

# La rupture en mécanique

La mécanique de la rupture s'intéresse à la formation et à la propagation de fissures macroscopiques dans les structures, ce qui peut conduire à la séparation d'un corps en deux parties disjointes suite à une phase d'amorçage qui a vu le développement de microcavités, microfissures... mais les fissures peuvent aussi s'arrêter. Le mode de rupture peut être fragile (sans déformation plastique) ou ductile (avec déformation plastique).

La **résilience** est le rapport de l'énergie nécessaire pour rompre une pièce sur la section droite de matière rompue : elle caractérise l'énergie nécessaire pour produire la rupture. La résilience évolue avec la température (la température de transition caractérise le passage d'une mode de rupture à un autre : fragile ou ductile). Par ailleurs, le mode de rupture dépend de l'état de contrainte, en particulier de la *triaxialité des contraintes* (rapport du premier sur le second invariant, voir paragraphe 20.1.1) : **un matériau très plastique peut développer des ruptures fragiles ; un matériau sans plasticité ne présentera que des ruptures fragiles.**

En fonction du chargement et du matériau considéré :

- si le milieu est globalement plastique ou viscoplastique, on recourra à la mécanique non linéaire de la rupture, ou approche locale (description fine des contraintes et déformations en pointe de fissure à l'aide de modèles non linéaires) ;
- si la plasticité est absente ou très confinée, on utilisera la mécanique linéaire de la rupture.

## 21.1 Approches globale et locale

On distingue deux approches :

- **Approche globale** : le principal avantage est la relative simplicité d'application aux calculs éléments finis ou analytiques grâce à des *grandeurs scalaires représentant l'état de la fissure*, mais qui sont des approximations qui peuvent **manquer de pertinence** ;
- **Approche locale** : qui veut *modéliser finement le comportement réel*, mais se confronte à la **singularité des contraintes en fond de fissure**.

D'un point de vue numérique, les deux approches nécessitent des maillages fins en pointe de fissure afin de décrire le front de fissure et de permettre le calcul de la concentration des contraintes et déformations. Il faut ajouter également des modèles de comportement adaptés :

- l'approche globale nécessite un **maillage rayonnant** avec faces perpendiculaires au front de fissure ;
- alors que l'approche locale impose un **maillage fin** (calcul des contraintes), dont la taille est imposée ainsi que le type d'éléments.

Les fissures sont souvent trop complexes pour être parfaitement reproduites, ce qui impose des approximations du domaine et rend le choix du type d'éléments et leur taille encore plus critique.

La modélisation du comportement des matériaux est importante puisque directement liée au calcul des sollicitations en pointes de fissure, qui de plus apparaissent toujours dans des zones où les sollicitations sont complexes (fatigue, fluage, plasticité, endommagement...).

La *modélisation de l'avancée de la fissure* conduit à de très fortes non linéarités (avec des problèmes de convergence dans les algorithmes). De plus, la modélisation de l'avancée de fissure est liée à la discrétisation faite, donc est liée à la taille des éléments.

Les maillages automatiques sont souvent incapables de mener à bien leur tâche car il y a une incompatibilité entre les dimensions de la structure et la finesse nécessaire pour la fissure, et parce que les approches locale et globale ont des spécificités de maillage différentes et difficiles à prendre en compte. Il est donc souvent nécessaire de développer ses propres outils de maillage. De plus beaucoup de critères mis au point en 2D ne sont pas forcément valables en 3D.

Les problèmes actuels sur lesquels portent la recherche sont :

- la *propagation*, qui reste un domaine numérique difficile à aborder, en particulier les *critères de propagation* de fissure, surtout en 3D et/ou en dynamique.
- les *maillages* (voir ci-dessus), et même en amont, les *critères de maillage*, surtout en 3D.

On opte également pour une approche couplée essais / calculs :

- développement des paramètres pertinents en mécanique de la rupture ;
- développement d'outils analytiques et critères associés ;
- développement / validation des critères.

### Approches numériques des fissures

**Fissure droite sollicitée en mode I** Le trajet de propagation peut être connu *a priori*, et on trouve les méthodes de déboutonnage dans lesquelles la moitié de la structure est maillée et les nœuds situés sur la ligne de propagation sont libérés à mesure que la fissure avance. **Mais** il faut relâcher les nœuds progressivement en appliquant des forces nodales physiquement pertinentes.

#### Fissure courbe

- méthodes de remaillage : voir problème de maillage
- éléments d'interface : le trajet de la fissure est imposé par la discrétisation et il faut choisir la loi de décohesion à l'interface.

**Élément avec un nœud supplémentaire** au quart de ses côtés (ou ayant son nœud intermédiaire déplacé), qui permet d'intégrer exactement la singularité élastique, mais il reste nécessaire de disposer d'un outil spécifique de remaillage.

**Méthodes sans maillage** Elles permettent de s'affranchir des problèmes liés à la connaissance trop intime de la fissure ;

**Méthodes utilisant la partition de l'unité** Elles permettent de s'affranchir du maillage explicite de la fissure dont la description se fait au moyen d'éléments géométriques ou de fonctions de niveau pour le problème 3D.

Notons que les méthodes de remaillage peuvent introduire des singularités dans la discrétisation temporelle qui sont peu souvent mentionnées.

## 21.2 Mécanique linéaire de la rupture

### 21.2.1 Concentrations de contraintes des défauts

**Histoire**

On a souvent attribué aux défauts du matériau la cause principale de la rupture fragile. Sur la base d'une analyse des contraintes, Kirsch (1898) et Inglis (1913, cité au 8ème symposium de mécanique des roches en 1966) avaient déjà donné des solutions analytiques pour le calcul du facteur de concentration des contraintes pour des plaques infinies soumises à la traction avec respectivement un trou circulaire et un trou elliptique.

Mais le facteur de concentration des contraintes devenait infini dans le cas d'une fissure et cela signifiait que des contraintes externes très faibles suffisaient pour la rupture d'un solide fissuré, ce qui est en contradiction avec la réalité.

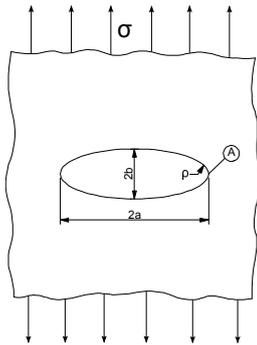


FIGURE 21.1: Concentration de contraintes autour d'une fissure : cas plan

Inglis, donc, en 1913, a montré l'effet de **concentration de contraintes**.

Considérons une plaque avec un trou elliptique, de grand axe  $2a$  et petit axe  $2b$ , dont la largeur  $\ell$  est très supérieure aux dimensions du trou (i.e.  $\ell \gg 2a$ ) et soumise à une contrainte nominale constante  $\sigma$ , comme illustré sur la figure 21.1.

La contrainte en pointe de fissure (i.e. au point A) est :

$$\sigma_A = \sigma \left( 1 + \frac{2a}{b} \right) \quad (21.1)$$

Le **facteur de concentration de contraintes**  $k_f$  est défini comme  $k_f = \sigma_A / \sigma$  :

- si  $a = b$ , alors  $k_f = 3$  ;
- si  $a \rightarrow \infty$ , Inglis propose  $\sigma_A = \sigma(1 + 2\sqrt{a/\rho})$ , où  $\rho = b^2/A$  est le rayon en pointe de fissure ;
- si  $a \gg b$ , alors  $\sigma_A = 2\sigma \sqrt{\frac{a}{\rho}}$ .

### 21.2.2 Équilibre énergétique

**Histoire**

La mécanique de la rupture a été inventée pendant la Première Guerre mondiale par l'ingénieur aéronautique anglais A. A. Griffith pour expliquer la rupture des matériaux fragiles.

Le travail de Griffith a été motivé par deux faits contradictoires :

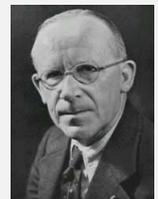
1. La contrainte nécessaire pour rompre un verre courant est d'environ 100 MPa ;
2. La contrainte théorique nécessaire à la rupture de liaisons atomiques est d'environ 10 000 MPa.

Une théorie était nécessaire pour concilier ces observations contradictoires. En outre, les expérimentations sur les fibres de verre que Griffith lui-même a mené suggèrent que la contrainte de rupture augmente d'autant plus que le diamètre des fibres est petit. Par conséquent il en déduit que le paramètre de résistance uniaxiale à la rupture  $R_r$ , utilisé jusqu'alors pour prédire les modes de défaillance dans le calcul des structures, ne pourrait pas être une valeur indépendante des propriétés du matériau.

Griffith suggère que la faiblesse de la résistance à la rupture observée dans ses expériences, ainsi que la dépendance de l'intensité de cette résistance, étaient dues à la présence de défauts microscopiques préexistants dans le matériau courant.

Pour vérifier l'hypothèse de défauts préexistants, Griffith a introduit une discontinuité artificielle dans ses échantillons expérimentaux. La discontinuité artificielle était une forme de fissure débouchante plus importante que les autres discontinuités supposées préexistantes dans l'échantillon.

