

Méthodes à régions de confiance

Connaissances supposées. CNS d'optimalité pour les problèmes avec contraintes d'inégalité (pour la section 9.3); méthodes à directions de descente (pour les comparaisons); algorithme du gradient conjugué (pour la résolution numérique du sous-problème quadratique à la section 9.4).

9.1 L'algorithme de référence

On suppose dans cette section que l'on cherche à résoudre numériquement le problème d'optimisation sans contrainte

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x). \quad (9.1)$$

La fonction f est supposée (Fréchet-)différentiable.

La technique des régions de confiance peut être vue comme une méthode de *globalisation de la convergence* d'algorithmes pour la résolution du problème (9.1), ce qui veut dire qu'elle permet de forcer la convergence des itérés lorsque le démarrage des algorithmes se fait en un point éloigné d'une solution (il ne s'agit aucunement ici de trouver des minima globaux de f). De ce point de vue, cette technique concurrence les méthodes à directions de descente. Un peu plus difficile à mettre en œuvre que ces dernières, elles ont divers avantages, notamment en ce qui concerne les résultats de convergence, qui sont plus forts sous des hypothèses plus faibles. Elles ont aussi la réputation d'être plus robustes, c'est-à-dire de pouvoir résoudre des problèmes plus difficiles, moins bien conditionnés. Elles offrent enfin un moyen naturel de faire face à la non-convexité éventuelle de f .

9.1.1 Présentation de l'algorithme

Les méthodes à régions de confiance sont fondées sur le principe suivant, qui est très général et peut donc s'appliquer à d'autres contextes. Au point courant $x_k \in \mathbb{R}^n$, on suppose donné un modèle de la *variation* de f pour un incrément s de x_k . En optimisation différentiable, il est raisonnable de considérer un modèle quadratique de la forme

$$\psi_k(s) = g_k^\top s + \frac{1}{2} s^\top M_k s,$$

où $g_k = \nabla f(x_k)$ est le gradient de f en x_k et M_k est une matrice symétrique qui peut être $\nabla^2 f(x_k)$, la hessienne de f en x_k , ou une approximation de celle-ci. Gradient

et hessienne sont supposés être calculés pour le produit scalaire euclidien $\langle u, v \rangle = \sum_i u_i v_i$. On n'impose pas à la matrice M_k d'être définie positive (en particulier, elle peut être nulle). Cette souplesse contribue à la robustesse de cette approche.

En optimisation non différentiable, on ne dispose pas des gradients de f . On pourra alors construire des modèles différents, comme celui obtenu à partir des plans tangents à l'épigraphe de f aux points $(x_k, f(x_k))$. On est alors très proche de l'algorithme connu sous le nom de *méthode de faisceaux* (voir [317; Tome 2]).

Si $M_k = \nabla^2 f(x_k)$, on a le développement limité à l'ordre 2 :

$$f(x_k + s) \simeq f(x_k) + \psi_k(s).$$

Dans ce cas, le modèle quadratique est adéquat pour s voisin de 0. Dans les méthodes à régions de confiance, on considère que ψ_k est un modèle de la variation de f qui est acceptable dans un voisinage de la forme :

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq \Delta_k\},$$

où $\Delta_k > 0$ et $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne. Ce domaine est appelé la *région de confiance* du modèle ψ_k et Δ_k est appelé le *rayon de confiance*.

Pour trouver l'accroissement s_k à donner à x_k , on minimise le modèle quadratique ψ_k sur la région de confiance. On doit donc résoudre le *sous-problème quadratique*

$$(RC_k) \quad \begin{cases} \min \psi_k(s) \\ \|s\| \leq \Delta_k. \end{cases}$$

Soit s_k une solution (en général approchée) de ce sous-problème quadratique. Si $f(x_k + s_k)$ est suffisamment plus petit que $f(x_k)$, on accepte le pas s_k et on passe à l'itération suivante avec $x_{k+1} = x_k + s_k$. Dans le cas contraire, on résout à nouveau (RC_k) avec un rayon de confiance plus petit, car on considère que le modèle courant n'est pas fiable sur la boule $\bar{B}(0, \Delta_k)$. Nous verrons que, comme f et ψ_k coïncident au premier ordre, l'algorithme finit par trouver un rayon de confiance $\Delta_k > 0$ pour lequel la solution de (RC_k) est acceptée.

On ajuste ensuite le modèle à l'itéré suivant x_{k+1} : calcul de g_{k+1} , de M_{k+1} et de Δ_{k+1} . L'ajustement du rayon de confiance est basé sur la comparaison entre la décroissance réelle de f en passant de x_k à x_{k+1} et la décroissance prédite par le modèle, c'est-à-dire $-\psi_k(s_k)$. On peut alors passer à l'itération suivante.

Décrivons de manière précise une itération de la méthode à régions de confiance, celle passant de l'itéré x_k à x_{k+1} . Nous commenterons ses différentes étapes par la suite. On se donne des constantes indépendantes de l'indice k des itérations, qui sont :

- des seuils de succès : $0 < \omega_1 < \omega_2 < 1$,
- des facteurs de mise à jour de Δ_k : $0 < \tau_1 \leq \tau_2 < 1 < \tau_3$.

Des valeurs typiques sont :

$$\omega_1 = 10^{-2}, \quad \omega_2 = 0.8, \quad \tau_1 = \tau_2 = 0.5 \quad \text{et} \quad \tau_3 \in [2, 4].$$

Étant donnés x_k , g_k , M_k et Δ_k , on s'y prend alors de la manière suivante.

Schéma 9.1 (des régions de confiance — une itération)

1. *Test de convergence* : si $\|\nabla f(x_k)\| \simeq 0$ on s'arrête.

2. Calcul du déplacement s_k :2.1. On calcule une solution *approchée* s_k de (RC'_k) telle que

$$\psi_k(s_k) < 0.$$

Si ce n'est pas possible, on s'arrête.

2.2. On calcule le ratio

$$\rho_k = \frac{f(x_k) - f(x_k + s_k)}{-\psi_k(s_k)}.$$

2.3. Si $\rho_k \leq \omega_1$, on retourne alors à l'étape 2.1 après avoir réduit Δ_k en le prenant dans $[\tau_1 \|s_k\|, \tau_2 \|s_k\|]$.3. *Itéré suivant* : $x_{k+1} = x_k + s_k$.4. *Mise à jour du rayon de confiance* :

$$\Delta_{k+1} \in \begin{cases} [\tau_2 \Delta_k, \Delta_k] & \text{si } \rho_k \leq \omega_2 \\ [\Delta_k, \tau_3 \Delta_k] & \text{sinon.} \end{cases}$$

5. *Mise à jour du modèle* : calcul de g_{k+1} et M_{k+1} .

Levons une ambiguïté de notation : on note dorénavant (s_k, Δ_k) la solution approchée et le rayon de confiance obtenus à la sortie de l'étape 2. On ne tient donc pas compte des valeurs intermédiaires prises par ce couple lorsque la condition $\rho_k > \omega_1$ n'est pas vérifiée du premier coup. Certains auteurs considèrent les essais de déplacements comme de vraies itérations, motivés sans doute par le fait que le calcul le plus coûteux de l'algorithme est la résolution des problèmes quadratiques. Cependant, dans les grands problèmes industriels, le coût d'une simulation (calcul de g_k et M_k à l'étape 5) prédomine souvent. Nous considérerons donc ici qu'il y a une itération à chaque renouvellement de modèle. D'autre part, comme nous le verrons ci-dessous, cela permet de faciliter la comparaison des régions de confiance et de la recherche linéaire.

Si à l'étape 2.1, il n'est pas possible de réaliser $\psi(s_k) < 0$, c'est que $g_k = 0$ et M_k est *semi-définie positive*. Ceci devrait vouloir dire qu'on ne peut pas faire décroître f non plus. Donc si l'on s'impose un modèle ψ_k convexe (M_k semi-définie positive), on ne pourra trouver qu'un point stationnaire de f . Si f est convexe, c'est aussi un minimum. Si f n'est pas convexe, il est préférable de ne pas maintenir artificiellement M_k semi-définie positive mais d'y incorporer des informations sur la hessienne de f , afin d'éviter les points stationnaires qui ne sont pas des minima.

Cette observation met en évidence une différence importante avec les méthodes à directions de descente. Dans ces dernières, la direction de descente s'obtient également en minimisant un modèle quadratique, mais sur \mathbb{R}^n tout entier. Dans ce cas, il est essentiel d'avoir M_k (semi-)définie positive, sinon le sous-problème quadratique n'a pas de solution. De plus, en prenant M_k définie positive, on est sûr que la direction est de descente pour f . Les conditions assurant le bon fonctionnement des régions de confiance sont donc moins restrictives. C'est exactement sur ce point, grâce au fait qu'elles ne demandent pas d'avoir un modèle fortement convexe, que les régions de confiance gagnent en robustesse. Cela se traduira par un affaiblissement des hypothèses

garantissant la convergence de cette approche. Le prix à payer est la résolution d'un problème quadratique non trivial.

Le ratio ρ_k calculé à l'étape 2.1 est appelé *concordance*. Celle-ci apprécie l'adéquation entre la fonction f et son modèle ψ_k courant. Il s'agit en effet du rapport entre la décroissance réelle de f ($f(x_k) - f(x_k + s_k)$) et la décroissance prédite par le modèle ($-\psi_k(s_k) = \psi_k(0) - \psi_k(s_k) > 0$). Si ce rapport n'est pas assez grand ($\rho_k \leq \omega_1$, ρ_k sera négatif si le pas s_k ne fait pas décroître f), l'algorithme considère que le modèle ne permet pas de prédire la variation réelle de f et ne convient donc pas. En diminuant Δ_k on accroît l'importance de la partie linéaire de ψ_k qui coïncide avec l'approximation du premier ordre de f : $\nabla\psi_k(0) = \nabla f(x_k)$. On montre alors (Proposition 9.11) que si $g_k \neq 0$ et si la résolution de (RC_k) est suffisamment précise on finira par avoir $\rho_k > \omega_1$ (pour Δ_k petit) et par passer à l'étape 3. On montre le même résultat (Proposition 9.14) lorsque $g_k = 0$, à condition que l'on prenne $M_k = \nabla^2 f(x_k)$ et que $\nabla^2 f(x_k)$ ait une valeur propre < 0 . Lorsqu'il n'y a pas de bouclage à l'étape 2 de l'algorithme, on dit que *l'itération k est un succès*. Sinon, on dit que *l'itération k est un échec*.

Lorsqu'on passe à l'étape 3, on a $\rho_k \geq \omega_1$, ce qui s'écrit encore

$$f(x_k + s_k) \leq f(x_k) + \omega_1 \psi_k(s_k). \quad (9.2)$$

Cette condition rappelle la condition d'Armijo pour les méthodes à directions de descente et recherche linéaire, mais le terme contrôlant la décroissance de f , ici $\omega_1 \psi_k(s_k) \leq 0$, n'a pas le caractère linéaire qu'il a dans (6.9). Comme dans la règle d'Armijo (technique de rebroussement), on force la réalisation de cette condition en faisant décroître Δ_k . La structure du schéma 9.1 met clairement en évidence l'analogie entre les deux approches. L'étape 2 qui détermine Δ_k dans le schéma 9.1 correspond à l'étape de calcul du pas α_k en recherche linéaire. La différence essentielle est que la valeur de Δ_k a une incidence sur la direction $s_k \in \mathbb{R}^n$, alors que α_k n'affecte pas la direction $d_k \in \mathbb{R}^n$ suivant laquelle on se déplace en recherche linéaire.

La règle de mise à jour du rayon de confiance à l'étape 4 est simple. On sait alors que la concordance $\rho_k > \omega_1 > 0$. Si la concordance est moyenne ($\omega_1 < \rho_k \leq \omega_2$) on diminue (éventuellement) Δ_k ; si elle est bonne ($\rho_k > \omega_2$) on augmente (éventuellement) Δ_k . Remarquons que, contrairement aux méthodes à directions de descente, il n'y a aucun mécanisme permettant d'accroître Δ_k au cours de la même itération. L'accroissement éventuel de Δ_k se fait ici d'une itération à l'autre. Ceci est acceptable car il est raisonnable de faire l'hypothèse que la région de confiance du modèle varie peu d'une itération à l'autre (ce qui n'est pas le cas pour le pas dans les méthodes à directions de descente lorsque le modèle n'est pas newtonien).

On peut prendre d'autres normes que la norme euclidienne pour définir la région de confiance, mais cela conduit à un problème (RC_k) d'une autre nature. Par exemple, on pourrait prendre la norme ℓ_∞ , qui donne à (RC_k) n contraintes de borne. Bien que ces contraintes soient linéaires, le problème est plus difficile à résoudre exactement du fait de son aspect combinatoire (quelles sont les contraintes actives en la solution?). L'intérêt de la norme euclidienne vient de ce que (RC_k) n'a qu'une seule contrainte (il n'y a donc qu'un seul multiplicateur à trouver) et que cette contrainte est différentiable (en passant au carré, elle est donc quadratique). On verra une méthode efficace pour résoudre (RC_k) de manière approchée demandant en moyenne moins de deux itérations pour les problèmes de taille moyenne et des critères d'arrêt raisonnables.

9.1.2 Préconditionnement des méthodes à régions de confiance

Dans les problèmes d'optimisation, il est classique de preconditionner une méthode numérique, soit en faisant un changement de variables et en utilisant l'algorithme dans l'espace transformé, soit en utilisant un produit scalaire différent du produit scalaire euclidien. Sous certaines conditions les deux approches donnent le même preconditionnement. Il en est de même ici.

