

# Le maillage

**Notes** — À ce niveau du document, on peut considérer que la méthode des éléments finis a été présentée, au moins en ce qui concerne les aspects les plus classiques (et même un peu plus). Nous avons décidé, avant d'entrer dans le détail de « subtilités » liées au comportement des matériaux et à la non-stationnarité, d'insérer ici un petit chapitre sur le maillage, dont les techniques de construction n'ont rien de commun avec celles relatives aux éléments eux-mêmes. De plus, nous nous restreindrons aux maillages de type Delaunay.-Voronoi

Le maillage n'a pas seulement un intérêt en calcul scientifique. Le maillage est un « support » de représentation tridimensionnel utilisé par exemple dans les jeux vidéo ainsi que dans les animations 3D. Dans ce dernier cas, on s'intéresse à la qualité du maillage en lien avec la qualité de rendu de l'image générée lorsque l'on applique une texture sur le maillage. On s'intéresse également à comment « faire bouger » le maillage pour qu'un personnage n'apparaissent pas distordu pendant une animation...

L'opération de maillage peut se faire à partir de plusieurs données :

- soit à partir de données à utiliser pour la discrétisation : sommets, arêtes...
- soit à partir de données de type CAO décrivant uniquement les entités géométriques.

Nous nous contenterons de présenter quelques outils de maillage relatifs au premier cas, i.e. lorsque nous disposons de points, arêtes... mais le second cas n'est pas vraiment plus compliqué.

Les [méthodes de construction de maillage](#) sont essentiellement :

- Maillage par triangles/tétraèdres :
  - Méthodes utilisant le critère de Delaunay : les bases de la méthode seront exposées au paragraphe 14.1 ;
  - Méthodes par avancement de fronts : le principe en sera détaillé au paragraphe 14.2 ;
  - Méthodes par décomposition spatiale ;
- Maillage par quadrangles/hexaèdres : quelques remarques seront faites au paragraphe 14.4
  - Maillage par avancement de fronts ;
  - Maillage par décomposition en domaines.

Parfois, il ne s'agit pas de mailler un domaine, mais de le remailler. Les [méthodes d'adaptation de maillage](#) les plus connues sont :

- Raffinement ;
- Transformation des éléments ;
- Déplacements de nœuds ;
- Simplification de maillage.

L'utilisation de différentes méthodes est illustré à la figure 14.1 issue de [71].

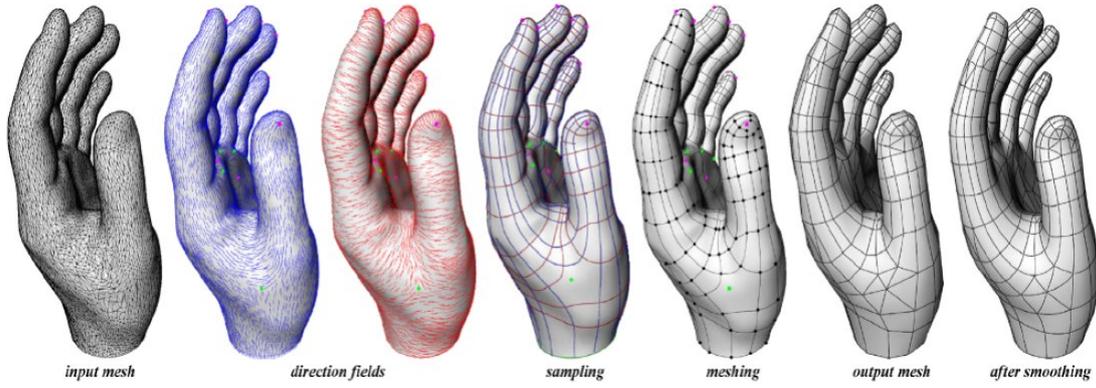


FIGURE 14.1: Manipulations sur des maillages

## 14.1 Maillage de Delaunay

### 14.1.1 Maillage simplicial

L'opération de maillage consiste à discrétiser un domaine (i.e. un milieu continu ou plutôt sa modélisation géométrique) par des éléments (éléments finis nous concernant), si possible bien proportionnés : au paragraphe 10.3, nous avons déjà présenté les dimensions géométriques représentatives d'un maillage que sont le diamètre maximum des éléments  $h$  et le facteur de forme du maillage  $\sigma$ , ainsi que le diamètre  $h_K$  d'un élément  $K$  et sa rondeur  $\rho_K$ . Ces deux derniers paramètres sont représentés sur la figure 10.2.

Dans ce chapitre, nous traiterons du cas bidimensionnel. Nous expliquerons les bases théoriques, mais ne rentrerons pas dans les détails pratiques de la programmation d'algorithmes de maillage (il y a de très bons cours disponibles sur le sujet).

Dans la suite nous aurons besoin des notions suivantes :

- un **segment fermé** (resp. ouvert) d'extrémités  $a$  et  $b$  de  $\mathbb{R}^d$  est noté  $[a, b]$  (resp.  $]a, b[$ ) ;
- un **convexe**  $E$  est un ensemble tel que :  $\forall (a; b) \in E^2, [a, b] \subset E$  ;
- le **convexifié** d'un ensemble  $E$  de points de  $\mathbb{R}^d$ , noté  $\mathcal{C}(E)$  est le plus petit convexe contenant  $E$ .
- un domaine  $\Omega$  (i.e. un ouvert de  $\mathbb{R}^d$ ) est dit **polygonal** si son bord  $\Gamma = \partial\Omega$  est formé d'un nombre fini de segments ;
- un  **$n$ -simplex**  $(x_0, \dots, x_n)$  est le convexifié des  $n + 1$  points de  $\mathbb{R}^d$  affine indépendant. Cela implique que  $n \leq d$ . Les sommets sont des 0-simplex, un segment est un 1-simplex, un triangle un 2-simplex, un tétraèdre est un 3-simplex.

**Définition 64 — Maillage simplicial.** Un maillage simplicial  $\mathcal{T}_{d,h}$  d'un ouvert polygonal  $\Omega_h$  de  $\mathbb{R}^d$  est un ensemble de  $d$ -simplex  $K^k$  de  $\mathbb{R}^d$  pour  $k = 1 \dots N_t$ , tel que l'intersection de deux  $d$ -simplex distincts  $\bar{K}^i$  et  $\bar{K}^j$  de  $\mathcal{T}_{d,h}$  soit l'ensemble vide ou le  $p$ -simplex commun à  $\bar{K}^i$  et  $\bar{K}^j$  avec  $p \leq d$ .

En termes plus simples : le maillage  $\mathcal{T}_{d,h}$  est constitué de  $N_t$  éléments  $K^k$  ( $k = 1 \dots N_t$ ) appelés  $d$ -simplex (qui sont des triangles pour  $d = 2$  et des tétraèdres pour  $d = 3$ ) tels que l'intersection (de l'adhérence) de deux éléments  $\bar{K}^i$  et  $\bar{K}^j$  soit soit nulles (éléments parfaitement séparés), soit un point, une arête ou une face (i.e. un  $p$ -simplex avec  $p \leq d$ ) commun aux deux éléments.

On notera  $\mathcal{T}_{0,h}$  l'ensemble des sommets de  $\mathcal{T}_{d,h}$ ,  $\mathcal{T}_{1,h}$  l'ensemble de ses arêtes et  $\mathcal{T}_{d-1,h}$  l'ensemble de ses faces. Le bord  $\partial\mathcal{T}_{d,h}$  est l'ensemble des faces n'appartenant qu'à un seul  $d$ -simplex de  $\mathcal{T}_{d,h}$

**Théorème 51** Pour tout ouvert polygonal  $\Omega_h$  de  $\mathbb{R}^2$ , il existe un maillage de cet ouvert sans sommet interne (voir figure 14.2).

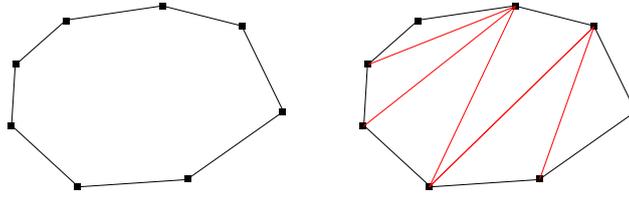


FIGURE 14.2: a) Points et arêtes et b) maillage de Delaunay sans point interne

Les sommets de ce maillage sont les points anguleux du bord  $\partial\Omega_h$ .

Malheureusement ce théorème n'est plus vrai en dimension plus grande que 2, car il existe des configurations d'ouvert polyédrique non-convexe qu'il est impossible de mailler sans point interne.

### 14.1.2 Maillage de Delaunay-Voronoi

Dans le cas général, la construction d'un maillage nécessite de connaître :

- un ensemble de points  $\mathcal{S}$  ;
- un ensemble d'arêtes  $\mathcal{A}$  définissant le maillage de la frontière des sous-domaines.
- un ensemble, qui peut être vide, de sous-domaines  $\mathcal{D}$  à mailler.

