

L'acoustique

Notes — En complément avec ce qui a été vu aux chapitres précédents 17 et 18 sur les problèmes non stationnaires et les ondes, nous allons nous focaliser dans ce chapitre sur l'acoustique, et plus particulièrement sur le calcul de problèmes pour lesquels les fréquences restent inférieures à quelques milliers de Hz. Nous en profiterons pour effectuer une présentation pratique de l'acoustique et des solutions qui peuvent être mises en œuvre physiquement.

Nous avons déjà présenté la problématique de l'acoustique à plusieurs reprises au long de ce document : au paragraphe 6.4.2, l'équation des ondes a été donnée dans le cas de l'acoustique sous forme d'équation différentielle (6.12) dont l'inconnue est la pression acoustique ; des remarques plus « physiques » concernant l'acoustique ont été faites au paragraphe 6.7, notamment concernant les échelles d'énergies mises en œuvre, ainsi que sur les aspects solidien et aérien ; mais c'est surtout au paragraphe 8.4 qu'ont été présentées l'équation d'Helmholtz (8.59) et sa formulation faible. Quant à la formulation éléments finis, elle a été abordée au chapitre 18, où ont été décrit les systèmes matriciels à traiter selon les cas (réponse libre, périodique ou transitoire, amortie ou non).

Toutefois, nous souhaitons apporter des éléments supplémentaires sur le sujet :

- au paragraphe 19.1, nous proposerons une présentation de l'acoustique « sur le terrain » : nous exposerons brièvement l'acoustique à partir des problématiques qui se posent physiquement, et nous présenterons quelques solutions typiquement utilisées pour résoudre ces problèmes d'acoustique. Nous verrons d'ailleurs que les problèmes rencontrés en hautes fréquences sont généralement aisément résolus, et qu'il convient donc de se concentrer sur les fréquences inférieures à quelques kHz.
- au paragraphe suivant 19.2 nous reviendrons plus en détails sur la mise en œuvre pratique d'un calcul acoustique par éléments finis.

La motivation principale vient de ce que, dans le paragraphe 18.5, nous avons indiqué que la méthode des éléments finis devait se cantonner aux basses fréquences, celles-ci allant jusqu'à 600 Hz environ. Il est vrai qu'au-delà, de nombreuses autres méthodes existent... et nous avons profité de ce paragraphe pour les présenter. Néanmoins, l'augmentation rapide des capacités des ordinateurs, fait qu'il est tout à fait raisonnable aujourd'hui de traiter des cas allant jusqu'à quelques milliers de Hz, disons 3000 Hz pour fixer les idées, à l'aide de la méthode des éléments finis. Cela permet de traiter la plupart des cas pratiques qui se posent à nous, puisque nous aurons vu auparavant qu'il est souvent inutile de monter plus haut en fréquence.

- Des illustrations sur quelques cas types seront faites au paragraphe 19.3.

19.1 Introduction à l'acoustique physique

Nous nous proposons d'étudier comment une nuisance vibro-acoustique se propage depuis son émission jusqu'à sa réception. La source pourra être mécanique, aéro- ou hydrodynamique... et pourra couvrir un très large spectre de fréquences, depuis les plus basses (excitation vibratoire, i.e. inférieure à environ 500 Hz), jusqu'aux plus hautes (excitation acoustique, depuis 500 jusqu'à environ 8000 Hz). La propagation nécessitera de connaître le ou les modes de transmission (solidien, aérien) ainsi que l'environnement de transmission (champ ouvert ou fermé). La réception quant à elle sera liée à la perception, qui elle-même sera décrite de manière normative (niveau, puissance) ou sensorielle (psycho-acoustique...).

19.1.1 Émission

Face à un problème vibro-acoustique, on est amené à considérer les questions suivantes :

- **Localisation** : où est-ce que ça fait du bruit ? Il s'agit de trouver, dans un ensemble qui peut être très complexe (par exemple un véhicule, un compresseur...), où sont les sources.
- **Identification/Séparation** : là où ça fait du bruit, qu'est-ce qui fait du bruit exactement ? De manière plus détaillée que la localisation, il peut être nécessaire, pour les sources identifiées, de déterminer la contribution de certaines de leurs parties ou sous-ensembles : selon la modélisation souhaitée, on pourra se contenter de dire que la source vibro-acoustique dans un véhicule est le moteur, où alors souhaiter s'intéresser plus finement aux injecteurs, au carter, à la boîte de vitesse...
- **Enregistrement/Caractérisation** : quel bruit est émis par chaque source ? Il s'agit de réaliser des enregistrements permettant de caractériser la source vibro-acoustique considérée. Par exemple, un vibromètre laser permet de récupérer les vibrations (accélérations, vitesses), sans contact. De là, il est possible de re-synthétiser le son d'une seule pièce parmi un ensemble de pièces en fonctionnement. Les enregistrements permettent de caractériser la source en terme de spectre, puissance, directivité... et fournissent également des données utiles pour la restitution de résultats (par exemple données audio binaurales).

La caractérisation des sources peut également déboucher sur des lois phénoménologiques, qui relient les caractéristiques vibro-acoustiques à certains paramètres tels que par exemple : le rapport de boîte, le régime moteur, le régime ventilateur [88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95]...

Notons enfin que lorsque l'on parle d'acoustique, la propagation finale se fait forcément dans l'air puisque c'est celle qui arrive jusqu'aux oreilles...

19.1.2 Transmission

La figure 19.1 donne la répartition schématique des puissances (ou les différents types d'ondes à considérer).

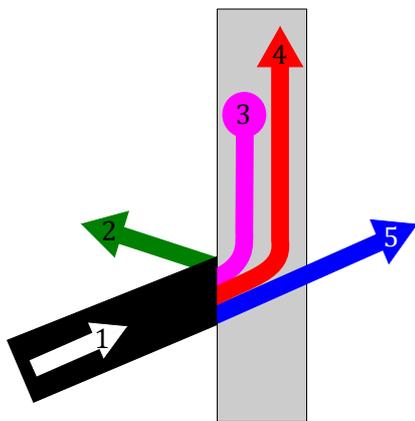


FIGURE 19.1: Répartition schématique des puissances

inconnue) de ces trois phénomènes.

Une onde incidente (1) arrivant sur un obstacle se trouve en partie réfléchi par celui-ci (2), alors qu'une partie est directement transmise (5). Toutefois, cela ne représente pas la totalité de l'énergie incidente, car il reste encore une fraction qui est absorbée ou dissipée par l'obstacle (3), et une dernière qui se propage au sein de l'obstacle (4) et qui peut resurgir plus loin dans la structure considérée.

Pour les matériaux acoustiques, la réflexion et la transmission seront déduites de mesures en tube d'impédance ou en cabine alpha, la capacité d'isolation sera caractérisée en utilisant la petite cabine, alors que la capacité de rayonnement sera appréhendée par le banc RTC III.

L'isolement est une donnée globale qui traduit la capacité d'un ensemble à « faire barrière au bruit ». Il s'agit tout simplement de la différence entre ce qui attaque d'un côté et ce que l'on récupère de l'autre. Un isolement donné ne donne donc pas d'information sur la manière dont il est obtenu : réflexion, amortissement, absorption, ou plus probablement par une combinaison plus ou moins complexe (et

Modes de propagation

Comme déjà mentionné au paragraphe 6.7, il peut être nécessaire de considérer un ou plusieurs des modes de propagation suivants :

- **solidien/solidien** : la source excite mécaniquement la structure, et la vibration se propage dans la structure ;
- **aérien/aérien** : la source émet une vibration (un bruit) qui se propage dans l'air (en général). il s'agit de la propagation d'une onde acoustique de sa source jusqu'au récepteur, dans l'air ;
- **solidien/aérien** : il s'agit du cas du rayonnement. La source excite mécaniquement une structure, et celle-ci ré-émet une onde dans l'air.
- **aérien/solidien** : dans le cas de sources acoustiques très puissantes, l'excitation acoustique se propageant dans l'air peut arriver à faire vibrer une structure.

Dans les deux premiers cas, on doit résoudre un problème de propagation dans un milieu (structure ou air). La sollicitation dépend du temps, donc on peut appliquer ce qui a été vu au chapitre 17 ; mais comme elle est généralement périodique, et que l'on s'intéresse au régime stationnaire, on peut alors utiliser ce qui a été vu au chapitre 18 sur les ondes.

Dans les deux derniers cas, il s'agit d'un calcul où il faut prendre en compte le couplage fluide-structure. La source étant périodique, on utilise encore ce qui a été vu au chapitre 18, aussi bien dans la structure que dans l'air. Évidemment, ce sont les techniques du chapitre 17 qui s'appliquent si l'on s'intéresse au régime transitoire.

Dans la « réalité », tous ces cas existent bien :

- **solidien/solidien** : tout moteur, même monté sur des silenbloks qui filtrent l'excitation, génère dans les supports, puis dans toute la structure porteuse, des vibrations. On est donc bien face à la propagation de vibrations au sein de solides ;
- **aérien/aérien** : si l'on n'entre pas dans le détail de son fonctionnement mécanique, un haut-parleur est une source aérienne qui génère une onde acoustique qui se propage dans un volume d'air contenu, par exemple, dans une salle. Si l'on s'intéresse au niveau de pression acoustique en un point de la salle, on a une modélisation où seul le volume intérieur de la salle est nécessaire (et les bonnes conditions aux limites, mais nous y reviendrons) ;
- **solidien/aérien** : dans le cas de structures en treillis portant des panneaux, ce qui est le cas pour la conception de cars et bus, le moteur, situé à l'arrière, excite la structure de manière solidienne... et des vibrations se propagent dans tout le bus, où elles trouvent régulièrement, et jusqu'à l'avant, des panneaux qui vont se mettre à rayonner, i.e. à transformer cette vibration mécanique en bruit se propageant dans l'air jusqu'aux oreilles du conducteur et des passagers ;
- **aérien/solidien** : dans le cas de structures légères, par exemple pour des véhicules sans permis, le moteur excite la structure non seulement de manière solidienne, mais également de manière aérienne. Le bruit généré par le moteur est tel, au sein du compartiment moteur, que cette sollicitation aérienne est capable de faire vibrer le tablier de séparation moteur/habitacle, qui dans ce cas précis est généralement très peu isolant (typiquement en ABS thermoformé avec une épaisseur avant transformation d'environ 3 mm, donc une épaisseur, dans les endroits les plus déformés, de l'ordre du millimètre). Il suffit pour le mettre en évidence de remplacer le moteur par un haut parleur découplé du châssis et générant une pression acoustique équivalente à celle du moteur.

Tous ces cas existent donc bien, et peuvent même se superposer. Il convient donc d'être prudent dans le choix de la modélisation la plus adaptée au problème étudié.

Fonctionnement des solutions acoustiques

Il en va de même dans l'utilisation de matériaux ou solutions acoustiques. Plusieurs phénomènes peuvent intervenir et se superposer :

- **absorption** : il s'agit du cas où l'énergie acoustique est dissipée dans ou par le matériau ou la solution. Pour les matériaux poreux ou fibreux, des modèles de fluides équivalent existent. Ils sont modélisés par des paramètres tels que la porosité, la tortuosité... dans le cas de résonateurs ou de foils absorbers, ce sont les caractéristiques du matériau constituant ceux-ci ainsi que leur géométrie qui déterminent leur performance d'absorption ;

- **isolation** : il s'agit du cas où l'on fait barrière au bruit. Les notions d'étanchéité et de masses sont prépondérantes. On commencera donc par éviter au maximum toutes les fuites acoustiques (tous les trous). Ensuite, on pourra utiliser le fait que l'isolation est liée à la masse : on gagne 6 dB par doublement de masse (en fait $20 \log_{10} 2$).

Enfin, d'autres systèmes peuvent être utilisés. Parmi ceux-ci, le système « masse-ressort » constitue l'une des plus anciennes solutions pour améliorer l'isolation acoustique. Il s'agit de réaliser un système rudimentaire de double paroi découplées. Lorsque la première paroi est attaquée par le bruit et les vibrations, la seconde réagit de manière découplée. On peut choisir le ressort et la masse pour « filtrer » les fréquences indésirables. Ce système présente par contre une fréquence de coupure pour laquelle l'isolation n'est pas améliorée, mais au contraire le phénomène est amplifié.

- **amortissement** : il s'agit du cas où l'énergie vibratoire est dissipée dans un matériau choisi pour ses propriétés d'amortissement visqueux, ou par son mode de fixation (collage, montage en contrainte...).

L'ajout d'une pièce d'insonorisation, par exemple réalisée par thermocompression de matières fibreuses, sur une structure a pour effet d'augmenter l'absorption. Toutefois, cette pièce possède une masse, même faible, qui ajoute de l'isolation. De plus, son mode de fixation peut apporter de l'amortissement à la structure étudiée. Toutefois, si la pièce est montée sur une tôle, sa masse étant vraiment faible face à celle de la tôle, il n'est pas faux de ne pas prendre en compte son apport sur l'isolation. Si de plus elle est juste maintenue mécaniquement, il est également possible de négliger son influence en terme d'amortissement.

Compléments sur l'absorption

Revenons quelques instants sur l'absorption, et plus particulièrement sur les performances d'absorption des solutions existantes, qui sont illustrées sur la figure 19.2.