Changement de variables

Considérons d'abord le changement de variables $x \mapsto \tilde{x}$ sur \mathbb{R}^n , défini par

$$\tilde{x} = C_k x, \quad (9.3)$$

où C_k est une matrice régulière pouvant dépendre de l'itéré courant x_k . On introduit dans l'espace des \tilde{x} la fonction $\tilde{f}_k := f \circ C_k^{-1}$, pour laquelle on a donc

$$\tilde{f}_k(\tilde{x}) = f(C_k^{-1}\tilde{x}), \quad \text{pour tout } \tilde{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Donc, si x et \tilde{x} sont liés par (9.3), on a $\tilde{f}_k(\tilde{x}) = f(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. On voit aisément que sous la correspondance (9.3), on a

$$\nabla_{\tilde{x}} \tilde{f}_k(\tilde{x}) = C_k^{-\top} \nabla_x f(x) \quad \text{et} \quad \nabla_{\tilde{x}\tilde{x}}^2 \tilde{f}_k(\tilde{x}) = C_k^{-\top} \nabla_{xx}^2 f(x) C_k^{-1}. \quad (9.4)$$

Pour que le problème dans l'espace transformé soit bien conditionné, il est judicieux de choisir C_k de manière à avoir $\nabla_{\tilde{x}\tilde{x}}^2 \tilde{f}_k(\tilde{x}_k) \simeq I$. Ceci induit la condition sur C_k suivante

$$\boxed{C_k^\top C_k \simeq \nabla_{xx}^2 f(x_k)}. \quad (9.5)$$

Dans l'espace transformé, le problème (RC_k) s'écrit

$$\begin{cases} \min \tilde{g}_k^\top \tilde{s} + \frac{1}{2} \tilde{s}^\top \tilde{M}_k \tilde{s} \\ \|\tilde{s}\| \leq \Delta_k, \end{cases}$$

où $\tilde{g}_k = \nabla_{\tilde{x}} \tilde{f}_k(\tilde{x}_k)$ et $\tilde{M}_k \simeq \nabla_{\tilde{x}\tilde{x}}^2 \tilde{f}_k(\tilde{x}_k)$. Ramené à l'espace de départ en utilisant (9.3) et (9.4), ce problème devient

$$\boxed{\begin{cases} \min g_k^\top s + \frac{1}{2} s^\top M_k s \\ \|C_k s\| \leq \Delta_k, \end{cases}} \quad (9.6)$$

où $g_k = \nabla_x f(x_k)$ et $M_k = C_k^\top \tilde{M}_k C_k \simeq \nabla_{xx}^2 f(x_k)$.

En conclusion, le preconditionnement de (RC_k) s'obtient en modifiant la région de confiance sphérique $\tilde{B}_2(0, \Delta_k)$ qui devient l'ellipsoïde $\{s : \|C_k s\|_2 \leq \Delta_k\}$ dont la forme est donnée par une matrice régulière C_k vérifiant au mieux (9.5).

Changement de produit scalaire

Soit à présent un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{(k)}$ sur \mathbb{R}^n , qui peut dépendre de l'itéré courant, et $\| \cdot \|_{(k)}$ la norme associée. Alors, il est « naturel » de prendre comme sous-problème quadratique à l'itération k :

$$\begin{cases} \min \langle \bar{g}_k, s \rangle + \frac{1}{2} \langle \bar{M}_k s, s \rangle_{(k)} \\ \|s\|_{(k)} \leq \Delta_k, \end{cases}$$

où \bar{g}_k est le gradient de f en x_k et \bar{M}_k est une approximation de la hessienne de f en x_k pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{(k)}$. Ce produit scalaire peut s'exprimer en fonction du produit scalaire euclidien par

$$\langle u, v \rangle_{(k)} = u^\top P_k v,$$

où P_k est une matrice symétrique définie positive. Alors, on voit aisément que

$$\bar{g}_k = P_k^{-1} g_k$$

et il est normal d'avoir (il s'agit d'approximations)

$$\bar{M}_k = P_k^{-1} M_k.$$

Dès lors le problème précédent devient

$$\begin{cases} \min g_k^\top s + \frac{1}{2} s^\top M_k s \\ (s^\top P_k s)^{1/2} \leq \Delta_k. \end{cases}$$

On retrouve une matrice de préconditionnement P_k qui n'affecte que la forme de la région de confiance. Si

$$P_k = C_k^\top C_k, \tag{9.7}$$

on retrouve le problème préconditionné (9.6). On réalise donc le même préconditionnement avec ce nouveau produit scalaire qu'avec le changement de variables (9.3) si P_k et C_k sont liés par (9.7).

9.2 Exemples de modèles quadratiques**9.2.1 Modèle linéaire**

On prend $M_k = 0$, ce qui fournit un modèle linéaire en s . À chaque itération, il faut résoudre

$$\begin{cases} \min g_k^\top s \\ \|s\| \leq \Delta_k. \end{cases}$$

En écrivant les conditions d'optimalité, on voit que la solution, disons s_k , doit vérifier

$$\lambda_k s_k = -g_k,$$

où $\lambda_k \geq 0$ est le multiplicateur associé à la contrainte $\frac{1}{2}\|s\|^2 \leq \frac{1}{2}\Delta_k^2$. Si $g_k \neq 0$, le multiplicateur est non nul et la contrainte doit donc être active : s_k est obtenu en faisant un pas dans la direction de la plus profonde descente $-g_k$, de manière à venir toucher le bord de la région de confiance. Si $g_k = 0$, λ_k doit être nul et s_k peut être arbitraire dans la boule $\bar{B}(0, \Delta_k)$.

Avec ce modèle, on est très proche de l'algorithme du gradient (section 6.2.1). Le pas le long de $-g_k$ est déterminé en adaptant la région de confiance (schéma 9.1), d'une manière très semblable à ce que ferait une recherche linéaire.

9.2.2 Modèle newtonien

Au point $x_k \in \mathbb{R}^n$, on prend $M_k = \nabla^2 f(x_k)$. Il s'agit donc de résoudre à l'itération k :

$$\begin{cases} \min g_k^\top s + \frac{1}{2}s^\top \nabla^2 f(x_k)s \\ \|s\| \leq \Delta_k. \end{cases}$$

On observera que ce problème a toujours une solution (critère continu et ensemble admissible compact), même si la hessienne n'est pas définie positive, mais il n'est en général plus possible d'en donner une solution analytiquement. Comme nous le verrons à la section 9.3, il y a en effet parfois un problème de valeur propre à résoudre. Des méthodes numériques de résolution seront proposées et étudiées à la section 9.4.

9.2.3 Modèle gauss-newtonien

On se place ici dans le cadre déjà rencontré à la section 6.2.5, où la fonction à minimiser est la norme ℓ_2 d'une fonction $r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, appelée résidu :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \|r(x)\|_2^2.$$

De manière à éviter le calcul des dérivées secondes des résidus r_i , ce que le modèle newtonien exigerait, on se contente de la partie de la hessienne qui ne fait intervenir que la jacobienne $J_k = r'(x_k)$ des résidus, à savoir $J_k^\top J_k$. Il s'agit donc de résoudre à l'itération k :

$$\begin{cases} \min r_k^\top J_k s + \frac{1}{2} \|J_k s\|^2 \\ \|s\| \leq \Delta_k. \end{cases}$$

L'approche par régions de confiance fournit alors une *relecture* intéressante de l'algorithme de Levenberg-Marquardt, qui sera approfondie à la section 19.3.3.

9.3 Analyse du sous-problème quadratique

Le sous-problème quadratique à résoudre à chaque itération est de la forme suivante (on laisse tomber l'indice k)

$$(RC) \quad \begin{cases} \min \psi(s) = g^\top s + \frac{1}{2}s^\top M s \\ \|s\| \leq \Delta, \end{cases} \quad (9.8)$$

où $g \in \mathbb{R}^n$, $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est symétrique (sans être nécessairement définie positive) et $\Delta > 0$. On note

$$\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n,$$

les valeurs propres de M (elles sont réelles) et $E_1 = \mathcal{N}(M - \lambda_1 I)$ l'espace propre correspondant à la plus petite valeur propre λ_1 .

9.3.1 Conditions d'optimalité

Le résultat suivant est fondamental pour l'étude des méthodes à régions de confiance. Il est aussi remarquable car il donne des conditions nécessaires *et suffisantes* d'optimalité pour un problème *non* convexe (on ne suppose pas que M est *semi-définie positive*), ce qui est assez rare. Cela vient de la structure particulière du problème : un critère quadratique (non nécessairement convexe) et une seule contrainte quadratique convexe ($\|s\|^2 \leq \Delta^2$). On note

$$\ell : (s, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mapsto \ell(s, \lambda) = g^\top s + \frac{1}{2} s^\top M s + \frac{1}{2} \lambda (\|s\|^2 - \Delta^2),$$

le lagrangien du problème (RC), dans lequel la contrainte a été rendue différentiable en remplaçant $\|s\| \leq \Delta$ par la contrainte équivalente $\|s\|^2 \leq \Delta^2$. Selon le théorème 4.32, les conditions de KKT en un couple stationnaire $(\hat{s}, \hat{\lambda})$ s'écrivent (on utilise la notation compacte (4.32))

$$(M + \hat{\lambda} I) \hat{s} = -g \quad \text{et} \quad 0 \leq \hat{\lambda} \perp (\Delta - \|\hat{s}\|) \geq 0. \quad (9.9)$$

On rappelle que, lorsque A est une matrice symétrique, la notation $A \succcurlyeq 0$ signifie que A est *semi-définie positive*.

Théorème 9.2 (caractérisation d'une solution de (RC)) *On considère le problème de région de confiance (9.8) avec $\Delta > 0$. Soit $\hat{s} \in \mathbb{R}^n$. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

- (i) \hat{s} est solution de (RC),
- (ii) il existe $\hat{\lambda} \in \mathbb{R}$ tel que $(\hat{s}, \hat{\lambda})$ vérifie (9.9) et $(M + \hat{\lambda} I) \succcurlyeq 0$,
- (iii) il existe $\hat{\lambda} \in \mathbb{R}$ tel que $(\hat{s}, \hat{\lambda})$ vérifie (9.9) et \hat{s} minimise $\ell(\cdot, \hat{\lambda})$ sur \mathbb{R}^n .

DÉMONSTRATION. [(i) \Rightarrow (ii)] Soit \hat{s} une solution de (RC). Si la contrainte $\frac{1}{2}(\|\cdot\|^2 - \Delta^2)$ est active en \hat{s} , alors $\hat{s} \neq 0$ et la contrainte y est qualifiée car $\nabla c(\hat{s}) = \hat{s} \neq 0$. Par le théorème 4.32, il existe un multiplicateur $\hat{\lambda} \in \mathbb{R}$ tel que l'on ait (9.9). Il reste à montrer que $(M + \hat{\lambda} I) \succcurlyeq 0$.

D'après la condition du second ordre,

$$h^\top (M + \hat{\lambda} I) h > 0,$$

pour tout h non nul dans le cône critique $C(\hat{s})$. Si $\|\hat{s}\| < \Delta$, la contrainte n'est pas active, $\hat{\lambda} = 0$ et le cône critique $C(\hat{s}) = \mathbb{R}^n$: on a donc $(M + \hat{\lambda} I) = M \succcurlyeq 0$. Si $\|\hat{s}\| = \Delta$, alors $C(\hat{s})$ contient les $h \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $\hat{s}^\top h = 0$. Donc

$$\forall h \text{ tel que } \hat{s}^\top h = 0 : \quad h^\top (M + \hat{\lambda} I) h \geq 0.$$

Il reste à montrer cette inégalité pour les autres directions h . Le point-clé de la démonstration est de remarquer que pour tout $s \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|s\| = \|\hat{s}\|$, on a

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \psi(s) - \psi(\hat{s}) \quad [\text{car } \hat{s} \text{ est optimal}] \\
 &= g^\top s + \frac{1}{2}s^\top Ms - g^\top \hat{s} - \frac{1}{2}\hat{s}^\top M\hat{s} \\
 &= -\hat{s}^\top(M + \hat{\lambda}I)s + \frac{1}{2}s^\top Ms + \hat{s}^\top(M + \hat{\lambda}I)\hat{s} - \frac{1}{2}\hat{s}^\top M\hat{s} \quad [(9.9)_1] \\
 &= -\hat{s}^\top(M + \hat{\lambda}I)s + \frac{1}{2}s^\top(M + \hat{\lambda}I)s + \frac{1}{2}\hat{s}^\top(M + \hat{\lambda}I)\hat{s} \quad [\|\hat{s}\| = \|s\|].
 \end{aligned}$$

Donc

$$\forall s \text{ tel que } \|s\| = \|\hat{s}\| : \quad 0 \leq \frac{1}{2}(s - \hat{s})^\top(M + \hat{\lambda}I)(s - \hat{s}). \quad (9.10)$$

Soit $h \in \mathbb{R}^n$ tel que $\hat{s}^\top h \neq 0$. Alors l'équation en α ,

$$\|\hat{s} + \alpha h\|^2 = \|\hat{s}\|^2,$$

a deux racines réelles. En notant α la racine non nulle et en prenant $s = \hat{s} + \alpha h$, on a $\|s\| = \|\hat{s}\|$ et (9.10) montre que

$$\forall h \text{ tel que } \hat{s}^\top h \neq 0 : \quad h^\top(M + \hat{\lambda}I)h \geq 0.$$

[(ii) \Rightarrow (iii)] Comme $\ell(\cdot, \hat{\lambda})$ est quadratique de hessienne $M + \hat{\lambda}I \succcurlyeq 0$, cette fonction est convexe. Par (9.9)₁, son gradient s'annule en \hat{s} , si bien que \hat{s} minimise $\ell(\cdot, \hat{\lambda})$.