Bien que les diagrammes de Voronoï existent en dimension quelconque, nous ne les présentons qu'en dimension 2. Aussi, les éléments précédents deviennent-ils, en dimension 2 :

$$\mathcal{S} = \{x^i \in \mathbb{R}^2, i = 1, \dots, N_p\} \quad (14.1)$$

$$\mathcal{A} = \{(s_1^i, s_2^i) \in \{1 \dots N_p\}^2, i = 1, \dots, N_a\} \quad (14.2)$$

$$\mathcal{D} = \{(a^i, \text{sens}^i) \in \{1 \dots N_a\} \times \{-1, 1\}, i = 1, \dots, N_d\} \quad (14.3)$$

i.e. une arête  $a^i$  est définie par ses deux sommets  $(s_1^i, s_2^i)$  qui sont des points de  $\mathcal{S}$ , et un sous-domaine est défini par une arête frontière  $a^i$  et un sens de parcourt (positif ou négatif).

**Définition 65** Les diagrammes de Voronoï sont les polygones convexes  $V^i, i = 1, \dots, N_p$  formés par l'ensemble des points de  $\mathbb{R}^2$  plus proches de  $x^i$  que des autres points  $x^j$ , soit :

$$V^i = \{x \in \mathbb{R}^2 / \|x - x^i\| \leq \|x - x^j\|, \forall j \in \{1, \dots, N_p\}\} \quad (14.4)$$

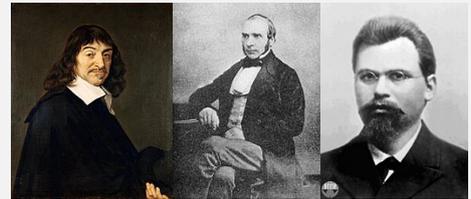
Chaque point  $x^i$  (point générateur) étant considéré comme une île d'où partent des bateaux, la région de Voronoï du point  $x^i$  est la région où un bateau issu de l'île  $x^i$  arrive avant tout bateau issu d'une autre île. Notons qu'il est possible de jouer avec la métrique pour définir des diagrammes de Voronoï sur d'autres géométries que la géométrie euclidienne, et qu'il est possible également d'étendre la définition au cas où « les bateaux ne vont pas tous à la même vitesse ». Dans ce dernier cas, on parle de **diagramme de Voronoï pondéré**, que nous n'utiliserons pas dans ce document.

Les diagrammes de Voronoï sont des polygones obtenus comme intersections finies de demi-espaces et sont donc convexes. De plus, les sommets  $v^k$  de ces polygones sont à égale distance des points  $\{x^{i^k}, j = 1, \dots, n_k\}$  de  $\mathcal{S}$ , où le nombre  $n_k$  est généralement égal ou supérieur à 3. À chacun de ces sommets  $v^k$ , nous pouvons associer le polygone convexe construit avec les points  $\{x^{i^k}, j = 1, \dots, n_k\}$  en tournant dans le sens trigonométrique. Ce maillage est généralement formé de triangles, sauf si il y a des points cocycliques.

#### Histoire

L'usage informel des diagrammes de Voronoï remonte à Descartes en 1644. Dirichlet a utilisé des diagrammes de Voronoï en dimension 2 ou 3 dans son étude des formes quadratiques en 1850. Le médecin britannique John Snow a utilisé un diagramme de Voronoï en 1854 pour montrer que la majorité des personnes mortes dans l'épidémie de choléra de Soho (à Londres) vivait plus près de la pompe infectée de Broad Street que de n'importe quelle autre pompe.

Les diagrammes de Voronoï portent le nom du mathématicien russe Georgy Fedoseevich Voronoï qui a défini et étudié le cas général en dimension  $n$  en 1908. Les diagrammes de Voronoï qui sont utilisés en géophysique et en météorologie pour analyser des données de distributions spatiales (comme les mesures de chutes de pluie) sont appelés polygones de Thiessen du nom du météorologiste américain Alfred H. Thiessen. Ils sont également très utiles en géométrie algorithmique, en particulier pour des problèmes de représentation ou de quantification, et sont utilisés dans le champ de la robotique pour créer un protocole pour éviter les obstacles détectés. Pour la modélisation de phénomènes naturels, ils servent pour les études de la compétition végétale (écologie et sylviculture), pour les territoires d'animaux (zoologie) et des clans et tribus néolithiques (anthropologie et archéologie), ainsi que pour les modèles de zones urbaines (géographie). Il expliquent aussi la répartition (et la forme) des tâches du pelage des girafes et des écailles de tortues.



Descartes                  Snow                  Voronoï



Delaunay

La triangulation de Delaunay a été inventée par le mathématicien russe Boris Delaunay en 1934. D'après la définition de Delaunay, le cercle circonscrit d'un triangle constitué de trois points de l'ensemble de départ est vide s'il ne contient pas d'autres sommets que les siens. Ainsi, les autres points sont autorisés sur le périmètre en lui-même mais pas à l'intérieur strict du cercle circonscrit. La condition de Delaunay affirme qu'un réseau de triangles est une triangulation de Delaunay si tous les cercles circonscrits des triangles du réseau sont vides. Ceci constitue la définition originale en deux dimensions. En remplaçant les cercles par des sphères circonscrites, il est possible d'étendre la définition à la dimension trois... mais en fait, on peut l'étendre en dimension quelconque. **Les triangulations de Delaunay maximisent le plus petit angle de l'ensemble des angles des triangles, évitant ainsi les triangles allongés.**

On parle souvent de la triangulation de Delaunay comme du dual du diagramme de Voronoï qui lui est associé. En fait les deux sont liés de la façon suivante :

- Les sommets du diagramme de Voronoï sont les centres des cercles circonscrits des triangles de la triangulation de Delaunay. Les arêtes du diagramme de Voronoï sont sur les médiatrices des arêtes de la triangulation de Delaunay ;
- Chaque germe (ou point générateur) du diagramme de Voronoï constitue un sommet dans la triangulation de Delaunay. Ces sommets sont reliés entre eux par une arête si et seulement si les cellules sont adjacentes.

**Définition 66 — Maillage de Delaunay.** On appelle **maillage de Delaunay strict**, le maillage dual des diagrammes de Voronoï, construit en reliant deux points  $x^i$  et  $x^j$ , si les diagrammes  $V^i$  et  $V^j$  ont un segment en commun.

Pour rendre le maillage triangulaire, il suffit de découper les polygones qui ne sont pas des triangles en triangles. Nous appelons ces maillages des **maillages de Delaunay** de l'ensemble  $\mathcal{S}$ .

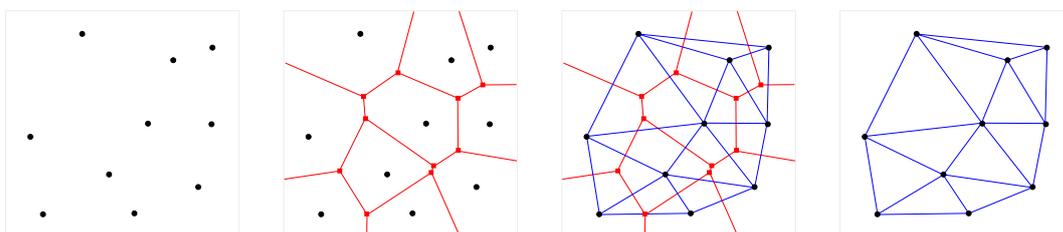


FIGURE 14.3: a) points, b) ajout du diagramme de Voronoï, c) ajout de la triangulation de Delaunay et d) maillage seul

Le domaine d'un maillage de Delaunay d'un ensemble de points  $\mathcal{S}$  est l'intérieur du convexifié  $\mathcal{C}(\mathcal{S})$  de l'ensemble de points  $\mathcal{S}$ .

Il existe une propriété qui permet de savoir si un maillage est un maillage de Delaunay. C'est la propriété de la boule ouverte.

**Théorème 52 — Propriété de la boule ouverte.** Un maillage  $\mathcal{T}_{d,h}$  est un maillage de Delaunay s'il est tel que pour tout triangle  $T$  du maillage, le disque ouvert  $D(T)$  correspondant au cercle circonscrit à  $T$  ne contient aucun sommet :

$$D(T) \cap \mathcal{T}_{0,h} = \emptyset \quad (14.5)$$

Réciproquement, si le maillage  $\mathcal{T}_{d,h}$  d'un domaine convexe vérifie la propriété de la boule ouverte, alors il est de Delaunay.

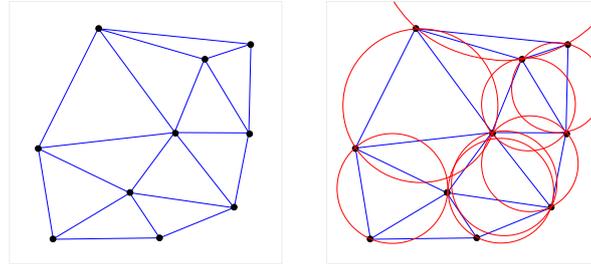


FIGURE 14.4: a) Triangulation de Delaunay et b) cercles circonscrits : propriété de la boule ouverte

La propriété de la boule ouverte peut être appliquée également au cas d'un quadrilatère convexe, puisque celui-ci peut être découpé en deux triangles adjacents. Il suffit alors de vérifier la propriété pour toutes les paires de triangles adjacents formant un quadrilatère convexe.

Si le critère de la boule ouverte n'est pas vérifié pour un quadrilatère convexe, alors on fera un échange de diagonal pour résoudre le problème.

