

La méthode des éléments finis

Notes — Une fois le travail précédent accompli, i.e. une fois que l'on dispose d'une formulation faible, « il n'y a plus qu'à » calculer la solution ! La méthode des éléments finis est l'un des outils numérique développé pour cela.

La méthode des éléments finis se propose de mettre en place, sur la base de formulations faibles, un algorithme discret (discrétisation) permettant de rechercher une solution approchée d'un problème aux dérivées partielles sur un domaine compact avec conditions aux bords et/ou dans l'intérieur du compact.

Il s'agit donc de répondre aux questions d'existence et d'unicité de la solution, de stabilité et de convergence des méthodes numériques, ainsi que d'apprécier l'erreur entre la solution exacte et la solution approchée (indicateurs et estimateurs d'erreur, *a priori* et *a posteriori*).

10.1 Introduction

Les chapitres des parties précédentes ont eu pour but de nous permettre de décrire un problème physique à partir d'équations aux dérivées partielles, mais à aucun moment nous n'avons encore parlé de la manière de résoudre ces équations (que ce soit la formulation forte ou la faible). Ce sera le but de ce chapitre, dans lequel la mise en œuvre de la méthode des éléments finis va être exposée.

Nous avons vu dans la partie précédente, comment passer d'une formulation forte à une formulation faible. Dans de nombreux cas, nous avons montré qu'il y a équivalence (existence et unicité de la solution) entre l'étude des deux formulations. Il faut toutefois bien garder en tête que dans certains cas, l'équivalence entre les deux formulations n'est pas évidente.

Une condition qui n'a pas été vraiment évoquée jusque là est le cas où le bord du domaine n'est pas suffisamment régulier, par exemple s'il possède des points singuliers (par exemple point d'inflexion ou de rebroussement, ou dans le cas des fissures en MMC).

Cela peut également se produire si l'on ne peut pas assurer que la fonction f (celle agissant dans tout le domaine) n'est pas suffisamment dérivable. Comme en général on suppose dans les problèmes physiques que la solution est C^∞ , on n'est pas confronté à ce genre de problème.

L'idée de la méthode des éléments finis est de **décomposer** (on dit discrétiser) le domaine Ω en un certain nombre de sous-domaines (les **éléments**). Les éléments **recouvrent l'intégralité du domaine** (de la frontière pour les éléments de frontière qui est une autre méthode) et **sans chevauchement entre eux** (les éléments peuvent se chevaucher dans la méthode des volumes finis). De plus, on va chercher la fonction solution u comme étant interpolée par des « bouts » de solutions définis sur chaque élément.

Le problème étant interpolé sur les éléments, on se doute que le **nombre d'éléments** va jouer sur la qualité de cette approximation de la solution. On se doute également que, comme on résout un problème comportant des dérivées, c'est plutôt dans les endroits où la solution **va varier vite** qu'il sera nécessaire de « resserrer » le maillage.

On veillera également à ce que les éléments ne soient pas trop **distordus**. Des critères dits « de forme » existent. Néanmoins, dans certains cas il est possible de violer allègrement ces critères tout en obtenant une très bonne approximation de la solution.

C'est l'ingénieur américain Ray William Clough qui, semble-t-il, a utilisé le terme de méthode des éléments finis le premier dans un article de 1960 intitulé *The Finite Element Method in Plane Stress Analysis*. Le mot rigidité (Stiffness) apparaissait dans le titre de son article *Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures* datant de 1956 (et coécrit avec M. Turner, H. C. Martin et L. J. Topp).

Si on veut replacer très brièvement cela dans un contexte plus global, on peut dire que l'analyse des structures est née vers 1850.

La RdM, recourant au calcul manuel, était développée par Maxwell, Castigliano, Mohr.

Le concept d'éléments finis est né vers 1940, avec des figures comme Newmark, Hrennikoff (1941), Mc Henry, Courant (1942)...

Son réel essor ne commence toutefois que dans les années 60 avec le développement du calcul numérique sur ordinateur.



Clough

Courant

Zienkiewicz

La méthode des éléments finis (MEF) prend ses origines dans le besoin de résoudre des problèmes complexes d'élasticité et d'analyse de structures en ingénierie civile et aéronautique. Son développement remonte aux travaux d'Alexander Hrennikoff (1941) et de Richard Courant (1942). Bien qu'utilisant des approches différentes, ces deux pionniers partagent la même caractéristique essentielle à savoir la discrétisation par maillage du domaine continu en sous-domaines discrets, que l'on appelle éléments. C'est Olgierd Zienkiewicz de l'Imperial College qui synthétisa ces deux méthodes en ce que l'on peut appeler la méthode des éléments finis et qui fit la première formalisation mathématique de la méthode.



Rayleigh

Ritz

Galerkin

Dans ses travaux, Hrennikoff discrétise le domaine en utilisant une analogie avec les treillis, tandis que l'approche de Courant divise le domaine en sous-régions finies triangulaires pour résoudre les équations aux dérivées partielles elliptiques du second ordre issues du problème de la torsion d'un cylindre. On peut dire que la contribution de Courant était une évolution s'appuyant sur un vaste corpus de résultats antérieurs pour les équations aux dérivées partielles développés par Rayleigh, Ritz

et Galerkin.

Le développement de la méthode des éléments finis a véritablement commencé au milieu de années 1950 pour l'analyse structurale et aéronautique, et prit de l'ampleur à l'Université de Stuttgart grâce au travail de John Argyris et à Berkeley grâce au travail de Ray W. Clough [81]. Ray Clough est également l'un des pionniers du génie para sismique et s'est vu décerné en 2008, à la World Conference of Earthquake Engineering en Chine, le titre de « légende du génie para sismique » ("Legend of Earthquake Engineering").



Argyris

Strang

Fix

À la fin des années 50, les concepts clés de matrice de rigidité et d'assemblage d'éléments existaient quasiment sous la forme actuelle. La NASA publia une demande de propositions pour le développement du logiciel d'éléments finis NASTRAN en 1965.

La base mathématique rigoureuse de la méthode des éléments finis a été consolidée en 1973 avec la publication de Strang et Fix de *An Analysis of The Finite Element Method*. Elle a depuis été intégrée comme une branche des mathématiques appliquées à la modélisation numérique des systèmes physiques dans une large variété de disciplines. Pour une discussion plus approfondie des apports et contributions relatives des différents pionniers de cette méthode, on pourra se référer à [80].

Bien que la méthode des éléments finis soit théoriquement généralisable à toutes les dimensions d'espace et à tous les ordres de dérivation, dans la pratique, l'augmentation de ces paramètres accroît de manière dramatique la difficulté et on se contente de résoudre des problèmes limités à **trois dimensions en espace et deux ordres de dérivation**.

Par exemple, un problème à trois dimensions d'espace et une dimension de temps, qui pourrait être discrétisé par une formulation à quatre dimensions (les éléments finis espace-temps existent), sera traité par une discrétisation éléments finis à trois dimensions d'espace couplé à un schéma en différences finis en temps.

Pour des problèmes avec des ordres de dérivations supérieurs (des techniques dites d'ordres élevés existent), comme par exemple en statique des poutres où l'on a une dérivation partielle d'ordre 4, on introduit des variables supplémentaires afin de diminuer les ordres des dérivées (déformations, contraintes...). **cela a été évoqué en parlant du « choix des variables » en mécanique, nous détaillerons un peu plus loin la formulation éléments finis de ces**

10.2 Problèmes de la modélisation « réelle »

Pour faire suite aux dernières remarques faites au paragraphe précédent, il faut se rendre à l'évidence que les équations qui modélisent les principales théories de la physique ont été présentées (et développées) dans un **cadre idéalisé**. Dans les problèmes réels, il est souvent difficile de rester dans ce cadre à cause de nombreuses difficultés telles que les problèmes géométriques, d'échelle et du couplage de différents modèles.

Toutefois, cela ne signifie pas qu'il est alors impossible de simuler le problème, mais seulement qu'il est nécessaire d'ajouter encore un peu plus d'intelligence et d'astuce. En effet, ces difficultés peuvent souvent être **découplées** dans un calcul numérique par des algorithmes adéquats et l'on se ramène alors à la **résolution itérée de problèmes standard** (d'où la nécessité de disposer de méthodes sûres et performantes pour calculer des solutions numériques de ces problèmes standard).

Nous allons présenter quelques exemples de problèmes pouvant survenir dans une modélisation, sachant qu'un certain nombre seront traités dans des chapitres ultérieurs (mais pas tous).

10.2.1 Problèmes géométriques

Jusqu'à présent, nous avons supposé que le domaine Ω dans lequel le problème était considéré était fixe. Or, dans de nombreux problèmes ce **domaine est variable**, on parle de **problèmes à surface libre**, dont voici quelques exemples :

- Le problème le plus évident pour le lecteur, et qui a déjà été évoqué, est celui de la **grande déformation** d'un solide.
- L'étude des mouvements d'un liquide, notamment les vagues ou le mouvement de l'eau dans un réservoir. Quand la variation de la forme du domaine n'est pas trop grande on peut définir le domaine inconnu comme l'image d'un domaine fixe par une certaine fonction. Cette fonction devient alors une inconnue du problème qui se ramène à une équation plus complexe que l'équation initiale mais sur un domaine fixe. Mais, parfois, le domaine peut être amené à se fragmenter comme dans le cas de la formation de gouttes...
- La fusion de la glace dans l'eau : la frontière entre la glace et l'eau est alors une inconnue du problème.