[(iii) \Rightarrow (i)] Par (9.9)₂ et la proposition 4.73, $\hat{\lambda}$ maximise $\ell(\hat{x}, \cdot)$. Par ailleurs, il est supposé dans (iii) que \hat{s} minimise $\ell(\cdot, \hat{\lambda})$. Dès lors, $(\hat{s}, \hat{\lambda})$ est un **point-selle** du lagrangien. Par la proposition 4.74, \hat{s} est alors solution (globale) de (RC). \square

Un résultat voisin du théorème 9.2 pour les problèmes homogènes est proposé à l'exercice 14.11. La dualisation lagrangienne du problème de région de confiance (RC) est considérée à l'exercice 14.9.

Il sera utile de détailler les conditions caractérisant une solution \hat{s} du problème de région de confiance (9.8) au moyen d'un multiplicateur associé $\hat{\lambda}$ (point (ii) du théorème 9.2) :

$$(M + \hat{\lambda}I)\hat{s} = -g, \quad (9.11a)$$

$$\|\hat{s}\| \leq \Delta, \quad (9.11b)$$

$$\hat{\lambda} \geq 0, \quad (9.11c)$$

$$\hat{\lambda}(\Delta - \|\hat{s}\|) = 0, \quad (9.11d)$$

$$(M + \hat{\lambda}I) \text{ est semi-définie positive.} \quad (9.11e)$$

On notera que, quelle que soit la matrice M , toute solution \hat{s} du sous-problème quadratique (RC) est une direction de descente (non stricte) de f en x , puisque $g^\top \hat{s} \leq 0$ grâce à (9.11a) et (9.11e).

9.3.2 Le chemin de recherche

D'après l'équation d'optimalité (9.11e), lorsque $\lambda > \hat{\lambda}$, $(M + \lambda I)$ est définie positive et on peut définir de manière unique un point $s_\lambda \in \mathbb{R}^n$ comme solution du problème linéaire

$$(M + \lambda I)s_\lambda = -g. \quad (9.12)$$

Si λ est également pris positif, le couple (s_λ, λ) vérifie les conditions d'optimalité (9.11a), (9.11c) et (9.11e). On peut donc songer à satisfaire les deux autres conditions en se déplaçant le long de la courbe définie par l'application

$$\lambda \in] -\lambda_1, +\infty[\mapsto s_\lambda \in \mathbb{R}^n.$$

C'est ce que fait l'algorithme de résolution de Moré-Sorensen décrit en section 9.4.2.

Dans cette section 9.3.2, nous allons étudier l'application $\lambda \mapsto s_\lambda$, ce qui apportera une meilleure compréhension du sous-problème quadratique (RC).

Proposition 9.3 (i) L'application $\lambda \in] -\lambda_1, +\infty[\mapsto s_\lambda \in \mathbb{R}^n$ est de classe C^∞ .

(ii) $s_\lambda \rightarrow 0$ lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$.

(iii) La tangente en l'origine à la courbe définie par l'application $\lambda \mapsto s_\lambda$ est colinéaire à $-g$.

(iv) Si v_1, \dots, v_n sont n vecteurs propres orthonormaux de M , associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, on a

$$s_\lambda = - \sum_{i=1}^n \frac{v_i^\top g}{\lambda_i + \lambda} v_i. \quad (9.13)$$

DÉMONSTRATION. L'application $\lambda \mapsto s_\lambda$ apparaît comme fonction implicite de l'équation $\Psi(s, \lambda) = 0$, où

$$\Psi(s, \lambda) = (M + \lambda I)s + g.$$

Comme Ψ est C^∞ et que $\Psi'_s(s, \lambda) = M + \lambda I$ est inversible pour $\lambda \in] -\lambda_1, +\infty[$, la fonction implicite est C^∞ sur cet intervalle.

En multipliant scalairement l'équation (9.12) par s_λ , on obtient $(\lambda_1 + \lambda)\|s_\lambda\|^2 \leq -g^\top s_\lambda$ et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$(\lambda_1 + \lambda)\|s_\lambda\| \leq \|g\|.$$

On en déduit que $s_\lambda \rightarrow 0$ pour $\lambda \rightarrow \infty$.

Si pour $\lambda > \max(0, -\lambda_1)$ on fait le changement de variable $\mu = 1/\lambda$ et si l'on note $r_\mu = s_\lambda$, on a

$$(\mu M + I)r_\mu = -\mu g.$$

Cette équation définit une fonction implicite $\mu \mapsto r_\mu$, de classe C^∞ dans un voisinage de 0, dont l'image pour $\mu > 0$ se confond avec l'image de l'application $\lambda \mapsto s_\lambda$. On a $r_0 = 0$ et en dérivant l'équation ci-dessus on obtient $r'_0 = -g$.

Soit $V = (v_1, \dots, v_n)$ la **matrice orthogonale** formée des vecteurs propres considérés de M et $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. On a $M + \lambda I = V(\Lambda + \lambda I)V^T$ et

$$(M + \lambda I)^{-1} = V(\Lambda + \lambda I)^{-1}V^T.$$

Alors (9.12) conduit à (9.13). □

La figure 9.1 représente le chemin image de l'application $\lambda \mapsto s_\lambda$.

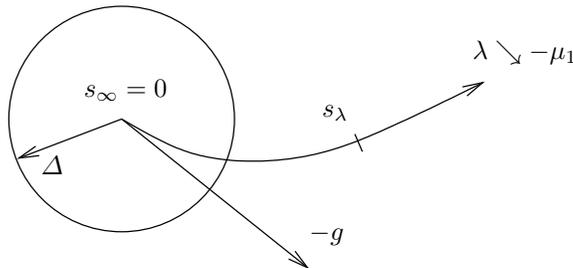


Fig. 9.1. Le chemin $\{s_\lambda : \lambda > -\lambda_1\}$.

Proposition 9.4 On a

$$\|s_\lambda\|^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(v_i^T g)^2}{(\lambda_i + \lambda)^2}. \tag{9.14}$$

Si $g \neq 0$, les applications $\lambda \mapsto \|s_\lambda\|$ et $\lambda \mapsto \|s_\lambda\|^2$ sont strictement décroissantes et strictement convexes sur $]-\lambda_1, +\infty[$.

DÉMONSTRATION. La relation (9.14) se déduit aisément de (9.13). Notons

$$\varphi(\lambda) = \|s_\lambda\|^2 \quad \text{et} \quad \nu(\lambda) = \|s_\lambda\|,$$

et supposons que $g \neq 0$. Donc $v_j^T g \neq 0$ pour au moins un indice j . Alors, d'après (9.14),

$$\varphi'(\lambda) = -2 \sum_{i=1}^n \frac{(v_i^T g)^2}{(\lambda_i + \lambda)^3} < 0.$$

Donc φ est strictement décroissante. Comme $\nu'(\lambda) = \varphi'(\lambda)/(2\nu(\lambda))$, il en est de même de ν .

On a aussi

$$\varphi''(\lambda) = 6 \sum_{i=1}^n \frac{(v_i^T g)^2}{(\lambda_i + \lambda)^4} > 0,$$

d'où la stricte convexité de φ . D'autre part, comme $\varphi'' = 2(\nu')^2 + 2\nu\nu'' = (\varphi')^2/(2\nu^2) + 2\nu\nu''$, on a

$$\begin{aligned} \nu''(\lambda) &= \frac{1}{4\nu(\lambda)^3} [2\varphi(\lambda)\varphi''(\lambda) - \varphi'(\lambda)^2] \\ &= \frac{1}{4\nu(\lambda)^3} \left[12 \sum_{i=1}^n \frac{(v_i^\top g)^2}{(\lambda_i + \lambda)^2} \sum_{i=1}^n \frac{(v_i^\top g)^2}{(\lambda_i + \lambda)^4} - 4 \left(\sum_{i=1}^n \frac{(v_i^\top g)^2}{(\lambda_i + \lambda)^3} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on en déduit

$$\nu''(\lambda) \geq \frac{2}{\nu(\lambda)^3} \left[\sum_{i=1}^n \frac{(v_i^\top g)^2}{(\lambda_i + \lambda)^2} \sum_{i=1}^n \frac{(v_i^\top g)^2}{(\lambda_i + \lambda)^4} \right] = \frac{\varphi(\lambda)\varphi''(\lambda)}{3\nu(\lambda)^3} > 0.$$

Ceci implique la stricte convexité de ν . □

La relation (9.14) montre que

$$\lim_{\lambda \searrow -\lambda_1} \|s_\lambda\| = +\infty \iff P_{E_1}g \neq 0.$$

On a noté $P_{E_1}g$, la projection orthogonale de g sur l'espace propre E_1 correspondant à la valeur propre λ_1 . Les allures possibles pour la courbe $\lambda \mapsto \|s_\lambda\|$ correspondant aux cas $P_{E_1}g \neq 0$ et $P_{E_1}g = 0$ sont données à la figure 9.2.

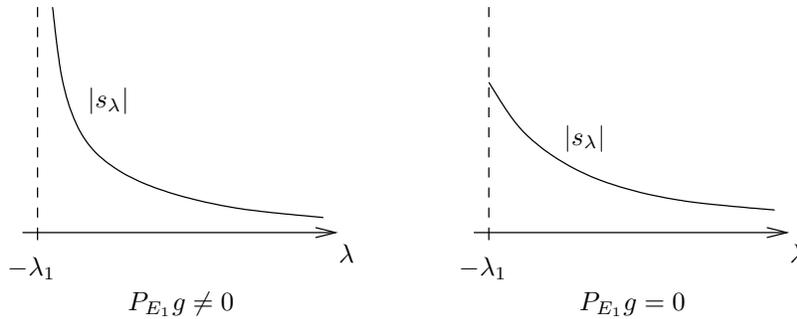


Fig. 9.2. Allures des applications $\lambda \mapsto \|s_\lambda\|$.

La proposition suivante est utile pour analyser le cas où $P_{E_1}g = 0$.

Proposition 9.5 *Si $P_{E_1}g = 0$, on a les propriétés suivantes :*

- (i) $s_\lambda \perp E_1$, pour tout $\lambda > -\lambda_1$,
- (ii) l'équation en s

$$(M - \lambda_1 I)s = -g, \tag{9.15}$$

a des solutions et $\|s\| \geq \|s_\lambda\|$, pour toute solution s de (9.15) et pour tout $\lambda > -\lambda_1$,

(iii) $\lim_{\lambda \searrow -\lambda_1} s_\lambda = s_{-\lambda_1}^+$, où

$$s_{-\lambda_1}^+ = -(M - \lambda_1 I)^+ g,$$

$(\cdot)^+$ désignant l'inverse généralisé.

DÉMONSTRATION. 1) Soit $v \in E_1$. Alors $v^\top g = 0$ et (9.12) donne

$$0 = v^\top (M + \lambda I) s_\lambda = (\lambda_1 + \lambda) v^\top s_\lambda.$$

Donc $v^\top s_\lambda = 0$, puisque $\lambda > -\lambda_1$.

2) Comme $g \in E_1^\perp = \mathcal{R}(M - \lambda_1 I)$, l'équation (9.15) a des solutions. Soit \tilde{s} une de ces solutions. Montrons que

$$\|s_\lambda\| \leq \|\tilde{s}\|, \quad \forall \lambda > -\lambda_1. \tag{9.16}$$

D'après (9.12) et la définie positivité de $(M + \lambda I)$ pour $\lambda > -\lambda_1$, s_λ est solution du problème convexe

$$\min_s \psi(s) + \frac{\lambda}{2} \|s\|^2.$$

De même, \tilde{s} est solution de ce problème avec $\lambda = -\lambda_1$. On en déduit

$$\psi(s_\lambda) + \frac{\lambda}{2} \|s_\lambda\|^2 \leq \psi(\tilde{s}) + \frac{\lambda}{2} \|\tilde{s}\|^2$$

$$\psi(\tilde{s}) - \frac{\lambda_1}{2} \|\tilde{s}\|^2 \leq \psi(s_\lambda) - \frac{\lambda_1}{2} \|s_\lambda\|^2$$

En sommant ces deux inégalités, on trouve (9.16).

3) D'après (ii), la suite $\{s_\lambda\}_{\lambda \searrow -\lambda_1}$ est bornée. Ses points d'adhérence \bar{s} vérifient (9.15) avec $s = \bar{s}$ et $\|\bar{s}\| \leq \|\tilde{s}\|$ pour toute solution \tilde{s} de (9.15). Ceci implique qu'il n'y a qu'un seul point d'adhérence qui est la solution de norme minimale de (9.15), ou encore $s_{-\lambda_1}^+$. \square

Proposition 9.6 *Si (s, λ) est solution des équations d'optimalité de (RC), alors λ est déterminé de façon unique. Il en est de même de s si $\lambda > -\lambda_1$.*

DÉMONSTRATION. La seconde partie de l'énoncé se déduit de la première et de l'équation d'optimalité (9.11a) puisqu'alors $(M + \lambda I)$ est inversible.