Les expériences ont montré que le produit de la racine carrée de la longueur du défaut et de la contrainte à la rupture était à peu près constant.



Griffith

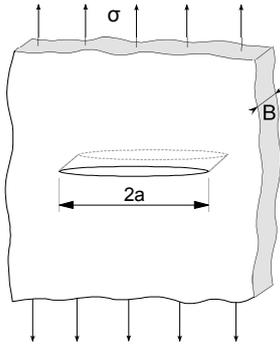


FIGURE 21.2: Concentration de contraintes autour d'une fissure : plaque mince

En 1920, Griffith considère le cas d'une plaque d'épaisseur  $B$  contenant une fissure de longueur  $2a$  et dont la largeur  $\ell$  est très supérieure aux dimensions de la fissure (i.e.  $\ell \gg 2a$ ) et à son épaisseur (i.e.  $\ell \gg B$ ), soumise à une contrainte nominale constante  $\sigma$  (voir figure 21.2).

Sous l'hypothèse de contrainte plane, Griffith montre que l'équilibre énergétique est :

$$\frac{dE}{dA} = \frac{d\Pi}{dA} + \frac{dW_s}{dA} = 0 \quad (21.2)$$

où  $A = 2aB$  est l'aire de la fissure,  $dA$  l'accroissement de fissure,  $E$  l'énergie totale,  $\Pi$  l'énergie potentielle et  $W_s$  l'énergie nécessaire pour la progression du défaut.

Griffith montre également que l'énergie potentielle  $\Pi$  est reliée à l'énergie potentielle de la plaque sans défaut par la relation :

$$\Pi = \Pi_0 - \left( \frac{\pi a \sigma^2}{E} \right) 2aB \quad (21.3)$$

et que  $W_s$  est donnée par :

$$W_s = 4aV\gamma_s \quad (21.4)$$

avec  $\gamma_s$  l'énergie de progression du défaut par unité de surface. L'équation d'équilibre énergétique de Griffith conduit à :

$$-\frac{d\Pi}{dA} = \frac{dW_s}{dA} \quad (21.5)$$

et donc :

$$\frac{\pi a \sigma^2}{E} = 2\gamma_s \quad (21.6)$$

Griffith obtient donc la **contrainte globale de rupture**  $\sigma_f$  pour les matériaux fragiles (et uniquement eux) :

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{2E\gamma_s}{\pi a}} \quad (21.7)$$

Ces travaux seront complétés par Irwin afin de prendre en compte le cas de la rupture ductile (pour les matériaux métalliques). Ce dernier obtient la contrainte globale de rupture :

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{2E(\gamma_s + \gamma_p)}{\pi a}} \quad (21.8)$$

où  $\gamma_p$  est l'énergie plastique de progression de fissure par unité de surface (i.e. en rupture fragile  $W_f = \gamma_s$ , et en rupture ductile  $W_f = \gamma_s + \gamma_p$ ).

### 21.2.3 Taux d'énergie libre $G$

#### Histoire

L'œuvre de Griffith a été largement ignorée par la communauté des ingénieurs jusqu'au début des années 1950. Les raisons semblent être que, pour les matériaux employés dans la réalisation des structures, le niveau réel d'énergie nécessaire pour causer la rupture est de plusieurs ordres de grandeur supérieur à l'énergie de surface correspondante et que, dans les matériaux de construction il y a toujours des déformations élastiques en fond de fissure ce qui rend l'hypothèse du milieu élastique linéaire avec contraintes infinie en pointe de la fissure tout à fait irréaliste.

La théorie de Griffith concorde parfaitement avec les données expérimentales sur des matériaux fragiles tels que le verre. Pour des matériaux ductiles tels que l'acier, l'énergie de surface prédite par la théorie de Griffith est souvent irréaliste. Un groupe de travail dirigé par G. R. Irwin à l'US Naval Research Laboratory, constitué durant la Seconde Guerre mondiale, a réalisé que la plasticité doit jouer un rôle important dans la rupture des matériaux ductiles.

Dans les matériaux ductiles (et même dans des matériaux qui semblent être fragiles), une zone plastique se développe en front de fissure. L'augmentation de la dimension de la zone plastique est fonction de l'augmentation de la charge jusqu'à ce que la fissure se propage libérant les contraintes en arrière du fond de fissure. Le cycle de chargement/libération de chargement plastique aux abords du front de fissure conduit à la dissipation d'énergie comme le ferait un traitement thermique de relaxation de contrainte. Par conséquent, un terme dissipatif doit être ajouté à la relation de l'équilibre énergétique tel qu'élaborée par Griffith pour les matériaux cassants. En termes physiques, de l'énergie supplémentaire est nécessaire pour que la propagation des fissures se produise dans les matériaux ductiles si on les compare aux matériaux fragiles.



Irwin

La stratégie d'Irwin a été de partitionner l'énergie en :

1. énergie stockée en déformation élastique (effet ressort) qui se libère lors de la propagation d'une fissure et ;
2. énergie dissipée qui comprend la dissipation plastique et l'énergie de surface (et toutes les autres forces dissipatives qui peuvent être au travail).

Poursuivant ses travaux, Irwin propose en 1957 une mesure énergétique  $G$  pour caractériser la rupture :

$$G = \frac{d\Pi}{dA} \quad (21.9)$$

En négligeant l'énergie cinétique, la puissance disponible pour ouvrir une fissure de surface  $A$  est égale à la variation d'énergie potentielle totale, résultat de la variation de l'énergie élastique stockée dans la structure et de la variation d'énergie liée aux forces extérieures. Cette contribution mécanique est appelée taux de restitution d'énergie.

$G$  est la quantité d'énergie permettant un accroissement de fissure de  $dA$  et est aussi appelé force d'expansion de fissure ou **taux de restitution d'énergie**.

En revenant au cas traité par Griffith, on obtient en contraintes planes :

$$G = \frac{\pi a \sigma^2}{E} \quad (21.10)$$

et ainsi, **une fissure va progresser si  $G$  atteint une valeur critique  $G_c$**  :

$$G_c = \frac{dW_s}{dA} = 2\gamma_s \quad (21.11)$$

où  $\gamma_s$  est l'énergie de progression du défaut par unité de surface.  $G_c$  est la mesure de ténacité à la rupture du matériau.

#### 21.2.4 Facteur d'intensité de contrainte $K$

**Histoire**

Une autre réalisation importante du groupe de travail dirigé par Irwin a été de trouver une méthode de calcul de la quantité d'énergie disponible pour une fracture au niveau de la contrainte asymptotique et les champs de déplacement autour d'un front de fissure dans un solide idéalement élastique.

C'est le facteur d'intensité de contrainte.

Dans le cas de structures où une fissure se retrouve sollicitée en traction, tel que cela est illustré à la figure 21.3a, on peut montrer que :

$$\sigma_{ij} = \frac{k}{\sqrt{r}} f_{ij}(\theta) + \sum_{m=0}^{\infty} A_m r^{m/2} g_{ij}(\theta) \quad (21.12)$$

où  $f_{ij}(\theta)$  est une fonction adimensionnelle, et  $(r, \theta)$  les coordonnées polaires en fond de fissure. En posant :

$$K = k \sqrt{2\pi} \quad (21.13)$$

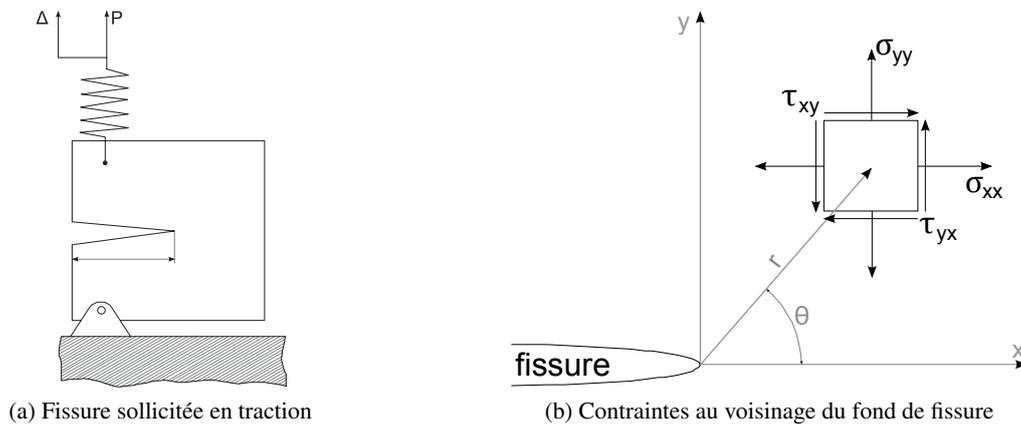


FIGURE 21.3: Calcul du facteur d'intensité de contrainte

Irwin montre en 1957 qu'au voisinage du fond de fissure l'état de contraintes décrit à la figure 21.3b conduit à :

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^{(I)} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{(I)}(\theta) \quad (21.14)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^{(II)} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{(II)}(\theta) \quad (21.15)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^{(III)} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{(III)}(\theta) \quad (21.16)$$

trois modes de chargements pouvant s'appliquer à une fissure. Ces trois modes sont donnés à la figure 21.4.