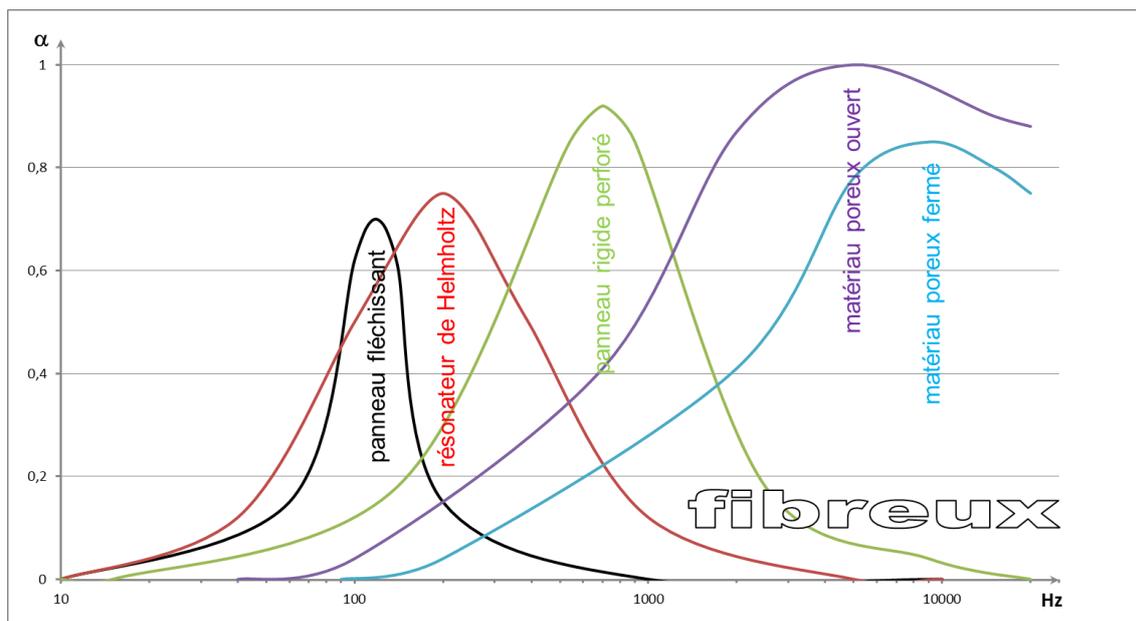


FIGURE 19.2: Coefficient d'absorption pour différents types d'absorbants

On voit sur la figure 19.2 que l'on peut distinguer deux types de comportements :

- un comportement d'absorption centré sur une fréquence : il s'agit des panneaux fléchissants, des résonateurs de Helmholtz et des panneaux rigides perforés. L'avantage de ces systèmes est qu'ils permettent d'attaquer des fréquences relativement basses. Leur inconvénient est que face à une source large bande, ils ne traitent qu'une infime partie du problème ;
- et un comportement d'absorption large bande : il s'agit des matériaux poreux et fibreux. Bien que n'apportant qu'une absorption très limitée aux basses fréquences, ils permettent de bien traiter le spectre en hautes fréquences et constituent donc une solution simple et aisée à mettre en œuvre. La figure 19.3 montre le rôle de la porosité dans l'absorption, en augmentant le parcours moyen parcouru par l'onde acoustique. La

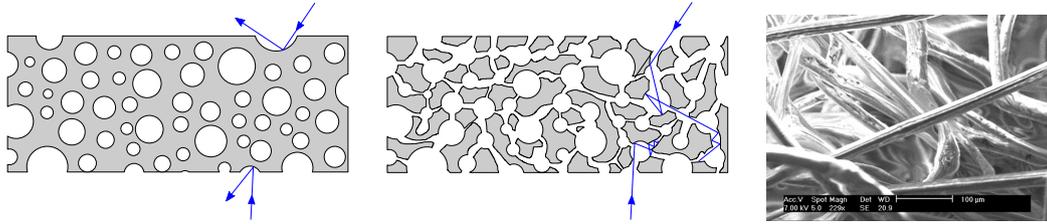


FIGURE 19.3: Rôle de la porosité

dernière photo est une microscopie d'un matériau fibreux réel (on remarquera qu'il y a « beaucoup d'air » et peu de fibres finalement).

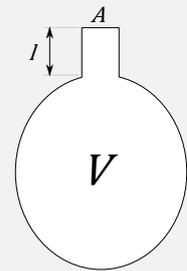
Tout cela justifie la remarque que nous faisons en introduction : la partie difficile à traiter dans les problèmes d'acoustique ne concerne que les basses fréquences où il n'existe que très peu de solutions, surtout simples de mise en œuvre. Les hautes fréquences (supérieures à 2 ou 3000 Hz) peuvent être facilement traitées (poreux, fibreux). De plus, l'oreille humaine, bien que percevant les fréquences de 20 à 20000 Hz, est surtout sensible dans la bande de fréquences allant de 1 à 4 kHz. **Dès lors, bien qu'une étude acoustique doive prendre en compte la totalité du spectre (de la source et audible), du point de vue calculatoire (et du point de vue de la conception des solutions), c'est au-dessous de 3000 Hz que le travail devra se concentrer.** Ainsi donc, un traitement par la méthode des éléments finis est tout à fait envisageable pour faire face à la majorité des problèmes : nous entendons par là, avec un « coût » de calcul raisonnable.

Histoire

Complément sur le résonateur de Helmholtz.

Les résonateurs de Helmholtz sont une solution très ancienne, puisqu'on utilisait déjà des vases dans les théâtres antiques pour la correction acoustique. Le nom provient d'un dispositif créé dans les années 1850 par Hermann von Helmholtz afin de déterminer la hauteur des différents tons.

Les applications des résonateurs de Helmholtz sont nombreuses. En *acoustique des salles*, ils permettent d'atténuer les fréquences médiums. Le principe du résonateur de Helmholtz est le principe de base permettant de faire des enceintes acoustiques utilisant la technique de l'*enceinte bass-reflex*. L'enceinte contenant le haut-parleur est ouverte par un tube où l'air se déplace et crée donc un résonateur auxiliaire entrant en résonance avec le haut-parleur actif principal permettant d'abaisser la fréquence de coupure basse de l'enceinte. En *aéronautique*, pour limiter le bruit des réacteurs civils, les nacelles et entrées d'air sont constituées de panneaux sandwich nid d'abeilles recouverts d'une tôle perforée aluminium ou composite. Le résonateur est ainsi constitué par la bouteille (cellule du nid d'abeilles) et le col (perçage de la tôle). En *automobile*, la résonance de Helmholtz peut être utilisée pour améliorer le remplissage en air des moteurs à combustion interne...



Résonateur de Helmholtz

Le résonateur est assimilé à une cavité fermée de volume V qui communique avec l'extérieur par l'intermédiaire d'un col de longueur l et de section A . On fait par ailleurs l'hypothèse que les dimensions du résonateur sont petites devant la longueur des ondes acoustiques considérées, que l'air se comporte comme un gaz parfait et que l'on peut négliger les effets thermiques ainsi que les effets dissipatifs. Alors la fréquence du résonateur est :

$$f_0 = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{A}{Vl}} \quad (19.1)$$

où c est la vitesse du son. Ce système se comporte comme un système masse ressort : on se retrouve face aux oscillations libres de l'inertance pneumatique $\rho A/l$ de la colonne d'air dans le col sur la raideur pneumatique $\gamma p/V$ de l'air contenu dans la cavité V . Il ne fait pas intervenir la propagation des ondes. La résonance de Helmholtz à la fréquence f_0 doit donc être distinguée des modes propres acoustiques de la cavité, qui sont solutions de l'équation d'Helmholtz, et se situent à des fréquences beaucoup plus élevées que f_0 .

Le coefficient ou facteur d'absorption acoustique est le rapport de l'intensité acoustique qui n'est pas réfléchi (absorbée, propagée et transmise) sur l'intensité acoustique incidente. On définit le **coefficient d'absorption de Sabine** α_S , ou valeur moyenne du coefficient d'absorption, par :

$$\alpha_S = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i S_i}{S_{totale}} \quad (19.2)$$

où la surface totale S_{totale} est composée de n surfaces S_i de coefficient d'absorption α_i .

L'aire d'absorption de chaque surface S_i , quant à elle, est définie par :

$$A_i = \alpha_i S_i \quad (19.3)$$

L'aire d'absorption équivalente A est calculée par la formule de Sabine datant des années 1898 :

$$A = 4mV + \sum_{i=1}^n S_i \alpha_i = 4mV + \sum_{i=1}^N A_i \quad (19.4)$$

où m est l'amortissement du milieu (en général l'air) et V le volume de la salle (ou du volume) considéré. Cette formule n'est valable que pour des valeurs de α sensiblement inférieures à 1. Pour $\alpha \geq 0,3$ on utilisera la formule d'Eyring précisée dans les années 1920, et valable pour toutes les valeurs de α :

$$A = 4mV - \sum_{i=1}^N S_i \ln(1 - \alpha_i) = \frac{S_{totale} \bar{\alpha}}{1 - \bar{\alpha}} \quad (19.5)$$

où $\bar{\alpha}$ est le coefficient moyen d'absorption qui peut être pris égale à α_S .

Le terme d'amortissement $4mV$ est souvent négligé, ce qui est particulièrement licite pour les salles de petite taille.

Diffraction et réflexion

La **diffraction** est un autre phénomène avec lequel il faut compter dans la propagation des ondes. Il est illustré sur plusieurs cas à la figure 19.4.

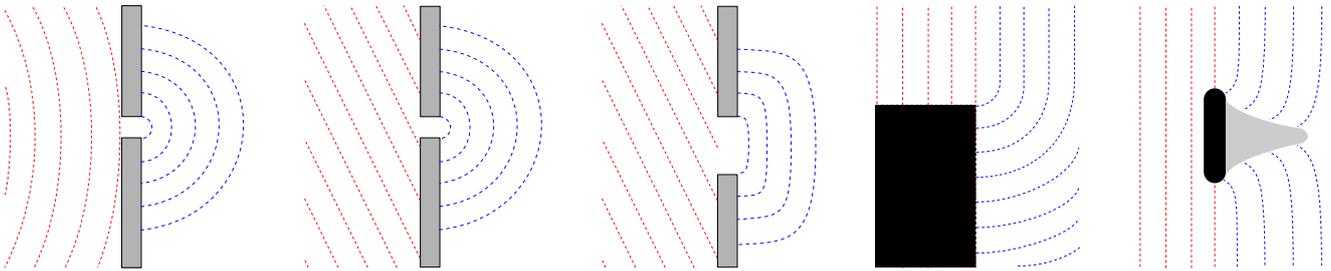


FIGURE 19.4: Phénomène de diffraction

Les figures 19.4a–19.4c représentent le phénomène de diffraction au travers d'une ouverture. L'onde après l'obstacle, i.e. l'onde diffractée, a la même fréquence, la même longueur d'onde et la même vitesse que l'onde incidente. Par contre, sa direction, son amplitude et sa forme sont modifiées (l'amplitude de l'onde diffractée est inférieure à celle de l'onde incidente).

C'est ce phénomène qui fait qu'au coin d'une rue, on entend la personne venant perpendiculairement à nous avant de la voir, comme montré sur la figure 19.4d.

Rappelons que deux ondes, diffractées ou non (mais ça a plus de sens ici en parlant d'ondes diffractées) peuvent interférer. Le phénomène analogue se produit également lorsqu'un obstacle est inséré au sein d'un fluide, comme le représente la figure 19.4e. Les ondes doivent « éviter » l'obstacle, ce qui modifie notamment leur direction sur les bords de l'obstacle. Il se crée une zone d'ombre en arrière de l'obstacle (schématisée en gris). De plus, selon la forme de l'objet, les ondes diffractées peuvent générer, plus en aval de l'obstacle, des figures d'interférence.

Le phénomène de **réflexion** sur un obstacle est illustré sur la figure 19.5. La figure 19.5a propose une analogie avec des balles, de ce qui est décrit avec des ondes à la figure 19.5b, i.e. le cas de la **réflexion contre une surface irrégulière**.

Si la balle est grosse face à la taille des irrégularités, i.e. si la longueur d'onde est plus grande que « celle des irrégularités » (ici on a un mur « en accordéon » ayant un motif répétitif de longueur l), alors le trajet est insensible aux irrégularités de la surface : la normale prise en compte est celle de la surface sans irrégularités. Si $\lambda < l$, alors on peut encore utiliser les lois de l'optique géométrique, mais on voit qu'il est alors nécessaire de disposer d'une

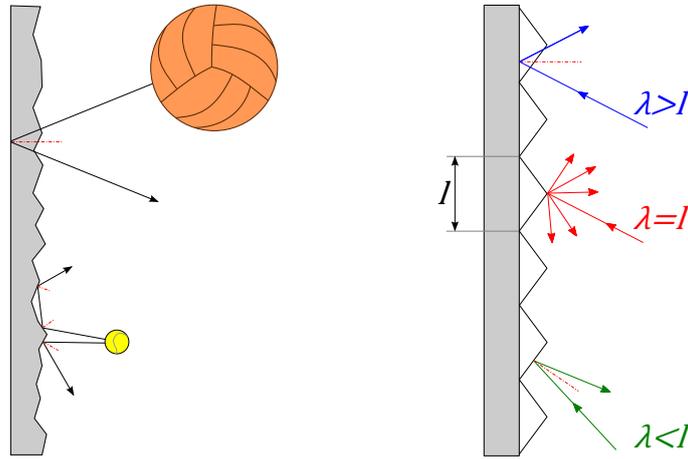


FIGURE 19.5: Phénomène de réflexion

discrétisation suffisamment fine pour décrire ces irrégularités. Lorsque la dimension de la balle, i.e. la longueur d'onde de l'onde incidente, s'approche de la longueur caractéristique des irrégularités, alors il convient d'être prudent : si $\lambda = l$, on a des **réflexions spéculaires multiples** (on parle aussi de réflexion diffuse) qu'il est souvent difficile de prendre en compte, sauf par des formulations particulières. Souvent, ce cas n'est clairement pas pris en compte.

Environnement ouvert ou fermé

La propagation d'ondes acoustiques se traite généralement dans deux cas distincts :

- celui d'un environnement ouvert, ou champ libre : l'onde peut se propager « à l'infini » ;
- ou celui d'un environnement fermé : l'onde est confinée dans un volume donné dont elle ne peut sortir.

On rappelle par ailleurs qu'une onde voit son intensité décroître avec la distance parcourue. L'intensité (vectorielle) est le produit de la pression (scalaire) par la vitesse (vecteur). Dans les conditions de champ libre, l'intensité acoustique est proportionnelle au carré de la pression acoustique. Quand la distance à la source est doublée, la pression est divisée par deux (et l'intensité acoustique est divisée par quatre). Le niveau de pression acoustique diminue alors de 6 dB.

Une question intéressante, dans le cas d'un environnement fermé, est de se demander ce qu'il se passe lorsqu'une source émet à des fréquences qui « n'ont pas la place » de se développer au sein du volume disponible, i.e. **lorsque les longueurs d'ondes considérées sont supérieures aux dimensions de l'espace dans lequel émet la source**. Ce cas se produit pour les basses fréquences émises par un moteur au sein de son encoffrement, ce dernier étant approximativement un cube de 60 cm de côté.

Et bien, dans ce cas, l'énergie injectée « gonfle » en quelque sorte l'encoffrement. Celui-ci est sollicité en pression... et répond évidemment selon ses **modes propres**. Dans de nombreux cas (encoffrement moteur, habitacle de véhicule...), il est nécessaire de prendre en compte la réponse modale du volume dans lequel on définit le problème, car celle-ci influe sur la répartition du champ acoustique, dont notamment d'éventuelles **résonances**.

Le champ acoustique dans de telles situations (et dans d'autres) est non uniforme, i.e. a des valeurs très différentes d'un point à l'autre. Ces deux aspects sont illustrés à la figure 19.6.

19.1.3 Réception

Histoire

Le bel (B) est utilisé dans les télécommunications, l'électronique et l'acoustique. Vers 1920, les entreprises de téléphonie utilisaient comme unité pour l'atténuation le msc, valant celle d'un mile (1,6 km) de câble standard à la fréquence de 800 Hz. Des ingénieurs des Laboratoires Bell définirent une unité de transmission indépendante du câble et de la fréquence, basée sur dix fois le logarithme décimal. Cette unité s'appela d'abord TU pour « Transmission Unit » (unité de transmission). Elle présentait l'avantage d'être presque équivalente au msc (1 TU = 1,083 msc). Elle fut renommée décibel en 1923 ou 1924 en l'honneur du fondateur du laboratoire et pionnier des télécoms, Alexander Graham Bell.