Montrons à présent l'unicité de λ . Supposons que l'on ait deux solutions (s', λ') et (s'', λ'') avec $\lambda' < \lambda''$. Comme $\lambda' \geq -\lambda_1$, on a $\lambda'' > -\lambda_1$. Donc $M + \lambda'' I$ est régulière et $s'' = s_{\lambda''}$. Analysons successivement les cas où $g = 0$ et $g \neq 0$.

Si $g = 0$, alors $s'' = 0$ et, par (9.11d), $\lambda'' = 0$. Or ceci contredit le fait que $\lambda'' > \lambda'$ puisque $\lambda' \geq 0$.

Si $g \neq 0$, l'application $\lambda \mapsto \|s_\lambda\|$ est strictement décroissante sur $] -\lambda_1, \infty[$ (Proposition 9.4). Donc

$$\Delta \geq \|s'\| \geq \|s_{\frac{\lambda' + \lambda''}{2}}\| > \|s_{\lambda''}\|,$$

la seconde inégalité venant de la proposition 9.5-(ii) lorsque $\lambda' \neq -\lambda_1$ et $P_{E_1}g = 0$. Grâce à (9.11d), on en déduit encore que $\lambda'' = 0$, ce qui conduit à la même contradiction que dans le cas où $g = 0$. \square

9.3.3 Discussion des solutions

Les résultats de la section 9.3.2 précédente permettent de discuter les solutions de (RC) en fonction de Δ , λ_1 et $P_{E_1}g$. Nous distinguons les cas où M est ou n'est pas définie positive.

Cas A : M est définie positive ($\lambda_1 > 0$). Alors quel que soit $\lambda \geq 0$, $(M + \lambda I)$ est définie positive et, vu l'unicité de λ , (RC) a une solution unique. Celle-ci est située sur la courbe définie par l'application $\lambda \mapsto s_\lambda$, qui est bien définie pour $\lambda \in [0, \infty[$. Il y a deux sous-cas.

A-1. $\|s_0\| \leq \Delta$. Alors $(s_0, 0)$ vérifie les conditions d'optimalité. s_0 est le point minimisant ψ sur \mathbb{R}^n . Cette situation est illustrée à la figure 9.3.

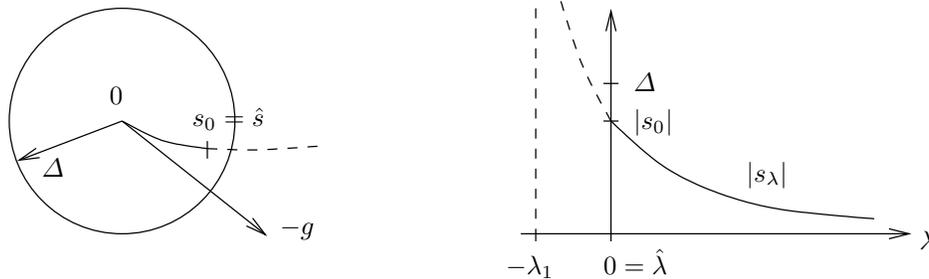


Fig. 9.3. Le cas A-1.

A-2. $\|s_0\| > \Delta$. La solution \hat{s} est donnée par l'intersection de la sphère de rayon Δ et de la courbe définie par $\lambda \mapsto s_\lambda$. Cette situation est illustrée à la figure 9.4.

Cas B : M n'est pas définie positive ($\lambda_1 \leq 0$). La recherche de $\hat{\lambda}$ se fait sur $[-\lambda_1, \infty[$ mais s_λ n'est bien défini que pour $\lambda \in] -\lambda_1, \infty[$. On distingue trois sous-cas.

B-1. $P_{E_1}g \neq 0$. Alors $\|s_\lambda\| \rightarrow +\infty$ quand $\lambda \searrow -\lambda_1$. On peut donc trouver $\hat{\lambda} \in] -\lambda_1, \infty[$ tel que $\|s_{\hat{\lambda}}\| = \Delta$. Cette situation est illustrée à la figure 9.5.

B-2. $P_{E_1}g = 0$ et $\|s_{-\lambda_1}^+\| > \Delta$. Cette fois $\{s_\lambda\}_{\lambda > -\lambda_1}$ est bornée mais on peut encore trouver $\hat{\lambda} \in] -\lambda_1, \infty[$ tel que $\|s_{\hat{\lambda}}\| = \Delta$. Cette situation est illustrée à la figure 9.6.

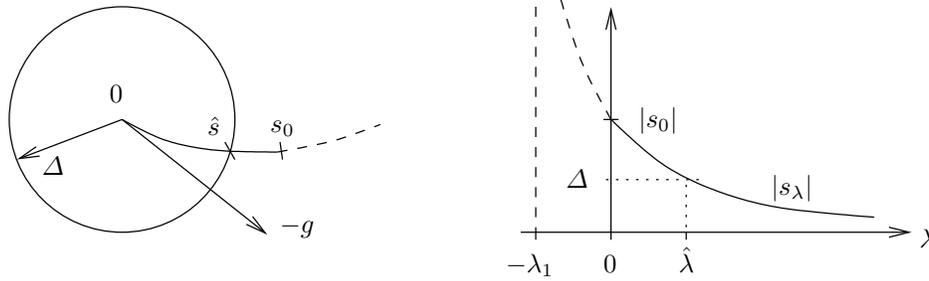


Fig. 9.4. Le cas A-2.

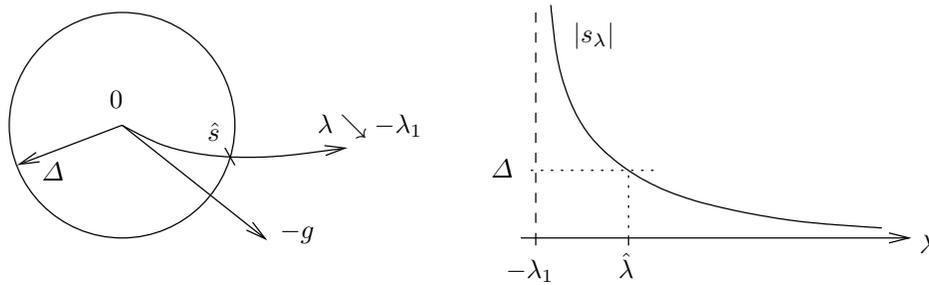


Fig. 9.5. Le cas B-1.

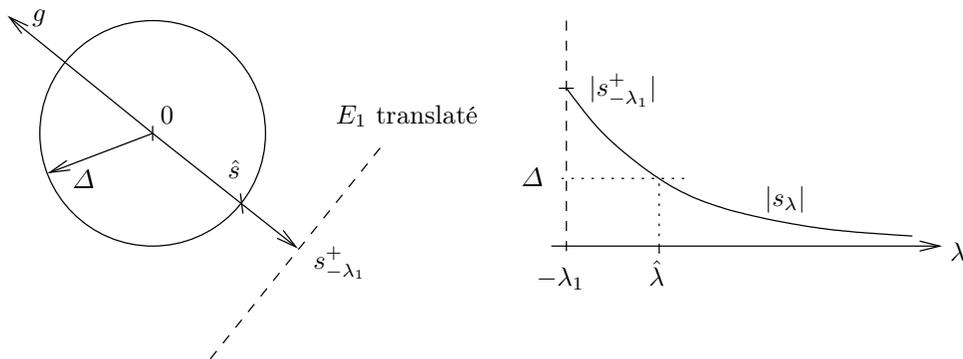


Fig. 9.6. Le cas B-2.

B-3. $P_{E_1}g = 0$ et $\|s_{-\lambda_1}^+\| \leq \Delta$. C'est le « cas difficile ». Il y a un problème de valeur propre à résoudre. Il faut prendre $\hat{\lambda} = -\lambda_1$ et trouver \hat{s} tel que $\|\hat{s}\| \leq \Delta$, $(M - \lambda_1 I)\hat{s} = -g$ et $\lambda_1(\Delta - \|\hat{s}\|) = 0$. Donc \hat{s} est de la forme

$$\hat{s} = s_{-\lambda_1}^+ + tv_1, \tag{9.17}$$

où $s_{-\lambda_1}^+$ est défini dans la proposition 9.5, $t \in \mathbb{R}$ et v_1 est un vecteur propre de M associé à la valeur propre λ_1 . Cette situation est illustrée à la figure 9.7.

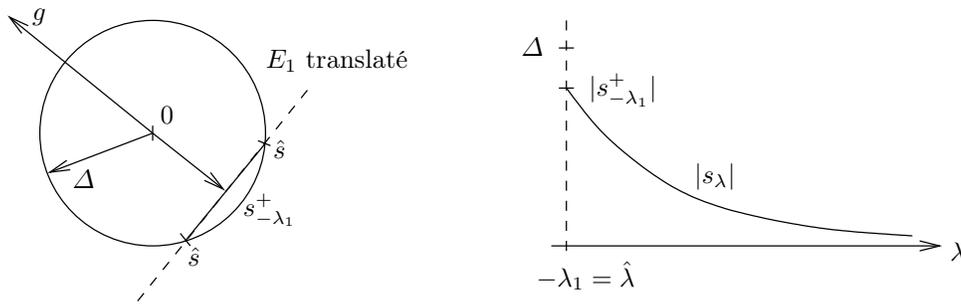


Fig. 9.7. Le cas B-3.

Seul le cas A-1 a une solution qui peut s'obtenir exactement. C'est le minimum de ψ sans contrainte: $s_0 = -M^{-1}g$. Dans les cas A-2, B-1 et B-2, il faut mettre en œuvre une méthode itérative pour trouver une racine (en λ) de l'équation

$$\|s_\lambda\| = \Delta.$$

Le cas B-3 est appelé le *cas difficile*: il a un problème de valeur propre à résoudre puisqu'il faut trouver λ_1 . Si en plus $\lambda_1 < 0$, il faut trouver \hat{s} tel que $\|\hat{s}\| = \Delta$. Cela peut se faire en ajustant le pas t dans (9.17) de manière à avoir $\|s_{-\lambda_1}^+ + tv_1\| = \Delta$, ce qui est possible car $\|s_{-\lambda_1}^+\| \leq \Delta$.

La discussion qui précède permet de mettre en évidence un *mécanisme de repli* des méthodes à régions de confiance qui n'est pas sans attrait. Lorsque le modèle ψ_k s'écarte du modèle quadratique de la variation de f , l'algorithme décroît Δ_k , ce qui conduit à prendre un point s_λ avec une valeur plus grande de λ , là où la courbe $\lambda \mapsto s_\lambda$ est plus proche de la tangente issue de l'origine $-g$. Par conséquent, en cas de difficulté, on recule à la méthode de la plus forte pente. Ce mécanisme sécurisant contribue à la robustesse des méthodes à régions de confiance et a servi de motivation à leur introduction (voir Marquardt [407; 1963]).

9.4 Résolution numérique du sous-problème quadratique

Il est clair d'après la section 9.3 qu'en général on ne peut pas résoudre le sous-problème quadratique (RC_k) exactement. Le seul cas simple se présente lorsque M_k

est définie positive et Δ_k est suffisamment grand pour que le minimum global de ψ_k , ou *point de Newton*

$$s_k^N = -M_k^{-1}g_k,$$

soit dans la région de confiance ($\|s_k^N\| \leq \Delta_k$). Autrement, il y a un problème non linéaire à résoudre et parfois un problème de valeur propre. Nous allons décrire dans cette section quelques méthodes numériques de résolution de (RC_k) .

La convergence des méthodes à régions de confiance dépend aussi de l'algorithme utilisé pour résoudre le sous-problème quadratique, en particulier lorsque ceux-ci en calculent une solution très grossière, ce qui était passé sous silence dans le schéma algorithmique 9.1. En fait, il faut très peu en faire si l'on n'est intéressé que par la convergence des gradients vers zéro, c'est-à-dire si la stationnarité seule des points d'adhérence de $\{x_k\}$ est déjà satisfaisante. Nous discutons à la section 9.4.1 le rôle que joue le *point de Cauchy* dans cette convergence « au premier ordre » et nous y décrivons quelques algorithmes qui s'y réfèrent.

Les algorithmes à régions de confiance ont une propriété remarquable que n'ont pas les algorithmes à directions de descente¹ : ils peuvent forcer les itérés à s'échapper d'un point stationnaire qui n'est pas un minimum local, pourvu que le sous-problème quadratique soit résolu avec une précision suffisante. C'est l'intérêt principal des méthodes de résolution présentées à la section 9.4.2. On montrera à la section 9.5.2 qu'avec une résolution fine des sous-problèmes quadratiques utilisant $M_k = \nabla^2 f(x_k)$, les algorithmes à régions de confiance convergent vers des minima locaux (pas seulement des points stationnaires).

9.4.1 Méthodes fondées sur le point de Cauchy

Le point de Cauchy

Définition 9.7 On appelle *point de Cauchy* du sous-problème quadratique (RC_k) , le point noté s_k^C , solution de :

$$\begin{cases} \min \psi_k(s) \\ \|s\| \leq \Delta_k, \\ s = -\alpha g_k, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

□

C'est donc le point minimisant ψ_k dans la région de confiance, le long de la droite de plus forte pente de ψ_k (ou de f , puisque l'on a supposé que $\nabla\psi_k(0) = \nabla f(x_k)$).

Le point de Cauchy peut être calculé à un coût très faible, comme le montre la formule ci-dessous.