### 14.1.3 Remarques

À ce niveau, nous sommes en mesure de générer un maillage... toutefois, celui-ci n'est pas forcément exempt de problèmes :

- si les seuls points disponibles sont sur la frontière, il va falloir générer des points internes au maillage. En effet, le maillage généré existe, mais peut présenter des distorsions inadmissibles en termes de calcul. Le critère le plus naturel pour distribuer les points internes est d'imposer en tout point  $x$  de  $\mathbb{R}^2$ , le pas de maillage  $h(x)$ . En pratique, on ne dispose pas toujours de cette information et il faut la construire à partir des points disponibles, i.e. des points de la frontière. D'autre part, dans de nombreuses applications, on préfère donner le nombre de subdivisions souhaitées entre deux sommets : un peu de géométrie différentielle (longueurs d'arcs) permet de se ramener à donner une valeur à  $h(x)$  ;
- il existe des cas où le maillage généré peut ne pas respecter la frontière (par exemple pour un domaine en forme de « U » avec peu de points. Il existe une solution de forçage de la frontière par permutation d'un certain nombre de diagonales. Voir figure 14.5 ;
- il faut traiter le cas des trous... mais ce n'est pas réellement difficile.

Comme il ne s'agit pas ici de donner un cours sur les algorithmes de maillage, nous en resterons là. Les maillages triangulaires sont plutôt bien maîtrisés. Il y a de nombreux cas à traiter pour couvrir toutes les configurations existantes, mais les bases théoriques et les réalisations pratiques existent dans tous les cas.

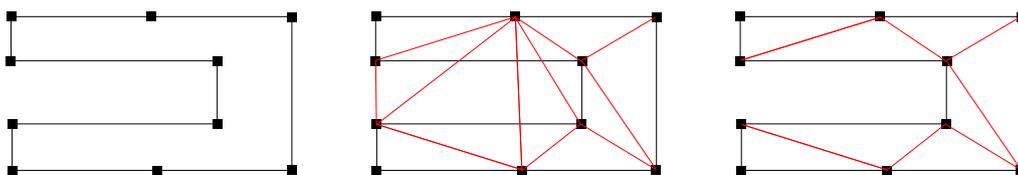


FIGURE 14.5: a) Points et arêtes, b) maillage de Delaunay ne respectant pas la frontière, c) maillage respectant la frontière obtenu en échangeant des diagonales

## 14.2 Maillage par avancement de fronts

Le **front initial** est constitué de la frontière (ou des frontières, s'il y a des trous), i.e. des nœuds et des arêtes. L'algorithme est très simple : pour chaque arête représentée par le segment  $[x^i, x^j]$ , on crée un nouveau point  $x^{N_p+1}$  tel que le triangle formé des trois points  $x^i, x^j$  et  $x^{N_p+1}$  soit équilatéral.

Évidemment il faut quelques règles supplémentaires pour que cela fonctionne bien :

- on met à jour en permanence le front dès qu'un point est créé, et on ne s'arrête que lorsque toutes les arêtes du front ont été balayées ;
- en cours de calcul, de nouveaux fronts peuvent apparaître (cela correspond à plusieurs domaines non encore maillés à l'intérieur du maillage en cours) ;
- on vérifie si des nœuds du front courant ne seraient pas candidats pour être le nouveau point  $x^{N_p+1}$  du triangle : par exemple, en s'assurant qu'un nœud existant n'appartient pas au cercle de centre le point  $x^{N_p+1}$  théorique (triangle équilatéral) et de rayon un certain paramètre fixé ;
- lorsque plusieurs nœuds existants sont candidats, on sélectionne celui qui fournit le triangle le plus équilatéral possible ;
- on supprime toutes les possibilités qui intersectent un front existant (pas de recouvrement d'éléments) ;
- on rejette les triangles inversés.

## 14.3 Maillage par transformation

Le principe est on ne peut plus simple. Il s'agit de mettre en bijection deux domaines : d'une part le domaine à mailler compliqué  $\Omega_h$ , et d'autre part un domaine de référence plus simple : rectangle, sphère...

Pour faire simple, on peut imaginer mailler une ellipse à partir du maillage d'un disque, un rectangle à partir du maillage d'un carré... on peut dire que l'on fait du **morphing sur un maillage**. Dans la pratique, on part de la surface d'un domaine tridimensionnel complexe. On transforme cette surface en une surface plane par une certaine transformation. On maille cette nouvelle surface dans le plan. Puis on effectue la transformation inverse afin de disposer d'un maillage de la surface dans  $\mathbb{R}^3$ .

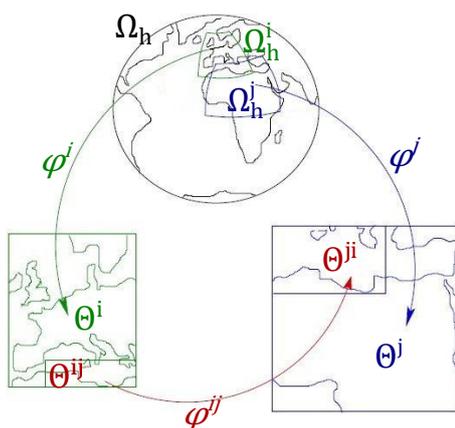


FIGURE 14.6: Domaines et transformations

Considérons que nous souhaitons mailler notre domaine  $\Omega_h$  qui est une surface dans  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ . On appelle **transformation**  $\varphi$ , un homéomorphisme transformant  $\Omega_h$  en un autre domaine (plus simple par exemple, ou au moins plan si la surface de  $\Omega_h$  est dans  $\mathbb{R}^3$ ) noté  $\Theta$ . Comme nous utilisons des homéomorphismes, les transformations inverses existent et sont continues. Nous sommes donc en mesure de repasser de  $\Theta$  à  $\Omega_h$ .

Dans le cas général, illustré à la figure 14.6, ce domaine  $\Omega_h$  peut lui-même être déjà décomposé en un certain nombre de sous-domaines  $\Omega_h^i$  avec recouvrement partiel des sous-domaines (les  $\Omega_h^i$  sont des ouverts de la variété  $\Omega_h$ ). On appelle **transformations**  $\varphi^i$ , les homéomorphismes transformant  $\Omega_h^i$  en les sous-domaines  $\Theta^i$  (avec recouvrements partiels) constituant  $\Theta$ . On appelle **fonctions de transition**  $\varphi^{ij}$  les transformations permettant de passer du sous-domaine  $\Theta^{ij}$  de  $\Theta^i$  correspondant à la zone de recouvrement dans  $\Theta^i$  avec  $\Theta^j$  au sous-domaine  $\Theta^{ji}$  de  $\Theta^j$  correspondant à la zone de recouvrement dans  $\Theta^j$  avec  $\Theta^i$ . Cela permet de s'assurer de la bonne transition entre les **cartes** locales  $\Theta^i$  (les  $\Theta^i$  forment un atlas de cartes).

La transformation considérée peut conserver une ou plusieurs des propriétés suivantes :

- les angles : transformation conforme ;
- les aires : transformation aouthalique ;
- les longueurs : transformation isométrique.

Un cas « simple » est celui où  $\Omega_h$  est une **surface de genre zéro sans bord** (une telle surface correspond à la surface d'un volume sans trou, c'est donc quelque chose de très général). Une surface de genre zéro sans bord est homéomorphe à la sphère unité  $S^2$  et l'on peut donc trouver un homéomorphisme  $\varphi$ , qui peut être compliqué, entre  $\Omega_h$  et la sphère, i.e. on est dans le cas précédent où l'on passe directement de  $\Omega_h$  à  $S^2$  par un unique homéomorphisme  $\varphi$ . Il ne reste plus ensuite qu'à mailler la sphère, puis à envoyer tous les sommets du maillage sur  $\Omega_h$  par  $\varphi^{-1}$ , tout en conservant la même connectivité. Il faut toutefois veiller à mailler  $S^2$  assez finement pour s'assurer que le maillage de  $\Omega_h$  ne s'auto-intersecte pas. Ainsi, la densité locale des sommets du maillage de  $S^2$  doit dépendre de  $\Omega_h$ , et donc de  $\varphi$ .

Le maillage de la sphère n'est pas si simple qu'on le pense. On peut là encore appliquer la même technique : définir un homéomorphisme entre la demi-sphère et le disque, mailler le disque. Le maillage de la sphère, obtenu par symétrie de la demi-sphère doit alors « se recoller », du moment que le maillage du bord du cercle est conforme et laissé conforme par l'homéomorphisme. Si l'on procède au maillage du cercle par la méthode de Delaunay telle que décrite en partant du contour du cercle, on est alors assuré que le maillage du contour sera conforme.

Dans les deux cas, passage du cercle à la demi-sphère et passage de la sphère à  $\Omega_h$ , on pourra remarquer que la densité du maillage n'est généralement pas la même. Il s'agit du **phénomène d'étirement**. Si l'on souhaite que la surface finale  $\Omega_h$  ait une densité de maillage fixée, il faut savoir comment  $\varphi^{-1}$  modifie cette densité pour pouvoir mailler  $S^2$  en conséquence... idem pour le cercle. Cela n'est pas simple, surtout si  $\Omega_h$  est compliqué.

## 14.4 Remarques sur le maillage quadrangulaire et hexaédrique

Même en 2D, il est plus difficile de générer un maillage quadrangulaire que triangulaire. Une raison fondamentale est que tout polygone ne peut être décomposé en un ensemble de quadrangles : il peut être nécessaire d'ajouter des sommets sur le bord. Et **en pratique, il est nécessaire et suffisant d'avoir un nombre pair d'arêtes sur le bord géométrique**.

