolution de ce contact au cours du temps ; cette fois, les efforts de contact sont présentés en fonction du temps. On identifie trois phases principales de contact (Figure 2.18) :

- phase (1) : la section n'était pas en contact, un choc se produit et le contact est crée ;

- phase (2) : les efforts de contact s'annulent alors la section se décolle de la paroi du puits. C'est donc une phase de rupture de contact ;
- phase (3) : le contact est de nouveau crée, c'est donc une phase de reprise de contact.

Remarques : Les trois phases de contact identifiées précédemment sont également visibles quand on observe le déplacement latéral de la section en question (Figure 2.19). Si le contact est rompu rapidement après sa création alors on le considère comme un impact.

On vient donc de montrer que l'algorithme de contact permet de détecter l'apparition, le maintien et la rupture du contact entre une section donnée de la tige et la paroi du puits.

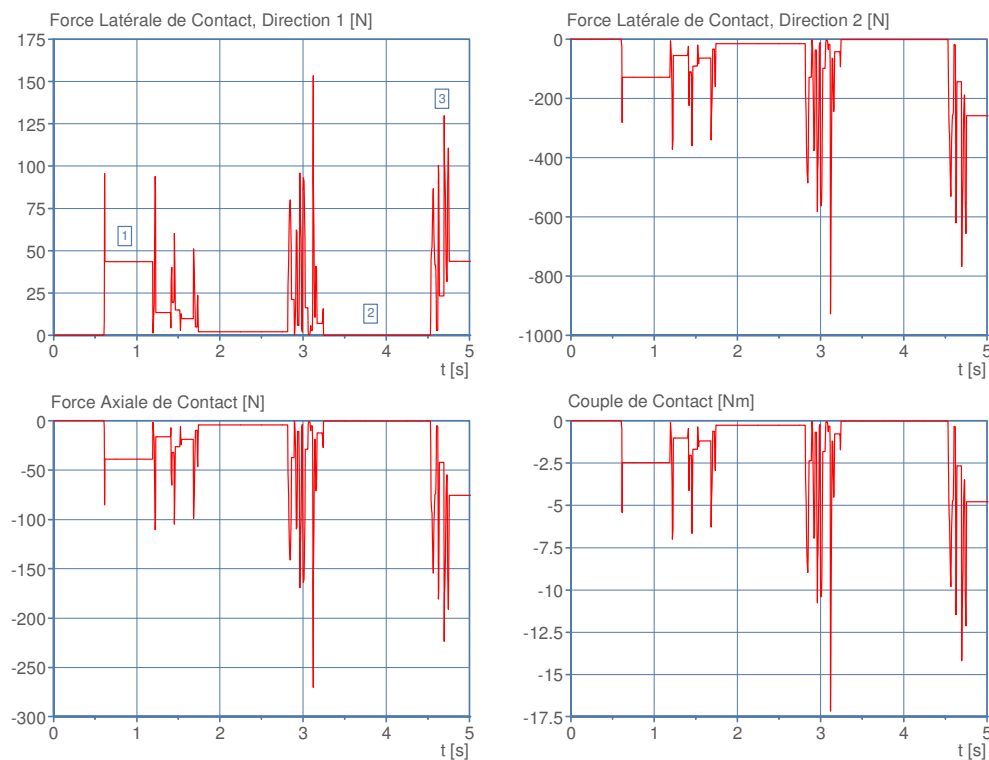


Figure 2.18: Efforts de Contact, Calcul Dynamique

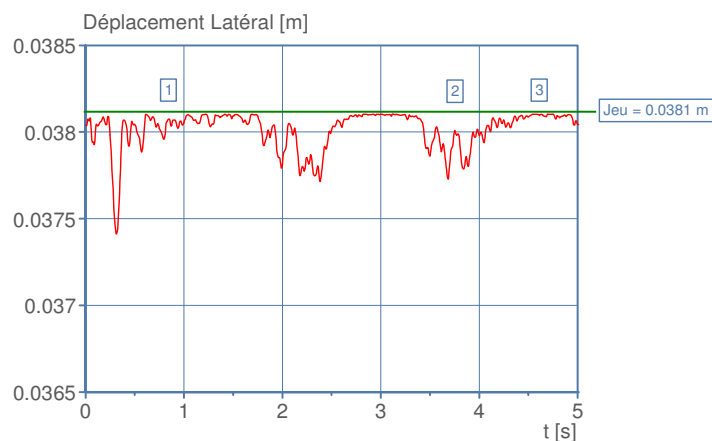


Figure 2.19: Déplacement Latéral, Calcul Dynamique

2.3. Validation du Modèle

On commence tout d'abord par une étude de sensibilité qui a pour but de vérifier si les résultats du modèle sont compatibles avec les observations générales de la littérature. Par la suite, on valide la solution statique puis la solution dynamique à partir d'essais réalisés sur un simulateur de vibrations latérales et un modèle de littérature.

2.3.1. Etude de Sensibilité

Cette étude de sensibilité qualitative a pour but de montrer que les tendances générales des résultats du modèle développé sont compatibles avec les données théoriques et les observations de terrain. La tige utilisée est en acier ($E=210$ MPa, $\nu=0.3$ et $\rho=7800$ Kg/m³), sa longueur est de 50 m avec un diamètre extérieur de 5" et un diamètre intérieur de 4". Le trou étant incliné (inclinaison $\sim 8^\circ$, azimuth $\sim 20^\circ$) et de diamètre 8". On considère un coefficient de frottement de 0.2 et une vitesse de rotation en surface de 95 RPM.

La tige est encastree en surface avec un appui simple au fond du trou. On fait varier un paramètre à la fois pour déterminer son effet sur les vibrations latérales de la tige pendant 40 s de simulation. Les paramètres testés sont : le poids sur l'outil, la vitesse de rotation, le jeu tige-trou, la longueur de tige et le coefficient de frottement. L'analyse des résultats concerne la section de la tige située à une distance de 5 m du fond.

2.3.1.1. Effet du Poids sur l'outil

Comme nous l'avons vu dans la présentation générale d'un système de forage pétrolier, l'interaction outil-roche donne lieu à des efforts dont la résultante axiale sur la tige est T et $(-T)$ est la grandeur qui représente le poids sur l'outil (WOB). Pour étudier la sensibilité du comportement de la tige à ce paramètre, nous avons imposé à l'extrémité de la tige un effort T avec la convention de signe $T > 0$ est une traction. L'effort est appliqué instantanément et est maintenu constant et nous analysons la réponse dynamique de la tige pour trois valeurs de T (1.5, -0.75, -1.5 tonne).

L'accélération latérale de la tige en état de traction (courbe rouge, Figure 2.20) est très faible par rapport à celle de la tige en état de compression (courbes verte et bleue, Figure 2.20). D'autre part, si la force de compression augmente alors la sévérité des vibrations latérales augmente et l'amplitude dépasse parfois 6 ms^{-2} (Figure 2.20).