Proposition 9.8 *Le point de Cauchy s_k^C est unique et donné par*

¹ À moins que l'on ne soit à même de gérer un jour avec soin les directions à courbure négative du critère, sujet que nous n'avons pas abordé et qui est très peu stabilisé, faute d'idées algorithmiques qui s'imposent.

$$s_k^c = \begin{cases} 0 & \text{si } g_k = 0 \\ -\frac{\Delta_k}{\|g_k\|} g_k & \text{si } g_k \neq 0 \text{ et } g_k^\top M_k g_k \leq 0 \\ -\min\left(\frac{\Delta_k}{\|g_k\|}, \frac{\|g_k\|^2}{g_k^\top M_k g_k}\right) g_k & \text{sinon.} \end{cases} \quad (9.18)$$

DÉMONSTRATION. En effet, le cas où $g_k = 0$ est clair. Supposons à présent que $g_k \neq 0$. Si $g_k^\top M_k g_k \leq 0$, alors $\alpha \mapsto \psi_k(-\alpha g_k)$ est concave et $\nabla \psi_k(0)^\top (-g_k) = -\|g_k\|^2 < 0$, si bien qu'il faut donc prendre α le plus grand possible tout en gardant $\|-\alpha g_k\| \leq \Delta_k$. Ceci donne $\alpha = \Delta_k / \|g_k\|$. Il reste à examiner le cas où $g_k^\top M_k g_k > 0$. Le résultat se déduit du fait que, dans ce cas, le minimum de $\alpha \mapsto \psi_k(-\alpha g_k)$ est obtenu en $\alpha = \|g_k\|^2 / g_k^\top M_k g_k$. \square

Le point de Cauchy joue un rôle important dans la convergence des méthodes à régions de confiance. Pour que celles-ci convergent (au sens où la suite des gradients tend vers 0), il suffit en effet de résoudre le sous-problème quadratique de manière très approximative, en trouvant un point qui minimise ψ_k autant que le point de Cauchy. On pourrait évidemment prendre le point de Cauchy lui-même comme « solution » approchée très économique. En pratique, ce point n'est cependant pas très bon en ce qui concerne la *vitesse* de convergence et on a souvent intérêt à exploiter davantage le modèle quadratique que ne le fait le point de Cauchy. C'est ce que tentent de faire les algorithmes de résolution approchée présentés ci-après.

Nous allons traduire cette condition assurant la convergence que nous venons d'énoncer de manière formelle et nous verrons plus tard que les algorithmes de résolution du sous-problème quadratique vérifient effectivement cette condition. Celle-ci accepte d'être affaiblie en utilisant des constantes strictement positives β_1 et β_2 . On dit que (RC_k) est résolu en s_k avec une *condition de décroissance suffisante* si

$$\begin{cases} \psi_k(s_k) \leq \beta_1 \psi_k(s_k^c) \\ \|s_k\| \leq \beta_2 \Delta_k. \end{cases} \quad (9.19)$$

Comme annoncé, il faut que s_k fasse décroître ψ_k autant que le fait point de Cauchy s_k^c , à un facteur constant β_1 près sur ψ_k (en général $0 < \beta_1 \leq 1$) et avec une certaine tolérance sur l'appartenance de s_k à la région de confiance (en général $\beta_2 \geq 1$).

Tout algorithme de résolution de (RC_k) qui est capable de réaliser la condition (9.19) à chaque itération assurera la convergence de l'algorithme (voir la section 9.5.1). On a évidemment tout intérêt à choisir une méthode de résolution s'adaptant bien au problème à résoudre. En ce qui concerne les algorithmes généralistes, nous en décrirons deux parmi les plus courants.

Algorithme dogleg de Powell

Cet algorithme demande que M_k soit définie positive, ce que nous supposons donc dans cette section, de telle sorte que le minimum de ψ_k sans contrainte puisse

être calculé. Ce minimum est le point de Newton, déjà rencontré

$$s_k^N = -M_k^{-1}g_k.$$

Dans l’*algorithme dogleg*² de Powell, on cherche une solution approchée du sous-problème quadratique, en explorant que le chemin linéaire par morceaux qui rejoint l’origine au point de Cauchy s_k^C , puis au point de Newton s_k^N (voir figure 9.8). Si on

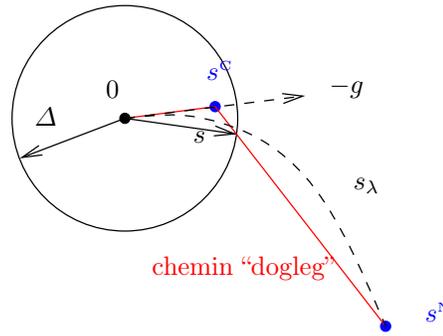


Fig. 9.8. L’algorithme « dogleg » de Powell (on a translaté x en 0).

note

$$\alpha_k^C := \frac{\|s_k^C\|}{\|s_k^C\| + \|s_k^N - s_k^C\|},$$

ce chemin continu se décrit de manière précise en fonction d’une abscisse $\alpha \in [0, 1]$ proportionnelle à son abscisse curviligne (ce qui n’est pas essentiel) de la manière suivante :

$$\alpha \mapsto s_k(\alpha) := \begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha_k^C} s_k^C & \text{si } 0 \leq \alpha \leq \alpha_k^C \\ \frac{1-\alpha}{1-\alpha_k^C} s_k^C + \frac{\alpha-\alpha_k^C}{1-\alpha_k^C} s_k^N & \text{si } \alpha_k^C < \alpha \leq 1. \end{cases}$$

On se contente alors de trouver la solution de

$$\begin{cases} \min_{\alpha} \psi_k(s_k(\alpha)) \\ \|s_k(\alpha)\| \leq \Delta_k. \end{cases}$$

On minimise donc ψ_k sur la partie du chemin qui est dans la région de confiance. Montrons que lorsque $g_k \neq 0$, ce problème a bien une unique solution.

– D’abord, $\psi_k(s(\alpha))$ décroît strictement avec α .

Cette propriété est clairement vraie pour la partie du chemin comprise entre 0 et s_k^C puisque $-g_k$ est une direction de descente de ψ_k et que s_k^C minimise ψ_k

² L’appellation « dogleg » (littéralement « patte de chien ») est sensé faire référence à la forme du chemin le long duquel on recherche la solution approchée dans cet algorithme.

le long de $\alpha \rightarrow -\alpha g_k$ dans la région de confiance. Elle est également vraie pour la partie du chemin comprise entre s_k^C et s_k^N (supposé différent de s_k^C , sinon il n'y a pas lieu de poursuivre le raisonnement), puisque $\psi_k(s_k^C) > \psi_k(s_k^N)$ (ψ_k a s_k^N comme unique minimum et $s_k^C \neq s_k^N$) et que ψ_k est convexe (on utilise alors l'inégalité de convexité : $\psi'_k(s_k^C; s_k^N - s_k^C) \leq \psi_k(s_k^N) - \psi_k(s_k^C) < 0$).

- Il reste à montrer que $\|s_k(\alpha)\|$ *croît strictement avec* α , puisqu'alors le problème ci-dessus revient à minimiser une fonction strictement décroissante $\psi_k(s_k(\cdot))$ sur un intervalle, problème dont l'existence et l'unicité de la solution sont alors claires.

La croissance de $\|s_k(\alpha)\|$ est une conséquence évidente de l'inégalité $(s_k^N - s_k^C)^T s_k^C \geq 0$. Comme celle-ci s'écrit aussi $(s_k^N)^T s_k^C \geq \|s_k^C\|^2$, ou encore

$$g_k^T M_k^{-1} g_k \geq \alpha_k^C \|g_k\|^2 = \frac{\|g_k\|^4}{g_k^T M_k g_k},$$

elle a lieu comme une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Notons que la première propriété sur la décroissance de $\psi_k(s(\alpha))$ implique que le point sélectionné par dogleg vérifie (9.19) et par là la convergence globale de l'algorithme à régions de confiance utilisant cette méthode de résolution de (RC_k) .

Algorithme du gradient conjugué tronqué de Steihaug

On peut voir cette approche comme une amélioration de l'algorithme dogleg, dans le sens où l'on n'a plus besoin de supposer que M_k est définie positive et où le chemin de recherche, aussi linéaire par morceaux, est vraisemblablement une meilleure approximation du chemin de recherche $\lambda \mapsto s_\lambda$ décrit à la section 9.3.2.

L'idée est simple. On utilise l'algorithme du gradient conjugué (GC) pour minimiser $\psi_k(s)$, en partant de $s_{k,0} = 0$. On note $s_{k,i}$ les itérés du GC, i désignant l'indice des itérations, et $v_{k,i}$ la direction conjuguée menant de $s_{k,i}$ à $s_{k,i+1}$. Cependant, comme M_k n'est pas nécessairement définie positive et que l'on veut rester dans la région de confiance, on arrête les itérations dès que l'un des événements suivants se produit :

- (i) l'itéré courant $s_{k,i}$ est dans la région de confiance, mais pas le suivant $s_{k,i+1}$; on prend alors comme solution approchée, l'intersection de la droite $t \mapsto s_{k,i} + tv_{k,i}$ avec la frontière de la région de confiance; on a donc

$$s_k := s_{k,i} + tv_{k,i},$$

où $t \geq 0$ est tel que $\|s_{k,i} + tv_{k,i}\|^2 = \Delta^2$ (une racine d'un polynôme du second degré à calculer);

- (ii) l'algorithme rencontre une direction conjuguée $v_{k,i} \neq 0$, qui est à *courbure négative* pour M_k , c'est-à-dire

$$v_{k,i}^T M_k v_{k,i} \leq 0;$$

dans ce cas, les itérations du GC ne peuvent être poursuivies (si $v_{k,i}^T M_k v_{k,i} = 0$ on ne peut pas définir le pas le long de $v_{k,i}$, permettant de passer à l'itéré suivant $s_{k,i+1}$) et on prend à nouveau comme solution approchée, l'intersection de $t \mapsto s_{k,i} + tv_{k,i}$ avec la frontière de la région de confiance.

Il faut à présent montrer que cet algorithme a bien un sens, qu'il est non ambigu, et qu'il permet d'assurer la convergence de la méthode à régions de confiance à laquelle il contribue. Deux propriétés de l'algorithme du GC jouent un rôle-clé dans le bien-fondé de cet algorithme.

- Tant que l'algorithme du GC ne rencontre pas de direction à courbure négative, $\{\psi_k(s_{k,i})\}_i$ décroît strictement. C'est une propriété fondatrice du GC (voir par exemple la proposition 8.5). On en déduit que, dans la situation (i) ci-dessus, la solution approchée calculée s_k vérifie (9.19), ce qui assure la convergence globale. Dans la situation (ii), bien que $v_{k,i}$ soit à courbure négative, on a encore $\nabla\psi_k(s_{k,i})^\top v_{k,i-1} = 0$ du fait de l'itération $i - 1$, si bien que

$$\nabla\psi_k(s_{k,i})^\top v_{k,i} = \nabla\psi_k(s_{k,i})^\top \left(-\nabla\psi_k(s_{k,i}) + \beta_{k,i} v_{k,i-1} \right) = -\|\nabla\psi_k(s_{k,i})\|^2 < 0.$$

Dès lors, on fait décroître ψ_k en allant chercher s_k sur la frontière de la région de confiance le long de $v_{k,i}$. On a donc la même conclusion que précédemment.

- Tant que l'algorithme du GC ne rencontre pas de direction à courbure négative, $\{\|s_{k,i}\|\}_i$ croît strictement. Cette propriété a été proposée en exercice au chapitre 8 (l'exercice 8.2–(i)). Le fait de démarrer le GC en 0 est essentiel pour garantir cette propriété. Dès lors, au cours du GC, les itérés $s_{k,i}$ s'éloignent de 0 de façon monotone, ce qui implique que le chemin dessiné par le GC ne peut croiser la frontière de la région de confiance qu'une seule fois. Autrement dit, il n'y a aucune chance de trouver un point faisant décroître ψ_k davantage tout en restant dans la région de confiance, dès qu'un itéré généré par le GC a franchi la frontière de la région de confiance. Ceci motive l'arrêt des itérations du GC dans la situation (i) décrite ci-dessus.

9.4.2 Méthodes de résolution fines

Nous avons dit en introduction de la section 9.4 que les algorithmes à régions de confiance ont la propriété de pouvoir forcer les itérés à s'échapper d'un point stationnaire qui n'est pas un minimum. On peut comprendre l'origine de cette propriété en examinant le système d'optimalité (9.11). Supposons que M soit la hessienne de f et que l'itéré courant x soit un point stationnaire ($g = g(x) = 0$) sans être un minimum (M n'est pas semi-définie positive; elle a au moins une valeur propre strictement négative). Alors, d'après (9.11e), $\hat{\lambda}$ ne peut être nul et (9.11d) implique alors que \hat{s} ne peut être la solution nulle de (9.11a), mais doit être un vecteur propre associé à la plus petite valeur propre de M . Dès lors $\hat{s} \neq 0$ et on s'échappe du point stationnaire x . Cette propriété est remarquable et le raisonnement qui précède montre que, pour l'obtenir, M doit être assez proche de $\nabla^2 f(x)$ et le sous-problème quadratique doit être résolu avec suffisamment de précision (on a utilisé les conditions d'optimalité (9.11) qui sont nécessaires et suffisantes).