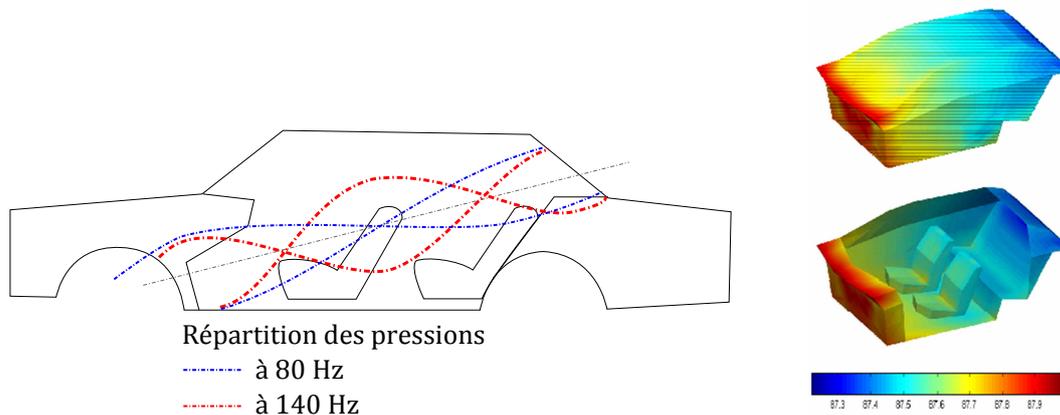
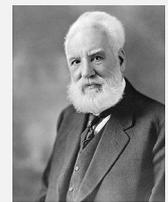


FIGURE 19.6: a) Répartition modale dans un véhicule et b) non-uniformité du champ acoustique

Les Laboratoires Bell consultèrent les opérateurs téléphoniques et administrations responsables. Certaines utilisaient des logarithmes népériens, qui présentent certains avantages pour le calcul, avec une unité appelée le néper (symbole Np). Les deux unités ont coexisté, mais le néper n'a pas connu le succès du décibel. La norme ISO 80000-3, page viii, dit d'ailleurs : « L'utilisation du néper est le plus souvent limitée à des calculs théoriques sur des grandeurs de champ, où cette unité est la plus commode, alors que, dans d'autres cas, en particulier pour des grandeurs de puissance, le bel (B), ou en pratique son sous-multiple, le décibel (dB), est largement utilisé. Il convient de souligner que le fait que le néper soit choisi comme l'unité cohérente n'implique pas qu'il convienne d'éviter d'utiliser le bel. Le bel est accepté par le CIPM et l'OIML pour être utilisé avec le SI. À certains égards, cette situation est similaire au fait que l'unité degré (°) est utilisée couramment à la place de l'unité SI cohérente radian (rad) pour les angles plans. »



Bell

L'usage du logarithme décimal était d'autant plus pratique qu'avant la diffusion des calculatrices électroniques, on se servait pour les calculs de tables de logarithmes décimaux. Lorsqu'on se propose de calculer l'atténuation dans une ligne de longueur l et de coefficient d'atténuation α , il faut élever $(1 - \alpha)$ à la puissance l . En pratique, on cherchait $l \log(1 - \alpha)$ dans la table avant de reconvertir le logarithme en rapport.



Fechner



Weber



Stevens

Le décibel a connu un grand succès dans le domaine de l'acoustique. Par une coïncidence fortuite, un décibel, en puissance sonore, correspond à peu près à la plus petite variation perceptible par l'oreille. Selon le philosophe et psychologue Gustav Fechner, la sensation ressentie varierait comme le logarithme de l'excitation. Une unité à progression logarithmique semblait particulièrement pertinente dans un domaine où la perception humaine était en jeu. Des recherches ultérieures sont venues contester la loi de Weber-Fechner, comme la loi de puissance de Stevens (1951) ; mais l'usage du décibel s'était établi, même dans des cas où il complique la compréhension.

La loi de Weber-Fechner stipule que la sensation perçue, S , est proportionnelle au logarithme de l'intensité, I , du stimulus :

$$S = k \log(I) \quad (19.6)$$

alors que la loi de puissance de Stevens modélise cette relation entre ces deux grandeurs par une loi puissance :

$$S = kI^a \quad (19.7)$$

où, dans les deux cas, k est une constante. Stevens a donné des valeurs obtenues pour l'exposant a dans différents domaines dans une publication de 1957 et dans son ouvrage de 1951 *Handbook of Experimental Psychology*.

Décibels

La notion de réception sera forcément liée à une échelle de mesure (une métrique). Nous avons plusieurs fois déjà utilisé le décibel (dB). Toutefois, il convient de distinguer plusieurs échelles :

- Le **décibel** (dB) est une unité de grandeur adimensionnelle définie comme 10 fois le logarithme décimal

du rapport entre deux puissances. Pour l'acoustique, ce rapport des puissances est défini entre la grandeur mesurée et une valeur de référence fixée par une norme.

$$n(\text{en dB}) = 10 \log_{10}(I_1/I_0) \quad (19.8)$$

où I_1 et I_0 sont deux intensités.

- Dans la formule précédente, si I_0 correspond au seuil de perception (10^{-12} Watt/m²), on obtient le **décibel absolu ou dB lin ou SPL**. C'est celui que l'on utilise dans les calculs et analyses.

$$n(\text{en dB}) = 10 \log_{10}(I_1/10^{-12}) \quad (19.9)$$

Si $I_1 = 10^{-12}$ W/m² (seuil de perception), on obtient 0 dB. Si $I_1 = 1$ W/m² (seuil de douleur), on obtient 120 dB.

- Le **dba** traduit la perception par l'oreille du phénomène (protection physiologique par filtrage). C'est souvent lui qu'il faut utiliser en lien avec des normes adéquates (fonction du problème considéré) pour savoir s'il y a nuisance sonore ou non.
- Il existe d'autres pondérations : le **dbc** est quasiment linéaire sur plusieurs octaves et est utile pour les mesures subjectives avec de fortes pressions acoustiques. Le **ddb** est entre le **dba** et le **dbc**. Le **ddb** est appliqué pour tenir compte de la gêne causée par les sifflements (à hautes fréquences) perçus à l'intérieur des avions modernes. Le **dbg** est adapté aux basses fréquences...
- Notons que, pour être plus précises, ces pondérations devraient varier avec l'âge : en effet, la perception en fonction de la fréquence et de la puissance varie avec l'âge, ainsi que l'étendue de fréquences audibles (qui diminue, phénomène appelé presbyacousie), comme on le voit sur les courbes (ou diagrammes) de Fletcher et Munson, présentées dans leur article *Loudness, its definition, measurement and calculation* paru en 1933 dans le *Journal of the Acoustic Society of America*, et que l'on appelle également courbes isotoniques. Fletcher et Munson travaillaient tous les deux aux laboratoires Bell.

Grandeurs acoustiques

À ce niveau, il convient de rappeler quelques définitions :

- La **pression acoustique** (en N/m²) est l'amplitude des variations de la pression en un point de l'espace, par rapport à la pression atmosphérique, provoquées par le passage d'une onde sonore en ce point.
- La **puissance acoustique** (en W) est la quantité (ou le flux) d'énergie acoustique qu'émet une source par unité de temps.
- L'**intensité acoustique** (en W/m²) est le flux d'énergie acoustique qui est transmis dans une direction donnée, à travers une unité de surface, pendant une unité de temps. Elle dépend de la puissance de la source, du milieu de propagation, de la distance à la source.

L'intensité acoustique s'exprime comme :

$$I = \frac{p^2}{Z} \quad (19.10)$$

où p est la pression acoustique et Z l'**impédance** (qui s'exprime en Pa.s/m ou en Ns/m³).

Remarque. Dans le cadre de mesures :

- l'intensité acoustique est représentée par la puissance électrique (W) ;
- la pression acoustique est représentée par la tension électrique (V) (la tension électrique fournie par un microphone est proportionnelle à la pression acoustique p) ;
- l'impédance acoustique est représentée par la résistance électrique.

On peut remplacer $I = p^2/Z$ par $P = V^2/R$ et en déduire la **puissance moyenne** :

$$P_{moy} = \frac{V_1^2 + \dots + V_n^2}{nR} \quad (19.11)$$

On définit aussi la **tension efficace ou tension RMS** (Root Mean Square), qui est la tension continue qui donnerait une puissance continue égale à la puissance moyenne. On a donc $P_{moy} = V_{\text{eff}}^2/R$, soit :

$$V_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{V_1^2 + \dots + V_n^2}{n}} \quad (19.12)$$

Notons que l'on « parle » souvent, dans le monde des acousticiens, en termes de bandes de fréquence, l'analyse en bandes fines n'étant utilisée que pour des analyses plus poussées.

L'octave étant le doublement de la fréquence $f_2 = 2f_1$, le **tiers d'octave** est défini par un rapport entre les fréquences de $f_2 = 2^{1/3} f_1$.

Les fréquences centrales de l'analyse par tiers d'octave normalisée sont les suivantes (en Hz) : 20, 25, 31, 40, 50, 63, 80, 100, 125, 160, 200, 250, 315, 400, 500, 630, 800, 1000, 1250, 1600, 2000, 2500, 3150, 4000, 5000, 6300, 8000, 10000, 12500.

Le **bruit blanc** est un son dont le spectre contient toutes les fréquences à la même amplitude. Une analyse à bande de fréquence constante donnerait donc une courbe constante égale à 1.

Le **bruit rose** est un bruit dont le niveau par bande d'octave est constant. Ce signal se rapproche plus de la sensibilité de l'oreille que le bruit blanc. Pour cette raison, le bruit rose est donc souvent utilisé dans l'univers audible pour calculer la réponse fréquentielle d'une chaîne de reproduction sonore.

Impédance

La notion d'impédance mérite que nous y passions quelques instants. En effet, elle nous permettra par la suite de définir des conditions aux limites pour nos modèles numériques.

L'impédance caractéristique d'un milieu (solide, liquide ou gazeux) est définie comme le rapport de la pression acoustique sur la vitesse de déplacement en milieu ouvert (i.e. en l'absence d'ondes réfléchies). C'est une propriété du matériau considéré qui est égale, dans le cas d'un espace illimité, au produit de la masse volumique du matériau par la vitesse du son dans ce même matériau.

L'impédance acoustique dans les solides est définie par :

$$Z = \frac{F}{v} = \rho c \quad (19.13)$$

où F est la force (N), v la vitesse de déplacement (m/s), ρ la densité linéique du milieu (kg/m) et c la vitesse de propagation (m/s). On remarquera que c et v sont inversement proportionnelles. Dans les solides, la vitesse de propagation est plus élevée que dans les gaz et l'énergie s'y dissipe moins rapidement : l'onde peut se propager plus loin.

L'impédance acoustique dans les gaz est définie par :

$$Z = \frac{p}{v} = \rho c \quad (19.14)$$

où cette fois p est la pression acoustique (Pa), les autres grandeurs étant les mêmes qu'auparavant.

Quelques valeurs. L'impédance de l'air vaut $Z = 413,5$ (en Pa.s/m ou N.S/m³) à 20°C. Elle varie avec la température, tout comme la densité et la célérité du son.

La vitesse du son dans l'air vaut $c = 331,5 + 0,6\theta$ m/s, où θ est la température de l'air en °C (elle varie également en fonction de la pression atmosphérique et de la température).

L'impédance acoustique de l'eau est d'environ $1,5 \cdot 10^6$ Pa.s/m.

Considérons deux milieux d'impédances respectives Z_1 et Z_2 , et une onde incidente se propageant dans le milieu 1 jusqu'à arriver à sa frontière avec le milieu 2. Si $Z_1 = Z_2$, alors l'onde incidente se propage intégralement dans le milieu 2, i.e. elle est intégralement transmise. Par contre, si $Z_1 \neq Z_2$, alors l'onde incidente se scinde en une onde réfléchie et une onde transmise. L'amplitude de l'onde réfléchie est d'autant plus grande que la discontinuité entre les deux milieux est marquée. On définit alors le **coefficient de réflexion** par :

$$\frac{p_r}{p_i} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \quad (19.15)$$

où les indices r et i désignent l'onde réfléchie et l'onde incidente respectivement.

Supposons qu'une onde se propage dans l'air ($Z_1 = 413,5$) et rencontre un solide tel que $Z_2 = 500000$. Alors le coefficient de réflexion est de 99,8%. Dans le cas où une onde passe d'un milieu plus dense à un milieu moins dense, le coefficient de réflexion devient négatif.

Notons les deux cas extrêmes suivants :

- la **réflexion à une extrémité libre** : dans ce cas, $Z_2 \approx 0$ et la vitesse de l'extrémité est $v = 2v_i$. On assiste à un changement de signe de v_r , sans renversement de la forme de l'onde.
- la **réflexion à une extrémité fixe** : dans ce cas, $Z_2 \rightarrow \infty$ et la vitesse de l'extrémité est $v = 0$. Il n'y a pas de changement de signe de v_r , mais la forme de l'onde est renversée.

Normes, indices et psycho-acoustique

De très nombreuses normes et grandeurs existent dans le domaine de l'acoustique, correspondant à des problématiques différentes. Nous en listons quelques unes ci-dessous, mais cette liste est très loin d'être exhaustive :

- Le **comportement acoustique** d'une salle diffère selon la zone de fréquence considérée.
Pour les longueurs d'ondes supérieures au double de la plus grande dimension d'une pièce : le son se comporte de manière équivalente aux changements de pression de l'air statique. Pour les longueurs d'onde comparables aux dimensions de la pièce : il y a dominance des modes propres de la salle. Il y a amplification des fréquences, ce qui « colore » le son et création d'ondes stationnaires. Pour des longueurs d'ondes inférieures à la moitié des dimensions de la salle : on est dans le cas de réflexions multiples, et on peut faire une équivalence lumineuse et utiliser les méthodes de tir de rayons.
- L'une des premières grandeurs à connaître est le **bruit ambiant**. Son niveau maximal est fixé par des normes en fonction de la destination du local.
- Une seconde grandeur particulièrement fondamentale pour la caractérisation de locaux, quelque soit leur destination, est le **temps de réverbération** ou TR. Il correspond à l'intervalle de temps nécessaire pour que la pression acoustique (d'une salle) diminue à un millième de sa valeur initiale suite à l'arrêt de la source sonore. Cela représente une diminution du niveau sonore de 60 dB. Le temps de réverbération indique la capacité qu'à la salle à réverbérer les sons.

En 1898, Sabine découvrit que le temps de réverbération T_R était proportionnel au volume de la salle V et inversement proportionnel à la surface équivalente d'absorption A :

$$T_R = \frac{kV}{A} \quad (19.16)$$

où la constante de proportionnalité k , trouvée initialement égale à 0,161, vaut $k = (24 \ln 10)/340 = 0,163$ s/m, et où l'aire d'absorption équivalente est calculée par les formules de Sabine (19.4) ou d'Eyring (19.5).