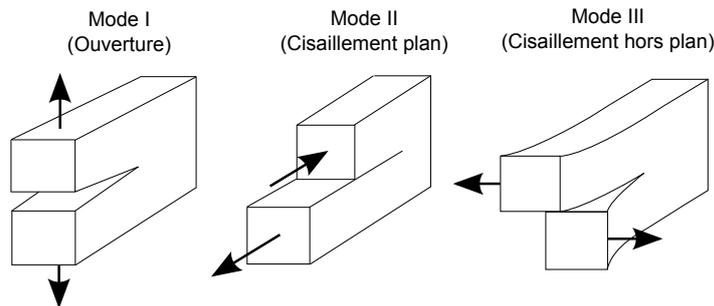


FIGURE 21.4: Modes de chargement d'une fissure

Pour un mode mixte général il vient :

$$\sigma_{ij}^{(total)} = \sigma_{ij}^{(I)} + \sigma_{ij}^{(II)} + \sigma_{ij}^{(III)} \quad (21.17)$$

La détermination de  $K$  peut se faire analytiquement uniquement pour des géométries simples. Pour des cas plus complexes, il faut le faire numériquement ou expérimentalement :

- par les contraintes : par exemple  $K_I$  sera pris égale à la valeur obtenue (post-traitée) de  $\sigma_{yy} \sqrt{2\pi r}$  en fond de fissure. Cette méthode simple et directe est peu précise (car on utilise les contraintes).
- par les déplacements :  $K_I$  est obtenu par  $\nu \sqrt{2\pi/r}$  en fond de fissure (obtenu par extrapolation),  $\nu$  étant le coefficient de Poisson. Cette méthode relativement simple nécessite de raffiner le maillage autour de la fissure et sa précision n'est pas excellente (environ 5%).

Attention : il ne faut pas confondre  $K_I$  avec  $K_t$  qui est le facteur de concentration de contrainte, sans dimension, et qui caractérise le rapport entre la contrainte normale maximale et la contrainte à l'infini au voisinage d'une entaille.

$$K_t = \frac{\sigma_{22max}}{\sigma_{\infty}} \quad (21.18)$$

Si l'on reprend le cas de la plaque plane semi-infinie traitée par Griffith, en exprimant le champ de contraintes au voisinage du fond de fissure et en faisant tendre  $\theta$  vers 0, on obtient des relations entre  $G$  et  $K$  :

$$G_I = \frac{K_I^2}{E} \quad \text{et en déformations plane :} \quad G_I = (1 - \nu^2) \frac{K_I^2}{E} \quad (21.19)$$

$$G_{II} = \frac{K_{II}^2}{E} \quad \text{et en déformations plane :} \quad G_{II} = (1 - \nu^2) \frac{K_{II}^2}{E} \quad (21.20)$$

$$G_{III} = (1 + \nu) \frac{K_{III}^2}{E} \quad (21.21)$$

### 21.2.5 Intégrale $J$

L'intégrale  $J$  (intégrale curviligne) représente un moyen de calculer le taux de restitution d'énergie de déformation ou de travail (énergie) par unité de surface de zone rompue au sein d'un matériau.

#### Histoire

Le concept théorique de l'intégrale  $J$  a été développé, de façon indépendante, en 1967 par Cherepanov et en 1968 par Rice. Ces travaux mettent en évidence que le contour délimitant la zone plastique aux abords du front de fissure (appelé  $J$ ) est indépendant du profil (contour) de la fissure.

Par la suite, des méthodes expérimentales ont été élaborées pour permettre la mesure des propriétés de rupture de critiques à partir d'échantillons à l'échelle du laboratoire pour des matériaux dans lesquels la dimension des prélèvements est insuffisante pour garantir la validité des hypothèses de la mécanique linéaire élastique de la rupture, et d'en déduire une valeur critique de l'énergie de rupture  $J_{1c}$ .

La quantité  $J_{1c}$  définit le point à partir duquel se forme une zone plastique dans le matériau au moment de la propagation et pour un mode de chargement.

L'intégrale  $J$  est équivalente au taux de restitution de l'énergie de déformation d'une fissure dans un solide soumis à une charge constante. Cela est vrai, dans des conditions quasi-statiques, tant pour les matériaux linéairement élastiques que pour les échantillons expérimentés à petite échelle en passe de céder en front de fissure.



Cherepanov

Rice

Considérons un solide linéaire élastique homogène bidimensionnel  $\Omega$  sur lequel agissent des forces  $T_k$ , comme illustré à la figure 21.5a. Les efforts de traction s'écrivent  $T_i = \sigma_{ij}n_j$  (où  $n$  est la normale sortante à  $\Gamma = \partial\Omega$ ). La densité d'énergie interne élastique est :

$$\omega = \int_0^{\varepsilon_{kl}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (21.22)$$

On travaille en l'absence de forces de volumes, d'où  $\sigma_{ij,i} = 0$ , et sous hypothèse de petites déformations, soit  $\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$ . Les intégrales curvilignes :

$$Q_j = \int_{\Gamma} (\omega n_j - T_k u_{k,j}) d\Gamma, \quad j, k = 1, 2, 3 \quad (21.23)$$

peuvent s'écrire :

$$Q_j = \int_{\Gamma} (\omega n_j - \sigma_{lk} n_l u_{k,j}) d\Gamma = \int_{\Omega} (\omega \delta_{jl} - \sigma_{lk} u_{k,j}) n_l d\Gamma \quad (21.24)$$

Le théorème de divergence puis quelques manipulations de l'opérateur permettent d'arriver au résultat suivant :  $Q_j = 0$ . De là, on en tire que la densité d'énergie interne élastique :

$$\omega = \int_0^{\varepsilon_{kl}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (21.25)$$

est indépendante du chemin dans l'espace des déformations. Le même type de calcul permet de montrer que la densité d'énergie complémentaire :

$$\omega = \int_0^{\sigma_{kl}} \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} \quad (21.26)$$

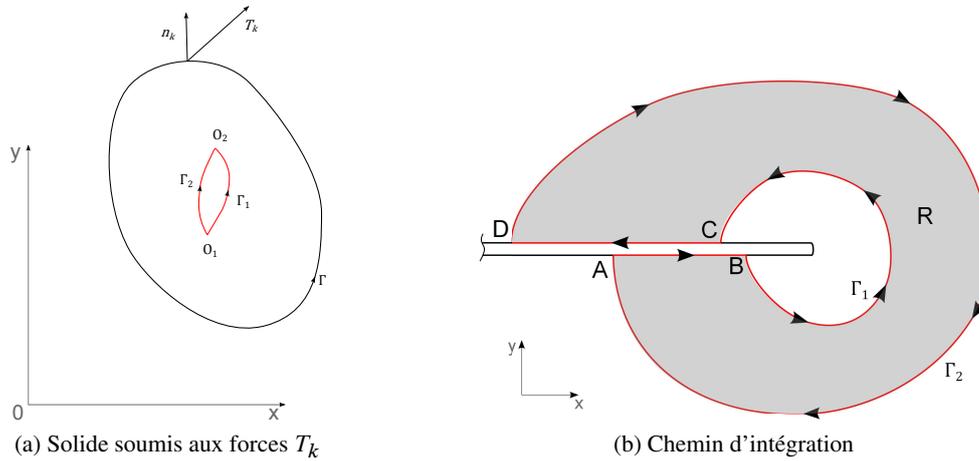


FIGURE 21.5: Calcul de l'intégrale  $J$

est indépendante du chemin dans l'espace des contraintes.

On considère toujours notre solide linéaire élastique homogène 2D sur lequel agissent des forces  $T_k$ . On définit l'intégrale  $J$  comme :

$$J = Q_1 = \int_{\Gamma} (\omega n_1 - T_k u_{k,1}) d\Gamma \quad (21.27)$$

D'après ce qui précède,  $J = 0$ , et donc

$$J_1 = \int_{\Gamma_1} \dots = J_2 = \int_{\Gamma_2} \dots \quad (21.28)$$

Considérons maintenant une entaille (fissure) dans une pièce. Alors, on a vu que l'intégrale  $J$  est nulle le long du chemin fermé  $AB\Gamma_1CD\Gamma_2A$  décrit à la figure 21.5b. Si sur  $AB$  et  $CD$  :  $dy = 0$ ,  $T_k = 0$ , alors  $J_{AB} = J_{CD} = 0$  et il vient :  $J_{\Gamma_1} = J_{\Gamma_2}$

Rice a également démontré que la valeur de l'intégrale  $J$  représente le taux de relaxation d'énergie pour la propagation des fissures planes, ou le taux de diminution d'énergie potentielle par rapport à l'accroissement de la fissure, i.e.  $J = G$ .