Soient β_1 et β_2 deux constantes vérifiant $0 < \beta_1 \leq 1$ et $0 < \beta_2$. On dit que (RC_k) est résolu en s_k avec une condition de décroissance forte si l'on a

$$\begin{cases} \psi_k(s_k) \leq \beta_1 \hat{\psi}_k \\ \|s_k\| \leq \beta_2 \Delta_k, \end{cases} \tag{9.20}$$

où $\widehat{\psi}_k = \min\{\psi_k(s) : \|s\| \leq \Delta_k\}$. La condition (9.20) exprime qu'il faut résoudre (RC_k) exactement à un facteur constant β_1 près sur la valeur de ψ_k , avec une certaine tolérance sur l'appartenance de s_k à la région de confiance (en général $\beta_2 \geq 1$). La condition (9.20) est clairement plus forte que la condition de décroissance suffisante (9.19).

Algorithme de Moré-Sorensen

L'algorithme de Moré-Sorensen est adapté aux problèmes dont la taille n'est pas trop grande, car il s'autorise des factorisations de Cholesky de matrices d'ordre n . Il permet de résoudre le sous-problème quadratique avec toute la précision souhaitée, même dans le cas difficile. L'algorithme est piloté par la recherche du multiplicateur optimal $\hat{\lambda}$ associé à la région de confiance.

Soit λ_1 la plus petite valeur propre de M (on laisse tomber l'indice k de l'itération courante). La dernière condition d'optimalité de (9.11) montre que $\hat{\lambda} \geq -\lambda_1$. On peut donc espérer trouver le multiplicateur optimal en s'en approchant avec des valeurs de $\lambda > -\lambda_1$. Dans ce cas, la matrice $(M + \lambda I)$ est définie positive et on peut résoudre le système linéaire correspondant à la première condition de (9.11), à savoir

$$(M + \lambda I)s_\lambda = -g.$$

Dans l'algorithme de Moré-Sorensen, on recherche $\hat{\lambda}$ en l'approchant par des $\lambda > -\lambda_1$, que l'on détermine de manière à ce que l'on ait

$$\|s_\lambda\| = \Delta. \quad (9.21)$$

Par cette approche, on peut prendre en compte un grand nombre de cas, ceux pour lesquels le chemin $(\lambda \searrow -\lambda_1) \mapsto s_\lambda$ rencontre la frontière de la région de confiance. Si l'on s'en réfère à la section 9.3.3, sont donc exclus de cette approche : le cas A-1 (M est définie positive et le point de Newton est intérieur à la région de confiance; ce cas ne pose pas de difficultés et sera traité d'emblée par l'algorithme) et le cas B-3 (c'est le cas difficile qui demande la résolution d'un problème de valeur propre).

D'après (9.14), $\|s_\lambda\| \sim (\lambda_1 + \lambda)^{-1}$, pour λ proche de $-\lambda_1$, si bien que dans cette région l'équation (9.21) a l'inconvénient d'être fortement non linéaire. Dans l'algorithme de Moré-Sorensen, (9.21) est résolue par des itérations de Newton sur l'équation équivalente

$$\frac{1}{\|s_\lambda\|} = \frac{1}{\Delta}, \quad (9.22)$$

qui a l'avantage de se comporter linéairement en λ dans le voisinage de $-\lambda_1$. Si on définit l'application φ par $\varphi(\lambda) := \|s_\lambda\|^{-1} - \Delta^{-1}$, l'itération de Newton met évidemment à jour le multiplicateur par la formule

$$\lambda^+ = \lambda - \frac{\varphi(\lambda)}{\varphi'(\lambda)}.$$

On vérifie aisément que $\varphi'(\lambda) = -s_\lambda^\top \dot{s}_\lambda / \|s_\lambda\|^3$, où la dérivée \dot{s}_λ de $\lambda \mapsto s_\lambda$ est donnée par

$$(M + \lambda I)\dot{s}_\lambda = -s_\lambda.$$

Il y a donc deux systèmes linéaires utilisant la même matrice $(M + \lambda I)$ à résoudre à chaque essai de multiplicateur, ce qui justifie la factorisation de cette matrice.

L'algorithme de Moré-Sorensen ci-dessous est dit être dans sa version simplifiée, car le cas difficile n'y est pas traité.

Algorithme 9.9 (de Moré-Sorensen — version simplifiée)

0. On se donne un tolérance $\varepsilon > 0$.

1. Si M est définie positive (factorisable par Cholesky) et $s^N := -M^{-1}g$ vérifie $\|s^N\| \leq \Delta$, alors la solution primale-duale est $(\hat{s}, \hat{\lambda}) = (s^N, 0)$. On arrête.
2. Choisir $\lambda_0 > 0$. On pose $\underline{\lambda} = 0$ et $\bar{\lambda} = +\infty$.
3. Pour $i = 0, 1, 2, \dots$

3.1. *Factorisation de Cholesky*:

$$M + \lambda_i I = R_i^T R_i.$$

Si cette factorisation ne peut pas se faire, poser $\underline{\lambda} = \lambda_i$, choisir $\lambda_{i+1} \in]\underline{\lambda}, \bar{\lambda}[$ et passer à l'itération suivante.

3.2 Résoudre en s_i et q_i :

$$R_i^T R_i s_i = -g \quad \text{et} \quad R_i^T q_i = s_i.$$

3.3 *Test d'arrêt*: Si $|\|s_i\| - \Delta| \leq \varepsilon$, on prend comme solution primale-duale (s_i, λ_i) . On s'arrête.

3.4 Si $\|s_i\| > \Delta$, alors $\underline{\lambda} := \lambda_i$, sinon $\bar{\lambda} := \lambda_i$.

3.5 *Nouveau multiplicateur*:

$$\lambda_{i+1} = \lambda_i + \left(\frac{\|s_i\|}{\|q_i\|} \right)^2 \left(\frac{\|s_i\| - \Delta}{\Delta} \right).$$

Si $\lambda_{i+1} \notin]\underline{\lambda}, \bar{\lambda}[$, choisir une nouvelle valeur de λ_{i+1} dans cet intervalle.

Aux étapes 3.1 et 3.5 de cet algorithme, où il faut choisir un nouveau multiplicateur dans l'intervalle $]\underline{\lambda}, \bar{\lambda}[$, on veillera à ne pas générer des points d'accumulation artificiellement. Il suffira, par exemple, de prendre $(\underline{\lambda} + \bar{\lambda})/2$ lorsque $\bar{\lambda}$ est fini et un élément de $[\underline{\lambda} + 1, \bar{\lambda}[$ dans le cas contraire.

Il a été vérifié expérimentalement que l'algorithme 9.9 converge en très peu d'itérations: 2 ou 3 selon les essais des auteurs, pour autant que l'on ne soit pas trop exigeant ($\varepsilon > 0$ pas trop petit) et que l'on ne soit pas proche du cas difficile.

Dans le cas difficile (qui se rencontre rarement), l'algorithme 9.9 génère une suite de $\lambda_i \searrow -\lambda_1 \geq 0$, sans jamais réussir à satisfaire $\|s_i\| \simeq \Delta$. Dans l'algorithme de Moré-Sorensen complet, chaque itération se prépare à cette éventualité en générant des vecteurs destinés à approcher un vecteur propre de M associé à la valeur propre λ_1 . L'algorithme complet est détaillé dans l'article [440].

9.5 Résultats de convergence

Dans cette section sont donnés des résultats de convergence des méthodes à régions de confiance. On considère dans un premier temps (section 9.5.1), le cas où le modèle est du premier ordre. On veut dire par là que le résultat de convergence ne s'intéresse pas à la matrice M_k (la seule chose demandée est que la suite $\{M_k\}$ soit bornée), mais plutôt au point de Cauchy. C'est la condition de descente suffisante (9.19) qui joue le rôle-clé. Ensuite (section 9.5.2), on considère les modèles du second ordre, dans lesquels $M_k = \nabla^2 f(x_k)$ et la condition de décroissance forte (9.20) est assurée par l'algorithme de résolution du sous-problème quadratique.

9.5.1 Convergence avec modèle du premier ordre

On suppose dans cette section que le sous-problème quadratique (RC_k) est résolu de façon approchée, de manière toutefois à satisfaire la condition de décroissance suffisante (9.19), que nous rappelons ci-dessous

$$\begin{cases} \psi_k(s_k) \leq \beta_1 \psi_k(s_k^C) \\ \|s_k\| \leq \beta_2 \Delta_k. \end{cases} \quad (9.23)$$

Les constantes β_1 et β_2 sont supposées être strictement positives. On note

$$\mathcal{N}_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq f(x_1)\},$$

l'ensemble de sous-niveau $f(x_1)$ de f , fixé par le premier itéré.

La proposition suivante montre que la condition de décroissance suffisante (9.23) implique l'inégalité (9.24), connue sous le nom de *condition de Powell*. Celle-ci joue, pour les méthodes à régions de confiance, le même rôle que la condition de Zoutendijk pour les méthodes à directions de descente : elle résume la contribution de la méthode de détermination du pas à la convergence de l'algorithme.

Proposition 9.10 *Le point de Cauchy s_k^C vérifie la condition de Powell suivante avec $s_k = s_k^C$ et $C = 1/2$:*

$$\psi_k(s_k) \leq -C \|g_k\| \min \left(\Delta_k, \frac{\|g_k\|}{\|M_k\|} \right). \quad (9.24)$$

On en déduit immédiatement qu'un point s_k vérifiant la condition de décroissance suffisante (9.23) vérifie également la condition (9.24), avec $C = \beta_1/2$.

DÉMONSTRATION. Le cas où $g_k = 0$ est clair car alors $s_k^C = 0$ et $\psi_k(s_k^C) = 0$. Supposons à présent que $g_k \neq 0$. Si $g_k^T M_k g_k \leq 0$, $s_k^C = -(\Delta_k/\|g_k\|)g_k$ d'après la formule (9.18). Donc

$$\psi_k(s_k^C) = -\Delta_k \|g_k\| + \frac{\Delta_k^2}{2\|g_k\|^2} g_k^T M_k g_k \leq -\Delta_k \|g_k\|$$

et (9.24) est vérifiée avec $C = 1$.

Il reste à examiner le cas où $g_k \neq 0$ et $g_k^\top M_k g_k > 0$. Si $\Delta_k \leq \|g_k\|^3 / g_k^\top M_k g_k$, $s_k^C = -(\Delta_k / \|g_k\|)g_k$ et on a

$$\psi_k(s_k^C) = -\Delta_k \|g_k\| + \frac{\Delta_k^2}{2\|g_k\|^2} g_k^\top M_k g_k \leq -\frac{\Delta_k}{2} \|g_k\|.$$

Donc (9.24) est vérifiée avec $C = 1/2$. Sinon

$$s_k^C = -\frac{\|g_k\|^2}{g_k^\top M_k g_k} g_k$$

et

$$\psi_k(s_k^C) = -\frac{\|g_k\|^4}{2(g_k^\top M_k g_k)} \leq -\frac{\|g_k\|^2}{2\|M_k\|}.$$

Donc (9.24) est vérifiée avec $C = 1/2$. \square

La proposition suivante montre que si $g_k \neq 0$, si le rayon de confiance Δ_k est assez petit, et si la solution approchée s_k de (RC_k) vérifie la condition de décroissance suffisante (9.23) alors la décroissance de f , $f(x_k) - f(x_k + s_k)$, est suffisante pour avoir (9.2), c'est-à-dire $\rho_k \geq \omega_1$. Dans ces conditions, il n'y a pas de bouclage à l'étape 2 de l'algorithme.

Proposition 9.11 *Supposons que f soit dérivable en x_k et que $g_k \neq 0$. Il existe $\Delta_k^0 > 0$ tel que si $0 < \Delta_k \leq \Delta_k^0$ et si la solution approchée de (RC_k) vérifie la condition de décroissance suffisante (9.23), alors le ratio $\rho_k > \omega_1$.*

DÉMONSTRATION. Raisonnons par l'absurde. Si ce n'est pas le cas, il existe une suite de rayons de confiance $\Delta_{k,i} \rightarrow 0$ pour $i \rightarrow \infty$ et des solutions approchées $s_{k,i}$ vérifiant

$$f(x_k + s_{k,i}) \geq f(x_k) + \omega_1 \psi_k(s_{k,i}), \quad (9.25)$$

$$\psi_k(s_{k,i}) \leq \beta_1 \psi_k(s_{k,i}^C), \quad (9.26)$$

$$\|s_{k,i}\| \leq \beta_2 \Delta_{k,i}, \quad (9.27)$$

où $s_{k,i}^C$ est le point de Cauchy correspondant au rayon de confiance $\Delta_{k,i}$. Comme f est différentiable en x_k , on a en développant $f(x_k + s_{k,i})$ autour de x_k :

$$\begin{aligned} f(x_k + s_{k,i}) &= f(x_k) + g_k^\top s_{k,i} + o(\|s_{k,i}\|) \\ &= f(x_k) + \psi_k(s_{k,i}) + o(\|s_{k,i}\|). \end{aligned}$$

Alors (9.25) et $0 < \omega_1 < 1$ donnent

$$\psi_k(s_{k,i}) = o(\|s_{k,i}\|).$$

D'autre part, comme $g_k \neq 0$, on peut supposer que $\Delta_{k,i} \leq \|g_k\| / \|M_k\|$. Alors (9.26), la proposition 9.10 et (9.27) montrent que

$$|\psi_k(s_{k,i})| = -\psi_k(s_{k,i}) \geq \frac{\beta_1}{2} \|g_k\| \Delta_{k,i} \geq \frac{\beta_1}{2\beta_2} \|g_k\| \|s_{k,i}\|.$$

Ceci est en contradiction avec l'estimation précédente ($g_k \neq 0$) et cette contradiction prouve la proposition. \square

Comme on le verra à la section 9.5, la condition de Powell (9.24) et donc la condition de décroissance suffisante (9.23) permettent d'avoir la convergence de l'algorithme. Ce choix est très semblable à la méthode de la plus forte pente avec recherche linéaire, qui converge également pour des recherches linéaires raisonnables. Seule la manière de déterminer le pas le long de $-g_k$ change. Comme la méthode de la plus forte pente n'est pas une méthode convergeant rapidement, on comprend que si l'on veut une bonne vitesse de convergence, il faut résoudre (RC_k) de manière plus précise. Nous verrons qu'une résolution plus fine de (RC_k) muni d'un modèle du second ordre permet de converger vers des points vérifiant les conditions nécessaires d'optimalité du second ordre, qui ont de fortes chances d'être des minima locaux.