Les vibrations latérales se produisent généralement dans la partie inférieure de la BHA qui est soumise à une forte compression ce qui est en accord avec les résultats de la Figure 2.20. Quand la force de compression dépasse les limites de flambage, la structure entre en flambage ce qui accroît la sévérité des vibrations latérales.

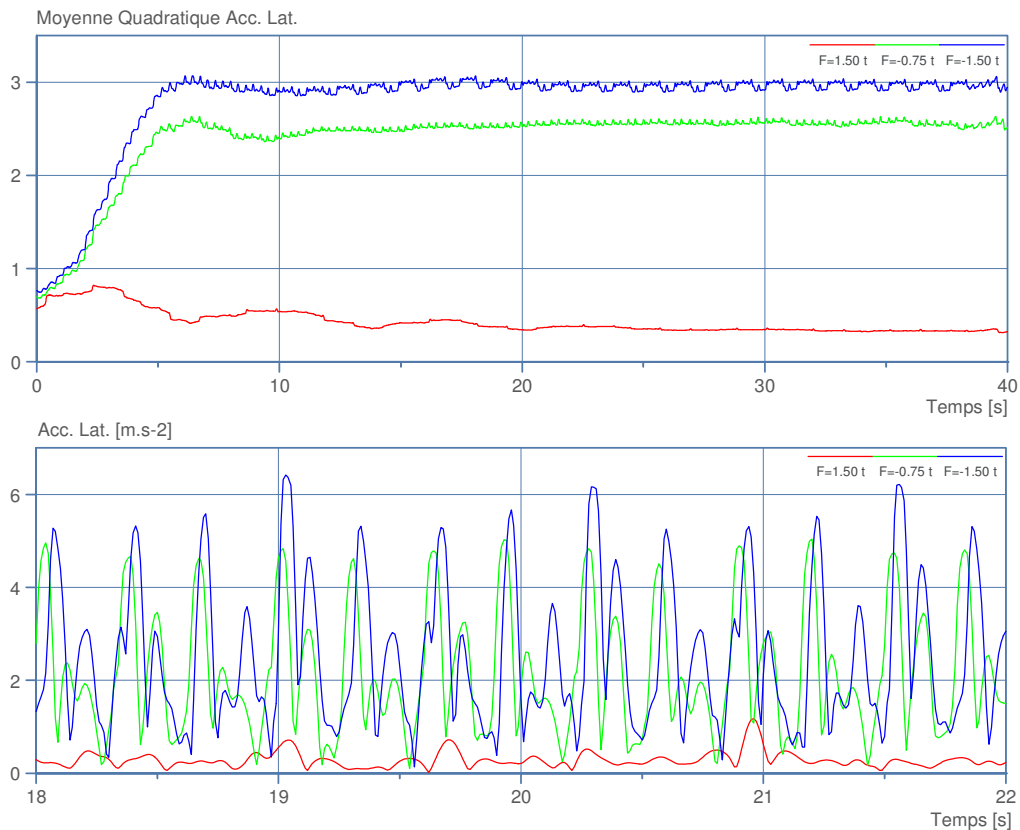


Figure 2.20: Effet du Poids sur l'outil; Accélération Latérale

2.3.1.2. Effet de la Vitesse de Rotation

Dans ce cas, on fixe le poids sur l'outil à une valeur de 0.5 tonne et on fait varier la vitesse de rotation (90, 95 et 100 RPM). On remarque que la vitesse de rotation a un effet similaire au poids sur l'outil. Quand on augmente la vitesse de rotation, la sévérité des vibrations latérales augmente et l'amplitude dépasse parfois 8 ms^{-2} (Figure 2.21). Cette amplitude est plus élevée que l'amplitude maximale de 6 ms^{-2} atteinte pour un poids sur l'outil de 1.5 tonne (le cas d'une compression, Figure 2.20), cela signifie que si l'on diminue largement le poids et on augmente légèrement la vitesse de rotation, l'amplitude des vibrations latérales augmente. On déduit donc que l'effet de la vitesse de rotation est plus important que l'effet du poids sur l'outil quand il s'agit d'étudier le phénomène des vibrations latérales.

Remarque : le poids sur l'outil et la vitesse de rotation permettent en général de contrôler la sévérité des vibrations latérales. En effet, quand la sévérité des vibrations latérales est élevée, on diminue le poids sur l'outil et/ou la vitesse de rotation pour diminuer les accélérations (Wu et al., 2010). Ces observations sont compatibles avec les résultats présentés sur la Figure 2.20 et la Figure 2.21.