Selon la destination du local, plusieurs normes existent pour mesurer le TR. De plus, la destination du local joue également sur la valeur acceptable ou non du TR.

Le **Early Decay Time** (EDT) est le temps de décroissance sur les 10 premiers dB. Il est subjectivement plus important, car il se rapproche de l'impression de réverbération alors que le TR fait référence aux propriétés du local.

On utilise également le **taux de décroissance spatiale** DL , et plus particulièrement le taux de décroissance par doublement de distance DL_2 .

- La **Clarté** dépend de la distribution temporelle de l'énergie précoce, de la densité temporelle, du niveau des réflexions et de la nature du message sonore. L'**intelligibilité de la parole** est conditionnée par le TR, le rapport signal/bruit, le volume et la géométrie de la pièce, et la répartition des surfaces réfléchissantes et absorbantes. Plus le temps de réverbération est court, meilleure sera la compréhension de la parole, à moins que le bruit de fond ne domine. Plusieurs indicateurs seront à prendre en compte : le **rapport Signal-Bruit** (S/B), le **Speech Transmission Index** (STI), le **Percentage Articulation Loss of Consonants** (%-Alcons), le

RAPid Speech Transmission Index (RASTI)...

$$\text{Clarté sur 80 ms : } C_{80} = 10 \log_{10} \frac{\int_0^{80} p^2(t) dt}{\int_{80}^{\infty} p^2(t) dt}$$

$$\text{Distinctness sur 50 ms : } D = \frac{\int_0^{50} p^2(t) dt}{\int_0^{\infty} p^2(t) dt}$$

$$\text{Temp central : } T_c = \frac{\int_0^{\infty} t p(t) dt}{\int_0^{\infty} p(t) dt}$$

$$\text{Articulation Loss Consonent : } ALC = \frac{200r^2 T_R^2}{VQ}$$

$$\text{RAPid Speech Transmission Index : } RASTI = \begin{cases} 0 & \text{si } (S/B)_{app} \leq 15 \\ 1 & \text{si } (S/B)_{app} \geq 15 \\ \frac{(S/B)_{app} + 15}{30} & \end{cases}$$

$$\text{avec } (S/B)_{app} = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 (S/B)_i$$

où Q est le facteur de directivité. Des relations empiriques sont également utilisées :

$$ALC \approx 170,5 e^{-592STI}$$

$$STI \approx -0,18 \ln(ALC) + 0,95$$

- De là, on peut définir les [rayons de discrétion et de confidentialité](#)...
- D'autres indicateurs existent liés par exemple à la spatialisation (InterAural Cross Correlation (IACC), Lateral Efficiency (LE)...) ou à des critères de sonorisation (clarté locale, homogénéité...).
- Des indicateurs prennent également en compte la [durée d'exposition](#) au bruit, surtout évidemment dans le cadre de la législation du travail. Ainsi 80 dBA pendant 8 heures correspondent à 86 dBA pendant 2 heures, 90 dBA pendant 45 min, 95 dBA pendant 15 min, 100 dBA pendant 5 min, 107 dBA pendant 1 min ou 115 dBA pendant 28 s.
le $L_{ex,d}$ est le [niveau d'exposition sonore quotidienne](#) exprimé en dBA pour des bruits stables ou fluctuants.
Le L_{pc} est le [niveau de pression crête](#) exprimé en dBC pour une exposition à des bruits impulsifs.
- L'Organisation Internationale de Normalisation (ISO) a proposé plusieurs courbes qui correspondent toutes à un certain degré de confort acoustique (ou de gêne) : courbes d'évaluation du bruit, ou courbes de [Noise Rating](#) (NR). Grâce à ces courbes, il est possible de déterminer au moyen d'un seul chiffre le niveau de pression acoustique maximum autorisé. Les indices N40 et N80 sont souvent pris en référence.
- Dans *Éléments de physiologie et de pathologie des bruits*, Wisner définit trois seuils de bruit correspondant à un indice de gêne subjective : lorsque le bruit ambiant est en zone 1, le travail intellectuel n'est pas gêné de façon appréciable ; lorsque le bruit ambiant est en zone 2, le travail intellectuel est pénible, le travail courant n'est pas gêné de façon appréciable ; lorsque le bruit ambiant est en zone 3, le travail intellectuel est extrêmement pénible, le travail courant est difficile ; et lorsque le bruit ambiant est situé en zone 4, une exposition prolongée peut conduire à la surdité.
- La Sonie ou bruyance (loudness) est une quantification de la perception du son chez l'être humain. C'est une grandeur psycho-acoustique qui se rattache de façon complexe à la pression acoustique. Les courbes isosoniques issues des travaux de Fletcher et Munson expriment la relation entre la fréquence d'un stimulus sonore continu et la perception de sa sonie. L'ISO a donné un tracé normalisé afin de pouvoir définir le phone, unité de l'expression de la sonie.
- Il est toujours possible de construire d'autres métriques pour des problèmes particuliers. Par exemple dans [75], on trouvera une métrique adaptée à la mesure de la « beauté » des bruits périodiques.

19.2 Calculs acoustiques par éléments finis

19.2.1 Modèles simplifiés pour valeurs de référence

Dans ce petit paragraphe, nous donnons quelques formules simples. Elles permettent néanmoins d'effectuer un prédimensionnement rapide pour les salles acoustiques et/ou de disposer de quelques valeurs (au moins leur ordre de grandeur) vers lesquelles des calculs plus complexes doivent conduire.

Puissance de la source sonore et propagation

En champ libre, on a la loi de propagation pour le champ direct suivante :

$$L_p = L_w + 10 \log_{10} \left(\frac{Q}{4\pi d} \right) \quad (19.17)$$

où L_p (en dBA) est le niveau de pression sonore du champ direct, L_w le niveau de puissance de la source, d la distance à la source et Q le facteur de directivité ($Q = 1$ source omnidirectionnelle, $Q = 2$ source omnidirectionnelle posée sur le sol...).

Dans une salle (suffisamment réverbérante), on constate que le champ est diffus, et alors on a :

$$L_p = L_w + 6 - 10 \log_{10} A \quad (19.18)$$

où L_p (en dBA) est le niveau de pression sonore du champ diffus, L_w le niveau de puissance de la source et A l'aire équivalente d'absorption. On remarque que L_p est constant quelle que soit la distance à la source (puisque l'on est en hypothèse de champ diffus) et qu'il ne dépend que de A , i.e. de la capacité d'absorption disponible dans la salle. On notera que les parois, surtout si elles sont légères, présentent une certaine transparence et qu'il est bon, pour ajuster le modèle, d'augmenter l'aire d'absorption de la proportion d'énergie qui quitte la salle par transmission (défaut d'isolation).

En terme de modélisation, cela signifie qu'à proximité d'une source (jusqu'à environ 30cm), on considérera que l'on est en champ direct. Au-delà, on utilisera la relation correspondant au champ réverbéré.

Modes d'une salle

Pour les longueurs d'onde de l'ordre des dimensions de la salle, il y a prédominance des modes propres de la salle. Il faut donc pouvoir les évaluer. Pour un salle parallélépipédique de dimensions L , l et h , les fréquences de résonance sont données par :

$$f_{(i,j,k)} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{i}{L}\right)^2 + \left(\frac{j}{l}\right)^2 + \left(\frac{k}{h}\right)^2} \quad (19.19)$$

Les modes $(i, 0, 0)$, $(0, j, 0)$ et $(0, 0, k)$ sont des modes axiaux dans la directions de L , l et h respectivement, les modes $(i, j, 0)$, $(0, j, k)$ et $(i, 0, k)$ les modes tangentiels, et les modes (i, j, k) les modes obliques. La pression acoustique se met sous la forme :

$$p(x, y, z) = \sum_i \sum_j \sum_k p_{ijk} \cos\left(\frac{i\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{j\pi}{l}y\right) \cos\left(\frac{k\pi}{h}z\right) \quad (19.20)$$

La formule de Maa (1939) donne le nombre $N(f)$ de fréquences propres inférieures ou égales à une fréquence donnée f :

$$N(f) = \frac{4\pi}{3} V \left(\frac{f}{c}\right)^3 + \frac{\pi}{4} S \left(\frac{f}{c}\right)^2 + \frac{L_t}{8} V \left(\frac{f}{c}\right) \quad (19.21)$$

où $V = Llh$ est le volume de la salle, $S = 2(Ll + Lh + lh)$ est la surface totale des parois de la salle, et $L_t = 4(L + l + h)$ est la longueur totale des arêtes de la salle.

En dérivant la formule de Maa par rapport à la fréquence, on peut déterminer la densité de fréquences propres à une fréquence donnée, i.e. le nombre de fréquences propres comprises dans un intervalle de 1 Hz centré sur f :

$$dN(f) = \frac{4\pi V}{c^3} f^2 + \frac{\pi S}{2c} f + \frac{L_t}{8c} \quad (19.22)$$

Pour une salle non parallélépipédique, on peut, sauf géométrie vraiment très biscornue, utiliser les relations précédentes en considérant le parallélépipède le plus proche de la géométrie réelle.

Remarques

On n'oubliera pas de prendre en compte les pertes par transmission dans le calcul des coefficients d'absorption.

Dans le cas où l'on s'intéresse à la transmission entre plusieurs salles, il faudrait effectivement ne pas oublier qu'une salle n'a pas que des sources internes, mais également des sources externes correspondant à ce qui a pu s'échapper des autres salles, ou de ce qui rayonne suite à la propagation de vibrations.

Nous avons présenté quelques formules dans le cas de l'acoustique des salles, mais d'autres formules relatives à d'autres problématiques acoustiques typiques existent : par exemple pour l'encoffrement (ou capotage) de sources acoustiques (machines...).

Méthodes de composition de source. Toutes ces méthodes « simples » permettent néanmoins de réaliser, à moindre frais, des modèles de calculs (analytiques) pouvant prendre en compte des phénomènes assez complexes. C'est ce que l'on appelle les [méthodes de composition de sources](#).

Dans ces méthodes, on commence par identifier toutes les sources d'un problème : non seulement les sources physiques comme un moteur, mais également les sources induites comme le bruit de contact pneu/chaussée, le bruit aérodynamique, le rayonnement de surfaces... Ces sources sont fonction des données du problème telles que la vitesse du véhicule, le rapport de boîte, etc. Les sources sont positionnées dans l'espace, et chacune est prise en compte « indépendamment » des autres. L'introduction de couplages est possible, mais peut être délicate (notamment pour les phénomènes tels que l'amortissement). Ensuite, on introduit divers « facteurs de perte » entre les sources et le point d'écoute : matrices de transfert diverses dues à la distance à la source, l'absorption et l'isolation de divers éléments, l'amortissement et le filtrage... On voit bien que la mise au point d'un tel modèle peut se révéler particulièrement compliquée, même pour quelqu'un ayant une grande expérience dans le domaine de l'acoustique.

Toutefois, ces méthodes présentent l'immense intérêt de fournir les résultats instantanément (ou presque pour des méthodes semi-analytiques), et valables dans toutes les gammes de fréquences (aux hypothèses faites près, ce qui peut être restrictif). On voit également que, de par leur nature, ces méthodes sont essentiellement interpolatoires et leur utilisation extrapolatoire est plus que délicate, conduisant généralement à des résultats complètement faux. Néanmoins, elles restent pertinentes dans de nombreux cas industriels bien bordés, et si elles sont corrélées à des résultats expérimentaux, conduisent de surcroît à une interprétation aisée de ceux-ci, permettant de trouver des tendances et des liens intéressants. Nous insistons malgré tout encore une fois sur la grande expérience (de l'acoustique) nécessaire pour mettre ces modèles au point.

C'est une lapalissade, mais dans un calcul global, les phénomènes locaux (écranage...) ne sont pas pris en compte (ou alors de manière globale)... Si l'on s'intéresse au niveau moyen résultant dans un local, prendre en compte la totalité des surfaces absorbantes, qu'elles soient situées au murs, au plafond ou sous formes d'écrans, de fauteuils... fonctionne. Par contre, si l'on a besoin de descendre dans le détail local de la répartition de la pression acoustique (par exemple répartition poste à poste), alors il convient d'utiliser des méthodes plus adéquates, dont les éléments finis, que nous allons présenter maintenant.

19.2.2 Constitution d'un modèle éléments finis

Pour réaliser notre modèle de calcul vibro-acoustique par éléments finis, nous devons disposer de sources et de conditions aux limites. Nous allons aborder ces deux points.

Sources

Si l'on ajoute des termes de sources, alors l'équation des ondes (6.12) devient :

$$\frac{1}{\rho c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \nabla \cdot \left(-\frac{1}{\rho} (\nabla p - q_d) \right) = q_m \quad (19.23)$$

dont l'inconnue est toujours la pression acoustique et où q_d et q_m représentent les termes de sources pour un [dipôle](#) et un [monopôle](#) respectivement. Pour les milieux dispersifs, un terme de dissipation supplémentaire peut être introduit dans l'équation des ondes qui devient :

$$\frac{1}{\rho c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - d \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \left(-\frac{1}{\rho} (\nabla p - q_d) \right) = q_m \quad (19.24)$$

Dans la suite, on restera dans le cas $d = 0$.

Dans le cas harmonique, l'équation (19.23) devient l'équation d'Helmholtz (8.59) avec termes sources :

$$-\frac{\omega^2 p}{\rho c^2} + \nabla \cdot \left(-\frac{1}{\rho} (\nabla p - q_d) \right) = q_m \quad (19.25)$$

Remarque. Si l'on souhaite introduire le d'amortissement dans l'équation, alors les quantités c et ρ peuvent être complexes (au sens appartient à \mathbb{C}). Par exemple, pour un modèle d'amortissement de Rayleigh, la célérité c est une combinaison linéaire de la masse et de la raideur.

Dans les codes de calcul, la source est généralement modélisée par un **monopôle** ou un **dipôle**. Un monopôle est une source omnidirectionnelle, alors qu'un dipôle représente une source ayant deux directions opposées selon lesquelles le champ est plus fort. Un dipôle peut être vu comme deux monopôles de même puissance séparés par une petite distance et en opposition de phase. On peut également utiliser des quadripôles si besoin. On trouve également parfois des sources ponctuelles, linéaires ou ayant d'autres formes prédéfinies.

Rayonnement

En plus de sources définies ci-dessus, le phénomène de **rayonnement** peut être à l'origine d'une excitation acoustique. Le rayonnement est par nature un phénomène couplé fluide-structure, puisqu'il s'agit du cas où une structure, en vibrant, génère une onde acoustique. C'est un phénomène complexe, qui fait toujours l'objet de recherches. Nous allons essayer d'en dire deux mots en restant sur le mode de la vulgarisation.