En 3D, on ne peut pas mailler tout volume dont le bord est maillé par une surface quadrangulaire. Disposer d'un nombre pair de quadrangles sur le bord n'est qu'une condition nécessaire. **Une condition suffisante est d'avoir un nombre pair de quadrangles maillant une surface topologiquement équivalente à une sphère. Dans ce cas, le volume délimité par la surface en question admet un maillage hexaédrique.**

Le **maillage d'une sphère en quadrangles de même aire** est un problème difficile qui ressort du problème de Tammes, ou problème des dictateurs. Une solution a été donnée par Lemaire et Weill en 2000 [72]. Un maillage obtenu est donné à la figure 14.7. Un tel maillage comporte  $24n^2$  éléments par construction : la sphère est « découpée » par son cube inscrit et chacun des six morceaux obtenus est divisé en quatre par symétrie. Toutefois, il faut noter que les quadrangles considérés ne sont pas plans, ce sont des morceaux de sphères. Pour l'instant il n'y a pas de solution « parfaitement satisfaisante » avec des quadrangles plans, dans un sens qui reste à définir... puisque l'invariant d'Euler-Poincaré implique par exemple qu'il n'y a pas de polygonalisation de la sphère (qui est de caractéristique d'Euler-Poincaré de 2) avec uniquement des rectangles (ou des hexagones d'ailleurs). Au passage, rappelons que les triangles permettent eux une polygonalisation d'une surface, quelque soit sa caractéristique, d'où leur succès... mais attention à réaliser un maillage « pas trop trivial » afin d'éviter le cas de triangles trop distordus venant se connecter sur un même sommet et conduisant à des singularités en terme de calcul numérique (et pour cela, utilisons donc la triangulation de Delaunay-Voronoi).

Aucune méthode n'est apte à traiter tous les cas possibles concernant le maillage avec des quadrangles ou des hexaèdres. Néanmoins de nombreux algorithmes sont disponibles :

- Les **maillages structurés** (obtention de la répétition régulière de motifs identiques) fonctionnent bien mais ne sont pas adaptés à toutes les géométries.
- On peut **subdiviser** le domaine en plusieurs parties pour appliquer sur chacune d'elles un maillage structuré ou un maillage obtenu par déformation d'un maillage structuré.
- On peut définir deux faces topologiquement équivalentes du modèle comme les surfaces source et cible et découper les surfaces de liaisons entre la source et la cible pour créer un **maillage structuré dans une direction**.

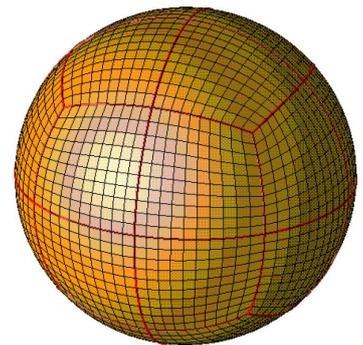
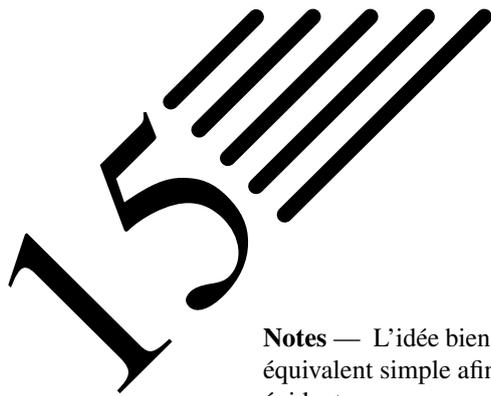


FIGURE 14.7: Maillage en quadrangles d'aires égales

- On peut raisonner comme en CAO en générant des maillages par extrusion ou par révolution.
- Le **paving** est une variante de l'avancée de front. On essaye de faire un maillage de type structuré en reportant un front « parallèle » au front existant, avec le même nombre de nœuds. Il sera nécessaire d'avoir des distorsions à certains endroits et autour des trous, il faudra faire des coutures.
- Le **Q-morph** se propose de transformer un maillage triangulaire en maillage quadrangulaire par avancée de front. Cela ne fonctionne pas en 3D.
- Les **méthodes basées sur une grille** considèrent la surface ou le volume découpé(e) en carrés ou cubes selon une grille prédéfinie. Il suffit alors d'adapter les éléments situés au bord du domaine : ceux-ci seront de moins bonne qualité et parfois même pas totalement conformes au bord théorique.

Le maillage quadrangulaire et surtout hexaédrique reste un domaine de recherche actif.



# Homogénéisation

**Notes** — L'idée bien connue de l'homogénéisation est de remplacer un milieu « compliqué » par un milieu équivalent simple afin de simplifier le modèle numérique à résoudre. L'intérêt de ces techniques est donc évident.

Par exemple, un matériau composite composé de plusieurs plis (couches) constituées chacune de fibres noyées dans une matrice et dont l'orientation diffère d'une couche à l'autre peut être représenté avantageusement par un matériau « homogénéisé » ou « équivalent ».

Nous allons présenter les méthodes d'homogénéisation ainsi que leurs applications en mécanique et acoustique, mais également en modélisation.

## Histoire

Les *théories des milieux effectifs* visent à estimer les propriétés *effectives* (i.e. macroscopiques) d'un milieu en fonction des propriétés locales de chacun des constituants ainsi que d'un certain nombre d'informations sur la microstructure.

Les premières théories remontent au XIX<sup>e</sup> siècle et sont dues à Mossotti, Maxwell, Poisson ou encore Lorentz. Le but de ces modèles est de fournir soit des bornes pour le comportement effectif, soit des approximations du comportement effectif. Les bornes sont optimales lorsqu'il existe une microstructure particulière qui réalise exactement le modèle physique. On évalue les « bonnes » propriétés de ces théories en les confrontant à d'autres résultats théoriques, calculs analytiques et numériques...



Mossotti      Maxwell      Poisson      Lorentz

Ces théories sont utilisées pour les problèmes de conductivité (milieux diélectriques), en mécanique, magnétique, thermique... lorsque l'on a des phases de conductivité, d'élasticité, des coefficients thermiques... variables. Ces problèmes sont en général très difficiles à résoudre (non-linéaires et anisotropes) alors qu'en même temps, du point de vue des applications pratiques, il n'est pas forcément nécessaire de tenir compte de l'ensemble des degrés de liberté de ces systèmes.

L'existence d'un *comportement effectif* n'est nullement assurée. On montre que, sous certaines hypothèses (en particulier l'existence d'un *volume élémentaire représentatif*), on peut effectivement remplacer un matériau hétérogène par un milieu homogène équivalent.

Enfin, d'un point de vue purement numérique, ces méthodes peuvent être utilisées pour « simplifier » un système à résoudre, que cela ait un sens physique ou non.

Notons que les techniques d'homogénéisation ne sont pas que des artefacts, des trucs et astuces. Certaines des grandeurs physiques que nous utilisons tous les jours ne sont que des moyennes. Le meilleur exemple en est la pression. Bien qu'en un point donné d'un gaz on voit passer des particules allant en tous sens, on constate également, à une échelle plus macroscopique, un schéma d'ensemble qui permet de définir par exemple la pression qu'exerce ledit gaz sur une paroi... pourtant rien de « cohérent » ne se dégage à l'échelle microscopique.

Le but de ce chapitre est donc d'effectuer le passage du niveau microscopique au niveau macroscopique (historiquement les premières homogénéisations, appelées alors moyennisations, utilisaient les moyennes arithmétique et harmonique) en fournissant la justification de ce passage (existence et unicité) ainsi que la formule (l'algorithme) de calcul des coefficients efficaces.

Les premières études asymptotiques des problèmes aux limites non-stationnaires aux coefficients oscillants ont été développés par l'école russe, notamment par Bakhvalov en 1975, pour des résultats sur  $\mathbb{R}^n$  tout entier, puis par Panasenko en 1978, qui a étendu ces résultats au cas d'un problème aux limites dans un ouvert borné. Pour ce faire, Panasenko a introduit des correcteurs de couches limites, explicitement construits dans le cas particulier d'une seule couche. La notion de convergence à deux échelles a été introduite en 1989 par Nguetseng et ensuite développée par Allaire avec pour application l'homogénéisation périodique. Elle a été généralisée au cas de quelques problèmes multi-échelles. Les quatre principales méthodes d'homogénéisation périodique sont la méthode des échelles multiples, la méthode des fonctions tests oscillantes, la méthode de la convergence à double échelle et la méthode de l'éclatement périodique.

Les méthodes que nous présenterons dans ce chapitre seront les [méthodes de développement régulier, de la couche limite, et de développement asymptotique](#). Le cas des [milieux poreux](#) sera ensuite considéré. Enfin, nous mentionnerons une application de ces méthodes pour [réduire la dimension](#) de certains problèmes. La notion de convergence à deux échelles sera utilisée au chapitre 16 pour l'optimisation topologique.