L'intégrale  $J$  a été développée pour résoudre des difficultés rencontrées dans le calcul des contraintes aux abords d'une fissure dans un matériau linéairement élastique. Rice a montré qu'en mode de chargement constant et sans atteindre l'adaptation plastique, l'intégrale  $J$  peut aussi être utilisée pour calculer le taux de relaxation d'énergie dans un matériau plastique.

## 21.3 Mécanique élastoplastique de la rupture

Nous avons déjà mentionné que l'analyse linéaire élastique en mécanique de la rupture ne s'applique que pour les matériaux fragiles. En effet, dans la plupart des cas, il existe des déformations plastiques au fond de fissure.

Si l'on suppose que cette zone plastique est présente dans un rayon  $R$  autour du fond de fissure, et qu'au delà, jusqu'à un rayon  $D$  la solution singulière est dominée par  $K$  ; alors  $R \ll D$  et l'on peut considérer que la solution est dominée par le facteur d'intensité de contrainte  $K$ .

Si  $R$  n'est pas petit devant  $D$ , alors il faut tenir compte de la plastification locale.

### 21.3.1 Détermination de la zone plastique

L'idée générale est de déterminer le lieu géométrique des points où le champ de contraintes atteint la limite élastique du matériau. Évidemment, en fonction du type de matériau, des hypothèses cinématiques... cette zone peut être plus ou moins grande.

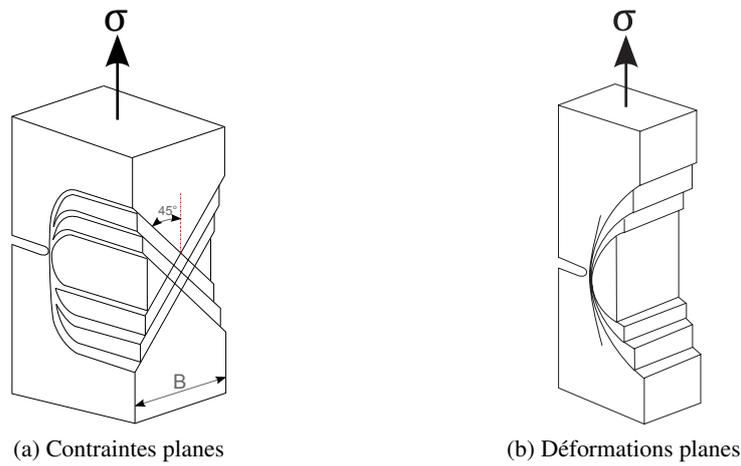


FIGURE 21.6: Zones de plastification d'une éprouvette entaillée en traction

Par exemple, pour un matériau isotrope et un critère de von Mises, la zone plastique en contraintes planes est neuf fois plus grande que celle en déformations planes.

Les chemins de propagation de la plasticité suivant l'épaisseur sont, dans les cas de contraintes et déformations planes, illustrés sur la figure 21.6.

### 21.3.2 Modèle d'Irwin

En 1960, Irwin a présenté un modèle de détermination de la zone plastique le long de l'axe de la fissure sous l'hypothèse d'un matériau élastique-plastique parfait, et en contraintes planes.

La zone plastique est donnée par :

$$r_p(0) = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_Y} \right)^2 \quad (21.29)$$

$\sigma_Y$  étant la limite élastique. Par conséquent, si  $0 < r < r_1$ ,  $\sigma_2 = \sigma_Y$  et lorsque  $r > r_1$ ,  $\sigma_2 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}$ . Comme  $\sigma_2 = \sigma_Y$  est constant pour  $r < r_1$ , il y a violation d'équilibre suivant l'axe  $y$ . La réduction de  $\sigma_2$  est compensée par  $\sigma_1$  d'où une augmentation de  $r_1$ . On obtient une zone plastique corrigée deux fois plus grande :

$$c = \frac{1}{\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_Y} \right)^2 \quad \text{en contraintes planes} \quad (21.30)$$

$$c = \frac{1}{3\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_Y} \right)^2 \quad \text{en déformations planes} \quad (21.31)$$

et à l'extrémité de la fissure, l'ouverture est  $\delta$  :

$$\delta = \frac{4}{\pi E} \frac{K_I^2}{\sigma_Y} \quad \text{en contraintes planes} \quad (21.32)$$

$$\delta = \frac{4(1-\nu^2)}{3\pi E} \frac{K_I^2}{\sigma_Y} \quad \text{en déformations planes} \quad (21.33)$$

### 21.3.3 Autres modèles

#### Modèle de Dugdale

Il s'agit d'un modèle valable pour les plaques très minces et constituées d'un matériau plastique parfait avec critère de Tresca, et où la plasticité est concentrée le long de l'axe de la fissure.

## Critère de rupture basé sur l'ouverture de fissure

Cette approche, introduite en 1961 par Wells et Cottrell, postule qu'il y a initiation de fissures en présence de plasticité, lorsque  $\delta = \delta_c$ .

On peut se servir du modèle d'Irwin ou de celui de Dugdale (Burdekin et Stone)...

## 21.4 Modélisation numérique de la rupture

### 21.4.1 Par la méthode des éléments finis

Dans la formulation primale des éléments finis (dite formulation en déplacements), le calcul fournit le champ de déplacement  $u$  via les déplacements nodaux  $\{q\}$ . Le champ de déformations  $\varepsilon$  est obtenu par dérivation des déplacements ; puis les contraintes sont obtenues via la loi de comportement :

$$\sigma = H\varepsilon \quad (21.34)$$

Si le matériau est élastoplastique, les contraintes seront calculées de façon incrémentale :

$$\Delta\sigma = H(\sigma, \varepsilon)\Delta\varepsilon \quad (21.35)$$

### Éléments finis singuliers

Certains éléments ou configurations entraînent des **singularités des déformations**. Ce phénomène, que l'on cherche généralement soigneusement à éviter, est en fait idéal en mécanique de la rupture. Forcer les éléments à se comporter en  $1/\sqrt{r}$  permet d'améliorer considérablement la solution même avec un maillage grossier. Cette singularité peut être obtenue en utilisant des éléments quadratiques et en déplaçant les nœuds des milieux des côtés de  $1/4$ , comme nous allons le voir.

Considérons l'élément de référence 2D carré quadratique à huit nœuds, souvent appelé Q8. Ses fonctions de forme  $N_i$  sont :

$$N_i = \left[ (1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i) - (1 - \xi^2)(1 + \eta\eta_i) - (1 - \eta^2)(1 + \xi\xi_i) \right] \frac{\xi_i^2 \eta_i^2}{4} \\ + (1 - \xi^2)(1 + \eta\eta_i)(1 - \xi_i^2) \frac{\eta_i^2}{2} + (1 - \eta^2)(1 + \xi\xi_i)(1 - \eta_i^2) \frac{\xi_i^2}{4} \quad (21.36)$$

Supposons maintenant que les nœuds 5 et 8 soient déplacés de  $1/4$  vers le nœud 1 (qui est l'origine du repère), comme illustré à la figure 21.7. Les fonctions de forme des nœuds 1, 2 et 5, obtenues pour  $\eta = -1$  sont :

$$N_1 = -\frac{1}{2}\xi(1 - \xi) \quad N_2 = \frac{1}{2}\xi(1 + \xi) \quad N_5 = (1 - \xi^2) \quad (21.37)$$

et le calcul de  $x(\xi, \eta)$  donne :

$$x = -\frac{1}{2}\xi(1 - \xi)x_1 + \frac{1}{2}\xi(1 + \xi)x_2 + (1 - \xi^2)x_5 \quad (21.38)$$

soit pour  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = L$  et  $x_5 = L/4$  :

$$x = \frac{1}{2}\xi(1 + \xi)L + (1 - \xi^2)\frac{L}{4} \quad \text{et par suite : } \xi = -1 + 2\sqrt{\frac{x}{L}} \quad (21.39)$$

Le terme du jacobien est  $\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{L}{2}(1 + \xi) = \sqrt{xL}$  qui s'annule pour  $x = 0$  conduisant à une **singularité des déformations**.

Si l'on calcule la déformation  $\varepsilon_x$  le long du côté 1-2, on trouve :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{2} \left( \frac{3}{\sqrt{xL}} - \frac{4}{L} \right) u_1 + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{\sqrt{xL}} + \frac{4}{L} \right) u_2 + \left( \frac{2}{\sqrt{xL}} - \frac{4}{L} \right) u_5 \quad (21.40)$$

qui est bien en  $1/\sqrt{x}$ .

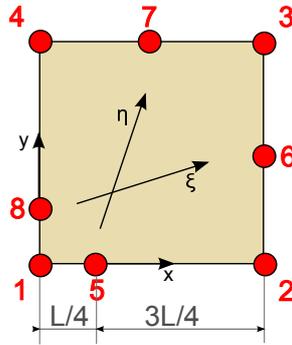


FIGURE 21.7: Position des nœuds de l'élément singulier de type Q8

### Techniques numériques de calcul de $K$ , $G$ et $J$

Il est possible d'effectuer un **post-traitement des contraintes** en créant un repère local centré sur la pointe de la fissure et en calculant la variable  $\sigma_{22}\sqrt{2\pi r}$  en chaque point de Gauss.