10.2.2 Problèmes d'échelle

La formulation d'un problème peut dépendre de l'échelle à laquelle on regarde ce problème, comme cela a été mentionné précédemment. Mais il se peut également que différentes échelles interagissent... Quelques problèmes classiques d'échelle sont :

- Nous avons déjà évoqué un peu cela en mécanique des fluides : dans l'écoulement d'un fluide la **turbulence** est un phénomène qui fait apparaître des mouvements à très petite échelle. La complexité de ces mouvements rend nécessaire, dans un calcul numérique, le remplacement des valeurs exactes des champs inconnus par leur moyenne, en un sens à préciser. Cela conduit à des modèles de turbulence qui se différencient par les hypothèses supplémentaires qui sont faites.
- Dans un champ plus proche des considérations du lecteur, on pensera évidemment aux ondes. Une **excitation à très haute fréquence** crée une onde de longueur très petite. Or une longueur d'onde très petite ne peut pas être prise en compte dans un calcul numérique à grande échelle. La prise en compte de ce phénomène dans l'équation des ondes conduit à des modèles asymptotiques dans lesquels l'étude des ondes se ramène à la théorie de l'optique géométrique plus ou moins enrichie pour tenir compte de phénomènes comme la diffraction.

Mais si la longueur d'onde est proche des longueurs des variations géométriques du bord du domaine d'étude il faut revenir à l'équation des ondes pour étudier l'effet de ces variations géométriques. On peut donc être amené à coupler l'optique géométrique et une étude directe de l'équation des ondes.

— Un autre champ lui-aussi déjà mentionné est celui des [hétérogénéités d'un milieu continu](#), qui, quand elles sont à très petite échelle, peuvent empêcher la prise en compte exacte de celles-ci, au moins dans une approximation numérique.

C'est le cas des solides formés de matériaux composites, des fluides comme l'air chargé de gouttelettes d'eau ou de l'eau contenant des bulles de vapeur. On est conduit à définir des modèles limites dits homogénéisés dans lesquels on remplace les grandeurs usuelles (vitesse, masse volumique), qui ont une forte variation locale, par leur valeur moyenne.

Les équations obtenues peuvent avoir la même forme que les équations initiales comme dans le cas de la théorie élastique des matériaux composites (le seul problème est de calculer les propriétés matérielles du matériau homogénéisé, mais nous présenterons cela plus loin) ou bien, quand les paramètres des hétérogénéités (la densité de bulles par exemple) dépendent de la solution, ces paramètres s'ajoutent aux grandeurs inconnues initiales et le nombre d'équations peut donc s'accroître.

10.2.3 Couplage géométrique

De nombreux problèmes impliquent la prise en compte de plusieurs modèles (on dit parfois également « plusieurs physiques »).

C'est le cas de l'[interaction d'un fluide et d'une structure](#) : l'écoulement d'un fluide par exemple peut faire vibrer une structure qui en retour fait vibrer le fluide. Une des difficultés vient de ce que les inconnues utilisées dans la modélisation de chacun des milieux sont de natures différentes : les déplacements dans le solide et les vitesses dans le fluide.

Comme illustration de ce couplage, nous proposons le cas d'un poisson, issu de l'intéressante étude de San Martín et al. [51]. Le déplacement d'un poisson dans son milieu, illustré à la figure 10.1.a, n'est pas imposé mais résulte de l'interaction entre la déformation propre du poisson (donnée à la figure 10.1.b, et qui elle est imposée) et le fluide.

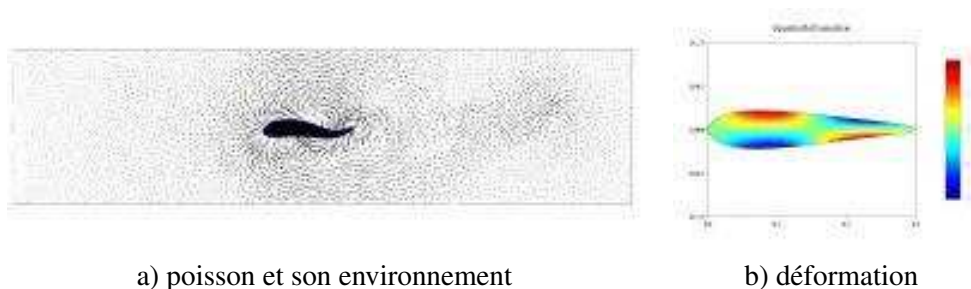


FIGURE 10.1: Interaction fluide/structure : déplacement d'un poisson

On retrouve aussi les problèmes d'interaction fluide/structure dans la [modélisation de la circulation sanguine](#) : le sang est un liquide très faiblement compressible, alors que les vaisseaux sanguins sont déformables et susceptibles de grands déplacements

Le [contact](#) entre deux solides peut également être placé dans cette catégorie.

10.2.4 Couplage intrinsèque

L'étude de la convection naturelle d'un fluide, pour la météorologie par exemple, se modélise par le couplage des équations de la dynamique des fluides d'une part, de la diffusion et du transport de la chaleur d'autre part : ce sont en effet les variations de température qui créent les variations de densité responsables du mouvement de l'air, mais ce mouvement lui-même entraîne un transport de chaleur responsable de variations de la température. Même si l'on considère un modèle simplifié linéarisé pour modéliser l'écoulement du fluide, le couplage fait apparaître une non linéarité.

L'étude des plasmas oblige à coupler les équations de dynamiques des fluides et les équations de Maxwell puisque ce sont les forces électromagnétiques qui font se mouvoir les particules chargées mais leur mouvement est lui-même la cause d'un champ électromagnétique induit.

10.3 Principe de la méthode : résolution d'un système matriciel

Soit Ω un domaine ouvert de \mathbb{R}^n ($n = 1, 2$ ou 3 en pratique), de frontière $\Gamma = \partial\Omega$ et sur lequel on cherche à résoudre une équation aux dérivées partielles munie de conditions aux limites.

Ce problème, mis sous forme variationnelle, est :

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que } a(u, v) = f(v), \quad \forall v \in V \quad (10.1)$$

où V est un espace de Hilbert. On supposera également que l'équation de départ a de bonnes propriétés, i.e. que l'on est dans les hypothèses vues précédemment permettant d'affirmer que le problème admet une solution unique u .

La méthode des éléments finis se propose de **discrétiser** le problème considéré. La discrétisation intervient à plusieurs niveaux :

discrétisation : il est nécessaire de disposer d'une description du domaine Ω sur lequel on souhaite travailler. Cette description va se faire en l'approchant par un **maillage**, qui sera constitué d'**éléments**.

interpolation : il est ensuite nécessaire de disposer d'une manière de représenter le ou les champs inconnus. Ce que se propose de faire la méthode des éléments finis, c'est d'approcher ces champs par des fonctions plus simples (disons polynomiales de degré un ou deux) définies sur chacun des éléments du maillage (le champ est approché par des bouts de fonctions qui, elles, ne sont définies chacune que sur un seul élément).

approximation : selon le type d'approximation, on remplace non seulement l'espace V (qui correspond, selon les notations utilisées au chapitre sur la formulation faible, aux espaces H , V , M ou même $H \times M$), de dimension infinie, par des approximations V_h de dimension finie, mais parfois également les formes bilinéaires et linéaires définissant le problème (nous expliquerons plus tard les motivations).

De manière classique, on notera \mathcal{T}_h le maillage de Ω considéré. Il est caractérisé par les dimensions géométriques représentatives que sont le **diamètre maximum des éléments**, h et le **facteur de forme du maillage**, σ (qui caractérise l'aplatissement du maillage).

Le maillage est constitué d'éléments, généralement notés K . On note h_K le **diamètre de l'élément K** , i.e. le maximum des distances (euclidiennes) entre deux points de K , et ρ_K la **rondeur de l'élément K** , i.e. le diamètre maximum des sphères incluses dans K .

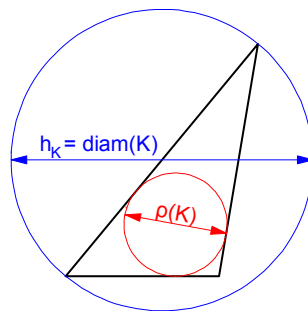


FIGURE 10.2: Dimensions géométriques caractéristiques d'un élément.

On a donc évidemment $h_K \leq h, \forall K \in \mathcal{T}_h$ puisque par définition $h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K$, et $\frac{h_K}{\rho_K} \leq \sigma, \forall K \in \mathcal{T}_h$.

On notera \hat{K} l'**élément de référence** correspondant à l'élément K du maillage \mathcal{T}_h , et d'une manière générale on ajoutera ce « chapeau » sur toute quantité relative à un élément de référence (voir plus loin le chapitre sur la formulation pratique des éléments finis).

Les types d'approximation du problème (P) donné par la relation (10.1), qui seront détaillés un peu plus loin, sont donnés au tableau 10.1.

En fait, on expose généralement les méthodes à partir de la méthode dite conforme selon le tableau ci-dessus, alors qu'en pratique on travaille souvent dans le second cas, i.e. approximation conforme en espace ($V_h \subset V$) mais non conforme concernant les formes, car au moins les intégrations sont réalisées numériquement.

type d'approximation	espaces	formes	problème $(P) \Rightarrow$ problème approché (P_h)
conforme	$V_h \subset V$	inchangées	Trouver $u_h \in V_h$ tq $a(u_h, v_h) = b(v_h), \forall v_h \in V_h$
non conforme	$V_h \subset V$	approchées	Trouver $u_h \in V_h$ tq $a_h(u_h, v_h) = b_h(v_h), \forall v_h \in V_h$
non conforme	$V_h \not\subset V$	approchées	Trouver $u_h \in V_h$ tq $a_h(u_h, v_h) = b_h(v_h), \forall v_h \in V_h$

Tableau 10.1: Relations approximation et espaces

Toujours est-il que dans tous les cas, l'espace V est remplacé par un espace V_h , de dimension finie N_h , dont (e_1, \dots, e_{N_h}) en est une base. L'approximation u_h de u dans cette base s'écrit :

$$u_h = \sum_{i=1}^{N_h} q_i e_i \quad (10.2)$$

Le problème de la méthode des éléments finis devient donc (on écrit ici en utilisant a_h , mais on pourrait utiliser a) :

$$\text{Trouver } q_1, \dots, q_{N_h} \text{ tels que } \sum_{i=1}^{N_h} q_i a_h(e_i, v_h) = f_h(v_h) \quad , \forall v_h \in V_h \quad (10.3)$$

soit, en exploitant les linéarités de $a_h(\cdot, \cdot)$ et $f_h(\cdot)$ et en décomposant v_h :

$$\text{Trouver } q_1, \dots, q_{N_h} \text{ tels que } \sum_{i=1}^{N_h} q_i a_h(e_i, e_j) = f_h(e_j) \quad , \forall j = 1, \dots, N_h \quad (10.4)$$

Il s'agit donc de résoudre le système linéaire :

$$\begin{bmatrix} a_h(e_1, e_1) & \dots & a_h(e_{N_h}, e_1) \\ \vdots & & \vdots \\ a_h(e_1, e_{N_h}) & \dots & a_h(e_{N_h}, e_{N_h}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_{N_h} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_h(e_1) \\ \vdots \\ f_h(e_{N_h}) \end{Bmatrix} \quad (10.5)$$

que l'on note (dans la tradition mécanicienne) :

$$\mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{F} \quad \text{ou encore} \quad [K] \{q\} = \{F\} \quad (10.6)$$

Telle que formulée, la matrice $[K]$ semble pleine a priori. L'astuce consiste à choisir des fonctions de base e_i dont le support sera petit, i.e. chaque fonction e_i sera nulle partout sauf sur quelques mailles. Ainsi les termes $a_h(e_i, e_j)$ seront le plus souvent nuls et la matrice sera creuse. De plus, on ordonnera les e_i de sorte que $[K]$ soit à structure bande, avec une largeur de bande la plus faible possible. Il existe un moyen avantageux de stocker une matrice creuse qui s'appelle le [stockage en ligne de ciel](#) ou [skyline](#).