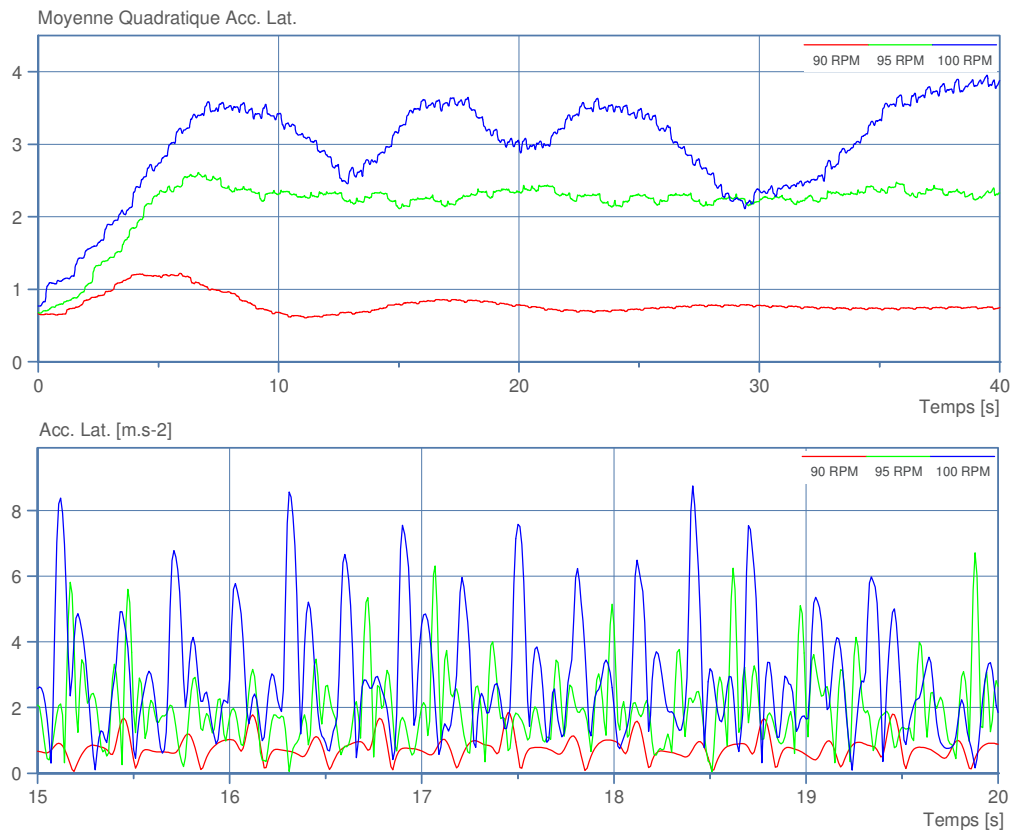


Figure 2.21: Effet de la Vitesse de Rotation; Accélération Latérale

2.3.1.3. Effet de la Longueur de la Tige

A partir de l'état précédent, on fixe la vitesse de rotation à 90 RPM et on prend des tiges de différentes longueurs (45, 50 et 55 m). Augmenter la longueur de la tige, augmente la force de compression dans la tige pour un puits de faible inclinaison. En se basant sur les observations précédentes, on peut déduire qu'une tige plus longue est susceptible de vibrer d'avantage ; cette conclusion est validée par les courbes de la Figure 2.22. Pour $L=45$ m, la tige est très rigide, ce qui limite la flexion de la tige et donc on a des vibrations latérales faibles. Cependant, quand on augmente la longueur de la tige, elle devient plus flexible ce qui favorise l'apparition des vibrations latérales ($L=55$ m, par exemple).

Pendant le processus de forage, la longueur stabilisée de la BHA, la distance entre deux stabilisateurs, ou bien entre l'outil et le premier stabilisateur est l'un des paramètres les plus importants pour le contrôle des vibrations latérales, des vitesses de rotation critiques et du comportement directionnel de la garniture (Dareing, 1984).

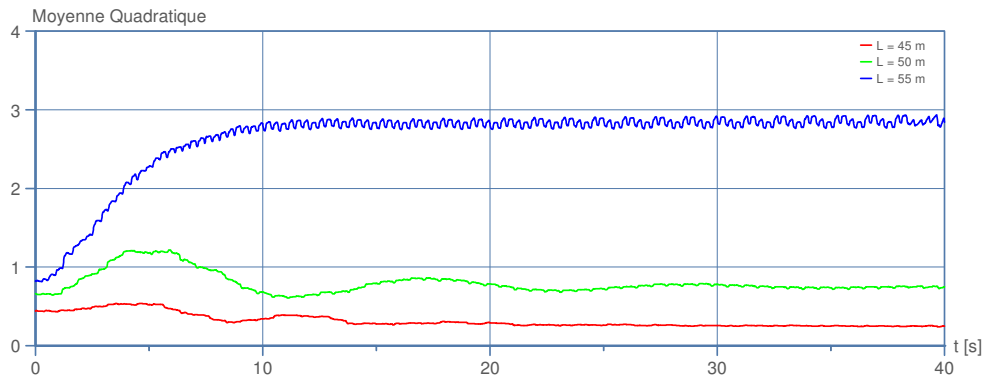


Figure 2.22: Effet de la Longueur; Accélération Latérale

2.3.1.4. Effet du Jeu Tige-Puits

La longueur de la tige est fixée à 50 m, on prend un poids sur l'outil de 0.25 tonne et on impose différents diamètres du puits et donc différents jeux tige-puits (1.9, 3.2 et 4.4 cm). Quand on réduit le jeu, plusieurs impacts se produisent, ce qui augmente l'accélération latérale de la tige. Par exemple, entre 30 et 40 s l'accélération dépasse 8 ms^{-2} pour le jeu le plus faible (courbe rouge, Figure 2.23) et en même temps un impact se produit. Quand le jeu est grand, la fréquence des impacts diminue et on a une accélération latérale presque uniforme (courbe verte) mais lorsque le jeu est très important (courbe bleue) on retrouve le comportement « modes propres de vibration » d'une tige libre de son mouvement.

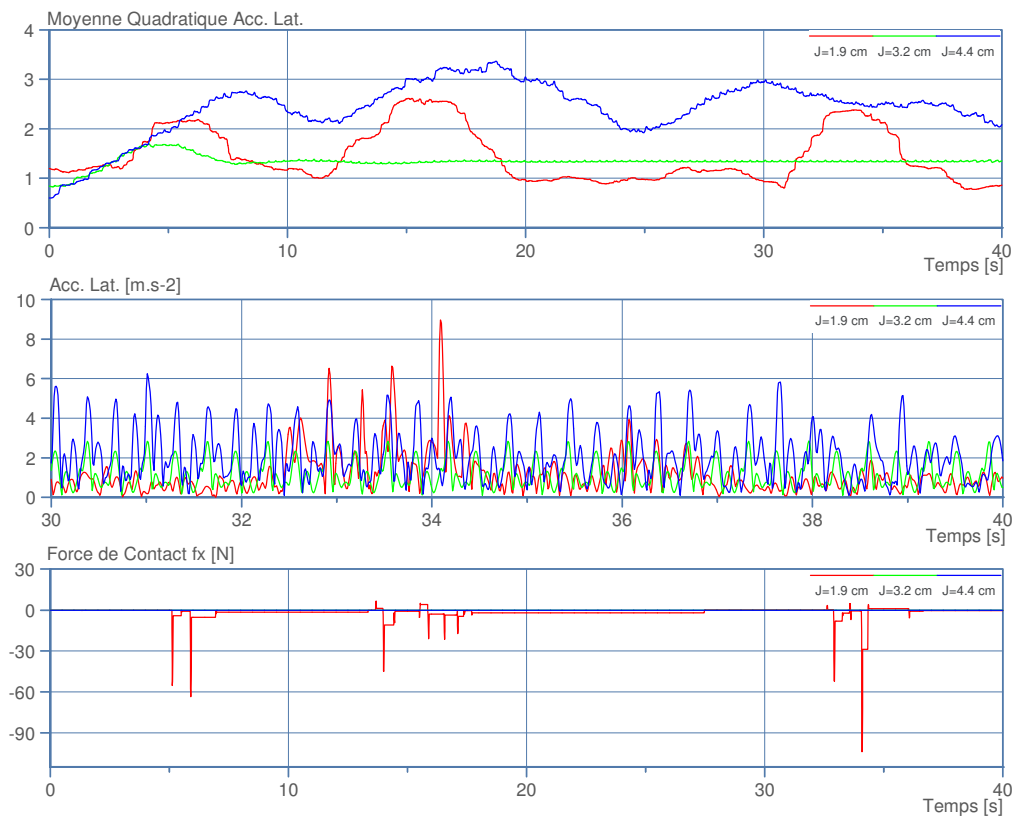


Figure 2.23: Effet du Jeu; Accélération Latérale et Impacts

2.3.1.5. Effet du Coefficient de Frottement

Le coefficient de frottement est un paramètre important quand il s'agit d'étudier les vibrations latérales. A partir de l'état précédent du système, on fixe le diamètre du puits à 8" et on impose différents coefficients de frottement ($\mu=0.05$, 0.25 et 0.42). D'après la Figure 2.24, quand le coefficient de frottement augmente les impacts commencent à apparaître. Suite à ces impacts, l'amplitude de l'accélération latérale augmente comme on peut le constater pour la courbe rouge ($\mu=0.05$) et la courbe bleue ($\mu=0.42$). La représentation du mouvement latéral de la section montre que l'amplitude du déplacement augmente et que le mouvement est moins régulier.