Une dernière remarque avant d'enter dans le vif du sujet, car elle correspond à des interrogations de nombreux étudiants : **il n'est pas nécessaire qu'un problème soit périodique pour pouvoir recourir aux techniques d'homogénéisation**. En effet, l'homogénéisation consiste à remplacer un problème « compliqué » par un « plus simple » selon une certaine « mesure » : il s'agit donc généralement de montrer que l'intégrale d'un truc compliqué peut s'écrire comme une autre intégrale d'un truc plus simple... et c'est l'égalité de ces deux intégrales qui fait que l'on dit que les problèmes sont équivalents (conduisent à la même solution), et donc que le second problème correspond à l'homogénéisation du premier. Dans le même ordre d'idée, et pour enfoncer le clou, **un matériau homogénéisé n'est par forcément isotrope**. En effet, on peut remplacer un matériau fortement anisotrope par un matériau homogénéisé isotrope, mais cela n'est pas forcément le plus adapté : il peut être préférable de l'homogénéiser en un matériau lui-même anisotrope mais « plus simple ». Un matériau composite composé de plusieurs plis ayant des orientations différentes pourrait être remplacé par exemple par un matériau composite homogénéisé n'ayant qu'une couche (donc plus simple), mais restant anisotrope (qui serait, en quelque sorte, orienté selon une direction « homogénéisée », et il est alors plus « facile » de raisonner avec cette orientation « principale » lorsque l'on souhaite physiquement comprendre le comportement du matériau).

## 15.1 Méthodes d'homogénéisation

Nous allons considérer le problème de conductivité linéaire donné par l'équation de Poisson avec condition de Dirichlet. Nous rappelons qu'il s'agit du problème suivant (qui décrit le déplacement vertical  $u$  d'une membrane plane) :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(A(x)\nabla u) = f(x) & \text{pour } x \in \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma = \partial\Omega \end{cases} \quad (15.1)$$

On rappelle également que si  $\Omega$  est un ouvert connexe borné de  $\mathbb{R}^n$ , et  $H_0^1(\Omega)$  l'espace de Sobolev des fonctions qui s'annulent sur  $\Gamma$ , alors la solution  $u \in H_0^1(\Omega)$  du problème précédent est également la solution du problème faible :

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad - \int_{\Omega} A(x)\nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f(x)v \quad (15.2)$$

où  $f \in L^2(\Omega)$ . Pour que ces deux formulations soient équivalentes, on a supposé que  $A(x)$  est régulière : i.e. que pour chaque  $x$  de  $\Omega$ ,  $A(x)$  est une matrice  $n \times n$ , dont les éléments sont mesurables et qui est symétrique, définie-positive, bornée, i.e. qu'il existe deux constantes  $K_1$  et  $K_2 > 0$  telles que :

$$\forall v \in \mathbb{R}^n, \quad K_1 v \cdot v \leq A(x)v \cdot v \leq K_2 v \cdot v \quad (15.3)$$

Mentionnons le cas particulier où  $A(x)$  est régulier dans  $\Omega$  mais pas sur  $\Gamma$ , alors on a deux conditions d'interface :

$$[u] = 0 \quad \text{et} \quad [n \cdot A(x)\nabla u] = 0 \quad (15.4)$$

Nous savons également que la solution existe et est unique (d'après le théorème de Lax-Milgram, i.e. d'après le théorème de Riesz-Fréchet en remarquant le produit scalaire qui va bien...)

Intéressons nous maintenant d'un peu plus près à  $A(x)$ . Supposons que  $A(x)$  possède une certaine périodicité  $\varepsilon$ , par exemple, que le matériau constituant le domaine soit constitué de couches successives de deux matériaux différents, mais avec une périodicité, comme illustré sur la figure 15.1. Dans un tel cas, nous dirons que les

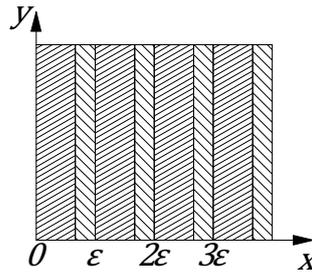


FIGURE 15.1: Matériau périodique

coefficients  $A$  dépendent de  $x/\varepsilon$ . Cette écriture sous forme normalisée permet de dire que  $A$  est périodique de période 1.

Dans le cas unidimensionnel, le problème devient :

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left( A \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \frac{du}{dx} = f(x) & \text{pour } x \in [0, l] \\ u = 0 & \text{pour } x = 0 \text{ et } x = l \end{cases} \quad (15.5)$$

$A$  est une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  de période 1, et nous la supposons régulière par morceaux et telle qu'il existe  $K_1$  et  $K_2 > 0$  telles que  $K_1 \leq A(v) \leq K_2$ .

La solution du problème est alors :

$$u(x) = \int_0^x A^{-1}(y/\varepsilon) \left( \int_0^y f(v)dv + c_1 \right) dy + c_2 \quad (15.6)$$

avec  $c_2 = 0$  et

$$c_1 = \frac{\int_0^l A^{-1}(y/\varepsilon) \int_0^y f(v)dv dy}{\int_0^l A^{-1}(y/\varepsilon) dy} \quad (15.7)$$

Le nombre d'intervalles pour le calcul approché de  $c_1$  est très grand (i.e. très supérieur à  $l/\varepsilon$ ).

Exprimé autrement, ce résultat devient : le coefficient homogénéisé est  $1/\langle \frac{1}{A} \rangle$  et non pas  $\langle A \rangle$  (où  $\langle \cdot \rangle$  désigne la moyenne).

### 15.1.1 Méthode de développement régulier

Dans la [méthode de développement régulier](#), on se propose de chercher la solution asymptotique  $u^{(\infty)}$  sous la forme :

$$u^{(\infty)} \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i u_i(x) \quad (15.8)$$

où  $u_i(x)$  ne dépend pas de  $\varepsilon$ .

La solution asymptotique  $u^{(\infty)}$  est bien de la forme précédente si en injectant cette expression dans celle du problème alors on obtient une petite erreur au second membre.

Pour le calcul on procède donc comme suit :

- on injecte la forme souhaitée (cette forme s'appelle l'[ansatz](#)) ;
- pour avoir un second membre avec un terme d'erreur petit, on obtient la forme des  $u_i(x)$  ;
- on vérifie que les  $u_i(x)$  trouvés conviennent bien.

### 15.1.2 Méthode de la couche limite

Considérons le problème unidimensionnel :

$$\begin{cases} \varepsilon^2 u'' - p(x)u = f(x) & \text{pour } x \in [0; 1] \\ u(0) = A \text{ et } u(1) = B \end{cases} \quad (15.9)$$

où  $p \in C([0; 1])$ ;  $p(x) \geq 0, x \in [0; 1]$ ;  $f \in C([0; 1])$ ;  $A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}$  et  $\varepsilon > 0$  le petit paramètre. En négligeant le terme  $\varepsilon^2 u''$ , nous arrivons à l'équation  $-p(x)u_r = f(x)$ . En d'autres termes, et comme montré sur

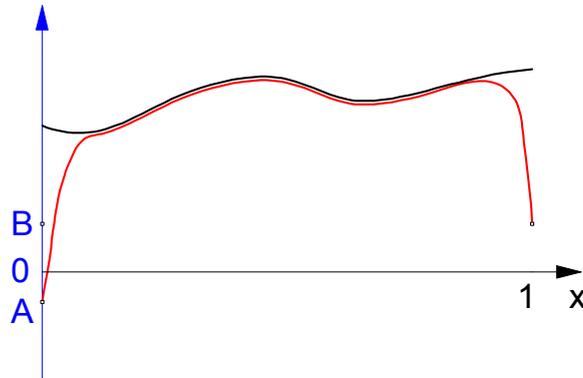


FIGURE 15.2: Méthode de la couche limite

la figure 15.2, nous disposons de la courbe correspondant à  $y = u_r = -f(x)/p(x)$  (en noir) qui approche la solution du problème donnée par la courbe rouge.

La solution exacte se confond avec  $u_r$  sur la plus grande partie de l'intervalle  $[0; 1]$ , mais  $u$  et  $u_r$  sont fortement différents dans un voisinage des extrémités.

Cherchons une solution asymptotique sous la forme de l'ansatz :

$$u^{(\infty)} \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i (u_i^r(x) + u_i^0(x/\varepsilon) + u_i^1((x-1)/\varepsilon)) \quad (15.10)$$

où les  $u_i^r(x)$  sont les **termes réguliers**, et  $u_i^0(x/\varepsilon)$  et  $u_i^1((x-1)/\varepsilon)$  les **termes de couche limite** correspondant aux extrémités  $x = 0$  et  $x = l$ .

Pour le calcul on procède donc comme suit :

- on injecte les termes réguliers de l'ansatz dans la formulation du problème ;
- on traite les extrémités pour vérifier les conditions aux limites, ce qui donne les termes de couche limite ;
- on vérifie que la solution trouvés conviennent bien (i.e. que l'erreur commise est négligeable).

### 15.1.3 Méthode de développement asymptotique infini

À ce niveau du texte, on a dû s'apercevoir que la démarche était la même pour les deux méthodes précédentes, sauf évidemment la forme de l'ansatz. Dans la **méthode de développement asymptotique infini**, on va encore procéder de la même manière, mais on cherchera une solution sous la forme d'ansatz :

$$u^{(\infty)} \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i u_i(x, x/\varepsilon) \quad (15.11)$$

où chaque  $u_i(x, x/\varepsilon)$  est de la forme  $u_i(x, x/\varepsilon) = N_i(x/\varepsilon)v_\varepsilon^{(i)}(x)$ ,  $\forall i > 0$  et  $u_0(x, x/\varepsilon) = v_\varepsilon(x)$ , i.e. :

$$u^{(\infty)} \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i N_i(x/\varepsilon)v_\varepsilon^{(i)}(x) \quad (15.12)$$

et où les  $N_i(x/\varepsilon)$  sont 1-périodiques et  $N_0 = 1$ .