Les difficultés majeures en pratique sont de trouver les e_i et de les manipuler pour les calculs d'intégrales nécessaires à la construction de $[K]$. Indiquons d'ores et déjà que la plupart de ces difficultés seront levées grâce à trois idées principales qui seront détaillées au chapitre sur la formulation pratique des éléments finis :

Principe d'unicovance : On s'attachera à trouver des [degrés de liberté](#) (ou ddl) tels que la donnée de ces degrés de liberté détermine de façon univoque toute fonction de V_h . Il pourra s'agir par exemple des valeurs de la fonction en quelques points. Déterminer une fonction reviendra alors à déterminer ses valeurs sur ces degrés de liberté.

Définition des e_i : On définira les fonctions de base par $e_i = 1$ sur le $i^{\text{ème}}$ degré de liberté, et $e_i = 0$ sur les autres degrés de liberté. La manipulation des e_i sera alors simplifiée, et les e_i auront par ailleurs un support réduit à quelques mailles.

Notion de « famille affine d'éléments » : Le maillage sera tel que toutes les mailles soient identiques à une transformation affine près. De ce fait, tous les calculs d'intégrales pourront se ramener à des calculs sur une seule maille de référence, par un simple changement de variable.

Notons que la matrice $[K]$ est appelée **matrice de rigidité** par analogie avec la mécanique des solides.

Si la forme bilinéaire a est coercive, alors $[K]$ est symétrique, définie positive donc inversible. On obtient donc l'existence et l'unicité de $\{q\} = [K]^{-1} \{F\}$.

De nombreuses méthodes permettent de résoudre le système matriciel (d'inverser la matrice de rigidité) : Gauß, mais également toutes sortes de décomposition de la matrice de rigidité comme LU, LDLT, LLT (Cholesky). Lorsque K est symétrique définie-positive, la méthode de Cholesky est la meilleure. Elle consiste à décomposer la matrice $[K]$ en le produit $[L][L]^T$, où la matrice $[L]$ est une matrice triangulaire inférieure. **Les factorisations LU et de Cholesky conservent la structure bande des matrices.** De plus, pour une matrice bande d'ordre n et de demie largeur de bande p , la factorisation LU demande de l'ordre de $\mathcal{O}(np^2/3)$ opérations, alors que celle de Cholesky n'en demande que $\mathcal{O}(np^2/6)$.

10.4 Approximation conforme et lemme de Céa

Dans le cas d'une **approximation conforme (dite aussi approximation interne)**, on se propose de construire un espace V_h , de dimension N_h , comme étant un **sous-espace vectoriel de V** .

10.4.1 Cas Lax-Milgram

On se place dans le cas d'une formulation relevant du théorème de Lax-Milgram.

V_h étant de dimension finie, c'est un fermé de V , et V étant un espace de Hilbert, V_h l'est donc aussi. D'où l'existence et l'unicité de u_h , en application du théorème de Lax-Milgram.

L'espace V_h sera en pratique construit à partir d'un maillage du domaine Ω , et l'indice h désignera la **taille typique** des mailles. Lorsque l'on construit des maillages de plus en plus fins, la suite de sous-espaces $(V_h)_h$ formera une **approximation interne de V** , i.e. pour tout élément φ de V , il existe une suite de $\varphi_h \in V_h$ telle que $\|\varphi - \varphi_h\| \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$.

Cette méthode d'approximation interne est appelée **méthode de Galerkin** (Galerkin ou Galerkin).

Signification de u_h . On a $a(u, v) = f(v)$, $\forall v \in V$, donc en particulier $a(u, v_h) = f(v_h)$, $\forall v_h \in V_h$, car $V_h \subset V$. Par ailleurs, $a(u_h, v_h) = f(v_h)$, $\forall v_h \in V_h$. Par différence, il vient $a(u - u_h, v_h) = 0$, $\forall v_h \in V_h$.

Dans le cas où $a(\cdot, \cdot)$ est symétrique, il s'agit d'un produit scalaire sur V . u_h peut alors être interprété comme la **projection orthogonale de u sur V_h au sens de $a(\cdot, \cdot)$** .

Lemme 1 — Lemme de Céa. La forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ étant continue, de constante de majoration M , et coercitive, de constante de minoration α , il est aisé d'obtenir la majoration de l'erreur appelée **lemme de Céa** :

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M}{\alpha} \|u - v_h\|, \forall v_h \in V_h \quad \text{c'est-à-dire} \quad \|u - u_h\| \leq \frac{M}{\alpha} d(u, V_h) \quad (10.7)$$

où d est la distance induite par la norme $\|\cdot\|$.

Cette majoration donnée par le lemme de Céa ramène l'étude de l'**erreur d'approximation** $\|u - u_h\|$ à celle de l'**erreur d'interpolation** $d(u, V_h)$.

10.4.2 Cas Babuška

On se place cette fois dans le cas d'un problème relevant du théorème de Babuška. Le problème est (v est dans M et non plus V) :

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que } a(u, v) = f(v), \forall v \in M \quad (10.8)$$

L'approximation conforme du problème (10.8) est le problème approché :

$$\text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que } a(u_h, v_h) = f(v_h), \forall v_h \in M_h \quad (10.9)$$

où $V_h \subset V$ et $M_h \subset M$.

Attention : rien ne garantit *a priori* que la condition inf-sup discrète sera vérifiée, même si la condition inf-sup est vérifiée. Ces propriétés doivent donc être démontrées pour chaque problème.

V_h et M_h étant de dimension finie, il faut nécessairement que $\dim V_h = \dim M_h$. Le problème (10.9) est bien posé, i.e. admet une unique solution, si :

$$\begin{cases} \exists \alpha_h > 0 \text{ tel que } \inf_{v_h \in V_h} \sup_{w_h \in M_h} \frac{a(v_h, w_h)}{\|v_h\|_{V_h} \|w_h\|_{M_h}} \geq \alpha_h \\ \forall w_h \in M_h, \quad (a(v_h, w_h) = 0) \Rightarrow (w_h = 0) \end{cases} \quad (10.10)$$

ce qui est équivalent aux conditions :

$$\begin{cases} \exists \alpha_h > 0 \text{ tel que } \inf_{v_h \in V_h} \sup_{w_h \in M_h} \frac{a(v_h, w_h)}{\|v_h\|_{V_h} \|w_h\|_{M_h}} \geq \alpha_h \\ \dim V_h = \dim M_h \end{cases} \quad (10.11)$$

La première relation est appelée **condition inf-sup discrète**.

On dispose de plus de la majoration d'erreur suivante :

$$\|u - u_h\| \leq \left(1 + \frac{M}{\alpha_h}\right) \inf_{v_h \in V_h} \{\|u - v_h\|\} \quad (10.12)$$

10.4.3 Cas Brezzi

On se place cette fois dans le cas d'un problème relevant du théorème de Brezzi (problème mixte). Le problème est de trouver (u, λ) dans $H \times M$ tels que :

$$\begin{cases} a(u, v) + b(v, \lambda) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H, \\ b(u, \mu) = \langle g, \mu \rangle \quad \forall \mu \in M. \end{cases} \quad (10.13)$$

Dans ce cas, on va faire une **hypothèse forte d'injection continue**... Le problème discrétisé correspondant à l'équation (10.13) est bien posé, si le problème défini par la relation (10.13) vérifie les conditions de Brezzi, et si $(H_h \hookrightarrow H, M_h \hookrightarrow M)$ vérifie les conditions de Brezzi (de constantes α^* et β^*). De plus, on dispose alors de la majoration d'erreur :

$$\|u - u_h\|_H + \|\lambda - \lambda_h\|_M \leq C \left[\inf_{v_h \in H_h} \|u - v_h\| + \inf_{\mu_h \in M_h} \|\lambda - \mu_h\| \right] \quad (10.14)$$

où la constante C ne dépend que de $\|a\|$, α^* et β^* .

10.5 Approximations non conformes et lemmes de Strang

Lorsque les formes bilinéaires et linéaires définissant le problèmes doivent être approchées, on se trouve alors en présence d'une **approximation non conforme**. Comme mentionné, il existe deux types d'approximations non conformes selon que $V_h \subset V$ ou $V_h \not\subset V$.