On peut également **post-traiter les déplacements** en les pondérant en fonction de l'état de contrainte théorique censé s'appliquer sur la fissure.

Le taux d'énergie libérée de Griffith peut être obtenu par la technique de **progression de fissure** dans laquelle on effectue deux calculs éléments finis : l'un pour une fissure de dimension  $a$ , l'autre pour une fissure de dimension  $a + \Delta a$ . En post-traitant l'énergie interne de toute la structure, on trouvera  $G = -\Delta\Pi/\Delta a$ . **Si cette méthode est plus précise que les deux précédentes, elle nécessite deux calculs éléments finis.**

Un **calcul par dérivation de la rigidité** peut aussi être effectué. Le but est encore une fois d'essayer de calculer  $G = -\Delta\Pi/\Delta a$ . L'énergie potentielle étant donnée, dans le cas de l'élasticité linéaire, par :

$$\Pi = \frac{1}{2}\langle q \rangle [K] \{q\} - \langle q \rangle \{F\} \quad (21.41)$$

Le calcul de  $G$  conduit à :

$$G = -\frac{1}{2}\langle q \rangle \frac{\partial [K]}{\partial a} \{q\} = -\frac{1}{2}\langle q \rangle \left( \sum_{i=1}^N \frac{\partial [k_i]}{\partial a} \right) \{q\} \quad (21.42)$$

**Cette méthode ne fait certes intervenir qu'un seul calcul EF, mais elle nécessite un développement de code de dérivation des matrices de rigidité.**

Si l'on a bien suivi, on a vu que **l'intégrale  $J$**  est un outil bien adapté : ne dépendant pas du contour, **cette intégrale n'est que peu sensible à la qualité du maillage**. La plupart des codes actuels permettent de calculer cette intégrale  $J$  sur un chemin défini par l'utilisateur.

### 21.4.2 Par les méthodes sans maillage

la méthode des éléments finis souffre des limitations suivantes :

- La création de maillage pour des problèmes industriels est une tâche qui reste difficile et coûteuse ;
- En général les champs de contraintes issus des éléments finis sont discontinus, donc peu précis (mais nous avons vu comment y remédier...);
- Distorsion des éléments en grandes déformations (ou alors régénération d'éléments, ce qui est une technique compliquée) ;
- Difficulté de prédiction des chemins de propagation de fissures (ne passant pas par les nœuds), doublée de la difficulté de remailler automatiquement pour le suivi de propagation de fissures
- Difficulté de représentation de l'effritement de matériau (impacts, explosifs,...).

Une idée « simple » est d'éliminer les éléments...

Une brève description de la méthode est donnée au paragraphe 23.2.

### 21.4.3 Par les éléments étendus

La méthode des éléments finis étendus (X-FEM) est rapidement présentée au paragraphe 23.4.

Les éléments finis classiques ayant du mal avec les fortes discontinuités, on procède à un enrichissement des éléments, dans les zones de discontinuités. L'enrichissement peut être interne (ou intrinsèque) ou externe (ou extrinsèque). Le principe consiste à augmenter la qualité de l'approximation des fonctions en ajoutant à l'approximation déjà présente des informations sur la solution exacte (et donc sur l'approximation du problème spécifique que l'on souhaite résoudre).

## 21.5 Fatigue et durée de vie

Les démarches présentées dans ce paragraphe sont applicables à de nombreux matériaux, mais nous nous placerons souvent dans le **cas des matériaux composites** qui est un peu plus complexe.

À l'heure actuelle, **la question des critères de propagation en dynamique de la rupture restent un sujet ouvert**. Bien que de nombreux essais de propagation dynamique de fissure aient été effectués ces dernières décennies, on se heurte à l'absence de méthodes numériques suffisamment fiables pour identifier les paramètres d'éventuels critères et comparer leur pertinence. Par ailleurs, de tels essais sont difficiles à mettre en œuvre.

Nous nous intéressons à des matériaux soumis à des sollicitations de faible intensité, qui individuellement ne présenteraient pas de danger, mais qui appliquées de façon cyclique conduisent à l'amorçage, puis à la propagation de fissures

Tant que les fissures restent suffisamment petites, il n'y a pas de risque de rupture. Le risque survient lorsque les microfissures (qui ne sont pas étudiées) grandissent (ou se connectent) pour former des macrofissures auxquelles on peut appliquer ce qui a été dit avant.

### 21.5.1 Courbe et limite de fatigue

#### Histoire

Fidèles à l'image industrielle que l'on a d'eux, les allemands se sont intéressés très tôt à la fatigue des matériaux et particulièrement des métaux..

Les premiers essais de fatigue répertoriés ont été réalisés par Wilhelm Albert en 1829, et concernaient les chaînes de puits de mine. Il est d'ailleurs connu pour avoir mis au point le câble toronné moderne. En effet, se rendant compte des faiblesses du métal et des cordages utilisés pour tracter les wagons de mine, il imagine un câble toronné plus résistant, le câble d'Albert : constitué d'une âme en chanvre faite de fils torsadés autour de laquelle six brins étaient ensuite toronnés autour d'une autre base de corde de chanvre dans des directions alternées pour plus de stabilité. Ce câble est utilisé dès 1834 est alors toronné à la main. Il faudra attendre 1837 pour que l'autrichien Wurm invente la machine à toronner.



Albert

Poncelet

Rankine

Wöhler

Le terme « fatigue » est utilisé pour la première fois en 1839 par Jean-Victor Poncelet.

En 1842, la rupture en fatigue d'un essieu provoque la catastrophe ferroviaire de Meudon, comme le montreront les travaux de William Rankine (il s'agit bien du même Rankine que vous avez rencontré dans vos cours de thermodynamique).

En 1852, August Wöhler est chargé par le ministre prussien du commerce de travailler sur les ruptures d'axes d'essieux de trains. Ces derniers étaient calculés alors avec les formules de RdM classiques (en statique), ce qui n'était visiblement pas adapté aux vues du nombre d'accidents de chemin de fer. Il expose ses travaux à l'exposition universelle de 1867 à Paris.

La fatigue oligocyclique (domaine à faible nombre de cycles dans lequel il y a interaction entre deux modes de ruine : la fatigue et l'instabilité ductile. Elle inclue donc la fatigue plastique) n'a été étudiée que plus récemment. On citera notamment les travaux de S.S. Manson et L.F. Coffin en 1954 dans lesquels ils expliquent la propagation de fissure en fatigue en termes de déformation plastique en pointe de fissure.

La courbe de Wöhler ou courbe S-N (pour Stress vs Number of cycles) présente l'évolution de la contrainte appliquée en fonction du nombre de cycles à rupture. Elle nécessite donc de faire les essais jusqu'à la rupture et demande donc un grand nombre d'éprouvettes. De plus, chaque essai peut être très long (puisque la rupture ne survient qu'après un grand nombre de cycles pour une contrainte faible : et même, en-deçà d'une certaine contrainte, la rupture ne peut survenir dans un temps raisonnable et l'on parle de durée de vie infinie).

Les essais réalisés sont généralement des essais simples consistant à soumettre chaque éprouvette à des cycles d'efforts périodiques. Ces cycles ont une amplitude de chargement constante qui fluctue autour d'une valeur moyenne fixée. La fin de l'essai correspond au nombre de cycles au bout duquel l'amorçage d'une fissure est observé. On représente le nombre de cycles en échelle logarithmique.

Le rapport entre de la contrainte minimum à la contrainte maximum du cycle périodique est noté  $R$ . Un rapport  $R = -1$  correspond à un cycle symétrique alterné,  $R = 0$  à un cycle répété et  $R > 0$  à des contraintes ondulés.

Classiquement, une courbe de Wöhler est tracée à partir d'essais de traction-compression purement alternés, à  $R = -1$ . Sur une telle courbe, on remarque 3 zones :

- une zone à bas nombre de cycles (<1000 cycles), à laquelle on ne s'intéresse guère en fatigue ;
- une zone dite de vie finie entre  $10^3$  et  $10^6$  cycles ;
- une zone dite de vie infinie au-delà de  $10^6$  cycles (ou plus selon les matériaux).

On n'hésitera pas, lorsque cela est possible, à réaliser ces courbes de fatigue pour différents ratios  $R$  (souvent  $R = 0$  ou  $R = 0, 1$ ), voire même pour différentes températures. Cela permet de vérifier ou d'affiner d'éventuelles inter/extra-polations.