Compléments sur le rayonnement. Toute structure vibrant ne génère pas de bruit, ou plus exactement, une structure soumise à un spectre ne rayonne pas l'intégralité du spectre. Certes, l'effet de l'amortissant structurel est sans aucun doute à prendre en compte, mais il n'est pas suffisant. En fait, seuls certains modes de la structure rayonnent, et ce sont ceux qui correspondent à des projections du nombre d'onde de la vibration à laquelle est soumise la structure. Il appert donc que l'utilisation d'une base modale dans le calcul numérique peut être à même de prendre en compte cette projection, tout en réduisant la taille des calculs. On voit également que la notion de vitesse de vibration, et par suite de vitesse des déformations, est d'importance dans ce phénomène. Elle peut être liée, au moins localement, à des phénomènes de compensation de pression acoustique qui peut ou non se faire pendant le temps de déformation.

Définition 79 — Fonction de Green. On appelle **fonction de Green** une solution d'une équation ayant au second membre un terme impulsionnel.

Si l'équation considérée est l'équation des ondes, on appelle **fonction de Green en temps** une solution de l'équation des ondes avec au second membre un terme source de type source ponctuelle en espace et en temps, i.e. source localisée en un point de l'espace x_0 et émettant une impulsion à un instant t_0 localisé dans le temps. On a donc pour second membre de la forme : $\delta(t - t_0)\delta(x - x_0)$ (où x est un vecteur). Elle s'écrit sous la forme :

$$G(x, t, x_0, t_0) = \frac{1}{4\pi \|x - x_0\|} \delta \left(t - t_0 - \frac{\|x - x_0\|}{c} \right) \quad (19.26)$$

Si l'équation considérée est l'équation d'Helmholtz, on appelle **fonction de Green en fréquence** une solution de l'équation d'Helmholtz avec au second membre un terme source ponctuelle en espace, localisé au point x_0 . Elle s'écrit sous la forme :

$$G(x, x_0) = -\frac{1}{4\pi \|x - x_0\|} e^{ik \|x - x_0\|} \quad (19.27)$$

Dans le cas du rayonnement, on s'intéresse à ce qui se passe au niveau de l'interface entre une structure vibrant et un fluide, où l'on doit avoir continuité des vitesses acoustiques et mécaniques normales.

Théorème 63 — Théorème de Kirchhoff en fréquence. Le théorème de Kirchhoff dit que le champ de pression, en régime fréquentiel, en un point d'observation x donné, est entièrement déterminé par les valeurs de la pression et de sa dérivée normale sur les bords du domaine et la donnée de la source volumique $q_m(x_0)$. Il

stipule que le champ de pression au point x est donné par la relation :

$$p(x) = \int_{\Gamma=\partial\Omega} p(x_0) \frac{\partial G(x, x_0)}{\partial n_0} - G(x, x_0) \frac{\partial p(x_0)}{\partial n_0} d\Gamma + \int_{\Omega} q_m(x_0) G(x, x_0) d\Omega \quad (19.28)$$

Si l'on considère une plaque plane, dans le plan (x, y) , vibrant, alors la condition cinématique de continuité des vitesses normales à l'interface surface/plaie impose la condition suivante sur la vitesse des particules de fluide en $z = 0$:

$$v(x).z = v_0(x_0)$$

Et en projetant l'équation d'Euler linéarisée sur l'axe z , on peut alors relier la dérivée normale de la pression à la vitesse normale de la surface S :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\partial p}{\partial z} = i\omega\rho v_0(x_0) \quad (19.29)$$

En l'absence de toute autre source acoustique, le théorème de Kirchhoff ne comporte plus de terme volumique. En introduisant la fonction de Green et la valeur de la pression normale, on obtient le relation suivante, connue sous le nom d'**intégrale de Rayleigh**, qui permet de calculer le champ de pression acoustique rayonné par une surface plane S dont on connaît uniquement la vitesse normale :

$$p(x) = \frac{i\omega\rho}{2\pi} \int_S \frac{e^{ik\|x-x_0\|}}{\|x-x_0\|} v_0(x_0) dS \quad (19.30)$$

Remarque. Le cas du piston circulaire, que l'on trouve dans moult ouvrages, et que nous ne présenterons pas, est intéressant et serait à regarder car il se retrouve dans beaucoup d'applications telles que les haut-parleurs, les transducteurs... Le formalisme de Rayleigh est bien adapté à ce cas qui, s'il est simple d'un point de vue structurel, a un comportement acoustique complexe.

Enfin, on définit l'**impédance de rayonnement** Z_R comme le rapport de la pression à la surface divisée par la vitesse vibratoire. C'est un nombre complexe :

$$Z_R = \lambda_R + i\omega M_R \quad (19.31)$$

où la partie réelle λ_R agit comme un terme d'amortissement, et la partie imaginaire M_R comme un terme de masse ajoutée. Cela est à ajouter à ce qui a déjà été présenté au sujet de l'impédance au paragraphe 19.1.3.

Conditions aux limites

Disposant de sources vibro-acoustiques, il nous faut maintenant ajouter des conditions aux limites sur notre modèle. Les conditions aux limites classiques sont :

- La **condition de Neumann** correspond à une condition de **mur rigide**. Elle définit une frontière sur laquelle la composante normale de l'accélération est nulle (mur immobile parfaitement réfléchissant) :

$$-n \cdot \left(-\frac{1}{\rho} (\nabla p - q_d) \right) = 0 \quad (19.32)$$

S'il n'y a pas de dipôle (i.e. $q_d = 0$) et si la densité du fluide est constante (i.e. $\rho = cte$), alors l'équation précédente devient :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad (19.33)$$

i.e. la dérivée de la pression par rapport à la normale est nulle.

Dans certains codes, on peut spécifier la valeur de l'accélération normale, i.e. le second membre de l'équation (19.32) n'est plus nul mais vaut a_n (condition de Neumann relevée), qui représente alors une source externe. Cela permet également de coupler de manière faible l'acoustique à un calcul structural : un premier calcul de structure permet de déterminer les vibrations d'une surface, et celles-ci sont introduites ensuite dans le calcul acoustique. Le **couplage est donc faible** car dans ce cas on fait l'hypothèse que l'acoustique en retour ne modifie pas (ou peu) la vibration de la structure. De manière inverse, on a également couplage faible si le fluide agit sur le solide et que celui-ci en retour n'agit que peu sur le fluide.

- La **condition de Dirichlet** correspond à une **condition d'absorption parfaite**. Elle est telle que la pression acoustique s'annule sur la surface :

$$p = 0 \quad (19.34)$$

En général, dans les codes, une telle condition permet de mettre la pression à zéro, ou à toute autre valeur (condition de Dirichlet relevée) définie par l'utilisateur. Le second membre n'est alors plus nul mais vaut \bar{p} . Cela permet de modéliser une source débitant une pression constante (applicable sur un nœud si besoin).

- La **condition de Robin** correspond à une **condition d'impédance**. Elle se situe entre les deux cas précédents :

$$\begin{aligned} -n \cdot \left(-\frac{1}{\rho} (\nabla p - q_d) \right) &= -\frac{i\omega p}{Z} \text{ en analyse harmonique, ou} \\ &= \frac{1}{Z} \frac{\partial p}{\partial t} \text{ en analyse temporelle} \end{aligned} \quad (19.35)$$

Lorsque $Z \rightarrow \infty$ on retrouve le cas du mur rigide, et lorsque $Z \rightarrow 0$ celui de l'absorption parfaite.

Pour les **plaques perforées**, on utilisera cette condition pour gérer l'absorption. Certains logiciels calculent l'impédance à notre place en fonction de paramètres physiques tels que : la viscosité dynamique, l'épaisseur et la porosité (diamètre des trous, distance entre trous, ou aire des trous et résistance de passage au fluide) et la réactance du panneau.

- L'absorption peut être gérée par l'impédance, mais certains logiciels incluent des **modèles de fluides équivalent** (homogénéisation), dont le plus connu est celui de Biot-Allard. Il concerne les matériaux poreux et nécessite de connaître leur porosité, résistance au passage de l'air, tortuosité, et longueurs caractéristiques visqueuse et thermique (ces deux derniers paramètres ayant une influence moins importante que les trois premiers sur l'absorption). D'autres modèles existent comme le modèle de Johnson-Champoux-Allard, celui de Johnson-Champoux-Allard-Lafarge...
- Les **conditions aux limites en rayonnement** permettent de définir les régions par lesquelles les ondes peuvent quitter le modèle. On trouve généralement des conditions de radiation plane, cylindrique et sphérique.
- De la même manière on trouve des **conditions de rayonnement**, plane ou cylindrique, permettant de modéliser une source, i.e. une onde qui arrive (et non plus une onde qui quitte le modèle).
- Lorsque le couplage faible décrit plus haut n'est pas suffisant, il faut alors intégrer le **couplage fort** fluide-structure au calcul : le fluide, défini par ses champs de pression et de vitesse, exerce des forces de type aérodynamique (de pression) sur la structure. Cette force aérodynamique se met sous la forme $F = \frac{1}{2}\rho v^2 S C$, où v est la vitesse, S la « surface de référence » (pour nous cette surface de référence sera la surface mouillée)¹ et C le coefficient aérodynamique. En retour, le déplacement et/ou la déformation de la structure affecte, au moins localement, le champ de l'écoulement fluide et par conséquent la direction et l'intensité des charges aérodynamiques : ce **cycle des interactions** entre le fluide et la structure est la caractéristique du couplage fort entre les deux milieux, i.e. **chaque milieu influe significativement sur l'autre**. **Basiquement, on retiendra que l'analyse acoustique fournit un chargement (la pression acoustique) à l'analyse structurelle, et l'analyse structurelle fournit des accélérations à l'analyse acoustique.**

Si l'on ne peut pas découpler les équations de chaque milieu (c'est parfois possible et ça vaut donc le coût d'essayer), alors on essaye généralement de procéder par la méthode dite « décalée » : chaque physique est traitée séparément, et l'on essaye ensuite de faire transiter l'information d'un code à l'autre, ce qui n'est pas toujours simple, engendre des erreurs numériques supplémentaires, et surtout nécessite de développer des algorithmes de couplage. Sinon, la méthode dite « monolithique » est théoriquement la plus optimale puisque le fluide et la structure sont traités par un même code de calcul. Toutefois, lorsque les géométries ou la physique du problème à traiter deviennent complexes ce type de méthode n'est plus envisageable puisque chaque milieu (fluide ou solide) nécessite des procédures de calcul numérique spécifiques. Notons que certains codes de calcul gèrent de manière assez simple pour l'utilisateur ce couplage entre différentes physiques.

1. Dans le cas d'étude aérodynamiques et pour les corps profilés, la surface de référence sera la projection de la surface dans un plan orthogonal à la direction selon laquelle on veut le résultat.

Toujours dans ce cas, on décompose la force aérodynamique selon trois axes en une force de traînée F_x parallèle à la direction moyenne de l'écoulement ; une force de dérive F_y perpendiculaire à la direction moyenne de l'écoulement, dans le plan horizontal ; et une force de portance F_z , perpendiculaire à la direction moyenne de l'écoulement, dans le plan vertical.

— La **continuité de la pression** à l'interface entre deux milieux peut être à entrer. Il suffit de spécifier que le saut est nul :

$$-n \cdot \left[\left(-\frac{1}{\rho} (\nabla p - q_d) \right)_1 - \left(-\frac{1}{\rho} (\nabla p - q_d) \right)_2 \right] = 0 \quad (19.36)$$

19.2.3 Convergence

La convergence d'un calcul acoustique dépend non seulement de la taille du maillage, mais également de la taille du pas de temps.

Discrétisation en espace

Le maillage doit être en mesure de prendre en compte les longueurs d'ondes qui nous intéressent dans le calcul. Les ondes doivent pouvoir « se développer » dans le calcul, et pour cela, on utilisera la condition simple suivante :

$$h = \frac{k\lambda}{10} \quad (19.37)$$

où h est la taille de la maille, et k le degré de l'approximation utilisée dans l'élément. Ainsi $h = \lambda/10$ pour un élément linéaire, et $h = \lambda/5$ pour un élément quadratique.

Discrétisation en temps

La condition de Courant, Friedrichs et Lewy (condition CFL), énoncée dans leur article de 1928 [79], définit, au travers d'un nombre adimensionnel appelée nombre de Courant C , une condition de convergence pour résoudre certaines équations aux dérivées partielles, notamment les équations aux dérivées partielles hyperboliques, utilisant la méthode des différences finies. Pratiquement, il sert à donner le seuil dimensionnel sous lequel on observe une instabilité de calcul, erreur d'approximation dans des calculs numériques, grandissant rapidement au fur et à mesure des calculs. Si la dimension de la grille est inférieure à la distance parcourue dans l'intervalle de pas de temps par l'onde la plus rapide que permet l'équation, l'erreur grandit et envahit la solution physique.

Le nombre de courant C , pour un problème de dimension n en espace (et 1 en temps), est défini par :

$$C = \Delta t \sum_{i=1}^n \frac{u_{x_i}}{\Delta x_i} \leq C_{max}. \quad (19.38)$$

où u est la fonction inconnue du problème, Δt le pas de temps et Δx_i le pas de discrétisation de chaque variable spatiale.

La constante C_{max} prend différentes valeurs en fonction de la méthode utilisée pour résoudre l'équation discrétisée. Pour une méthode explicite, on utilisera $C_{max} = 1$, alors que pour une méthode implicite, moins sensible aux instabilités numériques, on pourra prendre une valeur plus grande pour C_{max} . On fera en sorte de prendre C_{max} le plus grand possible pour la méthode considérée, ce qui permettra par conséquent de calculer le pas de temps le plus grand possible (la taille de la discrétisation en espace étant contrainte par les fréquences visées) afin de minimiser les calculs.

19.2.4 Vers l'infini...

Lorsque l'on fait un calcul en champ ouvert... il faudrait définir le domaine jusqu'à l'infini. Généralement, on définit une zone (par exemple sphérique ou hémisphérique) entourant le problème, située à une distance suffisante, et permettant de simuler l'infini : ce qui nous intéresse est donc une condition d'absorption parfaite. Nous avons déjà mentionné la condition de Dirichlet. Toutefois, elle n'est pas optimale.

Décrite pour la première fois en 1994 par Jean-Pierre Bérenger dans *A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves*, une **zone absorbante parfaitement adaptée** (en anglais Perfectly matched layer ou PML) est une zone absorbante artificielle pour les équations d'ondes, couramment utilisée pour tronquer les domaines de calcul dans les méthodes numériques de simulation de problèmes à frontières ouvertes, particulièrement dans les

méthodes de différences finis en temps et d'éléments finis. La propriété essentielle d'une PML qui la distingue d'un matériau absorbant ordinaire est le fait qu'elle est conçue de telle sorte que les ondes incidentes l'atteignant depuis un matériau non PML ne se réfléchissent pas à l'interface. Cette propriété permet aux PML d'absorber fortement toutes les ondes sortant d'un domaine de calcul sans les renvoyer dans ce domaine.