10.5.1 Approximation interne

Le problème est donc :

$$\text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que } a_h(u_h, v_h) = f_h(v_h), \forall v_h \in V_h \quad (10.15)$$

où $V_h \subset V$ est de dimension finie, et a_h et f_h sont des approximations de a et f définies sur $V_h \times V_h$ et V_h respectivement. **Dans le pratique, a_h et f_h sont définies sur un espace plus grand que V_h , mais pas sur V .**

Motivation. Considérons la forme :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (a \nabla u, \nabla v)(x) dx \quad (10.16)$$

Comme $a = a(x)$, le problème est : comment intégrer ? On prend des formules d'intégrations, donc on ne calcule pas $a(\cdot, \cdot)$, mais $a_h(\cdot, \cdot)$ et $f_h(\cdot)$.

Une majoration de l'erreur est donnée par le lemme 1 de Strang.

Lemme 2 — Lemme 1 de Strang. S'il existe une constante $\alpha^* > 0$ indépendante de h telle que :

$$\forall h, \quad a_h(v_h, v_h) \geq \alpha^* \|v_h\|^2, \quad \forall v_h \in V_h$$

alors il existe une constante C indépendante de h telle que :

$$\|u - u_h\| \leq C \left[\inf_{v_h \in V_h} \left\{ \|u - v_h\| + \sup_{w_h \in V_h} \frac{|a(v_h, w_h) - a_h(v_h, w_h)|}{\|w_h\|} \right\} \dots \right. \\ \left. \dots + \sup_{w_h \in V_h} \left\{ \frac{|f(w_h) - f_h(w_h)|}{\|w_h\|} \right\} \right] \quad (10.17)$$

Le premier terme $\|u - v_h\|$ est appelé **erreur d'approximation**, le reste **erreur de consistance**.

10.5.2 Approximation externe

Le problème est encore :

$$\text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que } a_h(u_h, v_h) = f_h(v_h), \quad \forall v_h \in V_h \quad (10.18)$$

mais $V_h \not\subset V$ est de dimension finie, et a_h et f_h sont des approximations de a et f définies sur $V_h \times V_h$ et V_h respectivement.

Motivation. Considérons le problème du Laplacien de Dirichlet. L'espace V est $H_0^1(\Omega)$.

On considère l'espace des éléments finis triangulaires engendrés par l'élément ayant une pression constante par élément et les nœuds au centre des arêtes du triangle. Nous notons cet espace V_h ; alors $V_h \not\subset H^1(\Omega)$. Nous prenons maintenant l'espace $V_{h,0}$ qui tient compte des conditions aux limites de Dirichlet. Si on prend :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \quad (10.19)$$

alors, dans Ω , il y a des sauts et l'intégrale n'a pas de sens. Par contre, si l'on considère :

$$a_h(u_h, v_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla u_h \cdot \nabla v_h \quad (10.20)$$

l'intégrale sur chaque élément a un sens.

Une majoration de l'erreur est donnée par le lemme 2 de Strang.

Lemme 3 — Lemme 2 de Strang. Si la norme $\|\cdot\|_h$ est définie sur $V_h + V$, et s'il existe deux constantes indépendantes de h , $\alpha^* > 0$ et $M^* > 0$ telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_h(v, v) \geq \alpha^* \|v\|_h^2, \quad \forall v \in V_h \\ |a_h(u, v)| \leq M^* \|u\|_h \|v\|_h, \quad \forall u \in V_h + V, \forall v \in V_h \end{array} \right.$$

alors il existe une constante C indépendante de h telle que :

$$\|u - u_h\| \leq C \left[\inf_{v_h \in V_h} \{ \|u - v_h\| \} + \sup_{w_h \in V_h} \left\{ \frac{|a(u, w_h) - f_h(w_h)|}{\|w_h\|_h} \right\} \right] \quad (10.21)$$

Le premier terme $\|u - v_h\|_h$ est appelé **erreur d'approximation**, le second **erreur de consistance**.

10.6 Convergence de la méthode des éléments finis en approximation conforme interne

Reprenons un cadre général, i.e. considérons Ω notre domaine de \mathbb{R}^n , et notre problème que nous résolvons de manière approchée par la méthode des éléments finis, lorsque $V_h \subset V$. Il s'agit maintenant de fournir une estimation de l'erreur $\|u - u_h\|_m$ dans H^m (souvent $m = 0, 1$ ou 2). La régularité de u et de u_h (et donc les valeurs possibles pour m) dépendent du problème continu considéré ainsi que du type d'éléments finis choisis pour sa résolution.

On rappelle que \mathcal{T}_h est le maillage de Ω considéré. On supposera de plus le domaine Ω **polygonal**, ce qui permet de le recouvrir exactement par le maillage. Si ce n'est pas le cas, il faut prendre en compte l'**écart** entre le domaine couvert par le maillage et le domaine réel.

10.6.1 Calcul de la majoration d'erreur

Les étapes du calcul de la majoration de l'erreur sont les suivantes :

- $\|u - u_h\|_m \leq C \|u - \pi_h u\|_m$: l'erreur d'approximation est bornée par l'erreur d'interpolation ;
- $\|u - \pi_h u\|_m^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|u - \pi_h u\|_{m,K}^2$: décomposition en majorations locales sur chaque élément ;
- $\|u - \pi_h u\|_{m,K} \leq C(K) \|\hat{u} - \hat{\pi} \hat{u}\|_{m,\hat{K}}$: passage à l'élément de référence ;
- $\|\hat{u} - \hat{\pi} \hat{u}\|_{m,\hat{K}} \leq \hat{C} |\hat{u}|_{k+1,\hat{K}}$: majoration sur l'élément de référence ;
- $\|u - \pi_h u\|_m \leq C' h^{k+1-m} |u|_{k+1}$: assemblage des majorations locales.

Majoration par l'erreur d'interpolation

En appliquant le lemme de Céa à $v_h = \pi_h u$, il vient :

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M}{\alpha} \|u - \pi_h u\| \quad (10.22)$$

Décomposition en majorations locales sur chaque élément

$$\|u - \pi_h u\|_m^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|u - \pi_h u\|_{m,K}^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{l=0}^m |u - \pi_h u|_{l,K}^2 \quad (10.23)$$

et le calcul est ramené à un calcul sur chaque élément, pour toutes les semi-normes $\|\cdot\|_{l,K}$ pour $l = 0, \dots, m$.

Passage à l'élément de référence

On se sert du théorème suivant :

Théorème 44 Soit K un élément quelconque de \mathcal{T}_h , et \hat{K} l'élément de référence. Soit F la transformation affine de \hat{K} vers K : $F(\hat{x}) = B\hat{x} + b$, avec B inversible. On a :

$$\forall v \in H^l(K), \quad |\hat{v}|_{l,K} \leq C(l, n) \|B\|_2^l |\det B|^{-1/2} |v|_{l,\hat{K}} \quad (10.24)$$

Ce résultat n'est rien d'autre qu'un résultat de changement de variable dans une intégrale.

On a même :

$$\forall v \in H^l(K), \quad |\hat{v}|_{l,K} \leq C(l, n) \|B^{-1}\|_2^l |\det B|^{1/2} |v|_{l,\hat{K}} \quad (10.25)$$

Et avec les données géométriques de l'élément :

$$\|B\| \leq \frac{h_K}{\hat{\rho}} \quad \text{et} \quad \|B^{-1}\| \leq \frac{\hat{h}}{\rho_K} \quad (10.26)$$

Majoration sur l'élément de référence

On a le théorème suivant :

Théorème 45 soient l et k deux entiers tels que $0 \leq l \leq k + 1$. Si $\hat{\pi} \in \mathcal{L}(H^{k+1}(\hat{K}), J^l(\hat{K}))$ laisse $P_k(\hat{K})$ invariant, i.e. si $\forall \hat{p} \in P_k(\hat{K}), \hat{\pi} \hat{p} = \hat{p}$ alors :

$$\exists C(\hat{K}, \hat{\pi}), \quad \forall \hat{v} \in H^{k+1}(\hat{K}), \quad |\hat{v} - \hat{\pi} \hat{v}|_{j, \hat{K}} \leq C |\hat{v}|_{k+1, \hat{K}} \quad (10.27)$$

Majoration sur un élément quelconque

De ce qui précède, il vient :

$$|v - \pi_K v|_{l, K} \leq \hat{C}(\hat{\pi}, \hat{K}, l, k, n) \frac{h_K^{k+1}}{\rho_K^l} |v|_{k+1, K} \quad (10.28)$$

où il faut remarquer que la constante \hat{C} est indépendante de l'élément K .

Assemblage des majorations locales

Il ne reste plus qu'à assembler les résultats précédents pour tous les éléments K du maillage \mathcal{T}_h et pour toutes les valeurs des semi-normes, i.e. pour $l = 0, \dots, m$.

Par majoration et sommation sur les éléments, on obtient :

$$\|v - \pi_h v\|_m \leq C(\mathcal{T}_h, m, k, n) h^{k+1-m} |v|_{k+1} \quad (10.29)$$

10.6.2 Majoration de l'erreur

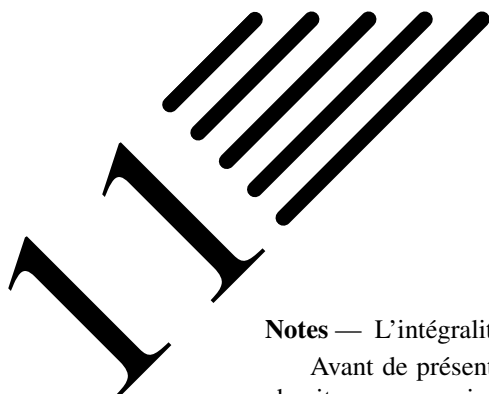
On obtient au final, le résultat classique de majoration d'erreur :

$$\|u - u_h\|_m \leq C h^{k+1-m} |u|_{k+1} \quad (10.30)$$

Quelques remarques :

- On rappelle que la formule précédente a été obtenue pour un domaine Ω **polygonal**. Si ce n'est pas le cas, elle n'est plus valable. Les éléments linéaires conduisent à une erreur en $O(h)$. Utiliser des éléments plus raffinés (de degré 2 au lieu d'éléments linéaires) permet, même si la géométrie n'est également ici pas décrite de manière exacte, d'obtenir une erreur asymptotique en $O(h^2)$. **Quelque soit le degré de l'approximation, si le domaine Ω n'est pas représenté de manière exact, alors cela revient à une modification des conditions aux limites.**
- Les calculs, et plus précisément les **intégrations**, ont été réalisées **sans erreur**. Si celles-ci sont faites de manière numérique, il convient d'introduire encore un terme correctif supplémentaire, appelé **erreur de consistance** due au remplacement des formes par leur approximation ($a(\cdot, \cdot)$ par $a_h(\cdot, \cdot)$, $f(\cdot)$ par $f_h(\cdot)$...). Toutefois, cette erreur supplémentaire peut être estimée en $O(h^k)$ selon la précision du schéma d'intégration utilisé.
- Le résultat de majoration d'erreur est souvent utilisé dans le cas $m = 1$. Comme l'espace des polynômes $P_k(\hat{k}) \subset H^1(\hat{K})$, alors si $\hat{\pi}$ est bien défini sur $H^{k+1}(\hat{K})$, on a :

$$\text{si } u \in H^{k+1}(\Omega), \quad \|u - u_h\|_1 \leq C h^k |u|_{k+1} \quad (10.31)$$



Choix d'un Modèle

Notes — L'intégralité de la méthode des éléments finis a été présentée au chapitre précédent.