Dans la suite, on note  $\sigma_a$  l'amplitude de la contrainte, et  $\sigma_m$  sa valeur moyenne. On rappelle que  $R_e$  ( $F_{ty}$  en anglais) est la limite d'élasticité et  $R_m$  ( $F_{tu}$  en anglais) la résistance à la traction. On appelle **limite d'endurance**,  $\sigma_D$ , la valeur de  $\sigma_a$  en dessous de laquelle la durée de vie vis-à-vis de la fatigue est réputée « infinie »,

Trois modèles sont classiquement utilisés pour représenter une courbe de Wöhler,  $\sigma_a = f(N)$ , de manière analytique :

- le **modèle de Basquin** : en 1910, O.H. Basquin propose de décrire la partie centrale de la courbe de Wöhler comme une droite dans un diagramme log-log, i.e. :

$$N\sigma_a^m = C \quad \text{ou} \quad \sigma_a = \left(\frac{C}{N}\right)^{1/m} \quad \text{ou} \quad \log(N) = \log(C) - m \log(\sigma) \quad (21.43)$$

où  $C$  et  $m$  sont des paramètres déterminés par régression linéaire dans l'échelle log-log.

- le **modèle de Strohmeier**, qui décrit la partie centrale ainsi que l'asymptote finale (prise en compte possible de la limite de fatigue des matériaux) qui correspond à la zone d'endurance illimitée (zone de sécurité) de la courbe de Wöhler :

$$N = \frac{C}{(\sigma_a - \sigma_D)^m} \quad \text{ou} \quad \sigma_a = \sigma_D + \left(\frac{C}{N}\right)^{1/m} \quad (21.44)$$

- le **modèle de Bastenaire** qui décrit également le comportement oligocyclique (zone de fatigue plastique du matériau), associé à des amplitudes de contrainte élevées, supérieures à la limite d'élasticité du matériau :

$$N = \frac{A}{\sigma_a - \sigma_D} \exp\left(-\left(\frac{\sigma_a - \sigma_D}{B}\right)^c\right) \quad (21.45)$$

Dans la pratique, on ne dispose pas de toutes les courbes de fatigue, notamment parce que l'on en a besoin à différentes températures, avec une contrainte moyenne définie, et pour un ratio  $R$  donné. On procède alors à des inter/extra-polations.

Certains **facteurs de correction** peuvent être pris en compte :

- $k_a$  : fini de surface. Un matériau plus résistant, moins ductile a plus de sensibilité à des défauts laissés en surface par le procédé de mise en forme.
- $k_b$  : influence de la grosseur de la pièce. Statistiquement, un plus grand volume de matériau sous contrainte contient un plus grand nombre d'imperfections. Ces imperfections peuvent engendrer une microfissure et initier une rupture par fatigue. Pour les sections non-circulaires, il faut calculer un diamètre équivalent.

- $k_c$  : fiabilité. Modifier la valeur moyenne de la contrainte pour l'adapter à la fiabilité que l'on veut accorder au calcul de la pièce. Fiabilité = 50% avec  $k_c = 1$ , à 90% avec  $k_c = 0,897$ , à 99% avec  $k_c = 0.814$ ...
- $k_d$  : effet de la température. L'effet de la température est très complexe. Les conséquences des températures élevées sont nombreuses (fluage, perte de rigidité à cause d'une chute du module d'Young, perte de dureté par réarrangement du réseau cristallin, perte de résistance ultime...
- $k_e$  : effet des concentrations de contraintes. On définit le coefficient de concentration de contrainte  $K_f$  par :

$$K_f = \frac{\text{limite d'endurance sans concentration}}{\text{limite d'endurance avec concentration}}$$

Ainsi, contrairement au cas statique où le coefficient de concentration de contrainte, noté  $K_t$  multiplie la contrainte,  $K_f$  divise la résistance. De plus, ce facteur  $K_f$  est corrigé par un facteur  $q$  appelé sensibilité à l'entaille. Finalement, on obtient :

$$k_e = \frac{1}{K_f} = \frac{1}{q(K_t - 1) + 1} \quad (21.46)$$

- $k_f$  : effets divers. Ils comprennent notamment les contraintes résiduelles...

La limite d'endurance est donc corrigée en la multipliant par l'ensemble de ces facteurs.

Tout ce qui a été dit correspond au cas d'un chargement renversé. Dans le cas d'un chargement non renversé, on utilise la méthode (le critère) de Goodman. Notons que ce diagramme de Goodman est modifié lorsque la contrainte alternée est faible et la contrainte moyenne élevée, car alors le critère d'écoulement doit être vérifié.

Dans un diagramme de Haigh, au lieu d'utiliser la droite de Goodman :

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_D} + \frac{\sigma_m}{R_m} = 1 \quad \text{soit} \quad \sigma_a = \sigma_D \left(1 - \frac{\sigma_m}{R_m}\right) \quad (21.47)$$

on peut utiliser la droite de Soderberg (plus sévère car on se limite à  $R_e$ ) :

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_D} + \frac{\sigma_m}{R_e} = 1 \quad \text{soit} \quad \sigma_a = \sigma_D \left(1 - \frac{\sigma_m}{R_e}\right) \quad (21.48)$$

ou encore la parabole de Gerber :

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_D} + \left(\frac{\sigma_m}{R_m}\right)^2 = 1 \quad \text{soit} \quad \sigma_a = \sigma_D \left(1 - \left(\frac{\sigma_m}{R_m}\right)^2\right) \quad (21.49)$$

Pour les aciers, la droite de Goodman est utilisée si  $R_m > 1300$  MPa, alors que la parabole de Gerber est préférée si  $R_m < 1200$  MPa.

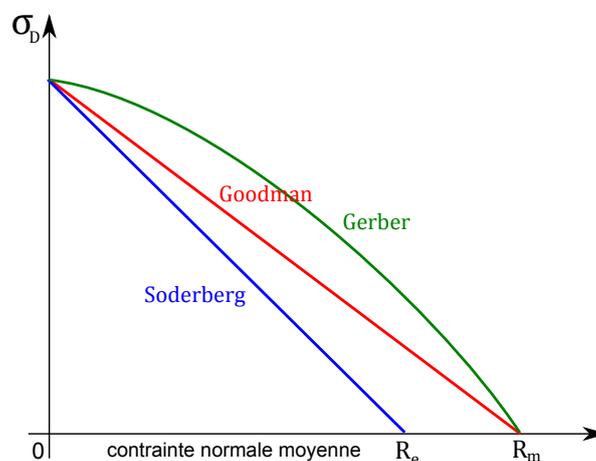


FIGURE 21.8: Comparaison des méthodes de Soderberg, Goodman et Gerber

De plus, pour un chargement combiné, il convient de prendre en compte une contrainte équivalente. Celle de von Mises (éventuellement signée) peut faire l'affaire dans certains cas, mais pas toujours. On peut également utiliser un critère multiaxial comme celui de Dang Van[113]... mais nous n'entrerons pas plus avant dans ces détails.

La courbe de Wöhler de beaucoup de CFRP et GFRP (CFRP = Carbon Fiber Reinforced Polymer = polymère à renfort fibre de carbone ; GFRP = Glass Fiber Reinforced Polymer = polymère à renfort fibre de verre) peut être décrite (entre  $10^3$  et  $10^6$  cycles) par une équation de la forme :

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_u} = 1 - b \log N \quad (21.50)$$

où  $\sigma_a$  et  $\sigma_u$  sont la contrainte appliquée et la résistance ultime,  $N$ , le nombre de cycle et  $b$ , une constante.

La plupart des données disponibles en fatigue montrent une dispersion élevée pour les courbes S-N. L'analyse statistique est alors inévitable.

D'après Talreja, il existe une limite de déformation en fatigue des composites, décrite comme la déformation minimale requise pour initier un mécanisme d'endommagement de faible énergie. Il suggère que pour les UD à base d'époxyde, cette limite est autour de 0.6%.

### 21.5.2 Cumul des dommages : principes de Miner

Les essais de fatigue en laboratoire consistent généralement à répéter une même sollicitation un grand nombre de fois. Dans ce cas, il est facile de définir un dommage : c'est le nombre de répétitions de l'événement endommageant depuis le début de l'essai.

Dans le cas général, il y a plusieurs événements endommageants, qui diffèrent les uns des autres par la grandeur des contraintes subies et par d'autres paramètres. En 1945 Miner a popularisé deux principes, initialement proposés par Palmgren en 1924, qui permettent de cumuler les dommages :

- le dommage causé par une occurrence d'un événement est mesuré par l'inverse  $1/N$  du nombre  $N$  de fois qu'il faut répéter cet événement pour mener la pièce de l'état neuf jusqu'à la défaillance ;
- le dommage causé par une succession d'événements est la somme des dommages causés par chacun d'eux.

Remarquons que ces deux principes sont cohérents. Si l'on suppose qu'un même événement cause toujours le même dommage, et si l'on impose comme unité de dommage le dommage qui conduit le système jusqu'à la défaillance, alors le premier principe est une conséquence du second.