Remarque : une vitesse de rotation seuil a été calculée en fonction du frottement, du jeu latéral et d'autres paramètres (Théron et al., 2001). Les vibrations sévères sont moins probables quand la vitesse de rotation est inférieure à la valeur seuil, cette dernière est proportionnelle au jeu et inversement proportionnelle au frottement. De ce fait, si le frottement augmente (ou bien le jeu diminue) alors la vitesse seuil diminue et la tendance du système pour le whirling augmente.

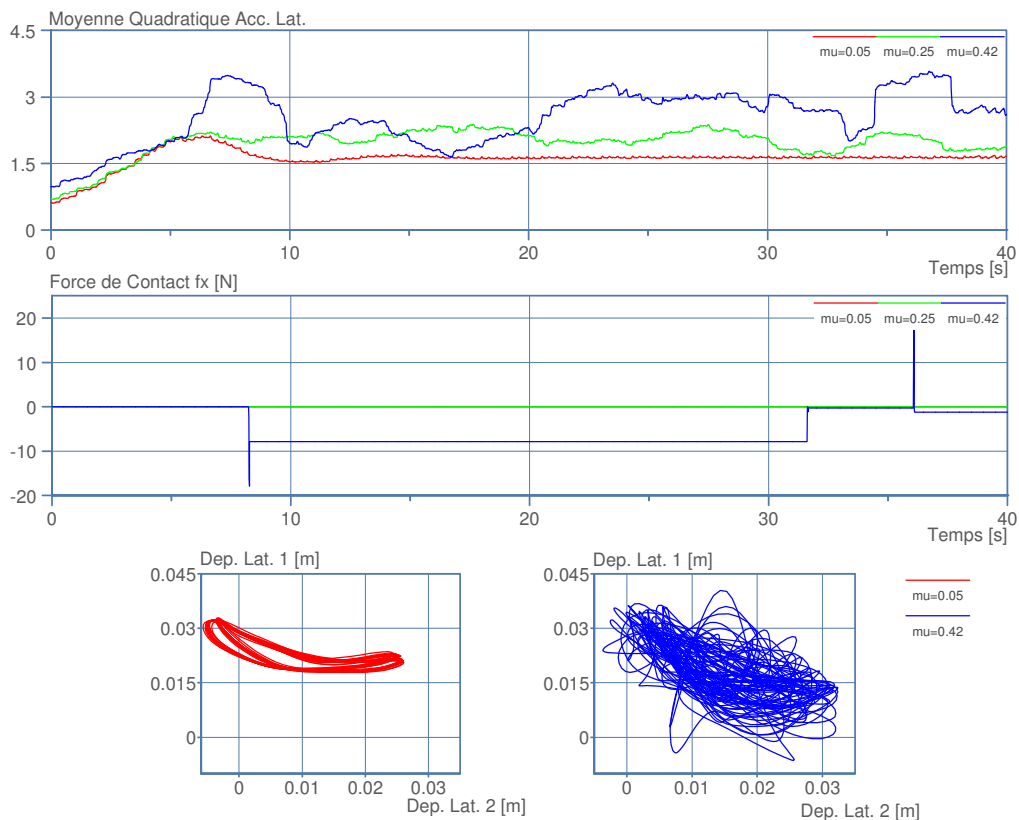


Figure 2.24: Effet du Frottement; Accélération Latérale, Impacts et Whirling

2.3.2. Validation de la Solution Statique

On présente ici une comparaison entre la solution statique calculée avec un logiciel de calcul statique de type Torque & Drag et la solution statique calculée avec le nouveau modèle. Le logiciel statique utilisé est le code ABIS développé au centre de Géosciences de Mines ParisTech. La tige étudiée est en acier ($E=210$ MPa, $\nu=0.3$ et $\rho=7800$ Kg/m³), elle est de 50 m de long avec un diamètre extérieur de 5" et un diamètre intérieur de 4". Le puits est incliné (inclinaison $\sim 12^\circ$, azimuth $\sim 63^\circ$) et de diamètre 8". On applique un poids sur l'outil de 10 kN. La tige est encastree en surface avec un appui simple au fond du trou.

Sur la Figure 2.25, on trace le déplacement latéral de la tige en fonction de la profondeur ; la courbe en rouge est la solution donnée par ABIS et la courbe en vert est la solution donnée par le nouveau modèle. La différence entre les deux solutions est raisonnablement faible et nous pourrions l'expliquer par le fait que le logiciel ABIS considère une paroi de puits infiniment rigide (donc indéformable) contrairement au modèle de Hertz utilisé dans notre calcul dynamique, ceci valide la solution donnée par le modèle en termes de déplacement latéral.

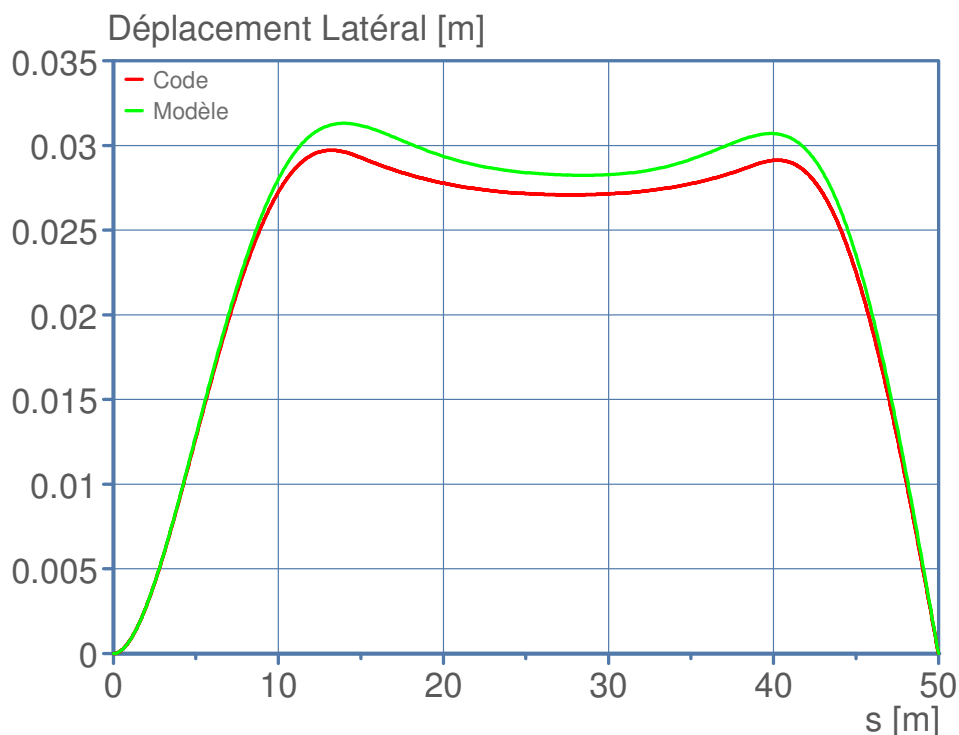


Figure 2.25: Déplacement Latéral

En ce qui concerne les efforts, on représente par exemple l'un des couples de flexion (Figure 2.26, à gauche) et le couple de torsion (Figure 2.26, à droite) ; on remarque là aussi une cohérence des résultats.