Avant de présenter plus en détail la formulation d'éléments finis, nous tenions à ajouter un court chapitre comme mise en garde en modélisation. Ce document étant essentiellement destiné à un public d'ingénieurs mécaniciens, nous allons illustrer notre propos en mécanique.

Histoire

La mécanique est sans doute aussi vieille que l'homme. Aussi bien pour des aspects pratiques (faire des outils pour chasser...), que pour des aspects plus philosophiques et spirituels visant notamment à expliquer les mouvements des astres...

Archimède, outre ces travaux en mathématiques, pourrait sans conteste être considéré comme le saint patron de la mécanique. Il est tout au moins indubitablement le père de la mécanique statique.

Il s'intéressa aussi bien aux aspects « théoriques » portant sur le principe du levier et la recherche de centre de gravité dans *De l'équilibre des figures planes*, sur le principe d'Archimède pour les corps plongés dans un liquide dans *Des corps flottants* ; qu'aux aspects « pratiques » au travers de nombreuses inventions : machines de traction (où il démontre qu'à l'aide de poulies, de palans et de leviers, l'homme peut soulever bien plus que son poids), machines de guerre (principe de la meurtrière, catapultes, bras mécaniques utilisés dans le combat naval), l'odomètre (appareil à mesurer les distances), la vis sans fin et la vis d'Archimède, le principe de la roue dentée...

Le siège de Syracuse, les miroirs d'Archimède et sa mort ne font qu'ajouter à sa légende.

Bien qu'Aristote pose le premier (avant Archimède) les bases d'une véritable théorie mécanique (alors encore très imparfaite), les fondements de la mécanique, en tant que science et au sens moderne du terme, sont posés par Galilée en 1632 dans *les Dialogues* et en 1638 dans *les Discours*.

La mécanique n'est alors pas dissociée des arts mécaniques, i.e. des techniques de construction des machines. La distinction entre la mécanique en tant que science et la mécanique en tant que technique ne se fera qu'au XIX^e siècle.



Newton

Halley

En 1677, Newton reprend ses travaux sur la mécanique, i.e. sur la gravitation et ses effets sur les orbites des planètes. En novembre 1684, il fit parvenir à Halley un petit traité de neuf pages intitulé *De motu corporum in gyrum* (Mouvement des corps en rotation) montrant la loi en carré inverse, la force centripète, ainsi que les prémices des lois du mouvement.

Son ouvrage *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (aujourd'hui connu sous le nom de *Principia* ou *Principia Mathematica*), écrit en 1686 et publié le 5 juillet 1687, est considéré comme une œuvre majeure dans l'histoire de la science. Il y décrit la gravitation universelle, formule les trois lois du mouvement et jette les bases de la mécanique classique ou mécanique newtonienne. Ces trois lois universelles du mouvement resteront inchangées, sans aucune amélioration, durant plus de deux siècles, jusqu'à l'arrivée des mécaniques relativiste et quantique.

Rappelons que ces trois lois sont : 1) le principe d'inertie ; 2) le principe fondamental de la dynamique ; et 3) le principe des actions réciproques.

La mécanique classique sera ensuite complétée et mathématisée pour devenir la mécanique analytique. Cette dernière, initiée dès le XVIII^e siècle, regroupe, en plus de la mécanique newtonienne, les mécaniques



Aristote

Archimède

Galilée

de Hamilton et de Lagrange. Toutes ces mécaniques ont en commun l'application initiale d'un principe variationnel, et avec lui l'utilisation du calcul variationnel... ce qui fait le lien avec le présent document.

11.1 La mécanique, un problème à plusieurs champs

Dans ce paragraphe, nous reprenons les formulations présentées au paragraphe 8.3.2, mais en essayant de les éclairer par un discours plus pragmatique. C'est pourquoi nous changerons quelque peu les notations, afin de retomber sur des choses peut-être plus familières pour des ingénieurs mécaniciens.

Bien qu'étant un sujet ancien, la mécanique n'en est pas pour autant un problème simple. En mécanique, les champs inconnus sont les déplacements, déformations et contraintes (et d'autres si besoin, comme la température...). De plus, on dispose de relations entre ces champs.

Il est possible de n'exprimer le problème qu'à l'aide des seuls déplacements. Les déformations sont alors calculées à partir des déplacements (par combinaison linéaire des dérivées, obtenues de manière approchée), puis les contraintes sont obtenues à partir des déformations par la loi de comportement (linéaire ou non, isotrope ou non...).

Il est également tout à fait possible d'exprimer le problème en utilisant les déplacements et les contraintes comme inconnues. Cela permet de prendre en compte certaines continuités des contraintes en certains lieux (interface entre deux matériaux par exemple, voir paragraphe 12.3 pour une synthèse) de la structure, et d'imposer les conditions aux limites de nullité des contraintes aux lieux le nécessitant (par exemple bord libre).

Par contre, le champ de contraintes peut également être « trop » continu en certains endroits selon le type de problème. Cette continuité étant liée à la constitution de l'élément fini choisi, on peut ne pas disposer d'éléments capables de modéliser correctement ce phénomène...

Notons qu'il serait tout aussi possible d'utiliser une formulation ayant les trois champs comme inconnues... **Enfin bref, tout est possible, mais il faut veiller à ce que la modélisation de chaque champ soit cohérente avec le phénomène physique à modéliser. En d'autres termes, on ne choisit pas un élément au hasard, juste parce qu'il a le bon nombre d'inconnues, il est évidemment nécessaire de se demander comment ces inconnues sont interpolées, ce que cela implique sur la régularité des solutions et donc si cela est compatible avec le phénomène physique que l'on souhaite simuler.** Un autre exemple typique est le cas des éléments « déplacement-pression » utilisés par exemple pour la modélisation des solides incompressibles (nous avons évoqué le problème précédemment).

Ce document s'adressant à des personnes connaissant déjà la méthode des éléments finis, nous allons présenter très brièvement, sous forme d'a parte, la discrétisation multi-champs, de manière un peu découplée du reste du document, juste pour fixer les idées.

Si l'on note u le champ de déplacements, celui-ci peut être approché à partir des déplacements nodaux (sous forme de vecteur) $\{q\}$ par l'intermédiaire de fonctions de formes rangées dans la matrice $[N_u]$. Compte tenu des notations utilisées, les interpolations des différents champs se font, sur chaque élément, de la manière suivante :

$$u = [N_u] \{q\} \quad (11.1)$$

De la même manière, si les déformations ε sont choisies comme champ inconnu, elles seront approchées à partir des déformations nodales (sous forme de vecteur avec la convention de l'ingénieur) $\{\gamma\}$ par l'intermédiaire de fonctions de formes rangées dans la matrice $[N_\varepsilon]$.

$$\varepsilon = [N_\varepsilon] \{\gamma\} \quad (11.2)$$

Cela vaut également pour les contraintes σ qui, si elles sont choisies comme champ inconnu, seront approchées à partir des contraintes nodales (sous forme de vecteur avec la convention de l'ingénieur) $\{\tau\}$ par l'intermédiaire de fonctions de formes rangées dans la matrice $[N_\sigma]$.

$$\sigma = [N_\sigma] \{\tau\} \quad (11.3)$$

Notons que dans la pratique, rien n'empêche de prendre les mêmes fonctions de forme pour les différents champs.

De manière analogue, le vecteur $\{\lambda\}$ des multiplicateurs de Lagrange sera interpolé de la façon suivante :

$$\{\lambda\} = [N_\lambda] \{L\} \quad (11.4)$$

On aura donc :

$$\begin{aligned} \varepsilon &= [N_\varepsilon] \{\gamma\} && \text{approximation en déformations} \\ &= [\mathcal{L}] u && \text{relation déformations déplacements} \\ &= [\mathcal{L}] [N_u] \{q\} && \text{approximation en déplacements} \\ &= [S] \sigma && \text{loi de Hooke inverse} \\ &= [S] [N_\sigma] \{\tau\} && \text{approximation en contraintes} \end{aligned} \quad (11.5)$$

et, de façon inverse :

$$\begin{aligned} \sigma &= [N_\sigma] \{\tau\} && \text{approximation en contraintes} \\ &= [H] \varepsilon && \text{loi de Hooke généralisée} \\ &= [H] [N_\varepsilon] \{\gamma\} && \text{approximation en déformations} \\ &= [H] [\mathcal{L}] u && \text{loi de Hooke en élasticité linéaire} \\ &= [H] [\mathcal{L}] [N_u] \{q\} && \text{approximation en déplacements} \end{aligned} \quad (11.6)$$

avec, en petites déformations :

$$[\mathcal{L}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \text{ en 2D, et } [\mathcal{L}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \text{ en 3D} \quad (11.7)$$

La méthode des éléments finis *classique*, ou *en déplacements*, n'utilise que le champ de déplacements comme variable. Elle est basée sur le [principe du travail virtuel](#) :

$$\delta \Pi_{TV} = \int_{\Omega} \delta \varepsilon(u) H \varepsilon(u) - \delta u \bar{f}_{\Omega} \, d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} \delta u \bar{T} \, d\Gamma \quad (11.8)$$

avec \bar{f}_{Ω} les forces imposées dans Ω et \bar{T} les forces imposées sur Γ_{σ} , où Γ_{σ} et Γ_u forment une partition de $\Gamma = \partial\Omega$. Ce principe est obtenu comme variation de la fonctionnelle de l'[énergie potentielle totale](#) exprimée en déplacements :

$$\Pi_{TV} = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \langle \varepsilon(u) \rangle [H] \{ \varepsilon(u) \} - \langle q \rangle \{ \bar{f}_{\Omega} \} \, d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} \langle q \rangle \{ \bar{T} \} \, d\Gamma \quad (11.9)$$

où les conditions subsidiaires sur les déplacements sont prises en compte directement par l'espace dans lequel les déplacements sont recherchés.