Le théorème 9.12 donne des conditions pour qu'une sous-suite des gradients tende vers 0. Dans la situation (i) de ce théorème, l'algorithme boucle en un point où le gradient est nul. Il ne peut pas faire mieux avec un modèle du premier ordre.

Le théorème 9.13 montre qu'avec un peu plus de régularité sur f (l'uniforme continuité de ∇f), on a convergence de toute la suite des gradients.

Théorème 9.12 (convergence globale avec résolution approchée des sous-problèmes quadratiques) *Supposons que f soit bornée inférieurement et de classe C^1 dans un voisinage de \mathcal{N}_1 . Si dans la méthode à régions de confiance, $\{M_k\}$ est bornée et la solution approchée s_k du sous-problème quadratique (RC_k) vérifie les conditions de décroissance suffisante (9.23), alors l'une des situations suivantes a lieu :*

- (i) *il y a échec d'une itération k_0 , en un point x_{k_0} où $\nabla f(x_{k_0}) = 0$;*
- (ii) *$\liminf \|\nabla f(x_k)\| = 0$.*

DÉMONSTRATION. On raisonne par l'absurde, en supposant que la situation (i) n'a pas lieu (donc une suite $\{x_k\}$ est générée) et qu'il existe un indice k_1 et une constante $\gamma > 0$ tels que

$$\|g_k\| \geq \gamma, \quad \forall k \geq k_1. \quad (9.28)$$

Montrons que

$$\Delta_k \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k \geq 1} \|s_k\| < +\infty. \quad (9.29)$$

D'après la condition de Powell (9.24), la supposition de départ (9.28) et la bornitude de $\{M_k\}$, on a

$$\psi_k(s_k) \leq -C \|g_k\| \min \left(\Delta_k, \frac{\|g_k\|}{\|M_k\|} \right) \leq -C \min(\Delta_k, 1), \quad (9.30)$$

où C est une constante absorbante strictement positive indépendante de k . En utilisant (9.2), on obtient alors

$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) - C \min(\Delta_k, 1),$$

$$C \min(\Delta_k, 1) \leq f(x_k) - f(x_{k+1}).$$

Comme f est bornée inférieurement, la suite $\{f(x_k) - f(x_{k+1})\}$ est sommable et on déduit de l'inégalité ci-dessus que $\sum_{k \geq 1} \Delta_k < +\infty$. Comme $\|s_k\| \leq \beta_1 \Delta_k$, les assertions de (9.29) s'en déduisent.

Montrons que le ratio $\rho_k \rightarrow 1$. D'après (9.29), $\{x_k\}$ est une suite de Cauchy, donc elle converge et on a

$$\frac{|f(x_k + s_k) - f(x_k) - g_k^\top s_k|}{\|s_k\|} \rightarrow 0. \quad (9.31)$$

D'autre part, comme $\{M_k\}$ est bornée, on a

$$|\psi_k(s_k) - g_k^\top s_k| \leq C \|s_k\|^2. \quad (9.32)$$

Enfin, on peut écrire successivement

$$\begin{aligned} \rho_k &= \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{\psi_k(s_k)} = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k) - g_k^\top s_k}{\psi_k(s_k)} + \frac{g_k^\top s_k - \psi_k(s_k)}{\psi_k(s_k)} + 1, \\ |\rho_k - 1| &\leq \frac{|f(x_{k+1}) - f(x_k) - g_k^\top s_k|}{|\psi_k(s_k)|} + \frac{|\psi_k(s_k) - g_k^\top s_k|}{|\psi_k(s_k)|}. \end{aligned}$$

D'après (9.30), $\Delta_k \rightarrow 0$ et $\|s_k\| \leq \beta_2 \Delta_k$, on a $|\psi_k(s_k)| \geq C \|s_k\|$. Alors, la dernière inégalité, (9.31) et (9.32) montrent que $\rho_k \rightarrow 1$.

Dès lors $\rho_k > \omega_2$ pour k assez grand. D'après la règle de mise à jour de Δ_k (étape 4 de l'algorithme), cela implique $\Delta_k \geq \Delta > 0$, qui est en contradiction avec la première assertion de (9.29). Cette contradiction prouve le théorème. \square

La conclusion du théorème 9.12 reste vraie avec une hypothèse beaucoup plus faible sur la suite $\{M_k\}$. Il suffit, en effet, de supposer que $\{\|M_k\|\}$ ne croît pas trop vite dans le sens où

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{1 + \max_{1 \leq i \leq k} \|M_i\|} = +\infty.$$

Par exemple, cette hypothèse est vérifiée si la croissance est au plus linéaire : $\|M_k\| \leq Ck$, pour une constante $C > 0$. On trouvera une démonstration de ce résultat chez Powell (1984). Il est important car il permet d'étudier la convergence des méthodes à régions de confiance lorsque la matrice M_k est mise à jour par une méthode de quasi-Newton.

Théorème 9.13 *Supposons, en plus des hypothèses et conditions du théorème 9.12, que ∇f soit uniformément continue sur \mathcal{N}_1 . Alors soit la situation (i) du théorème 9.12 a lieu, soit $g_k \rightarrow 0$.*

DÉMONSTRATION. On raisonne par l'absurde en supposant que la situation (i) du théorème 9.12 n'a pas lieu (donc une suite $\{x_k\}$ est générée) et qu'il existe une constante $\gamma > 0$ et une sous-suite $\{k_j\}_{j \geq 1} \subseteq \mathbb{N}$ telles que

$$\|g_{k_j}\| \geq \gamma, \quad \forall j \geq 1. \quad (9.33)$$

Comme $\liminf \|g_k\| = 0$, en extrayant une sous-suite au besoin, on peut supposer que pour tout j on peut trouver ℓ_j tel que

$$\begin{cases} k_j < \ell_j < k_{j+1}, \\ \|g_k\| \geq \gamma/2, & \text{pour } k = k_j, \dots, \ell_j - 1, \\ \|g_{\ell_j}\| < \gamma/2. \end{cases} \quad (9.34)$$

En utilisant la condition de Powell (9.24) et la bornitude de $\{M_k\}$, on a comme dans la démonstration du théorème 9.12 :

$$f(x_{k+1}) - f(x_k) \leq -C\|g_k\| \min(\Delta_k, \|g_k\|).$$

Donc pour $k = k_j, \dots, \ell_j - 1$ et $j \geq 1$, on a

$$f(x_{k+1}) - f(x_k) \leq -C \min(\Delta_k, 1).$$

Comme $f(x_{k+1}) - f(x_k) \rightarrow 0$, $\min(\Delta_k, 1) = \Delta_k$ pour k assez grand. En utilisant le fait que $\|s_k\| \leq \beta_2 \Delta_k$, on a finalement

$$\begin{aligned} \|s_k\| &\leq C(f(x_k) - f(x_{k+1})), \quad k = k_j, \dots, \ell_j - 1, \\ \|x_{\ell_j} - x_{k_j}\| &\leq \sum_{k=k_j}^{\ell_j-1} \|s_k\| \leq C(f(x_{k_j}) - f(x_{\ell_j})). \end{aligned}$$

Donc $\|x_{\ell_j} - x_{k_j}\| \rightarrow 0$, quand $j \rightarrow \infty$. Alors par uniforme continuité de ∇f , on a :

$$\|g_{\ell_j} - g_{k_j}\| \rightarrow 0, \quad \text{quand } j \rightarrow \infty.$$

Ceci est en contradiction avec le fait que, par (9.33) et (9.34)

$$\|g_{\ell_j} - g_{k_j}\| \geq \|g_{k_j}\| - \|g_{\ell_j}\| \geq \gamma/2.$$

Cette contradiction prouve le théorème. \square

En ce qui concerne les conditions de convergence, on notera la différence suivante entre les méthodes à directions de descente et les méthodes à régions de confiance. Pour obtenir la convergence des premières, on est toujours amené à montrer que les suites $\{M_k\}$ et $\{M_k^{-1}\}$ sont bornées ou n'explosent pas trop vite. Pour les méthodes à régions de confiance, aucune hypothèse sur $\{M_k^{-1}\}$ n'est nécessaire, seul le comportement de $\{M_k\}$ importe. En particulier, M_k peut être singulière ou nulle. D'ailleurs, dans ce dernier cas, on est ramené à la méthode de la plus forte pente qui a de bonnes propriétés de convergence globale (bien qu'une mauvaise *vitesse* de convergence). Cette propriété contribue à la robustesse des méthodes à régions de confiance.

9.5.2 Convergence avec modèle du second ordre

Dans cette section, nous étudions la convergence et les propriétés des points d'adhérence des suites générées par les méthodes à régions de confiance lorsque le

sous-problème quadratique (RC_k) est résolu de façon fine, de manière à satisfaire la condition de décroissance forte (9.20), et lorsque le modèle ψ_k est du second ordre, c'est-à-dire lorsqu'on prend

$$M_k = \nabla^2 f(x_k).$$

On suppose donc que la fonction f est deux fois continûment dérivable et qu'on en calcule la hessienne. Si ceci est coûteux en temps de calcul, cela peut en valoir la peine. On montre en effet (voir Théorème 9.16 pour les hypothèses précises) que la suite $\{x_k\}$ a au moins un point d'adhérence où la hessienne est **semi-définie positive** et qu'en tout point d'adhérence isolé, la hessienne est semi-définie positive. On montre aussi (Théorème 9.17) que si $\{x_k\}$ a un point d'adhérence où la hessienne est définie positive alors toute la suite converge vers ce point.

Ces bons résultats sont à comparer avec ceux des méthodes à directions de descente qui, sans utilisation de directions à courbure négative, ne peuvent trouver que des points stationnaires.

La condition de décroissance forte (9.20) est clairement plus forte que la condition de décroissance suffisante (9.19). En particulier, elle implique également la condition de Powell (9.24) et le résultat de la proposition 9.11. Le résultat suivant est plus précis. Il montre qu'il n'y a pas de bouclage dans l'algorithme à régions de confiance avec modèle du second ordre ($M_k = \nabla^2 f(x_k)$) si x_k ne vérifie pas les conditions nécessaires d'optimalité du second ordre du problème (9.1). Si x_k vérifie ces conditions, l'itération k est interrompue, car on ne peut pas réaliser $\psi_k(s_k) < 0$.

Proposition 9.14 *Supposons que f soit de classe C^1 dans un voisinage de x_k et deux fois dérivable en x_k et que soit $g_k \neq 0$, soit $\lambda_1(\nabla^2 f(x_k)) < 0$. Supposons également que dans (RC_k) , on prenne $M_k = \nabla^2 f(x_k)$. Dans ce cas, il existe $\Delta_k^0 > 0$ tel que si $0 < \Delta_k \leq \Delta_k^0$ et si la solution approchée de (RC_k) vérifie la condition de décroissance forte (9.20), alors le ratio $\rho_k > \omega_1$.*

DÉMONSTRATION. Le cas où $g_k \neq 0$ est réglé par la proposition 9.11, puisque la condition de décroissance forte implique la condition de décroissance suffisante (9.19). Supposons à présent que $g_k = 0$ et donc, d'après les hypothèses, $\lambda_1(\nabla^2 f(x_k))$ est strictement négatif.

Comme dans la démonstration de la proposition 9.11, on raisonne par l'absurde, en supposant qu'il existe une suite de rayons de confiance $\Delta_{k,i} \rightarrow 0$ pour $i \rightarrow \infty$ et des solutions approchées $s_{k,i}$ vérifiant

$$f(x_k + s_{k,i}) \geq f(x_k) + \omega_1 \psi_k(s_{k,i}), \tag{9.35}$$

$$\psi_k(s_{k,i}) \leq \beta_1 \widehat{\psi}_{k,i}, \tag{9.36}$$

$$\|s_{k,i}\| \leq \beta_2 \Delta_{k,i},$$

où $\widehat{\psi}_{k,i} = \min\{\psi_k(s) : \|s\| \leq \Delta_{k,i}\}$. Comme $g_k = 0$, on a en développant $f(x_k + s_{k,i})$ autour de x_k :

$$\begin{aligned} f(x_k + s_{k,i}) &= f(x_k) + \frac{1}{2} s_{k,i}^\top M_k s_{k,i} + o(\|s_{k,i}\|^2) \\ &= f(x_k) + \psi_k(s_{k,i}) + o(\|s_{k,i}\|^2). \end{aligned}$$

Alors (9.35), $\psi_k(s_{k,i}) < 0$ et $\omega_1 < 1$ donnent

$$\psi_k(s_{k,i}) = o(\|s_{k,i}\|^2). \quad (9.37)$$

Notons $(\hat{s}_{k,i}, \hat{\lambda}_{k,i})$ un couple optimal de $(RC_{k,i})$. En utilisant le fait que $g_k = 0$ et les conditions d'optimalité (9.11a), (9.11d) et (9.11e) de $(RC_{k,i})$, on trouve

$$\hat{\psi}_{k,i} = \frac{1}{2} \hat{s}_{k,i}^\top M_k \hat{s}_{k,i} = -\frac{1}{2} \hat{\lambda}_{k,i} \|\hat{s}_{k,i}\|^2 = -\frac{1}{2} \hat{\lambda}_{k,i} \Delta_{k,i}^2 \leq \frac{1}{2} \lambda_1(M_k) \Delta_{k,i}^2,$$

et en utilisant (9.36)

$$|\psi_k(s_{k,i})| \geq \frac{\beta_1}{2} \|\lambda_1(M_k)\| \Delta_{k,i}^2 \geq C \|s_{k,i}\|^2,$$

où $C = \frac{\beta_1}{2\beta_2} \|\lambda_1(M_k)\| > 0$ est une constante indépendante de i . Cette inégalité contredit (9.37), ce qui termine la démonstration. \square

Le lemme technique suivant concerne des suites générales de \mathbb{R}^n .