Si  $1/N_A$  est le dommage de l'événement A et si  $n_A$  est le nombre d'occurrences de cet événement au cours d'un essai ou d'une utilisation du système alors le dommage total  $D$  causé par tous les événements A, relativement à une défaillance, est défini par l'équation de Miner :

$$D = \frac{n_A}{N_A} \quad (21.51)$$

Avec cette définition, le dommage cumulé est égal à 1 au moment où la pièce se rompt. Il faut nuancer cette affirmation : des pièces apparemment identiques soumises aux mêmes sollicitations se rompent en général au bout de nombres de cycles différents. **La dispersion des durées de vie peut être très importante.**

On trouve par expérience que les durées de vie peuvent varier d'un facteur 5 ou 10 pour des pièces issues d'un même lot de production. Il faut donc préciser davantage la formulation de la règle de Miner : s'il faut en moyenne  $N_A$  répétitions de l'événement A pour qu'une défaillance survienne, alors le dommage causé par une occurrence de A est mesuré par  $1/N_A$ .

Les principes de Miner permettent de définir le dommage causé par un événement et affirment que pour cumuler les dommages, il suffit de les additionner. Ils imposent en outre le choix de l'unité de dommage. Remarquons qu'il est toujours possible de changer d'unité. Par exemple, lorsqu'il n'y a un seul événement endommageant, il est naturel de choisir comme unité de dommage le dommage causé par une occurrence de cet événement.

Les principes de Miner permettent d'établir l'égalité des endommagements produits par des événements de natures différentes. En particulier, ils permettent de préciser quand un petit nombre d'événements de grande amplitude produit un endommagement égal à un grand nombre d'événements de faible amplitude. Cela revêt une grande importance lorsqu'il faut définir un essai aussi court que possible.

### 21.5.3 Propagation : loi de Paris

Pour une singularité caractérisée par sa dimension  $a$  et sa forme, on étudie les courbes

$$\frac{da}{dN - \Delta K} \quad (21.52)$$

où  $N$  est le nombre de cycles et  $\Delta K$  la variation du facteur d'intensité de contrainte sur un cycle.

Ces courbes, dont la partie centrale est linéaire, présentent deux asymptotes pour  $da/dN$  et  $\Delta K$  faibles et pour  $da/dN$  et  $\Delta K$  grands. La valeur minimale vers laquelle tend la courbe est  $\Delta K_S$ , la valeur maximale  $\Delta K_{IC}$ .  $K_{IC}$  est la valeur critique qui correspond à une rupture instantanée par dépassement de la valeur critique de  $K$  sous chargement monotone.  $K_S$  est la valeur en dessous de laquelle il n'y a pas de propagation de fissure, c'est un facteur d'intensité de contrainte seuil.

Concernant la partie linéaire de ces courbes dans un diagramme log-log, cela permet de les modéliser par la loi de Paris (la plus simple des lois de propagation) qui définit la vitesse de propagation par cycle comme une fonction puissance de l'amplitude du facteur d'intensité de contrainte :

$$\frac{da}{dN} = C \Delta K^m \quad (21.53)$$

où  $C$  et  $m$  sont des coefficients dépendant du matériau.

La dimension critique de la singularité  $a_c$  est liée à la caractéristique du matériau  $K_{IC}$ , la ténacité, elle entraîne la rupture fragile de la structure :

$$K_{IC} = F \sigma \sqrt{\pi a_c} \quad (21.54)$$

où  $\sigma$  est une contrainte effective dans une direction normale à la fissure et  $F$  un facteur de forme.

### 21.5.4 Prédiction de la durée de vie

Une fois un **indicateur d'endommagement choisi** (généralement la rigidité ou la résistance résiduelle, la première ayant l'avantage non négligeable de pouvoir être mesurée de manière non destructive), on utilise :

**Théories empiriques :** Les courbes S-N sont utilisées pour caractériser le comportement en fatigue du composite. Un nombre important d'essais est nécessaire pour chaque configuration spécifique ;

**Théories de dégradation de résistance résiduelle :** Elles sont basées sur l'hypothèse qu'un changement de la résistance résiduelle  $\sigma_r$  en fonction du nombre de cycles  $n$  est lié à la contrainte maximale appliquée  $\sigma_a$ . On a généralement une relation de la forme :

$$\frac{d\sigma_r}{dn} = -\frac{1}{\gamma} f \sigma_a^\gamma \sigma_r^{1-\gamma} \quad (21.55)$$

où  $\gamma$  et  $f$  sont des paramètres indépendants des contraintes mais qui peuvent dépendre de la température, de l'humidité, de la fréquence. Souvent, on suppose une distribution de Weibull<sup>1</sup> de la résistance des composites. La rupture par fatigue survient lorsque la résistance résiduelle du composite est atteinte par la contrainte appliquée.

1. En théorie des probabilités, la loi de Weibull, est une loi de probabilité continue. Avec deux paramètres sa densité de probabilité est :

$$f(x; k, \lambda) = (k/\lambda)(x/\lambda)^{(k-1)} e^{-(x/\lambda)^k}$$

où  $k > 0$  est le paramètre de forme et  $\lambda > 0$  le paramètre d'échelle de la distribution. Sa fonction de répartition est définie par  $F(x; k, \lambda) = 1 - e^{-(x/\lambda)^k}$ , où, ici encore,  $x > 0$ .

Une version généralisée à trois paramètres existe.

La distribution de Weibull est souvent utilisée dans le domaine de l'analyse de la durée de vie, grâce à sa flexibilité, car elle permet de représenter au moins approximativement une infinité de lois de probabilité.

Par exemple, si le taux de panne diminue au cours du temps alors,  $k < 1$ . Si le taux de panne est constant dans le temps alors,  $k = 1$ . Si le taux de panne augmente avec le temps alors,  $k > 1$ . La compréhension du taux de panne peut fournir une indication au sujet de la cause des pannes :

- un taux de panne décroissant relève d'une « mortalité infantile ». Ainsi, les éléments défectueux tombent en panne rapidement, et le taux de panne diminue au cours du temps, quand les éléments fragiles sortent de la population ;

**Théories de perte de rigidité :** Ce sont des généralisations du cas précédent.

Les plis les plus désorientés par rapport au chargement (éléments sous-critiques) commencent à s'endommager (ce qui est caractérisé par une perte de rigidité), ce qui cause une redistribution des contraintes au niveau local. La résistance des éléments critiques (les plis orientés dans le sens de la charge) est gouvernée par les équations de dégradation de résistance. Ces deux phénomènes (perte de rigidité des éléments sous-critiques et perte de résistance des éléments critiques) contribuent à la définition de la résistance résiduelle et donc à la durée de vie.

**Théories d'endommagement cumulatif :** Elles sont basées sur une observation expérimentale soignée et sur une simulation de l'accumulation de l'endommagement du sous-lamina. Il manque toutefois un critère de rupture des laminés sous chargement de fatigue tension-tension pour ces théories.

**Théories d'endommagement continu :** L'endommagement est pris en compte par un paramètre  $D$  sous la forme :

$$\hat{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - D} \quad (21.56)$$

où  $\sigma$  et  $\hat{\sigma}$  sont la contrainte imposée et la contrainte effective après endommagement. L'avantage de cette approche est d'éviter la prise en compte de l'endommagement microstructural parfois difficile à modéliser et mesurer.

Notons également que **pour obtenir les informations nécessaires, de nombreux essais doivent être menés**, surtout parce que de nombreux facteurs conditionnent la fatigue des FRP (FRP = Fibre-reinforced plastic = plastique à renfort de fibres) :

- **fréquence** : un échauffement du matériau avec la fréquence de sollicitation est constaté. Il faudrait modifier ses lois de comportement.
- **amplitude** : une sollicitation de grande amplitude suivie d'une sollicitation de faible amplitude conduit à une durée de vie inférieure au cas où l'ordre des sollicitations est inversé.
- $R = -1$  (rapport entre charge positive et négative dans le cyclage) : ce cas est très défavorable pour les FRP car leur tenue en compression est moins bonne qu'en traction (flambage des fibres et splitting...);
- **la forme du signal** a une influence qui serait à considérer.
- **séquence d'empilement** : les composites sont censés être conçus pour soutenir la charge dans le sens des fibres. Dans le cas de sollicitations complexes, les plis les moins bien orientés par rapport à la charge cèdent en premier...
- **humidité** ;
- **vieillesse naturelle**...
- ...

**C'est un problème de structure car il y a couplage entre les modes d'endommagement à différentes échelles.**

Dans les cas simples, on peut utiliser un critère cumulatif de Miner ou des lois d'équivalence. Attention toutefois, l'« équivalence » entre temps, fréquence, température... ne « va pas de soi ». Il s'agit d'hypothèses, parfois restrictives, et toujours limitées à une plage d'utilisation. On les manipulera donc avec intérêt (par exemple pour la conception d'essais accélérés) et avec prudence.

### 21.5.5 Sur la fatigue des composites

Les remarques suivantes peuvent être faites, quant à la poursuite de travaux de recherche sur le sujet :

- Bien que la conception orientée par la rigidité pour les GFRP soit peu concernée par la contrainte de rupture, le fluage est un aspect fondamental de leur conception.
- 
- un taux de panne constant suggère que les pannes sont liées à une cause stationnaire ;
  - un taux de panne croissant suggère une « usure ou un problème de fiabilité » : les éléments ont de plus en plus de chances de tomber en panne quand le temps passe.