La [fonctionnelle d'Hellinger-Reissner](#) est sans doute la plus connue des fonctionnelles mixtes. Elle utilise les champs de déplacements et de contraintes comme variables indépendantes. Son expression est la suivante, \bar{U} désignant les déplacement imposés :

$$\Pi_{HR} = \int_{\Omega} -\frac{1}{2} \sigma S \sigma - \sigma_{ij,j} u + \bar{f}_{\Omega} u \, d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} (\bar{T} - T) u \, d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \bar{U} T \, d\Gamma \quad (11.10)$$

bien que l'on puisse la trouver sous une autre forme, obtenue par intégration par parties de celle-ci. Elle n'a à satisfaire à aucune condition subsidiaire. La stationnarité de cette fonctionnelle conduit aux équations d'équilibre, à la loi de comportement, et aux conditions aux limites en forces et déplacements.

Cette fonctionnelle conduit à un élément ayant les champs de déplacements et de contraintes comme inconnues nodales. Il s'en suit que toutes les composantes de ces champs sont continues. Elle conduit à la résolution d'un système du type mixte (Brezzi) :

$$\begin{bmatrix} -[A] & [B] \\ [B]^T & \mathbb{O} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\tau\} \\ \{q\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbb{O} \\ \{F\} \end{Bmatrix} \quad (11.11)$$

où la matrice de rigidité est symétrique et non définie-positive, et :

$$[A] = + \int_{\Omega} [N_{\sigma}]^T [S] [N_{\sigma}] d\Omega \quad [B] = + \int_{\Omega} [N_{\sigma}]^T [\mathcal{L}] [N_u] d\Omega \quad \{F\} = + \int_{\Omega} [N_u]^T \{\bar{f}_{\Omega}\} d\Omega \quad (11.12)$$

L'un des moyens pour obtenir une fonctionnelle hybride est d'introduire une condition sur une partie du contour par l'intermédiaire de multiplicateurs de Lagrange comme présenté un peu plus loin.

Tout comme la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner est associée à la méthode mixte, celle de [Pian et Tong](#) est indissociable de l'adjectif [hybride](#), même si, en toute rigueur, elle est une méthode mixte (deux champs) hybride (différents domaines d'interpolation) :

$$\Pi_{PT} = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma S \sigma d\Omega + \int_{\Gamma} T u d\Gamma - \int_{\Gamma_{\sigma}} \bar{T} u d\Gamma \quad (11.13)$$

Sa variation est :

$$\delta \Pi_{PT} = - \int_{\Omega} \sigma S \sigma d\Omega + \int_{\Gamma} \delta T u + \delta u T d\Gamma - \int_{\Gamma_{\sigma}} \delta u \bar{T} d\Gamma_{\sigma} \quad (11.14)$$

dont l'avantage principal est de ne pas comporter de dérivée.

Cette variation peut être transformée en :

$$\int_{\Omega} \delta \sigma (\varepsilon - S \sigma) d\Omega + \int_{\Gamma} \delta u T d\Gamma - \int_{\Gamma_{\sigma}} \delta u \bar{T} d\Gamma$$

La stationnarité de cette fonctionnelle conduit à la loi de comportement, et aux conditions aux limites en contraintes. Les conditions aux limites en déplacements seront imposées par l'espace dans lequel on cherche u .

Le système à résoudre est de la forme mixte donné précédemment à la relation (11.11) avec :

$$[A] = + \int_{\Omega} [N_{\sigma}]^T [S] [N_{\sigma}] d\Omega \quad [B] = + \int_{\Gamma} [N_{\sigma}]^T [M]^T [N_u] d\Gamma \quad \{F\} = + \int_{\Gamma_{\sigma}} [N_u]^T \{\bar{T}\} d\Gamma \quad (11.15)$$

$[M]$ étant la matrice des cosinus directeurs donnée par les relations :

$$[M] = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & n_2 \\ 0 & n_2 & n_1 \end{bmatrix} \text{ dans le plan, et } [M] = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & 0 & 0 & n_3 & n_2 \\ 0 & n_2 & 0 & n_3 & 0 & n_1 \\ 0 & 0 & n_3 & n_2 & n_1 & 0 \end{bmatrix} \text{ dans l'espace.} \quad (11.16)$$

Toutefois, le champ de contraintes n'étant défini que dans Ω , il est possible d'effectuer une [condensation statique](#) du champ de contraintes, i.e. de transformer le système (11.11) en écrivant :

$$\{\tau\} = [A]^{-1} [B] \{q\} \quad (11.17)$$

et le champ de déplacements est solution d'un système de type classique $[K] \{q\} = \{F\}$, où la matrice de rigidité $[K]$ est remplacée par la matrice de rigidité équivalente suivante :

$$[K_{eq}] = [B]^T [A]^{-1} [B] \quad (11.18)$$

Sur le plan du déroulement du calcul, on commence par résoudre une « forme classique » mais en utilisant la matrice de rigidité équivalente $[K_{eq}]$, puis le calcul des contraintes dans chaque élément se fait par la relation (11.17).

Les multiplicateurs de Lagrange peuvent être utilisés pour introduire des conditions supplémentaires directement à la fonctionnelle. Ces conditions sont généralement imposées sur Γ_X , tout ou partie de $\Gamma = \partial\Omega$. Pour ce faire, il suffit d'ajouter à la fonctionnelle Π du problème le terme :

$$\pm \int_{\Gamma_X} \langle \lambda \rangle \{\text{condition}\} \quad (11.19)$$

où les λ_i sont les multiplicateurs de Lagrange.

Les multiplicateurs de Lagrange sont généralement utilisés pour :

- introduire des variables physiques additionnelles comme inconnues ;
- obtenir des conditions de dérivabilité ou des conditions aux limites moins sévères sur les inconnues.

Notons qu'un autre de leurs avantages est de permettre l'utilisation d'une formulation différente dans chaque élément, en assurant les continuités nécessaires aux interfaces (voir synthèse de ce problème d'interface au paragraphe 12.3). Bien sûr, apparaissant comme inconnues, les multiplicateurs de Lagrange viennent grossir la taille du système à résoudre.

11.2 Plusieurs modélisations d'un même problème

La qualité de l'approximation des différents champs est non seulement liée au nombre de champs inconnus choisis, mais également au choix de l'élément. Ce dernier peut traduire une « simplification » du problème physique : il s'agit du problème du choix du type de modélisation, en une, deux ou trois dimensions. **Selon le type d'information recherché, un modélisation « plus simple » qu'une autre peut fournir les résultats escomptés.**

Dans ce paragraphe, nous nous proposons d'étudier un exemple où **seul le champ de déplacement apparaît comme inconnue nodale**. Toutefois, si ce n'est plus le nombre de champ qui peut modifier la formulation, nous allons voir que la mécanique offre moult théories qui toutes ont leurs avantages et inconvénients, mais qui surtout **ne sont pas toutes équivalentes**.

Histoire

La paternité de la théorie des poutres est attribuée à Galilée, mais des études récentes indiquent que Léonard de Vinci l'aurait précédé. De Vinci avait supposé que la déformation variait de manière linéaire en s'éloignant de la surface neutre, le coefficient de proportionnalité étant la courbure, mais il ne put finaliser ses calculs car il n'avait pas imaginé la loi de Hooke^a. De son côté, Galilée était parti sur une hypothèse incorrecte (il supposait que la contrainte était répartie uniformément en flexion), et c'est Antoine Parent qui obtint la distribution correcte.

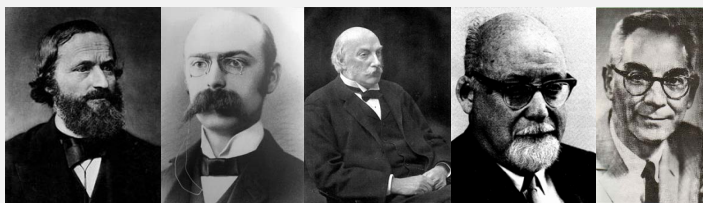
Ce sont Leonhard Euler et Jacques Bernoulli qui émirent la première théorie utile vers 1750, tandis que Daniel Bernoulli, le neveu du précédent (et le fils de Jean Bernoulli), écrivit l'équation différentielle pour l'analyse vibratoire. À cette époque, le génie mécanique n'était pas considéré comme une science, et l'on ne considérait pas que les travaux d'une académie des mathématiques puissent avoir des applications pratiques... On continua donc à bâtir les ponts et les bâtiments de manière empirique. Ce n'est qu'au XIX^e siècle, avec la Tour Eiffel et les grandes roues, que l'on démontra la validité de la théorie à grande échelle.



Euler J. Bernoulli D. Bernoulli Timoshenko

La théorie des poutres est une simplification unidimensionnelle. On distingue :

- la théorie d'Euler-Bernoulli, qui néglige l'influence du cisaillement ;
- la théorie de Timoshenko qui prend en compte l'effet du cisaillement.



Kirchhoff Love Rayleigh Reissner Mindlin

En 1888, Love utilise les hypothèses de Gustav Kirchhoff, elles-mêmes inspirées des hypothèses d'Euler-Bernoulli pour les poutres, pour fonder une théorie des plaques minces.