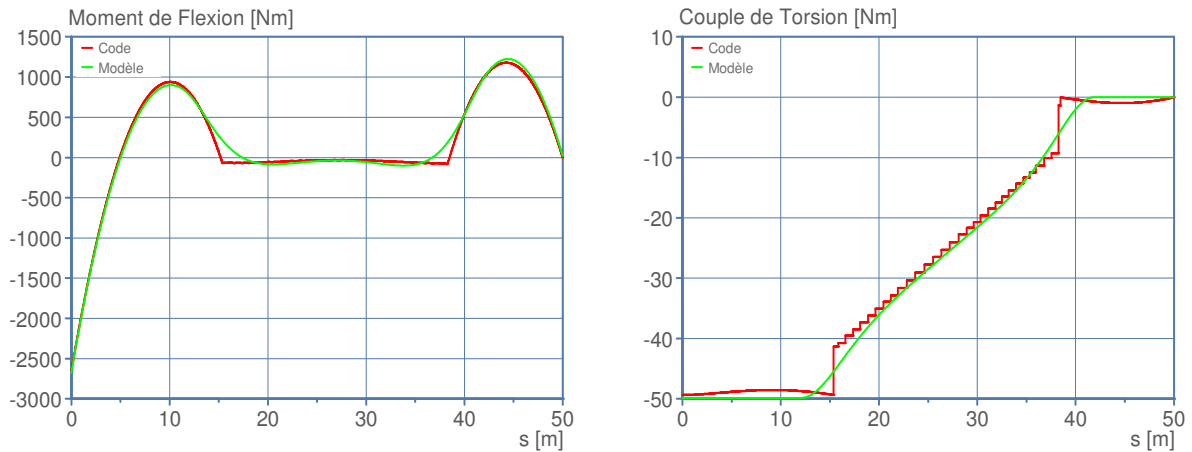


Figure 2.26: Couple de Flexion (Gauche), Couple de Torsion (Droite)

2.3.3. Validation de la Solution Dynamique

La validation dynamique est faite par des mesures expérimentales réalisées sur un simulateur de vibrations latérales (Figure 2.27).

2.3.3.1. Simulateur de Vibrations Latérales

Le simulateur de vibrations latérales est un banc vertical conçu dans le cadre de ce travail et installé dans le « centre d'essais de forage » de Mines ParisTech à Pau (Annexe A2). Ce simulateur est constitué par une tige en acier qui représente la garniture de forage, la tige est introduite dans un tube en plexiglas qui simule le forage. La tige est entraînée en rotation à sa partie haute ; à sa partie basse un dispositif est conçu pour appliquer une force de compression qui simule le poids sur l'outil (Figure 2.27). Les dimensions et l'ordre de grandeur des différents paramètres se trouvent dans le Tableau 2.3.

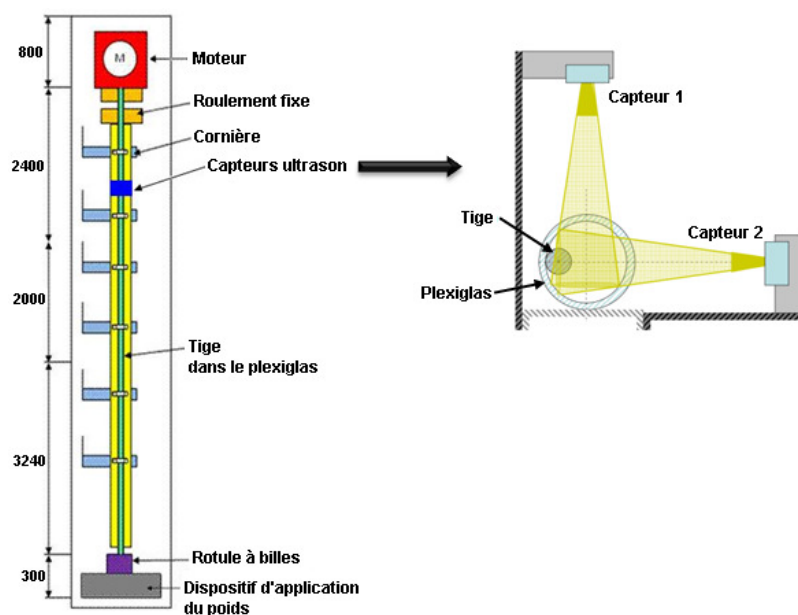


Figure 2.27: Simulateur de Vibrations Latérales

Au niveau du moteur, on a une liaison d'encastrement alors qu'à l'extrémité basse de la tige on a une liaison rotule. Le déplacement latéral de la tige est mesuré à trois niveaux différents en utilisant des couples de capteurs ultrason (Annexe A3). Chaque couple (Figure 2.27) permet de mesurer la distance tige-capteur dans deux directions orthogonales, ce qui permet de déduire la position latérale de la tige. Concernant les efforts, on a une mesure du couple de torsion au niveau du moteur et la force de compression est enregistrée au niveau du dispositif d'application du poids.

Remarque : le simulateur de vibrations latérales n'est pas un simulateur respectant les lois de similitude. Autrement dit, aucun principe de similitude n'était respecté pendant le développement du simulateur. Cependant, ce « simulateur » est une structure dont le comportement dynamique peut être prédit par le modèle développé. Il peut donc être utile pour valider les résultats du modèle théorique.

Tableau 2.3: Données Relatives au Simulateur de Vibrations

Longueur	7.64 m
Diamètres intérieur/ extérieur (tige)	12/14 mm
Diamètre du tube en plexiglas	42 mm
Position des 3 couples de capteurs	1.64/3.64/5.64 m
Fréquence d'acquisition des capteurs	33 Hz
Force de compression	0-1000 N
Vitesse de rotation	0-300 RPM

2.3.3.2. Essais et Résultats

Une campagne d'essais sur le simulateur des vibrations latérales a été conduite pour mieux comprendre le phénomène des vibrations latérales et du whirling en particulier.