Cette approche a été modifiée puis généralisée en ce que l'on appelle la stretched-coordinate PML. Les PML correspondent à une transformation dans laquelle une ou plusieurs coordonnées sont attachées à des nombres complexes ; plus techniquement, il s'agit en réalité d'une prolongation analytique de l'équation d'onde dans le domaine complexe, où les ondes propagatives (oscillantes) sont remplacées par des ondes dont l'amplitude décroît exponentiellement. Ce point de vue permet aux PML d'être adaptées aux matériaux inhomogènes comme les guides d'ondes, ainsi qu'à d'autres systèmes de coordonnées et d'équations d'ondes.

La PML amortit une certaine longueur d'onde existant dans le système, déduite de la fréquence et d'une célérité de référence des ondes. Dans le cas d'un problème uniquement fluide, cette célérité de référence sera prise égale à la vitesse du son. Dans le cas d'ondes se propageant dans un solide, on la prendra égale à la vitesse de compression du son. Pour un modèle couplé fluide-structure, on pourra prendre une valeur moyenne entre les deux précédentes comme estimation initiale. Pour une onde dont le vecteur d'onde fait un angle θ avec la direction dans laquelle on veut absorber, il faudrait prendre une valeur de $1/\cos|\theta|$.

19.2.5 ... et au-delà

Si l'on souhaite savoir ce qu'il se passe loin de la source, en dehors du domaine de simulation (sans devoir tout mailler), alors il est possible d'utiliser des techniques dites de **champ lointain** (Far Field).

L'idée est somme toute assez simple : disposant des informations (pression, directivité) sur la surface d'un volume donné dans lequel est décrit le problème, il est possible d'extrapoler le comportement en dehors de ce volume sous certaines hypothèses, notamment de non réflexion du champ (par exemple champ libre). La mise en œuvre, quant à elle, est loin d'être aussi simple que l'idée.

Certains logiciels de calcul offrent cette possibilité.

19.2.6 Post-Traitement

La pression $p(x, y, z)$ calculée est une pression complexe (i.e. appartenant à \mathbb{C}). Toutefois, il est aisé, à partir de celle-ci, de définir un certain nombre d'autres valeurs d'intérêt :

- $p(x, y, z, t) = \Re(p(x, y, z)e^{i\omega t})$;
- $p_{rms}(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{2}}|p(x, y, z)|$;
- $SPL(x, y, z) = 20 \log_{10} \left(\frac{p_{rms}(x, y, z)}{p_{ref}} \right)$;
- d'autres grandeurs liées au modèle. Souvent on définira, à partir des données et des résultats le facteur de perte. Par exemple, on peut le définir par :

$$D_{tl} = 10 \log_{10} \left(\frac{W_i}{W_t} \right) \quad (19.39)$$

où W_i est la puissance moyenne incidente et W_t la puissance moyenne transmise.

Définir toutes ces quantités ne nécessite pas de refaire le calcul éléments finis. Elles ont donc un coût de calcul quasiment nul ! Il ne faut donc surtout pas se priver de définir les quantités les plus parlantes pour le problème considéré.

19.3 Quelques illustrations avec FREEFEM++

19.3.1 Un exemple en acoustique des salles

L'acoustique des salles d'une manière générale peut se passer de couplage. Seul le volume de la salle est à discrétiser. Les zones d'absorption situées en parois seront modélisées par leur impédance, ainsi que les pertes par transmission. Dans le cas d'un locuteur, la source sera ponctuelle.

La figure 19.7 présente une salle et sa modélisation. La salle est constituée de deux murs épais en béton et de

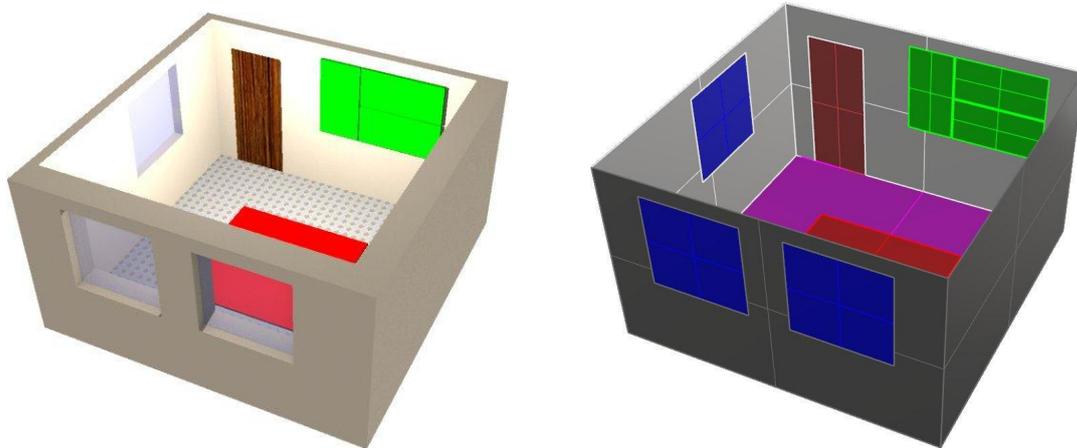


FIGURE 19.7: Un problème d'acoustique des salles

deux murs fins en placo. Elle comporte trois fenêtres et une porte. Le sol est en carrelage, avec au centre un tapis épais. Le plafond non représenté est en béton. Au mur, à côté de la porte, se trouvent trois panneaux acoustiques.

Pour effectuer la modélisation, on ne contiendra de représenter les surfaces internes de la pièce. Les murs épais (en gris foncé), le sol et le plafond seront considérés comme parfaitement réfléchissants. Pour les murs fins, on entrera une impédance correspondant à la perte par transmission. On fera de même avec les fenêtres et la porte. Les conditions d'absorption des panneaux acoustiques et de la moquette pourront être modélisées en entrant l'impédance associée ou en utilisant un modèle d'absorption de type Biot-Allard si cela est disponible dans le logiciel.

On maillera le volume d'air intérieur défini par ces surfaces portant les conditions aux limites. On n'oubliera pas d'ajouter la source : ici un locuteur sera représenté par un monopôle, i.e. une source ponctuelle omnidirectionnelle. On lancera l'analyse en fréquences et l'on s'intéressera par exemple à la répartition spatiale de la pression acoustique à différentes fréquences choisies.

19.3.2 Un silencieux automobile

La figure 19.8 présente un silencieux d'automobile. Ce silencieux ne sera défini que par les surfaces représentées et

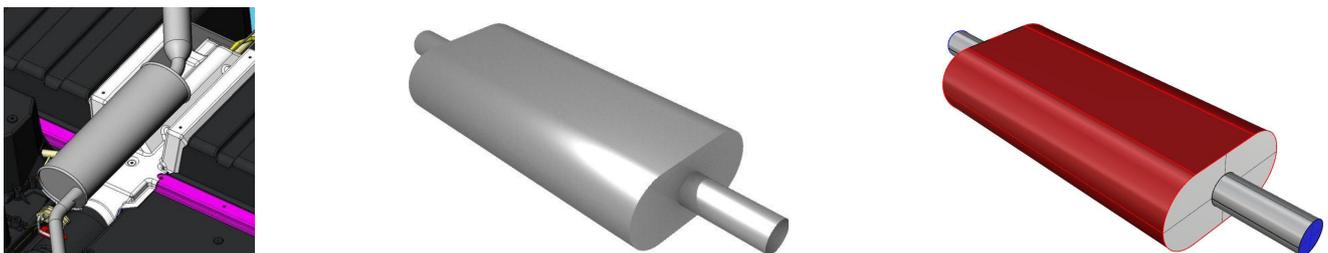


FIGURE 19.8: Modélisation d'un silencieux

le volume d'air qu'elles contiennent. On appliquera aux parois en rouge soit une condition de mur rigide (réflexion parfaite), soit une impédance correspondant à l'absorption due à la présence d'un matériau fibreux (laine de verre). Les surfaces grises seront également considérées comme des surfaces parfaitement réfléchissantes. Les deux sections en bleu (on n'en voit qu'une, l'autre étant à l'autre bout) correspondront à l'entrée de l'onde (onde plane) dans le silencieux, et à sa sortie.

On s'intéressera au facteur de perte, tel que défini par la relation (19.39). Les résultats avec et sans absorbant sont illustrés sur la figure 19.9, pour des fréquences allant de 25 à 1500 Hz par pas de 25 Hz. L'influence de l'ajout d'un absorbant est très nette sur ce graphique.

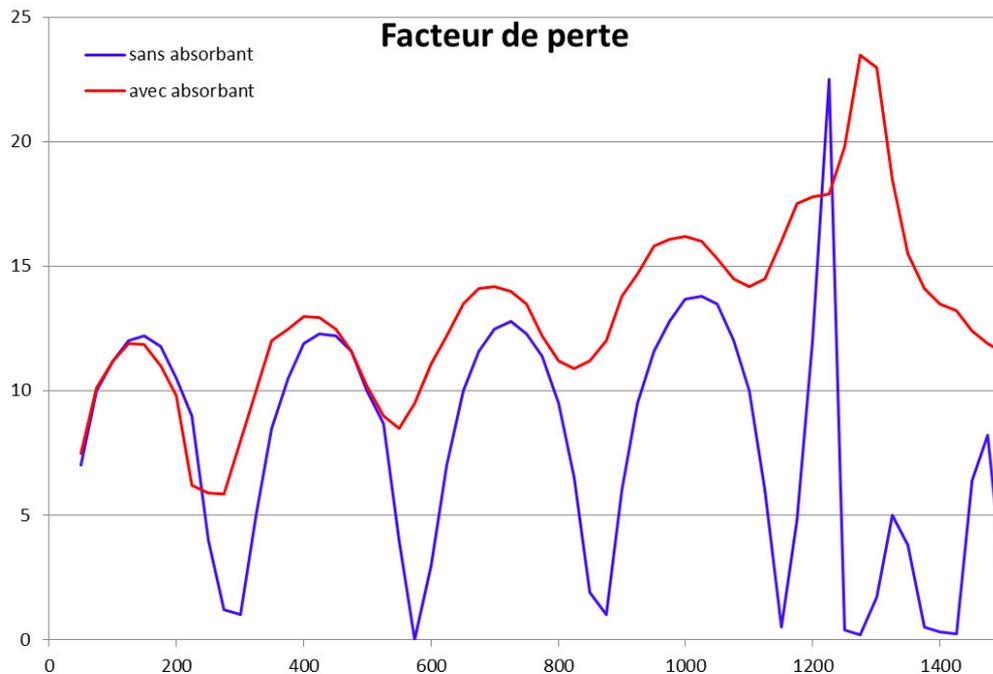


FIGURE 19.9: Facteur de perte pour le silencieux

19.3.3 Deux mots de statistiques

Nous reprenons ici une remarque faite au paragraphe 13.6.4. Considérons la figure 19.9 : elle représente la variation d'une réponse Y (ici le facteur de perte) en fonction d'une entrée X (ici la fréquence).

Supposons que nous nous intéressions maintenant à ce silencieux sollicité à une fréquence proche de 1000 Hz. On va supposer que la fréquence suit une loi normale centrée sur 1000 Hz et d'écart-type 25 Hz. Évidemment, avec les calculs menés précédemment, nous disposons de peu de points. On va même considérer disposer des points donnés au tableau 19.1. L'application de la formule (13.21) sur ces quelques points conduit à une première

Fréquence	950	975	1000	1025	1050
Sans absorbant	11.6	12.8	13.7	13.8	13.5
Avec absorbant	15.8	16.1	16.2	16.0	15.3
poids $1000 \cdot p_i$	2.16	9.68	15.96	9.68	2.16

Tableau 19.1: Points disponibles pour l'approximation de la moyenne

approximation de la moyenne du facteur de perte de 13.38 sans absorbant et 16.06 avec absorbant.

Évidemment, c'est une première approximation très grossière, qui peut être améliorée. Pour cela, il nous faudrait disposer de plus de points, aussi bien dans le domaine considéré qu'en dehors. Si l'on ne peut relancer de calcul, on peut essayer d'approximer la courbe de la réponse afin de pouvoir interpoler et extrapoler des points.

On peut utiliser tout type d'interpolation (voir chapitre A) comme par exemple un polynôme de Lagrange... ici nous utiliserons une courbe de tendance polynomiale de degré 2. Dans le cas sans absorbant, celle-ci est donnée par l'équation suivante : $y = -0,0004342857x^2 + 0,8877714286x - 439,8628571429$. De là, on peut générer quelques points supplémentaires. Vu la forme de la courbe de réponse, on sait que les valeurs interpolées seront correctes, ce n'est pas le cas pour les valeurs extrapolées, surtout loin de la zone ayant servi à générer cette courbe de tendance. Par exemple on trouve 12.6 pour 1075 Hz au lieu de 12.0, 11.2 pour 1100 Hz au lieu de 10.0. Néanmoins, en fonction de la forme de la courbe, cela peut permettre une amélioration sensible de l'approximation de la moyenne de la réponse.

Pour une analyse plus complète dans le cadre stochastique, c'est au chapitre 22 que l'on se reportera. Toutes les méthodes qui y sont décrites sont applicables en fréquence.

19.3.4 Sur les conditions aux limites

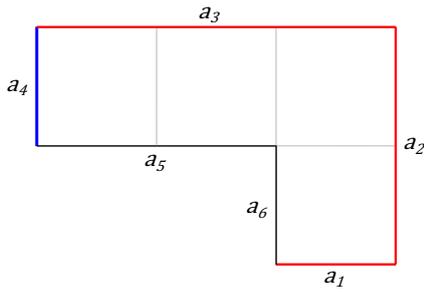


FIGURE 19.10: Acoustique et obstacle

Nous nous proposons de retrouver l'illustration 19.4d.

Pour cela, nous considérons le modèle décrit à la figure 19.10 constitué de 6 segments a_1 à a_6 . L'onde acoustique incidente arrive par le segment a_4 . L'onde est libre de se propager, et notamment elle n'est pas réfléchie sur les côtés a_1 à a_3 , l'obstacle ne correspondant qu'aux faces a_5 et a_6 .

Pour modéliser l'onde arrivant dans le modèle, on va supposer que la surface a_4 porte une condition de Dirichlet de type $p = \bar{p}$. Nous proposons, dans un premier temps, d'imposer sur les faces a_1 à a_3 une condition de Dirichlet de type $p = 0$. Nous utiliserons FREEFEM++ pour cet exemple.