On dit que la courbe de taux de panne est en forme de baignoire. Les fabricants et distributeurs ont tout intérêt à bien maîtriser ces informations par type de produits afin d'adapter : 1) les durées de garantie (gratuites ou payantes), et 2) le planning d'entretien.

- Les effets de synergie entre le fluage et les autres types de chargement est un domaine à explorer.
- Peu de données de fatigue sont disponibles pour le domaine  $10^7 - 10^8$  cycles (Les japonais ont des essais en cours).
- L'effet d'échelle sur les performance n'est pas clair. En particulier, il n'est toujours pas sûr qu'un tel effet existe.
- La représentativité des éprouvettes ou des tests accélérés restent des problèmes épineux.
- Les composites hybrides doivent être étudiés.
- La dégradation des GFRP à haute température n'est pas bien comprise.  
Toutefois, Tsotsis et Lee notent, suite à l'étude de deux résines particulières, que le comportement à long terme des composites soumis à des températures élevées est contrôlé par les dégradations d'oxydation et thermique.
- Les composites épais ne sont que très peu étudiés, tout comme l'influence de l'épaisseur en général. Pourtant, des mécanismes de ruptures suivant l'épaisseur peuvent sans doute apparaître de manières différentes de celles des laminés plus fins : effet de taille ou interaction de mécanismes.



# Stochastique : prise en compte de la variabilité

**Notes** — Certains diront que c'est enfin dans ce chapitre que nous traitons de la réalité physique... c'est un point de vue. En effet, rien n'est jamais connu de manière parfaite.

L'aléa traduit aussi bien l'impossibilité d'une description déterministe exhaustive que l'irrégularité de tout phénomène observé. Les modèles déterministes ne sont finalement que des approximations des problèmes physiques correspondants, tout comme les modèles linéaires ne sont que des approximations de comportements réels non-linéaires par nature.

Nous nous restreindrons dans le nombre de formulations afin de ne présenter que ce qui nous semble aujourd'hui le plus pertinent.

## 22.1 Introduction

Dans la manière traditionnelle, encore appelée approche déterministe, la conception des structures repose sur des paramètres tels que les dimensions, la résistance des matériaux et le chargement, tous caractérisés par une valeur constante, i.e. leur moyenne. Sur la base de ces constantes on utilise un modèle mathématique du comportement pour déterminer si la structure est sûre ou non. Afin d'améliorer encore la sécurité, les variables structurelles sont alors remplacées par leur pire cas. Cette philosophie de conception se révèle trop coûteuse d'un point de vue économique car on se place dans le cas où tous les paramètres sont à leur pire valeur en même temps.

Il est bien connu que, par exemple, la résistance varie d'un élément structurel à l'autre, de sorte que cette résistance ne peut être décrite par une unique valeur. De plus, il est parfois nécessaire de prendre en compte des variations temporelles. Ces mêmes variations existent également pour les dimensions et le chargement. Cela est particulièrement vrai pour les chargements naturels comme la houle, le vent et les séismes, qu'il est difficile de prendre en compte de manière déterministe. Il faut en outre garder en tête qu'une certaine incertitude existe également dans le choix des modèles mathématiques utilisés pour l'analyse de la structure.

Le but d'utiliser une approche probabiliste plutôt qu'une simple approche déterministe est d'essayer de prendre en compte les incertitudes mentionnées ci-dessus afin de réaliser une analyse plus réaliste de la sûreté de la structure.

Dans ce chapitre, nous considérerons le problème de formulation classique suivant :

$$au = f \quad (22.1)$$

Jusqu'à présent, nous nous sommes contenté du cas où  $a$  est un opérateur déterministe,  $f$  l'excitation déterministe et  $u$  la réponse déterministe. Nous allons dans ce chapitre nous intéresser au cas où  $f$  est une excitation aléatoire et  $a$  un opérateur éventuellement aléatoire. Il s'en suit que la réponse du système  $u$  est elle-aussi aléatoire.

La manipulation d'équations stochastiques introduit deux difficultés :

- premièrement, les propriétés aléatoires du système doivent être modélisées « correctement » comme variables ou processus aléatoires, avec une distribution de probabilité réaliste ;
- deuxièmement, il faut être capable de résoudre le système différentiel ainsi obtenu, et la réponse obtenue doit pouvoir être décrite par ses moments statistiques.

Enfin, la relation entre éléments finis et probabilité recouvre deux aspects :

- d'une part le calcul des moments statistiques de la réponse autour de sa moyenne (essentiellement l'écart-type) ;
- d'autre part les méthodes de fiabilité, par lesquelles on cherche à calculer une probabilité de défaillance associée à un critère dont les arguments dépendent du résultat d'un calcul par éléments finis.

## Histoire

Les séries de fonctions, apparues à la fin du XVII<sup>e</sup> siècle, et particulièrement les séries de Taylor (voir historique du paragraphe A.1.1), sont aujourd'hui un outil indispensable, permettant notamment d'approcher une fonction de manière facilement exploitable. C'est pourquoi la manière la plus naturelle d'appréhender le traitement de l'équation (22.1) a été de procéder à un développement en série.

Dès le début du XVIII<sup>e</sup> siècle, la [théorie des perturbations](#) a été utilisée par les astronomes pour les besoins de la mécanique céleste : en effet, les équations différentielles décrivant un système de  $n$  corps en interaction gravitationnelle n'a pas de solution exacte générale pour  $n \geq 3$ . Cet aspect de la théorie des perturbations a été synthétisé à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle dans les ouvrages classiques de Laplace, Tisserand et Poincaré, avant de connaître de nouveaux développements dans la seconde moitié du XX<sup>e</sup> siècle avec l'avènement en 1954 de la « théorie KAM » (théorème de mécanique classique i.e. non relativiste et non quantique, mettant en défaut l'hypothèse ergodique de Boltzmann), du nom de ses trois concepteurs : Kolmogorov, Arnold et Moser. La méthode a par ailleurs été abondamment utilisée au XX<sup>e</sup> siècle pour les besoins de la physique quantique, d'abord en mécanique quantique non relativiste, puis en théorie quantique des champs.



Kolmogorov      Arnold      Moser

C'est encore cette même méthode de perturbation qui est la plus ancienne et la plus utilisée en ingénierie pour analyser les systèmes aléatoires (pas seulement aléatoires, voir la présentation de la méthode de réanalyse au paragraphe 13.6 qui est une méthode de perturbation). Bien que les méthodes mathématiques sous-jacentes soient très simples, cela ne signifie nullement que leur validité aille de soi : on fait un développement de Taylor de chaque quantité aléatoire autour de sa moyenne, les termes causant l'instabilité de la solution approchée étant d'ordres supérieurs. Toutefois, dans la pratique, il n'est pas possible d'aller au delà de l'ordre un ou deux. Cela réduit la portée des applications de la méthode aux cas des **petits aléas, i.e. de petites fluctuations autour d'une valeur moyenne**. Sans efforts inconsidérés, **ces méthodes ne fournissent pas de statistiques d'ordres élevés**.

Il a donc bien évidemment été essayé d'améliorer cette méthode afin d'obtenir des statistiques d'ordres plus élevés. Une méthode, peu connue et peu utilisée, pour atteindre ce but est la [hierarchy closure approximation](#). Il s'agit d'exprimer les moments d'ordres élevés en fonctions de moments d'ordres moins élevés. Si l'on considère que l'opérateur  $a$  de l'équation (22.1) peut être décomposé en une partie déterministe  $\bar{a}$  et une partie aléatoire  $\tilde{a}$ , cette équation se met sous la forme :

$$(\bar{a} + \tilde{a})u = f \tag{22.2}$$

qui se résout en :

$$u = \bar{a}^{-1} f - \bar{a}^{-1} \tilde{a} u \tag{22.3}$$

En appliquant à cette dernière équation l'opérateur  $\tilde{a}$ , puis en réinjectant le résultat dans l'équation précédente, il vient :

$$u = \bar{a}^{-1} f - \bar{a}^{-1} \tilde{a} \bar{a}^{-1} f + \bar{a}^{-1} \tilde{a} \bar{a}^{-1} \tilde{a} u \tag{22.4}$$

et on peut poursuivre ainsi, si on le souhaite. Cela ne peut néanmoins être fait que si :

$$E[(\bar{a}^{-1} \tilde{a})^n u] = E[(\bar{a}^{-1} \tilde{a})^n] E[u] \tag{22.5}$$

où  $E[.]$  est la moyenne (espérance mathématique).

Le découplage effectué par l'équation (22.5) n'a pas de base rigoureuse et est souvent justifié intuitivement par un argument d'indépendance locale. **On aboutit de toutes façons à une formulation très complexes pour les moments d'ordres élevés**, de sorte que cette méthode n'est utilisée en pratique elle aussi que pour le cas des petites fluctuations.