La théorie des plaques épaisses a été consolidée par Mindlin à partir des travaux de Rayleigh (1877), Timoshenko (1921), Reissner (1945) et Uflyand (1948).

La théorie des plaques minces, ou théorie de Love-Kirchhoff, suppose que :

- le plan moyen (équivalent de la courbe moyenne des poutres) est initialement plan ;
- le feuillet moyen (équivalent de la fibre neutre des poutres) ne subit pas de déformation dans son plan ; on ne considère que le déplacement transversal w des points du feuillet moyen ;
- modèle de Kirchhoff : les sections normales au feuillet moyen restent normales lors de la déformation ; en conséquence, on peut négliger le cisaillement ;

- l'épaisseur est faible ; en conséquence, les contraintes dans le sens de l'épaisseur sont supposées nulles ;
- on reste en petites déformations.

Notons que cette théorie permet de déterminer la propagation des ondes dans les plaques, ainsi que l'étude des ondes stationnaires et des modes vibratoires.

Dans la théorie des plaques épaisses, ou théorie de Reissner et Mindlin, la fibre normale reste toujours rectiligne, mais n'est plus nécessairement perpendiculaire au plan moyen. On ne peut donc plus négliger le cisaillement.

a. Robert Hooke, qui désirait obtenir une théorie des ressorts en soumettant ces derniers à des forces croissantes successives, énonça en 1678, à partir d'expériences datant de 1675, la loi de comportement suivante : « ut tensio sic vis » ce qui signifie « telle extension, telle force », ou bien en termes modernes « l'allongement est proportionnel à la force ».

La figure 11.1 propose trois modélisations d'un même problème. Il s'agit d'une poutre encastree à une extrémité et soumise à une force décentrée à l'autre. Vaut-il mieux modéliser l'intégralité du volume de la poutre, la traiter comme une plaque, ou peut-on se contenter d'un modèle de poutre ?

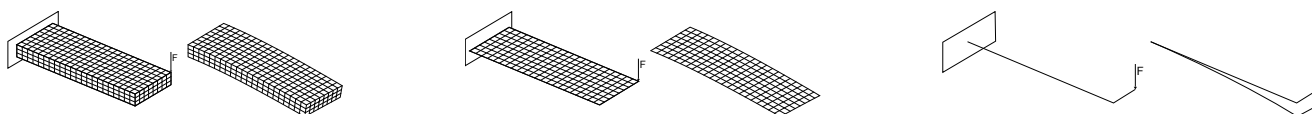


FIGURE 11.1: Trois modélisations d'un même problème.

L'étude de la contrainte axiale σ_{xx} est donnée à la figure 11.2. Si les cartographies présentent bien la même

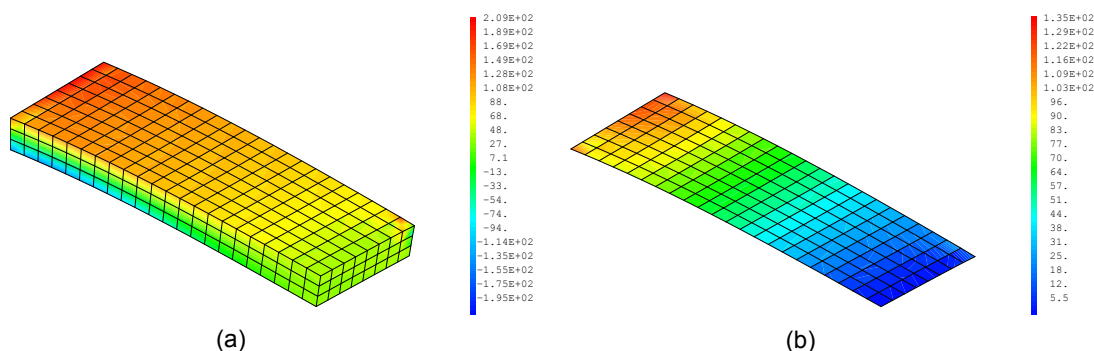


FIGURE 11.2: Contrainte axiale sur la peau supérieure : (a) modèle 3D, (b) modèle 2D.

répartition, seul le modèle 3D permet de mettre en évidence la concentration de contrainte due à la force ponctuelle.

Une comparaison plus fine des trois modélisations concernant cette même contrainte normale le long de trois lignes est reportée à la figure 11.3. Les différences de résultats proviennent des **hypothèses cinématiques** et des **composantes accessibles** dans les différentes théories utilisées. On y voit que loin des extrémités, les trois solutions concordent parfaitement, conformément au principe de Saint-Venant.¹ Les différences proviennent des effets de bord, i.e. des variations locales des contraintes et déformations au voisinage des conditions aux limites.

Les **hypothèses cinématiques** sont :

- la **théorie des poutres** (Figure 11.4a) suppose que chaque section droite suit un mouvement de solide rigide. Les sections ne peuvent donc pas se déformer, elles peuvent uniquement se translater et tourner dans l'espace (sans forcément rester perpendiculaires à la ligne moyenne, car dans ce cas on considère une théorie avec cisaillement transverse) ;
- la **théorie des plaques** (Figure 11.4b), moins restrictive, suppose que chaque segment perpendiculaire au plan moyen de la plaque suit un mouvement de solide rigide (là encore, sans forcément rester perpendiculaire au plan moyen). Elle permet donc de modéliser certaines formes de déformations des sections, planes

1. Le **principe de Saint-Venant** précise que le comportement en un point quelconque de la poutre, pourvu que ce point soit suffisamment éloigné des zones d'applications des forces et des liaisons, est indépendant de la façon dont sont appliquées les forces et de la façon dont sont physiquement réalisées les liaisons ; le comportement dépend alors uniquement du torseur des forces internes en ce point.

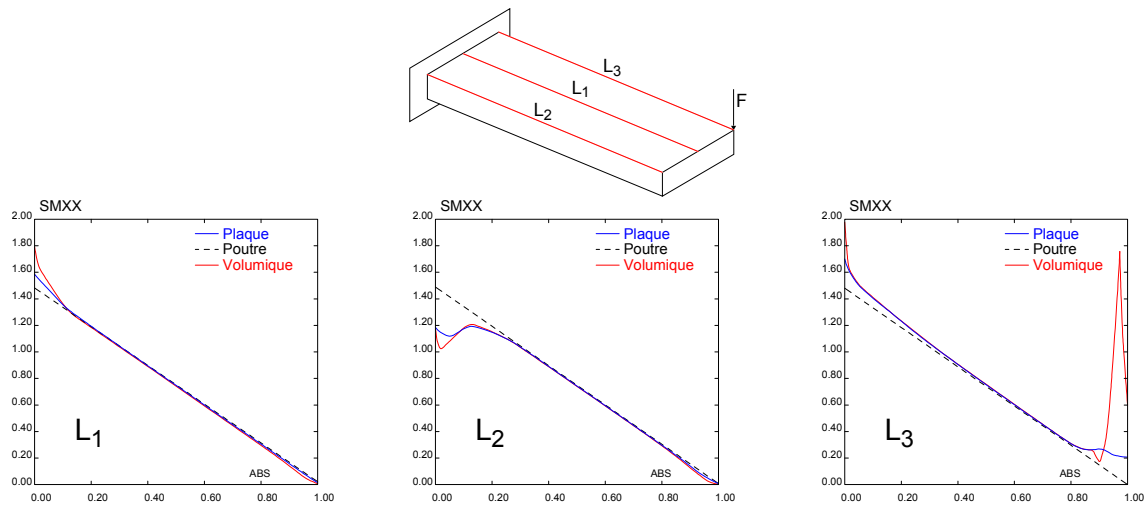


FIGURE 11.3: Contrainte axiale sur la peau supérieure en différentes sections

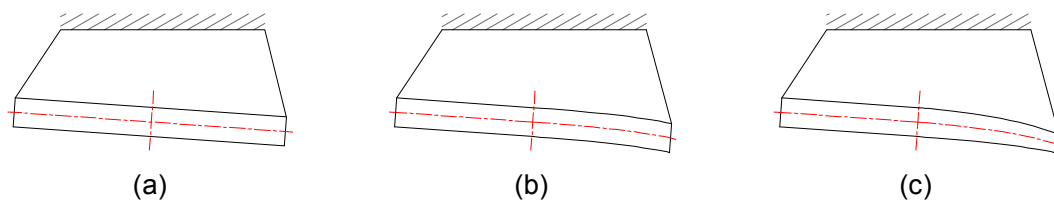


FIGURE 11.4: Mouvements d'une section droite : (a) théorie des poutres ; (b) théorie des plaques ou coques ; (c) théorie volumique

(flexion et cisaillement dans le plan de la section, traction dans le sens de la largeur) ou hors plan (certains types de gauchissement). Cependant, les segments ne pouvant pas changer de longueur, elle ne permet pas de modéliser l'écrasement de l'épaisseur ;

- enfin, la **théorie 3D** (Figure 11.4c) ne comporte aucune de ces restrictions et peut modéliser n'importe quelle forme de gauchissement ou d'écrasement, à condition que le maillage employé soit suffisamment fin.

Ici, la comparaison des résultats « plaque » et « 3D » montre que la contribution de l'écrasement de la section à la flèche semble négligeable (0,7% d'écart). Ce n'est pas forcément vrai car l'écrasement est un phénomène localisé sous la charge et lié au contact, qui a été modélisé très grossièrement... Cette très forte concentration de contraintes sous la charge est caractéristique d'une **singularité**. La valeur obtenue est peu fiable. **On peut même dire que physiquement, une force ponctuelle n'existe pas. Elle est forcément distribuée sur une petite surface...**

De même, la comparaison des résultats « poutre » et « plaque » montre que la flexion et le cisaillement de la section contribuent davantage à la flèche que l'écrasement (6,4% d'écart) : la largeur de la pièce est visiblement suffisante pour que les déformations des sections droites provoquent un déplacement vertical non négligeable sous la charge.