Dans un premier temps, nous allons entrer directement la formulation faible définie à l'aide des formes bilinéaire (8.62) et linéaire (8.62) que nous rappelons :

$$a(p, q) = \int_{\Omega} \partial_{x_i} p \partial_{x_i} \tilde{q} - k^2 p \tilde{q} + \int_{\Gamma_R} i \rho c k A_n \tilde{q} \quad \text{et} \quad b(q) = - \int_{\Gamma_N} i \rho c k \bar{V}_n q \quad (19.40)$$

La description de la géométrie et le maillage sont donnés par :

```

1 real freq=200; // frequence en Hz
2 real c=343; // vitesse du son en m/s
3 func g=1; // on a p=g sur a4 => onde plane, par condition de Dirichlet
4 real k=freq/c;
5
6 border a1(t=0,1) { x= 2+t; y=0;}
7 border a2(t=0,1) { x=3; y= 2*t;}
8 border a3(t=0,1) { x= 3-3*t; y=2 ;}
9 border a4(t=0,1) { x= 0; y= 2-t ;}
10 border a5(t=0,1) { x= 2*t; y= 1 ;}
11 border a6(t=0,1) { x= 2; y=1-t ;}
12
13 mesh Th=buildmesh( a1(20) + a2(40) + a3(60) + a4(20) + a5(40) + a6(20));

```

Écrivons maintenant brutalement notre formulation faible :

```

14 fespace Vh(Th, P2);
15 Vh<complex> p, q;
16
17 solve helmholtz(p,q)= int2d(Th)(dx(p)*dx(conj(q)) + dy(p)*dy(conj(q)) - k*k*p*conj(q) )
18 -int1d(Th,a4)(g*q) + on(a1,p=0) + on(a2,p=0) + on(a3,p=0);
19
20 Vh pR=real(p);
21 plot (pR, wait=1, fill=1, ps="AcouDiff3.eps");

```

Le résultat est donné à la figure 19.11 pour plusieurs valeurs de la fréquence.

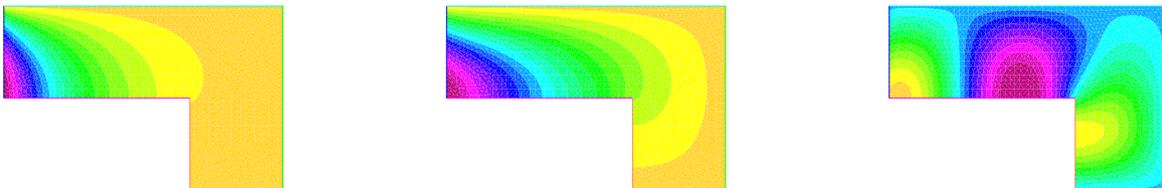


FIGURE 19.11: Acoustique au coin de la rue pour des fréquences de 100, 500 et 1000 Hz

Y a-t-il un intérêt à demander une approximation P2 ?

Y a-t-il un intérêt à demander une approximation P2 ?

Les conditions aux limites sont-elles satisfaisantes ?

On force seulement la pression à être nulle au bord, d'où la forme de la répartition...
 Imposer $p = 0$ ne correspond pas à une condition aux limites de type « fuir » à l'infini.
 Pas vraiment !

Modifions le script précédent, et ne passons pas en complexes :

```
14 fespace Vh(Th,P1);
15 Vh p,q;
16
17 solve helmholtz(p,q)= int2d(Th)(dx(p)*dx(q) + dy(p)*dy(q) - k*k*p*q )
18 -int1d(Th,a4)(g*q) + on(a1,p=0) + on(a2,p=0)+ on(a3,p=0);
19
20 string legende="frequence = "+freq+" Hz";
21 plot (p, wait=true, cmm=legende, fill=1, value=true);
```

Y a-t-il une différence ?

Rappel : une telle solution est dite monochromatique, voir fin du paragraphe 8.4.
 Y a-t-il une différence car $\mathbb{Z}(p) = 0$ et donc on peut rester dans \mathbb{R} .

Et si on entrait une condition de Neumann ? Là, il est nécessaire d'être en complexe. L'unité complexe sous FREEFEM++ est $1i$.

```
14 fespace Vh(Th, P2);
15 Vh<complex> p, q;
16
17 solve helmholtz(p,q)= int2d(Th)(p*q*k*k - dx(p)*dx(q) - dy(p)*dy(q))
18 -int1d(Th,a4)(g*q) -int1d(Th,a1)(1i*c*k*q)-int1d(Th,a2)(1i*c*k*q)-int1d(Th,a3)(1i*c*k*q);
19
20 string legende="frequence = "+freq+" Hz";
21 Vh pR=real(p);
22 plot (pR, wait=true, cmm=legende, fill=1, value=true);
```

Cette fois la réponse est nécessairement différente, puisque les conditions aux limites ne sont pas les mêmes... les résultats correspondants sont à la figure 19.12.

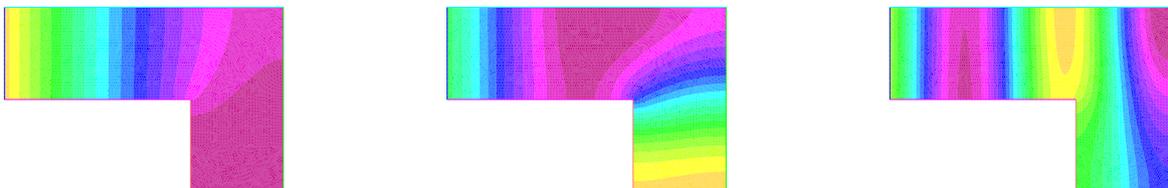


FIGURE 19.12: Avec condition de Neumann et pour des fréquences de 100, 500 et 1000 Hz

À quoi correspondent ces résultats ?

Chaque paroi vibre à une vitesse telle que $\bar{v}_n = 1$.

Sauriez-vous introduire des conditions de Robin ?

Il suffit de changer $1i*c*k$ en $1i*c*k*\cos(p)$ ou \sin l'impédance. Évidemment !

Permettraient-elles de laisser « fuir » l'onde à l'infini ?

En terme de codage, cela correspond à $1i*k*\cos(p)$.
 Oui. Pour cela il faut que l'impédance de surface soit égale à celle du milieu, i.e. ici $\alpha = \rho c$.

Est-on assez loin des conditions aux limites ?

Non. Voir figure 19.13.

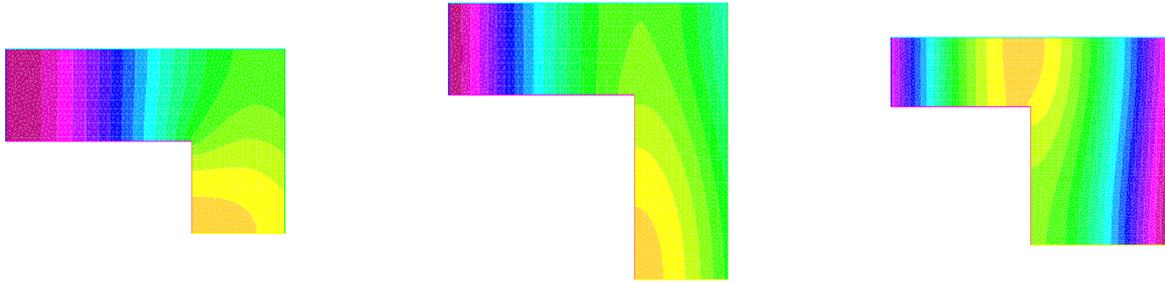


FIGURE 19.13: Distance aux conditions aux limites

19.3.5 Un peu d'amortissement

Introduisons maintenant un peu d'amortissement sur le cas précédent. L'équation des ondes avec amortissement est donnée par la relation (19.24). Il suffit donc d'ajouter à la forme bilinéaire $a(p, q)$ de l'équation (19.40) le terme :

$$+ \int_{\Omega} i d \omega p \bar{q} \quad (19.41)$$

Attention, il ne faut pas que le facteur d'amortissement d soit trop grand... sous peine que l'onde ne se propage pas bien loin. Cela se traduit par la modification du batch FREEFEM++ :

```

14 fespace Vh(Th, P2);
15 Vh<complex> p, q;
16 real d=0.05;
17
18 solve helmholtz(p,q)= int2d(Th)(dx(p)*dx(conj(q)) + dy(p)*dy(conj(q)) - k*k*p*conj(q)
19 +amort*i*i*freq*p*conj(q) ) -int1d(Th,a4)(g*q);
20
21 Vh pR=real(p), pI=imag(p);
22
23 string legende="frequence = "+freq+" Hz et amortissement = "+d;
24 plot (pR, cmm=legende, wait=true, fill=1);
25 plot (pI, cmm=legende, wait=true, fill=1);

```

La différence entre calcul dans \mathbb{R} et calcul dans \mathbb{C} prend ici tout son sens. Jusqu'à présent, la partie imaginaire du champ de pression était nulle en tout point, ce qui n'est désormais plus le cas. La figure 19.14 présente les parties réelle (en haut) et imaginaire (en bas) pour un amortissement de 0, 1 et 2%. On remarque qu'avec seulement

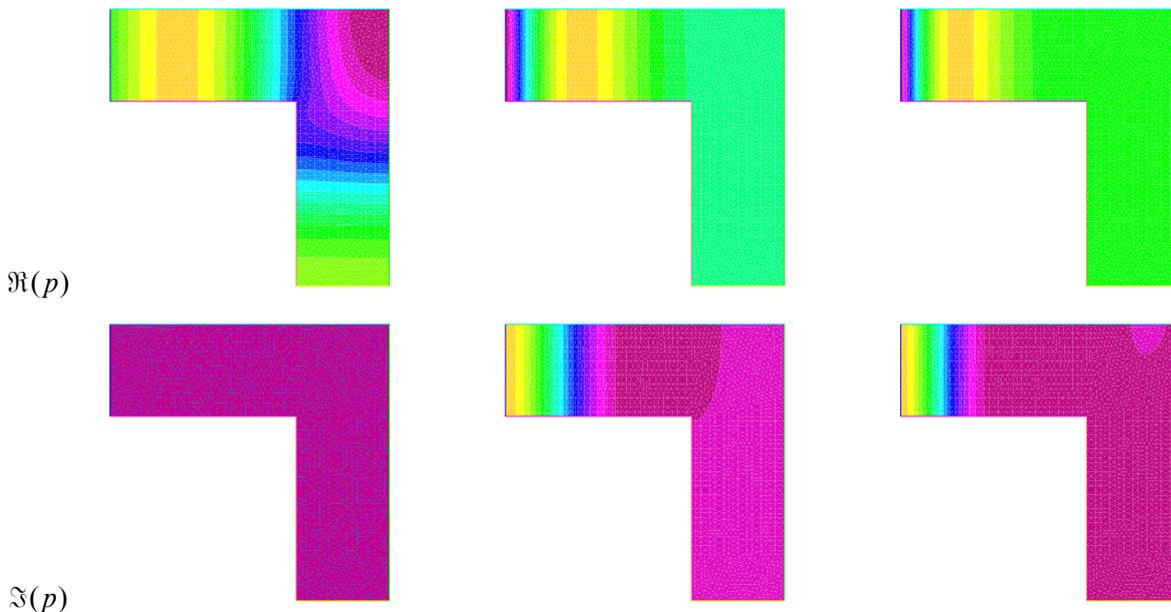


FIGURE 19.14: À 500 Hz avec un amortissement de 0, 1 et 2%

1% d'amortissement, l'onde arrive péniblement jusqu'au coude. Pour 2% d'amortissement, elle « s'évanouit » très vite, dès la partie droite.

19.3.6 Un obstacle

Pour le plaisir, introduisons un obstacle. Nous proposons le listing FREEFEM++ (abondamment commenté) suivant :

```

1 real freq=50.0; // frequence en Hz
2 real rho=1.; // densite constante
3 real c=343.0; // vitesse du son en m/s
4 func g=1.0; // on a p=g sur a4 => CL due a Green
5 real k=freq/c; // nombre d'onde
6 real amort=0.02; // 2% d'amortissement
7
8 border a1(t=0,1) { x= 3*t; y=0;}
9 border a2(t=0,1) { x=3; y= 2*t;}
10 border a3(t=0,1) { x= 3-3*t; y=2 ;}
11 border a4(t=0,1) { x= 0; y= 2-2*t ;}
12 border b1(t=0,1) { x= 1+t; y= 0.5;}
13 border b2(t=0,1) { x= 2-0.5*t; y= 0.5+t;}
14 border b3(t=0,1) { x= 1.5; y= 1.5-0.5*t;}
15 border b4(t=0,1) { x= 1.5-0.5*t; y= 1-0.5*t;}
16 mesh Th=buildmesh( a1(60) + a2(40) + a3(60) + a4(40)+ b1(-5) + b2(-5) + b3(-5) + b4(-5));
17
18 fespace Vh(Th, P1);
19 Vh<complex> p, q;
20
21 solve helmholtz(p,q)= int2d(Th)(-dx(p)*dx(conj(q)) - dy(p)*dy(conj(q)) +k*k*p*conj(q) // forme
    bilin non amortie
22 -amort*1i*freq*rho*p*conj(q) )// terme d'amortissement
23 -int1d(Th,a4)(g*conj(q)) // CL paroi rayonnante (th de Green)
24 //// la CL de paroi rayonnante devrait pouvoir etre remplacee par une CL de Dirichlet relevee:
25 // +on (a4, p=1)// CL Dirichlet relevee = paroi rayonnante.
26 //// Puis on peut ajouter de l'absorption parfaite
27 // + on(a3, p=0)//CL Dirichlet absorption parfaite
28 //// l'impedance du milieu est Z1=rho.c.
29 //// Si l'on que l'onde quite le modele, il faut Z2=Z1 sur la CL de Robin:
30 /// La CL de Robin: +int1d li*rho*c*k*A2*conj(q) devient: +int1d li*k*conj(q)
31 -int1d(Th,a2)(1i*k*conj(q)) -int1d(Th,a1)(1i*k*conj(q))-int1d(Th,a3)(1i*k*conj(q))// CL
    Robin milieu infini
32 //// et les CL de Neumann s'ecrivent au besoin (il faut definir Vn)
33 // -int1d(Th,a2)(li*rho*c*k*Vn*conj(q))-int1d(Th,a1)(li*rho*c*k*Vn*conj(q))-int1d(Th,a3)(li*
    rho*c*k*Vn*conj(q))// CL Neumann
34 ;
35
36 Vh pR=real(p), pI=imag(p);
37
38 string legende="frequence = "+freq+" Hz, amortissement = "+amort*100+"%";
39 plot (pR, wait=true, cmm=legende, fill=1, value=true);
40 plot (pI, wait=true, cmm=legende, fill=1, value=true);

```

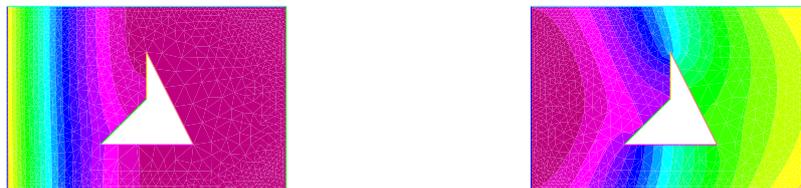


FIGURE 19.15: $\Re(p)$ et $\Im(p)$ à 50 Hz avec un obstacle et 2% d'amortissement