Lemme 9.15 *Soit \bar{x} un point d'adhérence isolé d'une suite $\{x_k\}$ de \mathbb{R}^n . Si $\{x_k\}$ ne converge pas vers \bar{x} , il existe $\varepsilon > 0$ et une sous-suite $\{x_{k_i}\}_{i \geq 1}$ qui converge vers \bar{x} et vérifie*

$$\|x_{k_{i+1}} - x_{k_i}\| \geq \varepsilon, \quad \forall i \geq 1.$$

DÉMONSTRATION. Si \bar{x} est isolé, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(\bar{x}, 3\varepsilon)$ ne contienne pas d'autre point d'adhérence que \bar{x} . Comme \bar{x} est un point d'adhérence de $\{x_k\}$, on peut trouver une sous-suite $\{x_{k_i}\}_{i \geq 1}$ contenue dans $B(\bar{x}, 2\varepsilon)$ telle que $x_{k_{i+1}} \notin B(\bar{x}, 2\varepsilon)$ (sinon toute la suite convergerait vers \bar{x}). Comme $x_{k_i} \rightarrow \bar{x}$ (car $B(\bar{x}, 3\varepsilon)$ n'a pas d'autre point d'adhérence que \bar{x}), le lemme est démontré en ne conservant que les itérés $x_{k_i} \in B(\bar{x}, \varepsilon)$. \square

Théorème 9.16 (convergence globale avec résolution fine des sous-problèmes quadratiques) *Supposons que f soit bornée inférieurement, de classe C^2 dans un voisinage de \mathcal{N}_1 et que sa hessienne $\nabla^2 f$ soit bornée sur \mathcal{N}_1 . On suppose que l'on prend $M_k = \nabla^2 f(x_k)$ dans la méthode à régions de confiance et que la solution approchée s_k de (RC_k) vérifie la condition de décroissance forte (9.20). Alors, soit il y a échec d'une itération k_0 en un point x_{k_0} vérifiant les conditions nécessaires d'optimalité du second ordre ($\nabla f(x_{k_0}) = 0$ et $\nabla^2 f(x_{k_0})$ est semi-définie positive), soit une suite $\{x_k\}$ est générée et*

(i) $g_k \rightarrow 0$;

- (ii) si $\{x_k\}$ est bornée, alors $\limsup \lambda_1(\nabla^2 f(x_k)) \geq 0$, ce qui revient à dire que $\{x_k\}$ a au moins un point d'adhérence \bar{x} tel que $\nabla^2 f(\bar{x})$ soit semi-définie positive;
- (iii) si \bar{x} est un point d'adhérence isolé de $\{x_k\}$, alors $\nabla^2 f(\bar{x})$ est semi-définie positive.

DÉMONSTRATION. Si l'itération k_0 échoue, ce ne peut être qu'en un point vérifiant les conditions nécessaires d'optimalité du second ordre (Proposition 9.14). Dans le cas contraire, une suite $\{x_k\}$ est générée, ce que nous supposons à présent.

Comme $\nabla^2 f$ est bornée sur \mathcal{N}_1 , ∇f est uniformément continue et donc le théorème 9.13 implique que $g_k \rightarrow 0$. Ceci montre (i).

Pour (ii), on raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe $\varepsilon > 0$ et un indice k_1 tels que

$$\lambda_k^1 := \lambda_1(\nabla^2 f(x_k)) \leq -\varepsilon, \quad \forall k \geq k_1.$$

Soit v_k un vecteur propre correspondant à λ_k^1 , tel que $g_k^\top v_k \leq 0$ et $\|v_k\| = \Delta_k$. Alors

$$\begin{aligned} \psi_k(s_k) &\leq \beta_1 \widehat{\psi}_k \\ &\leq \beta_1 \psi_k(v_k) \\ &= \beta_1 \left(g_k^\top v_k + \frac{1}{2} \lambda_k^1 \|v_k\|^2 \right) \\ &\leq -\frac{\varepsilon \beta_1}{2} \Delta_k^2. \end{aligned} \tag{9.38}$$

D'après (9.2), $\psi_k(s_k) \rightarrow 0$. Donc, l'inégalité ci-dessus montre que $\Delta_k \rightarrow 0$.

On obtient une contradiction (grâce à l'étape 4 de l'algorithme) en montrant que $\rho_k \rightarrow 1$. On a en effet avec $M_k = \nabla^2 f(x_k)$

$$|f(x_{k+1}) - f(x_k) - \psi_k(s_k)| \leq \frac{\|s_k\|^2}{2} \max_{0 \leq t \leq 1} \|\nabla^2 f(x_k + ts_k) - \nabla^2 f(x_k)\| = o(\|s_k\|^2),$$

car f est de classe C^2 , $\{x_k\}$ est bornée et $s_k \rightarrow 0$. Alors, avec (9.38), on a :

$$|\rho_k - 1| = \frac{|f(x_{k+1}) - f(x_k) - \psi_k(s_k)|}{|\psi_k(s_k)|} \rightarrow 0.$$

La contradiction obtenue ($\Delta_k \rightarrow 0$ et Δ_k uniformément positif) prouve le point (ii).

Soit \bar{x} un point d'adhérence isolé de $\{x_k\}$. Si $x_k \rightarrow \bar{x}$, alors (iii) se déduit de (ii). Supposons à présent que $x_k \not\rightarrow \bar{x}$. Alors \bar{x} étant isolé, le lemme 9.15 montre qu'il existe $\varepsilon > 0$ et une sous-suite $x_{k_i} \rightarrow \bar{x}$ telle que $\|s_{k_i}\| \geq \varepsilon, \forall i$. Donc

$$\beta_2 \Delta_{k_i} \geq \|s_{k_i}\| \geq \varepsilon > 0. \tag{9.39}$$

Soit $\hat{\lambda}_k$ le multiplicateur associé à la contrainte de (RC_k) et \hat{s}_k une solution de (RC_k) . D'après les conditions d'optimalité de $(\hat{s}_k, \hat{\lambda}_k)$ (théorème 9.2), on a :

$$\begin{aligned}
\psi_k(s_k) &\leq \beta_1 \widehat{\psi}_k \\
&= \beta_1 \left(g_k^\top \widehat{s}_k + \frac{1}{2} \widehat{s}_k^\top \nabla^2 f(x_k) \widehat{s}_k \right) \\
&= \beta_1 \left(-\widehat{\lambda}_k \|\widehat{s}_k\|^2 - \frac{1}{2} \widehat{s}_k^\top \nabla^2 f(x_k) \widehat{s}_k \right), \quad [\text{par (9.11a)}] \\
&\leq -\frac{\beta_1}{2} \widehat{\lambda}_k \|\widehat{s}_k\|^2, \quad [\text{par (9.11e)}] \\
&= -\frac{\beta_1}{2} \widehat{\lambda}_k \Delta_k^2, \quad [\text{par (9.11d)}].
\end{aligned}$$

En utilisant cette inégalité, (9.39) et (9.11e) :

$$\psi_{k_i}(s_{k_i}) \leq \frac{\varepsilon^2 \beta_1}{2\beta_2^2} \lambda_{k_i}^1.$$

Comme $\psi_{k_i}(s_{k_i}) \rightarrow 0$, en passant à la limite dans cette inégalité, on voit que $\nabla^2 f(\bar{x})$ est **semi-définie positive**. \square

Dans le théorème suivant, on suppose seulement que le problème (RC_k) est résolu avec condition de décroissance suffisante (9.19).

Théorème 9.17 *On suppose que f vérifie les mêmes propriétés que dans le théorème 9.16, que $M_k = \nabla^2 f(x_k)$ et que la solution approchée s_k de (RC_k) vérifie la condition de décroissance suffisante (9.19). Alors, soit il y a échec d'une itération k_0 en un point x_{k_0} tel que $\nabla f(x_{k_0}) = 0$, soit une suite $\{x_k\}$ est générée et*

- (i) $g_k \rightarrow 0$,
- (ii) si \bar{x} est un point d'adhérence de $\{x_k\}$ tel que $\nabla^2 f(\bar{x})$ soit définie positive, alors $x_k \rightarrow \bar{x}$ et Δ_k est uniformément > 0 .

DÉMONSTRATION. Si une itération k_0 échoue, alors la proposition 9.11 montre que $\nabla f(x_{k_0}) = 0$. Supposons à présent que toutes les itérations réussissent. Alors, une suite $\{x_k\}$ est générée et, d'après le théorème 9.13, $g_k \rightarrow 0$.

On montre que $x_k \rightarrow \bar{x}$ en utilisant le lemme 9.15. Comme $\nabla^2 f(\bar{x})$ est définie positive, \bar{x} est un point d'adhérence isolé, car pour x voisin de \bar{x}

$$\nabla f(x)^\top (x - \bar{x}) = \int_0^1 f''(\bar{x} + t(x - \bar{x})) \cdot (x - \bar{x})^2 dt \geq C \|x - \bar{x}\|^2.$$

Donc x voisin de \bar{x} et $\nabla f(x) = 0$ impliquent que $x = \bar{x}$. D'autre part, pour x_k voisin de \bar{x} , on a en utilisant $\psi_k(s_k) < 0$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$C \|s_k\|^2 \leq \frac{1}{2} s_k^\top \nabla^2 f(x_k) s_k < -g_k^\top s_k \leq \|g_k\| \|s_k\|. \quad (9.40)$$

Comme $g_k \rightarrow 0$, on voit que pour toute sous-suite $\{x_{k_i}\}$ convergeant vers \bar{x} , on a $s_{k_i} \rightarrow 0$. D'après le lemme 9.15, cela implique que $x_k \rightarrow \bar{x}$.

Il reste à montrer que Δ_k est uniformément > 0 . De (9.40) et de la convergence de $\{x_k\}$ vers \bar{x} , on déduit que $\|g_k\| \geq C \|s_k\|$ pour k grand. Comme la condition de

décroissance suffisante implique la condition de Powell (Proposition 9.10), on a en utilisant $\|g_k\| \geq C\|s_k\|$ et $\Delta_k \geq \|s_k\|/\beta_2$:

$$\psi_k(s_k) \leq -C\|s_k\|^2, \quad \text{pour } k \text{ grand.}$$

On peut en déduire que $\rho_k \rightarrow 1$, puisque

$$f(x_{k+1}) - f(x_k) - \psi_k(s_k) = o(\|s_k\|^2)$$

et donc

$$|\rho_k - 1| = \frac{|f(x_{k+1}) - f(x_k) - \psi_k(s_k)|}{|\psi_k(s_k)|} \rightarrow 0.$$

Alors l'étape 4 de l'algorithme montre que $\Delta_k \geq \Delta > 0$. □

9.6 Comparaison avec la recherche linéaire

On trouvera dans le tableau 9.1 une comparaison des différentes caractéristiques des algorithmes à directions de descente, c'est-à-dire ceux utilisant la recherche linéaire (chapitre 6), et des algorithmes à régions de confiance étudiés dans ce chapitre.

Recherche linéaire	Région de confiance
On se donne une <i>direction de descente</i> d_k de f en x_k	On se donne un <i>modèle</i> ψ_k de f en x_k
On adapte le <i>pas</i> $\alpha_k > 0$ le long de d_k pour faire décroître f	On adapte le <i>rayon de confiance</i> $\Delta_k > 0$ pour faire décroître f
Le déplacement $s_k = \alpha_k d_k$ est aligné sur d_k (recherche <i>linéaire</i>)	Le déplacement s_k change d'orientation avec Δ_k (recherche <i>curviligne</i>)
<i>Facile</i> à mettre en œuvre	<i>Difficile</i> à mettre en œuvre
Résultats de convergence <i>faibles</i>	Résultats de convergence <i>renforcés</i>

Tableau 9.1. Comparaison de la recherche linéaire et des régions de confiance

Notes

Le concept de région de confiance semble remonter à Powell [487; 1970], qui l'introduit pour la résolution de systèmes non linéaires par *moindres-carrés*, après avoir constaté l'échec de la recherche linéaire. Cette approche a des points communs avec l'algorithme de Levenberg-Marquardt [389, 407], mais le pilotage de l'algorithme est fait ici par le réglage du rayon de confiance Δ_k à chaque itération, alors que c'est le multiplicateur associé à la région de confiance qui joue le rôle principal dans l'algorithme de Levenberg-Marquardt. Cette quantité duale est en général plus difficile à déterminer.