Au cours des essais, on fait varier la vitesse de rotation et la force de compression et on mesure les déplacements latéraux de la section de la tige située au niveau des capteurs ultrason. On déduit ensuite les accélérations latérales pour cette section et ce pour une vitesse de rotation et une force de compression données. Pour déterminer la sévérité des vibrations, il suffit de calculer la moyenne quadratique des accélérations latérales. Les résultats des essais sont présentés sur la Figure 2.28 qui donne la carte de la sévérité des vibrations latérales dans le digramme vitesse de rotation en abscisse et force de compression en ordonnée. On note que la sévérité des vibrations varie de 0 à 0.37 g (soit 3.6 ms^{-2} , $1\text{g} = 10 \text{ ms}^{-2}$).

Pour constituer la carte de la Figure 2.28, on a fait varier la vitesse de rotation de 15 RPM à 285 RPM par pas de 15 RPM et la force de compression de 0 à 600 N par pas de 50 N. On

remarque que les vibrations latérales sont sévères (zone rouge) quand la vitesse de rotation et la force de compression sont élevées. Cette observation est compatible avec les observations de Wu et al. (2010) et les résultats du modèle donnés au paragraphe 2.3.1.2.

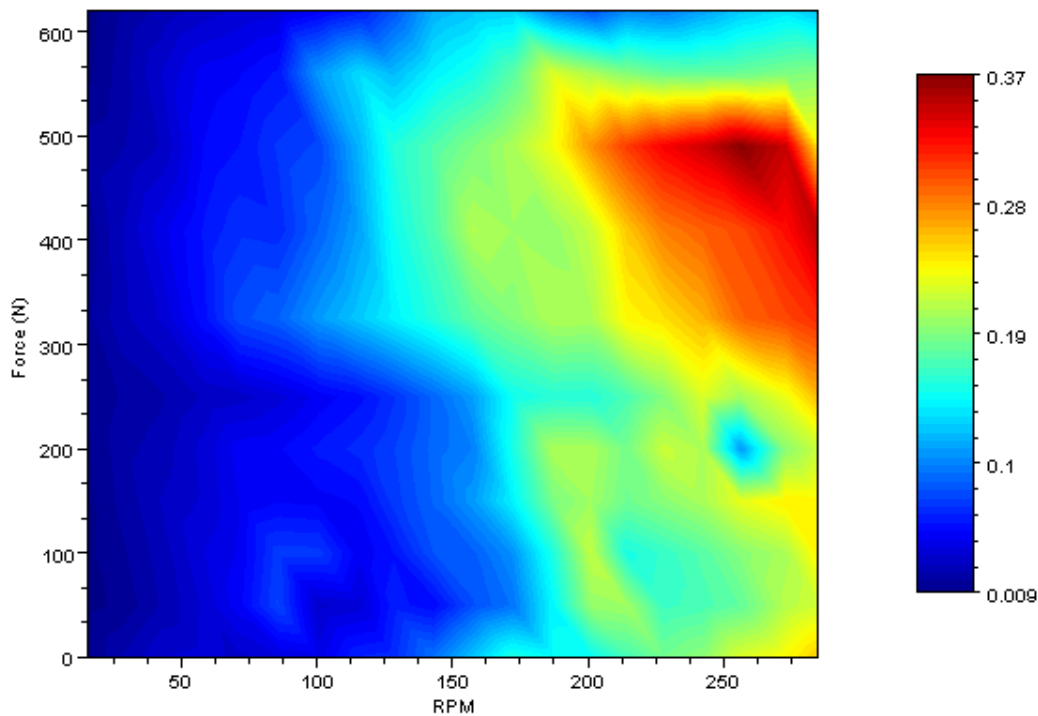


Figure 2.28: Sévérité des Vibrations Latérales (Exprimée en g)

Outre la sévérité des vibrations, les essais nous ont permis de détecter la présence des phénomènes du forward et backward whirling.

- **Forward Whirling**

Pour une vitesse de rotation de 173 RPM et une force de compression de 120 N, on trace la trajectoire du centre de la section dans un plan horizontal et l'historique de l'angle θ de whirling appelé phase (Figure 2.29) et qui est défini sur la Figure 2.30.

Cette phase θ nous renseigne sur le sens du whirling de la tige alors que sa dérivée nous renseigne sur la vitesse du whirling. Sur la Figure 2.29, la phase est monotone décroissante ce qui signifie que le whirling est de type forward avec une vitesse constante de 86 RPM. La vitesse de whirling est inférieure à la vitesse de rotation dans ce cas, alors on en déduit qu'il y a un glissement de la tige sur le plexiglas.

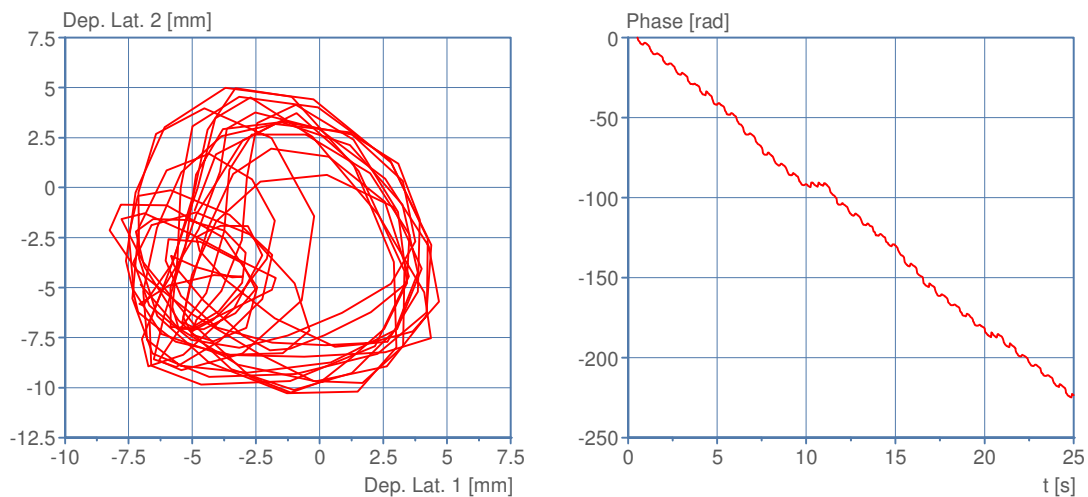


Figure 2.29: Forward Whirling (120N, 173RPM)

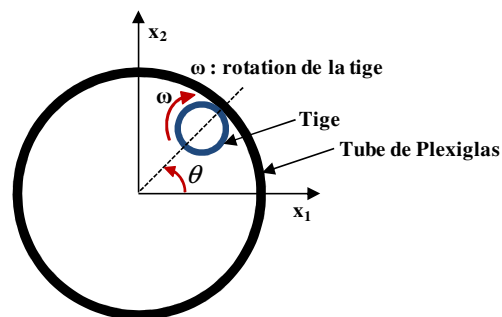


Figure 2.30: Phase du Whirling

- **Backward et Forward Whirling**

Pour la vitesse de rotation de 145 RPM et la force de compression de 100 N, on remarque que la phase n'est plus monotone (Figure 2.31). On déduit alors qu'il existe une alternance de forward et backward whirling dans ce cas. Pour comparer les deux cas de whirling, on représente la trajectoire de la section dans un plan horizontal pour le backward whirling (indexé par (1) sur la Figure 2.31) et pour le forward whirling (indexé par (2) sur la même figure). Pour le backward whirling, on a beaucoup d'impacts tige-paroi et la vitesse est de 61 RPM environ (en valeur absolue) alors que pour le forward whirling les impacts sont rares et la vitesse est de 96 RPM environ.