Pour un détail plus mathématique, on pourra se référer par exemple à [98] qui présente la notion de convergence à deux échelles (« Two-scale convergence »). Cet article, bien qu'un peu technique, reste relativement abordable.

### 15.1.4 Cas des coefficients discontinus

Il est possible d'appliquer la même approche que lorsque les coefficients sont continus avec quelques modifications : il « suffit » d'ajouter les conditions d'interfaces présentées en début de paragraphe et rappelées ci-dessous :

$$[u] = 0 \quad \text{et} \quad [n \cdot A(x/\varepsilon)\nabla u] = 0 \quad (15.13)$$

partout où cela est nécessaire.

On retrouve les mêmes conditions d'existence de la solution que dans le cas continu et la périodicité de la solution homogénéisée reste inchangée.

## 15.2 Homogénéisation simplifiée pour les matériaux composites

Après ce petit tour « mathématique » des méthodes d'homogénéisation, nous proposons un petit complément très mécanique, et très « pratique ».

Pour information, la modélisation du muscle cardiaque s'inspire des techniques d'homogénéisation des matériaux composites.

### 15.2.1 Introduction

D'une manière générale, tous les matériaux, mêmes isotropes, sont hétérogènes en dessous d'une certaine échelle. Il peut sembler naturel d'utiliser des propriétés homogènes équivalentes correspondant à des propriétés mécaniques effectives. Toutefois, comme nous l'avons déjà vu, ces propriétés effectives ne s'obtiennent pas par une simple moyenne des propriétés des constituants, mêmes pondérées par les fractions volumiques.

Les propriétés effectives du milieu homogène équivalent cherché peuvent être obtenues en résolvant un problème aux limites sur un **volume élémentaire**  $dV$ , à condition que celui-ci soit **suffisamment grand pour être représentatif de la microstructure du matériau hétérogène**. Dans le cas où les constituants présentent une structure périodique, le volume  $dV$  peut se réduire à un **volume élémentaire**.

Une fois le volume élémentaire déterminé, on le soumet à des sollicitations élémentaires pour déterminer la réponse résultante. **La difficulté réside en fait dans le choix des conditions aux limites à appliquer au volume élémentaire considéré pour imposer une déformation ou contrainte globale moyenne donnée**. Dans le cas linéaire, on peut prouver l'existence et l'unicité pour les différents cas de conditions aux limites existants.

Principalement pour les composites stratifiés ou sandwiches, il y a deux niveaux d'homogénéisation :

- du niveau micromécanique au niveau mésoscopique : Les hétérogénéités de base sont les fibres et la matrice. On effectue ici une étape d'homogénéisation locale.
- du niveau mésoscopique au niveau macroscopique : Les hétérogénéités de base sont les différentes couches du stratifié. Ces couches sont considérées comme « homogènes » (étape précédente). Cette fois, il s'agit d'une homogénéisation dans l'épaisseur du stratifié.

On pourra par exemple se reporter à [97] pour voir comment cela est utilisé pour développer un modèle de plaque homogénéisée équivalente à un matériau fait de carton ondulé entre deux peaux de carton.

### 15.2.2 Loi des mélanges, bornes de Voigt et de Reuss

On considère un composite UD (unidirectionnel) de repère d'orthotropie  $(l, t)$ , constitué de fibres noyées dans une matrice polymère. Soit une cellule élémentaire de fraction volumique  $V = 1$  constituée de fibres et de matrice. On note  $V_m$  la fraction volumique de matrice,  $V_f$  la fraction volumique de fibre, et on a :

$$V = V_m + V_f = 1 \quad (15.14)$$

À l'échelle locale, on fait les hypothèses suivantes :

- Fibres : comportement élastique linéaire fragile isotrope de coefficients  $E_f$  et  $\nu_f$  ;

— Matrice : comportement élastique non-linéaire, isotrope de coefficients  $E_m$  et  $\nu_m$ .

On souhaite déterminer les relations existant entre  $E_l$ ,  $E_t$ ,  $E_f$ ,  $E_m$ ,  $V_m$  et  $V_f$ .

Pour cela, on fait également les hypothèses suivantes :

- On travaille en élasticité linéaire.
- La liaison fibres/matrice est parfaite.
- Localement, on a :  $\sigma_f = E_f \varepsilon_f$  et  $\sigma_m = E_m \varepsilon_m$ .

Loi des mélanges (ou modèles à bornes ou de Reuss et de Voigt) :

- premier essai — Il s'effectue dans la direction parallèle aux fibres (compression longitudinale)

$$E_{\text{longitudinal}} = E_l = E_f V_f + E_m V_m \quad (15.15)$$

C'est la loi des mélanges, qui est bien vérifiée dans la direction des fibres. Il s'agit de la borne supérieure de Voigt (1887).

- deuxième essai — Il s'effectue dans la direction perpendiculaire aux fibres (compression transversale)

$$\frac{1}{E_{\text{transverse}}} = \frac{1}{E_t} = \frac{V_f}{E_f} + \frac{V_m}{E_m} \quad (15.16)$$

C'est la loi des mélanges en souplesse. Cette relation n'est pas très bien vérifiée transversalement mais donne une indication sur la borne inférieure, dite de Reuss (1929).

- Module de cisaillement et coefficient de Poisson d'un UD par la loi des mélanges :

$$\nu_{lt} = \nu_f V_f + \nu_m V_m \quad \text{et} \quad \frac{1}{G_{lt}} = \frac{V_f}{G_f} + \frac{V_m}{G_m} \quad (15.17)$$

Les modèles à bornes fournissent un encadrement du comportement mécanique du matériau composite par des comportements mécaniques limites (bornes). Ils sont obtenus par la résolution du problème de l'élasticité linéaire sous forme faible. La minimisation de l'énergie potentielle conduit à la borne supérieure de Voigt. la résolution en contrainte conduit à la borne inférieure de Reuss.

Pour gagner un peu en généralité, on peut remplacer les termes fibres et matrice par des phases, car ces modèles sont applicables à des mélanges de polymères (matériaux composés) et à des composites chargés par des particules diverses.

Les bornes correspondent aux associations série des deux phases (borne inférieure de Reuss, équivalent au modèle du module transverse équivalent de la loi des mélanges) et parallèle (borne supérieure de Voigt, équivalent au modèle du module longitudinal équivalent de la loi des mélanges).

Aucune hypothèse n'est faite sur la morphologie du matériau. Il est simplement admis que pour le modèle de Reuss, la contrainte est homogène dans les deux phases (continuité de la contrainte) et, pour le modèle de Voigt, la déformation est constante (continuité de la déformation) dans tout le composite. **L'intérêt est limité dès que l'écart des caractéristiques des deux phases est important.**

Évidemment, d'autres modèles existent :

- Hashin et Shtrikman (1963) : resserre les bornes de Reuss et Voigt
- Takayanagi (combinaison de Reuss et Voigt)
- Halpin - Tsai : pour le renforcement par des fibres courtes alignées
- Tsai - Pagano : fibres courtes
- Halpin - Kardos : extension de la précédente

### 15.3 Homogénéisation des matériaux poreux

Considérons à nouveau notre problème de Poisson avec conditions de Dirichlet pour un milieu poreux.  $\Omega$  est le domaine (borné) de  $\mathbb{R}^n$  qui contient  $\Omega_\varepsilon$  l'ensemble des trous périodiques. Nous avons donc :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(A(x)\nabla u) = f(x) & \text{pour } x \in \Omega \setminus \Omega_\varepsilon \\ u = 0 & \text{sur le contour extérieur } \Gamma = \partial\Omega \end{cases} \quad (15.18)$$

Sur le bord des trous, on peut imposer, soit des conditions de Dirichlet :

$$u = 0 \quad (15.19)$$

soit des conditions de Neumann :

$$n \cdot A(x/\varepsilon)\nabla u = 0 \quad (15.20)$$

On supposera encore que les coefficient sont 1-périodiques.

Cherchons des solutions dans le cas où l'on a des conditions de Neumann sur le bords des trous.

La forme choisie pour l'ansatz est le développement au second ordre suivant :

$$u^{(2)} = u_0(x, x/\varepsilon) + \varepsilon u_1(x, x/\varepsilon) + \varepsilon^2 u_2(x, x/\varepsilon) \quad (15.21)$$

où les  $u_i(x, x/\varepsilon)$  sont 1-périodiques en  $x/\varepsilon$  qui sera noté  $\xi$ .

On obtient un système du type :

$$\begin{cases} L_{\xi\xi}u_0 & = 0 \\ L_{\xi\xi}u_1 + L_{\xi x}u_0 + L_{x\xi}u_0 & = 0 \\ L_{\xi\xi}u_2 + L_{\xi x}u_1 + L_{x\xi}u_1 + L_{xx}u_0 & = f(x) \end{cases} \quad (15.22)$$

et les conditions de Neumann :

$$n \cdot A(\xi) [\varepsilon^{-1} \nabla_\xi u_0 + \varepsilon^0 (\nabla_\xi u_1 + \nabla_x u_0) + \varepsilon (\nabla_\xi u_2 + \nabla_x u_1) + \varepsilon^2 \nabla_x u_2] = 0 \quad (15.23)$$

d'où :

$$\begin{cases} n \cdot A(\xi) \nabla_\xi u_0 & = 0 \\ n \cdot A(\xi) (\nabla_\xi u_1 + \nabla_x u_0) & = 0 \\ n \cdot A(\xi) (\nabla_\xi u_2 + \nabla_x u_1) & = 0 \end{cases} \quad (15.24)$$

On peut prouver que si  $v_0$  est solution du problème, alors  $v_0 + \text{cte}$  aussi.