Il est essentiel de noter que toutes les théories ne permettent pas d'accéder à toutes les composantes du champ des contraintes : de manière générale, seuls les efforts qui travaillent dans les déplacements permis par la théorie sont accessibles (les théories sont ainsi faites afin de pouvoir respecter le premier principe de la thermodynamique dont l'écriture nécessite de calculer le travail de tous les efforts permis par la théorie). Ainsi :

- la **théorie des poutres** ne permet pas de calculer les contraintes dans le plan transversal (σ_{yy} , σ_{zz} et σ_{yz}) du fait de l'indéformabilité des sections droites ;
- la **théorie des plaques** ne permet pas de calculer la contrainte normale au plan de la plaque σ_{zz} , du fait de l'indéformabilité des segments perpendiculaires à ce plan ;
- enfin, la **théorie 3D** permet de calculer les six composantes du tenseur des contraintes.

À ces limitations théoriques peuvent s'ajouter des **limitations techniques** propres à chaque logiciel, susceptibles de rendre d'autres grandeurs physiques inaccessibles. **Avant d'effectuer une modélisation par éléments finis, il est donc indispensable de s'assurer que le logiciel utilisé et son cadre théorique permettent bien d'accéder au résultat**

voulu (en plus d'être pertinents vis-à-vis de la géométrie du produit, de son environnement et du comportement attendu).

De plus, si certains logiciels peuvent avoir des « limitations techniques », ils peuvent également disposer de **méthodes de post-traitement** susceptibles d'améliorer ou de permettre d'accéder à certaines composantes (sous certaines hypothèses). Cela aussi doit être pris en compte.

11.3 Exemple : retour sur le calcul de poutre du paragraphe 11.1 avec CAST3M

Nous allons reprendre pour partie l'exemple de la poutre encastree traitée au paragraphe précédent et présenter le listing CAST3M correspondant.

11.3.1 Modélisation 2D

Nous commençons par définir les données du problème : longueur, largeur, épaisseur, nombre d'éléments selon chacune de ces directions, et force appliquée :

```
1 * DONNEES
2 * geometrie
3 long1=22.0;
4 larg1=8.;
5 ep1=4;
6 * maillage
7 nlong1=22;
8 nlarg1=8;
9 * effort
10 Forc1=-41.;
```

Puis nous définissons la dimension du problème (modèle tridimensionnel), et le type de découpage :

```
11 OPTION DIME 3 ELEM QUA4;
```

Nous définissons les points k_i (dénommés ainsi pour rappel de la syntaxe ANSYS des keypoints k, i, \dots), puis les lignes L_i , et la surface S_1 .

```
12 k1 = 0. 0. 0.;
13 k2 = long1 0. 0.;
14 k3 = long1 larg1 0.;
15 k4 = 0. larg1 0.;
16 *
17 L1 = DROI nlong1 k1 k2;
18 L2 = DROI nlarg1 k2 k3;
19 L3 = DROI nlong1 k3 k4;
20 L4 = DROI nlarg1 k4 k1;
21 *
22 S1 = DALLER L1 L2 L3 L4;
```

Le modèle est un modèle de mécanique élastique isotrope utilisant l'élément de coque **COQ4** pour le maillage S_1 :

```
1 Model1 = MODL S1 MECANIQUE ELASTIQUE ISOTROPE COQ4;
```

Enfin on résout le problème après avoir fourni les données matérielles et les conditions aux limites :

```
2 Mater1 = MATER Model1 YOUNG 70000.0 NU 0.33 RHO 2700.0;
3 Car1 = CARAC Model1 EPAI ep1;
4 Mater1 = Mater1 ET Car1;
5 MR1 = RIGID Model1 Mater1;
6 CL1 = BLOQ DEPL L4;
7 CL2 = BLOQ ROTA L4;
8 FOR1 = FORC(0. 0. Forc1) k3;
9 MTOT1 = MR1 ET CL1 ET CL2;
10 Dep11 = RESO MTOT1 FOR1 ;
```

On peut post-traiter les résultats et les afficher.

Les composantes de Sig_1 dans le repère LOCAL sont :

- les efforts normaux : N11, N22 ;
- l'effort de cisaillement plan : N12 ;
- les moments de flexion : M11, M22 ;
- le moment de cisaillement plan : M12 ;

— les efforts tranchants V_1, V_2 .

Les composantes de Eps_1 dans le repère LOCAL sont :

— les élongations normales dans le plan : EPSS, EPTT ;

— les cissons dans le plan et transverses : GAST, GASN, GATN ;

— les courbures : RTSS, RTTT, RTST.

```
11 * DEPLACEMENTS
12 UZ1 = EXCO 'UZ' dep1;
13 *TRAC UZ1 S1;
14 *
15 * DEFORMEE
16 def0 = DEFO S1 Dep1 0.0 BLEU;
17 def1 = DEFO S1 Dep1;
18 *TRAC (def0 ET def1);
19 *
20 * CONTRAINTES:
21 Sig1 = SIGM Model1 Mater1 Dep1;
22 Siigg1 = EXCO M11 Sig1;
23 TRAC Siigg1 Model1 def1;
24 *
25 * DEFORMATIONS
26 Eps1 = EPSI Model1 Mater1 Dep1;
27 Eppss1 = EXCO RTSS Eps1;
28 *TRAC Eppss1 Model1;
29 *
30 fin;
```

11.3.2 Modèle 3D

Nous allons maintenant construire le modèle tridimensionnel. Comme nous voulons travailler à l'économie, nous repartons du fichier précédent que nous adaptons.

```
1 * DONNEES
2 * geometrie
3 long1=22.0;
4 larg1=8.;
5 ep1=2;
6 * maillage
7 nlong1=22;
8 nlarg1=8;
9 nep1=3;
10 * effort
11 Forc1=-41.;
```

Cette fois, nous nous servons de l'élément volumique **CUB8** au lieu de l'élément surfacique **QUA4**.

```
1 OPTION DIME 3 ELEM CUB8;
2 *
3 k1 = 0. 0. 0.;
4 k2 = long1 0. 0.;
5 k3 = long1 larg1 0.;
6 k4 = 0. larg1 0.;
7 *
8 L1 = DROI nlong1 k1 k2;
9 L2 = DROI nlarg1 k2 k3;
10 L3 = DROI nlong1 k3 k4;
11 L4 = DROI nlarg1 k4 k1;
12 *
13 S1 = DALLER L1 L2 L3 L4;
```

À partir de la surface S_1 , qui est la même que précédemment, nous allons créer le volume V_1 par translation selon le vecteur $Vect_1$.

Nous en profitons également pour créer $Face_1$ sur laquelle porterons les conditions aux limites. Notons par exemple que la ligne L_4 appartient bien au maillage V_1 , puisque ce dernier est construit dessus. Par contre, la surface $face_1$ n'appartient pas à V_1 , il est donc nécessaire de la lier à V_1 en utilisant la commande **ELIM**.

```
1 Vec1=0. 0. (-1.0*ep1);
2 V1=S1 VOLU nep1 TRAN Vec1;
3 Face1 = L4 TRAN nep1 Vec1;
4 ELIM 0.000001 V1 Face1;
```

Cette fois, le modèle correspond au maillage V_1 et utilise l'élément **CUB8**.

```
1 Model1 = MODL V1 MECANIQUE ELASTIQUE ISOTROPE CUB8;
```

On résout, puis on post-traite.

```
2 Mater1 = MATER Model1 YOUNG 70000.0 NU 0.33 RHO 2700.0;
3 MR1 = RIGID Model1 Mater1;
4 CL1 = BLOQ DEPL Face1;
5 CL2 = BLOQ ROTA Face1;
6 FOR1 = FORC(0. 0. Forc1) k3;
7 MR1 = MR1 ET CL1 ET CL2;
8 Dep11 = RESO MR1 FOR1 ;
9 *
10 * DEPLACEMENTS
11 UZ1 = EXCO 'UZ' dep11;
12 *TRAC CACH UZI V1;
13 * DEFORMEE
14 def0 = DEFO V1 Dep11 0.0 BLEU;
15 def1 = DEFO V1 Dep11;
16 *TRAC CACH (def0 ET def1);
17 *
18 * CONTRAINTES:
19 Sig1 = SIGM Model1 Mater1 Dep11;
20 * Les composantes de Sig1 sont: VONMISES, SMXX, SMYY, SMZZ, SMXY, SMXZ, SMYZ
21 Siigg1 = EXCO SMXX Sig1;
22 * on trace sur la geometrie deformee, c'est plus beau
23 TRAC CACH Siigg1 Model1 def1;
24 *
25 * DEFORMATIONS
26 *Eps1 = EPSI Model1 Mater1 Dep11;
27 *TRAC CACH Eps1 Model1;
28 *
29 fin;
```

11.4 Interpolation des champs et de la géométrie

Un élément est dit **isoparamétrique** si on prend les mêmes fonctions d'interpolation pour le déplacement et la géométrie.

De manière évidente, on définit également les éléments super et sous-paramétriques, comme illustré à la figure 11.5.

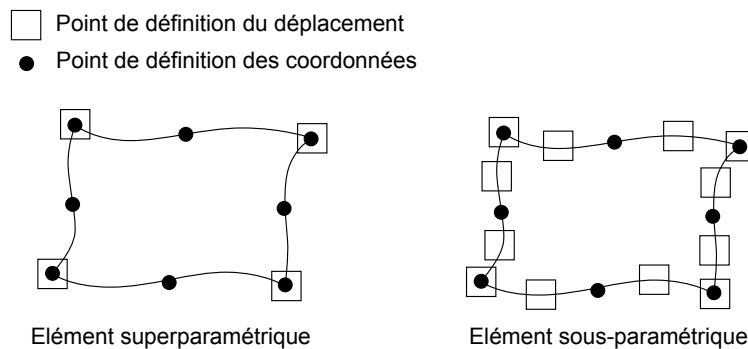


FIGURE 11.5: éléments finis non isoparamétriques

Ceci est juste une remarque en passant, pour définir le vocabulaire en somme, nous n'en reparlerons plus dans la suite du document.