Dans notre cas, la vitesse du backward whirling ($|\Omega| = 61 \text{ RPM}$) est supérieure à la quantité

$$\left| \frac{R_e}{J} \omega \right| = |0.5\omega| = 72.5 \text{ RPM}$$

sachant que R_e est le rayon extérieur de la tige, J le jeu tige-tube

et ω est la vitesse de rotation ($\omega = 145 \text{ RPM}$). Alors on en déduit que la phase de backward s'accompagne d'un phénomène de glissement.

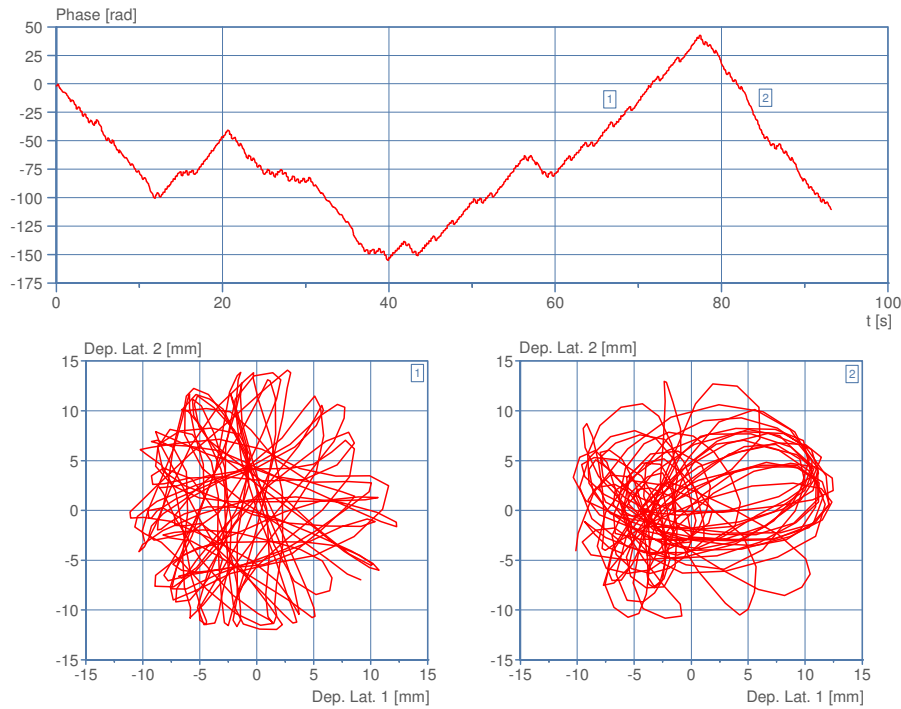


Figure 2.31: Backward & Forward Whirling (100N, 145RPM)

2.3.3.3. Comparaison Mesures/Simulation

Pour confronter les mesures et les résultats du modèle éléments finis, nous avons réalisé des simulations en utilisant les données et les paramètres du simulateur de vibrations (Tableau 2.3). La force de compression et la vitesse de rotation utilisées pendant la simulation proviennent de l'historique des mesures réalisées sur le simulateur de vibrations. Les déplacements latéraux au niveau d'une section donnée de la tige sont comparés aux mesures réalisés dans la même section et ce pour une force de compression de 90 N et une vitesse de rotation de 88 RPM. La Figure 2.32 illustre ce type de comparaison d'ordre qualitative ; on note qu'à la fois les mesures (graphe de gauche) et les simulations (graphe de droite) indiquent que la section considérées ici effectue un simple forward whirling.

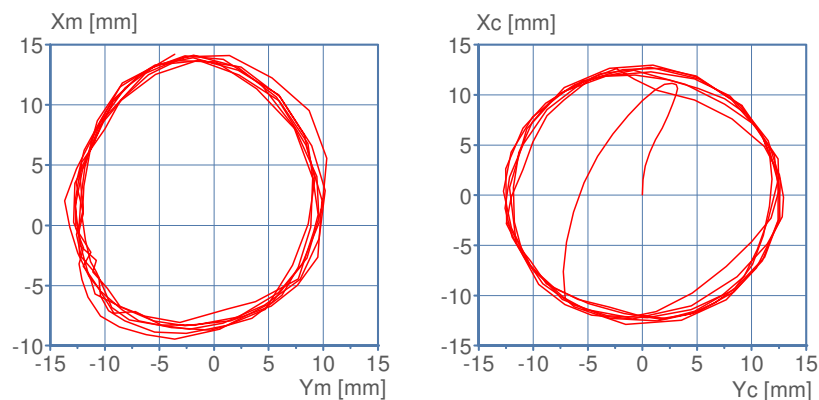


Figure 2.32: Whirling: Comparaison Essai (Xm,Ym) - Simulation (Xc,Yc)

2.3.4. Comparaison avec des Modèles Existants

Des calculs de fréquences propres ont été réalisés à l'aide du logiciel BHASYS développé à partir du modèle de Paslay et al. (1992) qui considère séparément les vibrations latérales, axiales et de torsion. Ce modèle permet de prédire l'existence du forward whirling synchrone (vitesse de whirling = vitesse de rotation) à partir des mesures dynamiques en surface. Les fréquences propres latérales sont calculées en admettant des vibrations libres et sans prendre en compte les interactions entre la garniture de forage et la paroi du puits.

En ce qui concerne les conditions aux limites, la BHA est libre à son extrémité haute et des appuis simples ont été adoptés au niveau des stabilisateurs. Paslay et al. (1992) ont assimilé la BHA à une poutre en prenant en compte l'influence des charges axiales sur les déplacements latéraux. Pour les vibrations axiales et les vibrations de torsion, la garniture est modélisée par un assemblage linéaire de masses-ressorts. Dans leur modèle, Paslay et al. (1992) ont négligé le couplage entre les différents modes de vibration ainsi que l'effet de l'amortissement. En revanche, les auteurs prennent en compte l'effet du fluide de forage à travers la masse ajoutée.

Nous avons utilisé les mesures de terrain présentées par Jogi et al. (2002) pour comparer les résultats du modèle de Paslay et al. (1992) et du modèle développé dans le cadre de notre travail. Nous avons considéré la même BHA (Figure 2.33) que celle utilisée par Jogi et al. (2002) ainsi que les mêmes conditions opératoires et conditions aux limites pour calculer les fréquences propres.