Des conditions d'existence de la solution il vient, tous calculs faits, la matrice des coefficients homogénéisés  $\hat{A}$  :

$$\hat{A} = [\hat{a}_{i,j}] \quad \text{avec} \quad \hat{a}_{i,j} = \int_{Q \setminus G_0} \sum_{k=1}^n \left( a_{ik} \frac{\partial N_j}{\partial \xi_k} + a_{ij} \right) d\xi \quad (15.25)$$

où  $G_0$  est un trou de la cellule élémentaire  $Q$ .

Le même type de calcul pourrait être mené avec les conditions de Dirichlet sur le bord des trous.

Cette homogénéisation des milieux poreux est valable pour l'acoustique comme pour la mécanique.

### 15.4 Homogénéisation des problèmes non stationnaires

Nous n'avons pas encore abordé de manière pratique les problèmes non stationnaires dans ce document, puisqu'ils se trouvent au chapitre 17.

Il est tout à fait possible d'utiliser les méthodes présentées dans ce chapitre aux problèmes dépendant du temps. Il n'y a pas vraiment de précautions supplémentaires à prendre, mais il faut adapter la forme de l'ansatz. Par exemple, l'ansatz du paragraphe précédent, pour le même type de problème non stationnaire serait :

$$u^{(2)} = u_0(x, \xi, t) + \varepsilon u_1(x, \xi, t) + \varepsilon^2 u_2(x, \xi, t) \quad (15.26)$$

avec  $u_i(x, \xi, t)$  1-périodique en  $\xi$ .

## 15.5 Changement de dimension et raccord de maillage

Les méthodes d'homogénéisation peuvent également être utilisées pour « changer (réduire) » la dimension d'un problème.

Considérons un problème qui se pose dans un domaine plan de longueur 1 et de largeur  $\pm\varepsilon/2$ . Alors, on peut considérer le comportement asymptotique de la solution lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Une fois cette solution asymptotique trouvée, le problème initial posé sur le pavé  $[0; 1] \times [-\varepsilon/2, +\varepsilon/2]$  est remplacé par le problème homogénéisé posé sur le segment  $[0; 1]$ . On a donc bien réduit la dimension du problème.

Ce genre de chose correspond typiquement à un modèle plaque ou coque (2D) utilisé à la place d'un modèle tridimensionnel (3D), ou encore mieux à un modèle barre ou poutre (1D).

Cela permet également de développer des éléments finis permettant de raccorder des maillages 3D à des maillages 2D ou à des maillages 1D, afin d'alléger les modèles numériques là où ils peuvent l'être.

En mécanique, de nombreuses théories de plaques ou poutres existent (voir la paragraphe 11.2). Elles sont généralement présentées de manières « physique », mais ne sont rien d'autre que des méthodes d'homogénéisation.

Libre à chacun de préférer une présentation plutôt mécanicienne ou plutôt mathématicienne, le résultat est finalement le même. Mais il nous semble, et c'est la motivation même à l'origine de ce document, que le fait de connaître les deux aide à mieux cerner à la fois les [hypothèses](#) sur lesquelles ces développements sont faits (et que l'on oublie parfois, ayant pour conséquence des résultats que l'on peut qualifier de surprenants) ainsi que les [potentialités](#) qui s'offrent à nous.



**Notes** — Ce chapitre va nous permettre de revenir sur les multiplicateurs de Lagrange dont nous avons déjà eu l'occasion de parler en plusieurs endroits de ce document, et dont l'intérêt doit être assez clair pour le lecteur à ce niveau du document.

Nous allons donc prendre un peu de temps pour mieux détailler leur utilisation, en particulier pour transformer une formulation variationnelle assortie d'un critère objectif à atteindre (le tout soumis à un certain nombre de contraintes) à l'aide de ce que l'on appelle le lagrangien, et que nous avons très brièvement évoqué au paragraphe 7.6).

Nous nous intéresserons aussi bien au cas où la fonction objectif est définie par des paramètres, qu'au cas de l'optimisation de forme.

Un problème d'optimisation nécessite de fournir :

- un **modèle** décrivant le problème : il s'agit généralement d'une équation aux dérivées partielles ;
- un **critère** (ou des critères) que l'on cherche à minimiser ou à maximiser (c'est la fonction objectif, ou fonction coût) ;
- un **ensemble admissible** de variables d'optimisation. Cet ensemble prend en compte les éventuelles **contraintes** que l'on impose aux variables.

Dans ce document, visant un public plutôt mécanicien, nous nous intéresserons essentiellement à de l'optimisation de « structures », et nous envisagerons les cas suivants :

- l'optimisation **paramétrique** où l'on dispose d'un nombre réduit de variables qui paramètrent la structure (par exemple l'épaisseur d'une plaque, l'orientation des plis d'un composite...). Nous verrons que des problèmes d'**homogénéisation** entrent dans ce cadre ;
- l'optimisation **géométrique** : il s'agit du cas où l'on souhaite faire varier toute ou partie de la forme des frontières, mais **sans** changer la topologie de la pièce, i.e. sans ajouter ou supprimer de « trous » ;
- l'optimisation **topologique** : c'est le cas le plus général d'optimisation de forme d'une structure. On cherche à trouver la meilleure forme possible sans restriction, i.e. quitte à modifier la topologie.

Si l'on s'en sort en 2D en remarquant qu'une topologie est caractérisée par le nombre de composantes connexes des bords, cela est plus compliqué en 3D où il faut en plus tenir compte du nombre d'anses ou de boucles de la structure.

Notre présentation de l'optimisation se concentrera sur l'**approche continue**, l'approche discrète n'étant que très brièvement mentionnée au paragraphe 16.1.7 afin de justifier notre choix de l'optimisation continue.

## Histoire

Le mot « optimiser » a pour origine latine « optimum » qui signifie le meilleur. Il s'agit donc de faire les choses de la meilleure façon qui soit, ou encore de concevoir la meilleure des solutions possibles en terme d'objectif prescrit (minimisation ou maximisation) et répondant à un ensemble de contraintes. L'optimisation commence avec le calcul des variations, même si des exemples plus anciens peuvent être trouvés.

Lié à la mythologie de la création de Carthage, résolu élégamment par la reine Didon, ce problème d'isopérimétrie, connu sous le nom de « **Problème de Didon** », est sans doute l'un des plus anciens problèmes d'optimisation dont on trouve trace.

Dans *Catoptrica*, Héron d'Alexandrie étudie la lumière et ses réflexions. Il énonce ainsi les principes de réflexion de la lumière, principes guidés par la règle selon laquelle la nature choisit toujours le chemin le plus court.

Cette étude de la propagation de la lumière s'est poursuivie par l'énoncé des principes variationnels par Pierre de Fermat et Christian Huygens. Le français énonce une règle fondamentale dans la recherche d'optimum : « Lorsqu'une grandeur, par exemple l'ordonnée d'une courbe, est parvenue à son maximum ou son minimum, dans une situation infiniment voisine, son accroissement ou sa diminution est nulle. »



Didon



Héron d'Alexandrie



Fermat

En juin 1696 dans *Acta Eruditorum*, Jean Bernoulli reprend un problème initialement posé par Galilée. Il s'agit du problème de la [courbe brachistochrone](#) que l'on peut formuler comme suit : quelle est la forme de courbe joignant deux points donnés dans un plan vertical, telle qu'un point matériel, soumis uniquement à la pesanteur et initialement sans vitesse, la parcourt en un temps minimal ? [Galilée pensait avoir résolu le problème et que la solution était un arc de cercle] Très rapidement, Leibniz propose une solution à Jean Bernoulli, mais sans qu'il reconnaisse la courbe en question. C'est Jean Bernoulli, qui dispose de deux solutions, qui reconnaît un arc de cycloïde commençant avec une tangente verticale. Tous deux décident de différer la publication de leurs solutions pour laisser à d'autres la possibilité d'aborder le problème. Celui-ci fut également résolu par Jacques Bernoulli, Newton, L'Hôpital et Tschirnhaus. Les méthodes imaginées pour sa résolution amenèrent à développer la branche des mathématiques qu'on appelle le [calcul des variations](#).



J. Bernoulli

Euler

Lagrange

La solution de Jean Bernoulli était fondée sur une analogie avec la propagation de la lumière et le principe de Fermat, ainsi que la loi de Descartes. Celle de Leibniz, était fondée sur l'approximation de la courbe par des lignes brisées et était le premier pas vers l'équation d'Euler-Lagrange. Le second pas a été accompli par Euler qui a ébauché, à partir de considérations géométriques, la méthode des « petites variations » ; vers le milieu du dix-huitième siècle Joseph-Louis Lagrange a donné sa forme actuelle à la solution d'Euler. Legendre a complété l'équation d'Euler-Lagrange, qui est une condition du premier ordre, par la condition du second ordre qui porte son nom.

Ces résultats ont été rassemblés par Lagrange dans sa *Théorie des fonctions analytiques*, parue en 1797, et dans laquelle on lit : « On peut les réduire à ce principe général. Lorsqu'une fonction de plusieurs variables doit être un maximum ou minimum, et qu'il y a entre ces variables une ou plusieurs équations, il suffira d'ajouter à la fonction proposée les fonctions, qui doivent être nulles, multipliées chacune par une quantité indéterminée, et de chercher ensuite le maximum ou minimum comme si les variables étaient indépendantes ; les équations que l'on trouvera combinées avec les équations données, serviront à déterminer toutes les inconnues ». La démarche est on ne peut plus claire, et c'est celle que nous suivrons Ces « quantités indéterminées » sont bien les multiplicateurs de Lagrange. Tout est dit !

Il revenait à Weierstrass, en 1879, de définir la notion d'extremum fort et d'établir la condition qui porte son nom. Les travaux de Jacobi et Hamilton, contemporains de ceux de Weierstrass, ont permis de donner sa forme définitive à la solution de Jacques Bernoulli déjà mentionnée. Les principaux résultats du calcul des variations classique avaient dès lors été obtenus.

La formulation intégrale quant à elle a été peaufinée à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle et au début du XX<sup>e</sup> siècle. Les économistes s'intéresseront également à ces théories. En 1939, Leonid Kantorovich invente la programmation linéaire. La formulation générale des problèmes de programmation linéaire quant à elle sera finalisée en 1947 par George Dantzig, qui invente par ailleurs la méthode du simplexe. On parle aussi de « recherche opérationnelle » pendant la seconde guerre mondiale, puis de programmation linéaire, et enfin de programmation non-linéaire. Le calcul des variations a connu un profond renouveau dans les années 1950 avec le développement de la théorie de la [commande optimale](#), sous l'impulsion de Lev Pontriaguine et Richard Bellman.

Le calcul des variations reste en mathématiques un domaine fort actif, et les mathématiciens qui ont contribué à son développement sont extrêmement nombreux.

## 16.1 Théorie de l'optimisation

### 16.1.1 Existence et unicité d'un minimum

**Définition 67 — Minima.** Soient  $V$  un espace de Banach et  $K \subset V$  un sous-ensemble non vide. Soit  $J : V \rightarrow \mathbb{R}$  le critère (i.e. la fonction objectif). On considère le problème :

$$\inf_{v \in K} J(v) \quad (16.1)$$

On dit que  $u$  est un **minimum local** de  $J$  sur  $K$  si :

$$u \in K \quad \text{et} \quad \exists \delta > 0, \forall v \in K, \|v - u\| < \delta \Rightarrow J(v) \geq J(u) \quad (16.2)$$

On dit que  $u$  est un **minimum global** de  $J$  sur  $K$  si :

$$u \in K \quad \text{et} \quad J(v) \geq J(u), \forall v \in K \quad (16.3)$$

**Définition 68 — Suite minimisante.** Une **suite minimisante** du critère  $J$  sur  $K$  est une suite  $(u^n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que :

$$u^n \in K, \forall n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} J(u^n) = \inf_{v \in K} J(v) \quad (16.4)$$

Par définition de l'infimum de  $J$  sur  $K$ , une telle suite existe toujours.

Évidemment, nous allons nous intéresser à l'optimisation en dimension finie, et pour cela, nous nous servirons du résultats suivant :

**Théorème 53 — Optimisation en dimension finie**  $V = \mathbb{R}^N$ . Soit  $K$  un ensemble fermé non vide de  $\mathbb{R}^N$ , et  $J$  une fonction continue sur  $K$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  vérifiant la propriété **infinie à l'infini** suivante :

$$\text{Quelle que soit la suite } (u^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ dans } K, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|u^n\| = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} J(u^n) = +\infty \quad (16.5)$$

alors il existe au moins un point de minimisation de  $J$  sur  $K$ .

De plus, on peut extraire de toute suite minimisante de  $J$  sur  $K$  une sous-suite convergeant vers un point de minimum sur  $K$ .

*Remarque.* Le théorème précédent n'est pas toujours vérifié en dimension infinie : une fonction continue sur un fermé borné n'atteint pas toujours son minimum.

Afin d'obtenir des résultats d'existence, on rajoute une hypothèse de convexité.

**Définition 69 — Convexité.** Un ensemble  $K \subset V$  est dit **convexe** si :

$$\forall x, y \in K, \forall \theta \in [0; 1], \text{ l'élément } (\theta x + (1 - \theta)y) \in K \quad (16.6)$$

Une fonction  $J$  définie sur un ensemble convexe non vide  $K$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$  est dite **convexe** sur  $K$  si et seulement si :

$$J(\theta x + (1 - \theta)y) \leq \theta J(x) + (1 - \theta)J(y), \quad \forall x, y \in K, \forall \theta \in [0; 1] \quad (16.7)$$

Si de plus l'inégalité précédente est stricte lorsque  $x \neq y$  et  $\theta \in ]0; 1[$ , alors la fonction  $J$  est dite **strictement convexe**.

On dispose alors du résultat suivant d'existence :

**Théorème 54 — Existence du minimum.** Soient  $K$  un convexe fermé non vide d'un espace de Banach réflexif  $V$ , et  $J$  une fonction convexe continue sur  $K$  qui est infinie à l'infini dans  $K$ , i.e. qui vérifie l'équation (16.5), alors il existe un minimum de  $J$  sur  $K$ .

*Remarques.* En toute généralité, ce théorème reste valable si  $V$  est le dual d'un espace de Banach séparable.

Le fait que  $V$  soit un espace de Banach réflexif correspond au fait que  $(V')' = V$  (avec  $V'$  le dual de  $V$ ).

Enfin et surtout, ce théorème est vrai dans tous les espaces que l'on rencontre habituellement dans nos problématiques, en particulier pour les espaces  $L^p(\Omega)$  pour  $1 < p \leq \infty$ .

**Théorème 55 — Unicité du minimum.** Si de plus la fonction  $J$  est strictement convexe, alors il existe au plus un point de minimum.

**Théorème 56** Si la fonction  $J$  est convexe sur un ensemble convexe  $K$ , alors tout point de minimum local de  $J$  sur  $K$  est un minimum global.

On voit donc tout l'intérêt de vérifier que notre fonction objectif est convexe. Un exemple d'un tel problème en mécanique est la minimisation de l'énergie.

### 16.1.2 Différentiabilité et optimalité

Nous avons déjà présenté au paragraphe 3.5, à l'équation (3.7), la différentielle. Si une fonction peut être approchée par une forme linéaire (la différentielle), alors on dit également qu'elle est **différentiable au sens de Fréchet**.

Réécrivons la définition de la différentielle dans le cas de la fonction objectif  $J$ .

**Définition 70 — Différentiabilité au sens de Fréchet.** Soit  $V$  un espace de Banach. On dit que la fonction  $J$ , définie au voisinage de  $u \in V$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , est **différentiable au sens de Fréchet** en  $u$  s'il existe une forme linéaire  $L \in V'$ , continue sur  $V$ , telle que :

$$J(u + v) = J(u) + L(v) + o(v), \quad \text{avec } \lim_{v \rightarrow 0} \frac{|o(v)|}{\|v\|} = 0 \quad (16.8)$$

On appelle  $L$  la différentielle (ou la dérivée, ou le gradient) de  $J$  en  $u$  que l'on note  $L = J'(u)$ , ou encore  $L(v) = \langle J'(u), v \rangle_{V',V}$ .

*Remarques.* Si  $V$  est un espace de Hilbert, alors le théorème de représentation de Riesz-Fréchet, donné par l'équation (7.5), permet d'identifier  $V$  à son dual  $V'$ . Il existe donc un unique  $p \in V$  tel que  $\langle p, v \rangle = L(v)$ . On note  $p = J'(u)$ .

Cette identification  $V = V'$  est utilisée si  $V = \mathbb{R}^N$  ou  $V = L^2(\Omega)$ .

En pratique, il est plus simple de calculer la **dérivée directionnelle** :

$$j'(0) = \langle J'(u), v \rangle_{V',V} \quad (16.9)$$

avec  $j(t) = J(u + tv)$ .

*Lien entre minimisation et formulation variationnelle.* Nous nous proposons de retrouver les résultats du paragraphe 7.6.

Soient  $a(\cdot, \cdot)$  une forme bilinéaire symétrique (continue coercitive) et  $f(\cdot)$  une forme linéaire continue. On considère la fonction  $J(u) = \frac{1}{2}a(u, u) - f(u)$ . On pose, comme ci-dessus,  $j(t) = J(u + tv)$ . On a donc :

$$j(t) = \frac{t^2}{2}a(v, v) + t(a(u, v) - f(v)) + J(u)$$

On dérive  $j$  par rapport à  $t$ , ce qui donne :

$$j'(t) = ta(v, v) + a(u, v) - f(v)$$

Par définition, on a  $j'(0) = \langle J'(u), v \rangle_{V',V}$ , donc :

$$\langle J'(u), v \rangle_{V',V} = a(u, v) - f(v)$$

La condition  $J'(u) = 0$  est une formulation variationnelle. On peut ainsi démontrer l'**équivalence entre la minimisation de l'énergie  $J(u)$  et la résolution de la formulation variationnelle**.

Ce résultat est fondamental (et souvent utilisé, donc à connaître). La question que l'on est en droit de se poser est alors de savoir si une telle équivalence tient toujours dans le cas général. La réponse est oui, et nous allons maintenant présenter ces résultats.