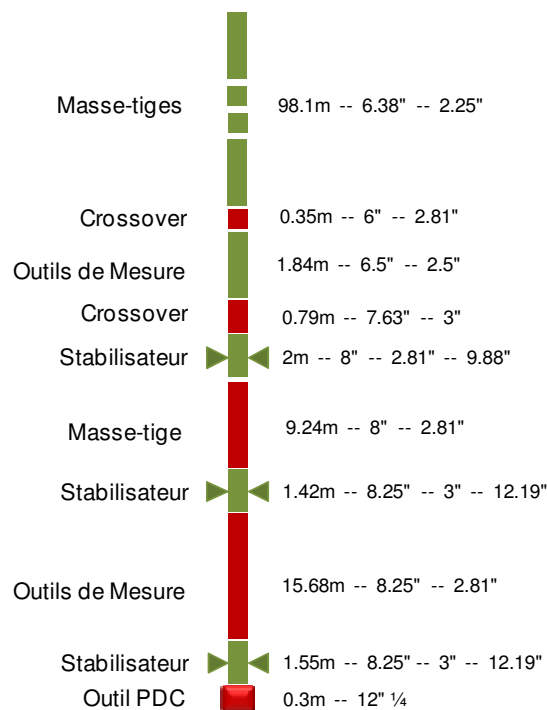


Figure 2.33: Configuration de la BHA (Paslay et al., 1992)

Pour obtenir les fréquences propres latérales, on excite la BHA avec différentes fréquences sachant que si la fréquence d'excitation correspond à une fréquence propre alors on a un pic de résonance. Sur la Figure 2.34, on représente les pics de résonance pour différentes conditions opératoires (différentes vitesses de rotation et différents poids sur l'outil). On remarque que l'on a des pics qui correspondent à des fréquences propres (f_p), d'autres qui correspondent aux fréquences d'excitation (ω surtout) et des pics qui sont dus au couplage des modes de vibrations (f_c).

Si l'on prend un poids donné et une vitesse donnée, alors on n'aura pas toutes les fréquences propres, il faut donc faire le calcul pour différents poids et différentes vitesses afin de retrouver toutes les fréquences propres recherchées.

La Figure 2.35 illustre une comparaison entre les fréquences propres mesurées, celles calculées avec BHASYS et notre modèle. On remarque une cohérence de tous ces résultats, ce qui consolide la pertinence du modèle développé.

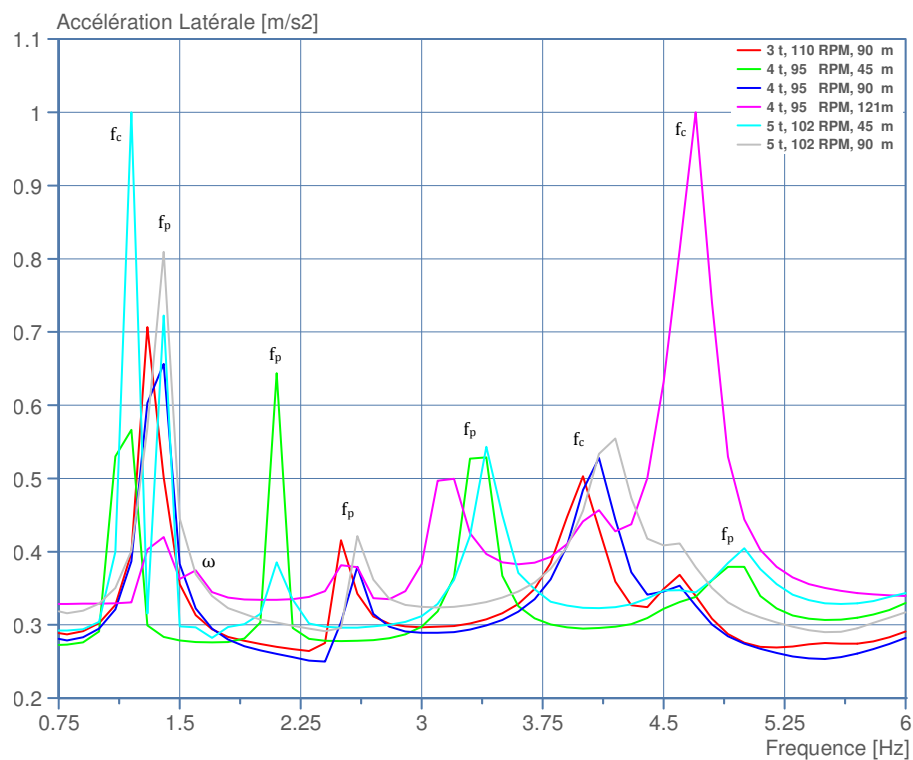


Figure 2.34: Pics de Résonance Latérale de la BHA, Moyennes Quadratiques Normalisées

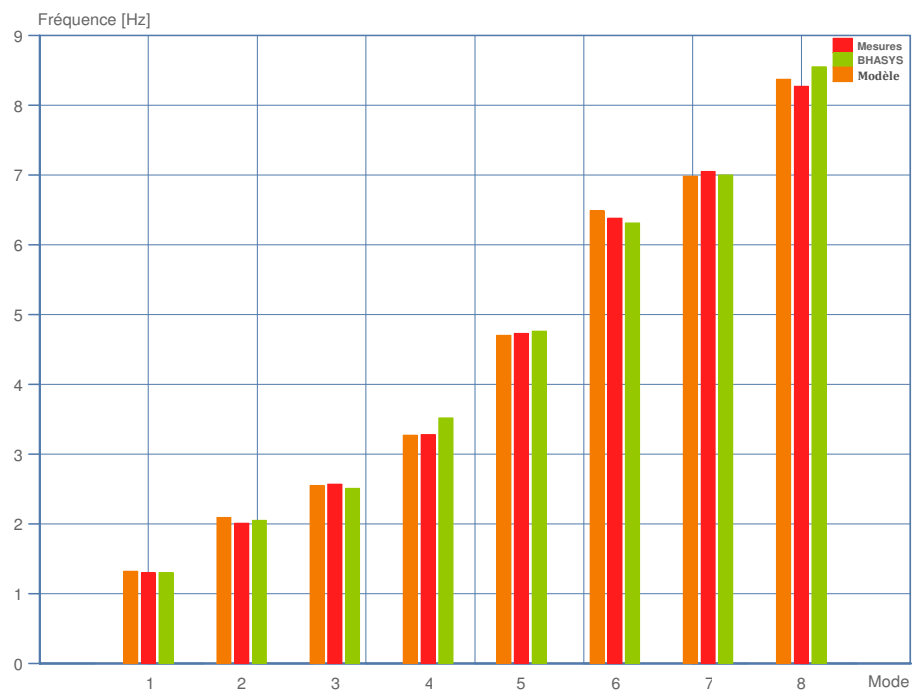


Figure 2.35: Comparaison des Fréquences Propres : Modèle, BHASYS et Mesures