Évidemment, des conditions aux limites peuvent (doivent) être introduites sur l'obstacle. On peut ajouter une condition de Robin d'impédance Z_n :

```

34 -int1d(Th,b3)(1i*rho*c*k/Zn*conj(q))-int1d(Th,b4)(1i*rho*c*k/Zn*conj(q))// CL Robin

```

ou une condition d'absorption parfaite de Dirichlet :

```

34 + on(b3, p=0)//CL Dirichlet absorption parfaite

```

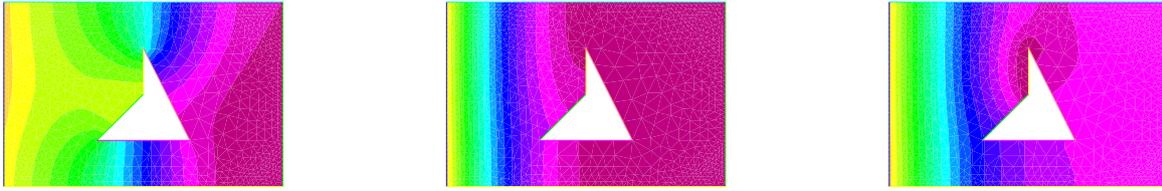


FIGURE 19.16: $\Re(p)$ pour $Z_n = 5$, $Z_n = 5000$ et pour la condition de Dirichlet $p = 0$

19.3.7 Transmission entre deux milieux

Considérons maintenant, toujours pour le plaisir, le cas d'une onde passant d'un milieu dans un autre. Nous proposons un passage d'une onde de l'air dans l'eau, modélisé en utilisant le script FREEFEM++ suivant :

```

1 real freq=50.0; // frequence en Hz
2 real rho1=1.204; // densite de l'air en kg/m3
3 real rho2=1000.0; // densite de l'eau en kg/m3
4 real c1=343.0; // vitesse du son dans l'air en m/s
5 real c2=1500.0; // vitesse du son dans l'eau en m/s
6 func g=1.0; // on a p=g sur a6 => onde plane, par condition de Dirichlet
7 real amort=0.0005;
8
9 border a1(t=0,1){x=t;y=0;};
10 border a2(t=1,3){x=t;y=0;};
11 border a3(t=0,2){x=3;y=t;};
12 border a4(t=3,2){x=t;y=2;};
13 border a5(t=2,0){x=t;y=2;};
14 border a6(t=2,0){x=0;y=t;};
15 border interf(t=0,1){x=1+t;y=2*t;}; // interface interne
16 mesh Th = buildmesh (a1(10)+a2(20)+a3(20)+a4(10)+a5(20)+a6(20)+interf(30));
17 //plot(Th, wait=1, cmm="maillage"); // affichage du maillage
18
19 fespace ValRho(Th, P0); // espace d'interpolation valeurs constantes par element
20 ValRho reg=region;
21 //plot(reg, fill=1, wait=1, cmm="regions", value=1); // affichage des regions
22 int nmil1=reg(0.1,0.1); // valeur prise pour la region 1 = 0
23 int nmil2=reg(2.9,0.1); // valeur prise pour la region 2 = 3
24 cout << " n milieu 1 = " << nmil1 << ", n milieu 2 = " << nmil2 << endl;
25 ValRho rho=rho1*(region==nmil1)+rho2*(region==nmil2);
26 ValRho c=c1*(region==nmil1)+c2*(region==nmil2);
27 //plot(rho, fill=1, wait=1, cmm="rho", value=1); // affichage des valeurs de rho
28 //plot(c, fill=1, wait=1, cmm="c", value=1); // affichage des valeurs de c
29 //cout << " rho(0.1,0.1)" << rho(0.1,0.1) << ", rho(2.9,0.1) = " << rho(2.9,0.1) << endl;
30 //cout << " rho(0.9,0.1)" << rho(0.9,0.1) << ", rho(1.9,0.1) = " << rho(1.9,0.1) << endl;
31 //cout << " c(0.1,0.1)" << c(0.1,0.1) << ", c(2.9,0.1) = " << c(2.9,0.1) << endl;
32 //cout << " c(0.9,0.1)" << c(0.9,0.1) << ", c(1.9,0.1) = " << c(1.9,0.1) << endl;
33
34 fespace Vh(Th, P1);
35 Vh<complex> p, q;
36
37 solve helmholtz(p,q)= int2d(Th)(-dx(p)*dx(conj(q)) - dy(p)*dy(conj(q)) +freq/c*freq/c*p*conj(q)
) // forme bilin non amortie
38 -amort*1i*freq*rho*p*conj(q) // terme d'amortissement
39 +int1d(Th,a6)(g*conj(q)) // CL paroi rayonnante (th de Green)
40 ;
41
42 Vh pR=real(p), pI=imag(p);
43
44 string legende="frequence = "+freq+" Hz, amortissement = "+amort*100+"%";
45 plot (pR, wait=true, cmm=legende, fill=1, value=true);
46 plot (pI, wait=true, cmm=legende, fill=1, value=true);

```

19.3.8 Interaction fluide-structure semi-forte

Dans les cas déjà évoqués tels qu'une source acoustique puissante capable de déformer une plaque mince (tablier fin de véhicule) ou d'une vibration se propageant jusqu'à faire rayonner une surface, alors il est nécessaire de modéliser à la fois le domaine mécanique et le domaine acoustique.

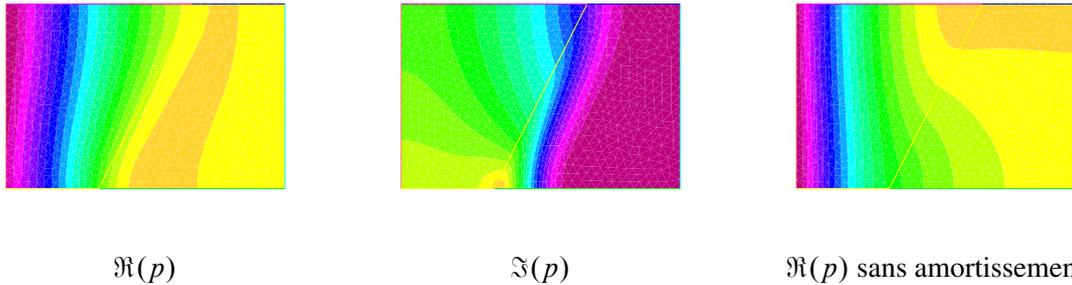


FIGURE 19.17: Passage d'une onde de l'air à l'eau avec et sans amortissement

Un **couplage fort** consiste à définir les deux volumes (fluide et solide), chacun avec sa formulation variationnelle, à coupler ces deux « physiques », par exemple par des multiplicateurs de Lagrange (le lecteur aura sans doute découvert mon inclination à utiliser lesdits multiplicateurs de Lagrange), et à résoudre le tout de manière simultanée.

Nous proposons une voie médiane, que nous appellerons **couplage semi-fort**, et dans lequel nous allons résoudre une série de problèmes quasiment découplés. Le cas que nous proposons de traiter est celui de l'interaction entre un domaine fluide, modélisé par l'équation d'Helmholtz en pression seule (comme dans les exemples précédents) et une structure ayant un comportement élastique linéaire isotrope. Ce calcul « semi-fort » se déroule comme suit :

1. On calcule la structure seule, soumise à ses efforts mécaniques divers (ici uniquement à son poids propre), en considérant que le fluide n'a pas encore exercé de pression. Cela nous donne une déformation de la structure, et particulièrement de la paroi d'interface avec le fluide ;
2. Cette déformation est utilisée pour modéliser le domaine fluide, dans lequel se trouve la source acoustique. On calcule la répartition de pression dans le domaine fluide, et on transforme la pression présente sur la paroi d'interface avec la structure en efforts.
3. Ces efforts supplémentaires sont introduits dans le calcul de la structure, qui se déforme à nouveau... et on boucle sur l'étape 2. Il convient de définir un critère d'arrêt. On peut considérer l'arrêt si, sur l'interface entre les deux domaines et entre deux pas successifs, la déformation n'évolue que de manière infime, ou dualement si les efforts sont quasiment constants.

Commençons par un petit rappel de mécanique, et pour cela, considérons tout d'abord le solide seul. Sa formulation variationnelle est donnée à l'équation (8.42) rappelée ici :

$$\int_{\Omega} \lambda \operatorname{div}(u) \operatorname{div}(v) + 2\mu \varepsilon(u) \cdot \varepsilon(v) = \int_{\Omega} f v + \int_{\Gamma_N} g_N v, \quad \forall v \in H_D^1(\Omega)$$

Le script FREEFEM++ ci-dessous résout le problème initial de la structure seule :

```

1 // tablier pour interaction fluide-structure semi-forte
2 // au lieu de definir les vecteurs [ux,uy], on definit par composantes
3 //
4 real E = 21.5; // Module d'Young
5 real nu = 0.29; // coefficient de Poisson
6 real gravity = -0.05;
7 int nmaille = 2; // au moins 70 pour un resultat assez lisse, 150 c'est mieux mais long
8 //
9 macro div(u,v) ( dx(u)+dy(v) ) // EOM
10 real sqrt2=sqrt(2.);
11 macro epsilon(u,v) [dx(u),dy(v),(dy(u)+dx(v))/sqrt2] // EOM
12 //
13 border st1(t=0,10) { x=0; y=t;};
14 border st2(t=0,-1) { x=t; y=10;};
15 border st3(t=10,0) { x=-1; y=t;};
16 border st4(t=-1,0) { x=t; y=0;};
17 mesh Th = buildmesh( st1(10*nmaille)+st2(nmaille)+st3(10*nmaille)+st4(nmaille));
18 //plot(Th);
19 //
20 real lambda = E*nu/(1+nu)/(1-2*nu); // coefficient de Lamé
21 real mu = E/2/(1+nu); // coefficient de Lamé
22 //
23 fespace Wh(Th,P1);

```

```

24 Wh ux,uy,w,s;
25 //
26 // forme faible :
27 solve StatiqueIsotrope(ux,uy,w,s)=
28     int2d(Th)( lambda*div(ux,uy)*div(w,s) +2.*mu*(epsilon(ux,uy)'*epsilon(w,s)) )
29 - int2d(Th) (gravity*s)
30 + on(st2,ux=0,uy=0) // tenu en haut
31 + on(st4,ux=0,uy=0) // tenu en bas
32 ;

```

Remarque. En complément à ce code, nous fournissons le calcul des déformations et contraintes, dont nous n'aurons pas besoin pour la suite, mais c'est cadeau...

Disposant des déformations et des contraintes, on peut trouver aisément les directions principales (il suffit de diagonaliser une matrice symétrique 2×2), puis calculer par exemple la contrainte de von Mises.

```

33 //
34 // POST-TRAITEMENT
35 //
36 // Deformee :
37 mesh Th1 = movemesh(Th, [x+ux, y+uy]);
38 //plot(Th1, wait=1);
39
40 //DEFORMATIONS
41 // Ici j'ai calculé composante par composante plutôt que de générer un vecteur
42 // Sur le maillage non déformé: EpsXX, EpsYY, EpsXY
43 // Sur le maillage déformé: YEpsXX, YEpsYY, YEpsXY
44 fespace Xh(Th,P1);
45 Xh EpsXX=dx(ux), EpsYY=dy(uy), EpsXY=(dy(ux)+dx(uy))/sqrt2;
46 Xh SigXX=2*mu*EpsXX+lambda*(EpsXX+EpsYY);
47 Xh Sigyy=2*mu*EpsYY+lambda*(EpsXX+EpsYY);
48 Xh SygXY=2*mu*EpsXY;
49 //plot(EpsXX, fill=1, cmm="epsilon xx", wait=1);
50 fespace Yh(Th1,P1);
51 Yh YEpsXX=dx(ux), YEpsYY=dy(uy), YEpsXY=(dy(ux)+dx(uy))/sqrt2;
52 Yh YSigXX=2*mu*EpsXX+lambda*(EpsXX+EpsYY);
53 Yh YSigYY=2*mu*EpsYY+lambda*(EpsXX+EpsYY);
54 Yh YSigXY=2*mu*EpsXY;
55 //plot(YEpsXX, fill=1, cmm="epsilon xx", wait=1);
56 //plot(YSigXX, fill=1, cmm="sigma xx", wait=1);
57 //plot(YEpsYY, fill=1, cmm="epsilon yy", wait=1);
58 //plot(YSigYY, fill=1, cmm="sigma yy", wait=1);
59 //plot(YEpsXY, fill=1, cmm="epsilon xy", wait=1);
60 //plot(YSigXY, fill=1, cmm="sigma xy", wait=1);

```

Considérons maintenant le calcul du fluide seul. Le listing ressemble à ce qui a déjà été présenté précédemment. Deux points sont à considérer :

- le maillage à partir d'une donnée issue du calcul : connaissant la solution du problème structurel, on dispose des déplacements ux et uy ... dont on se sert pour définir le domaine fluide :

```
border f14(t=10,0) {x=ux(0,t); y=uy(0,t)}; // interface avec la structure
```

- le calcul des efforts dus à la pression.

Si l'on résout en vitesse et pression, alors, les efforts sont définis par :

```

sigmaxx([x+ux,y+uy]) = (2*dx(ux)-p);
sigmayy([x+ux,y+uy]) = (2*dy(uy)-p);
sigmaxy([x+ux,y+uy]) = (dx(ux)+dy(uy));

```

et on ajoute la force suivante dans la formulation variationnelle du problème de structure :

```
+ int1d(Th, interface)(sigma11*N.x*w + sigma22*N.y*s + sigma12*(N.y*w+N.x*s) )
```

Si l'on résout en pression uniquement, on peut faire simple, et ajouter la force suivante dans la formulation variationnelle du problème de structure :

```
+ int1d(Th, interface)(pR*N.x*w + pR*N.y*s + (dx(ux)+dy(uy))*(N.y*w+N.x*s) )
```

où l'on a écrit pR pour rappeler que l'on considère la partie réelle de la pression, qui peut être directement p si l'on a une solution monochromatique dans la partie fluide.

Cela conduit au script :

```

33 // On modelise le fluide par l'equation de Helmholtz
34 //
35 include "VM_StrFluid2.edp" // partie structure = statique lineaire isotrope
36 //
37 real freq=50.0; // frequence en Hz
38 real rho=1.;
39 real c=343.0; // vitesse du son en m/s
40 func g=1.0; // on a p=g sur a4 => onde plane, par condition de Dirichlet
41 real k=freq/c;
42 real amort=0.0; //2;
43 //
44 border f11(t=0,10) {x=t; y=0;};
45 border f12(t=0,10) {x=10; y=t;};
46 border f13(t=10,0) {x=t; y=10;};
47 border f14(t=10,0) {x=0; y=ux(0,t);}; // interface avec la structure
48 //
49 mesh sh = buildmesh(f11(10*nmaille)+f12(10*nmaille)+f13(10*nmaille)+f14(10*nmaille));
50 //plot(sh, wait=1);
51 //
52 fespace Ph(sh, P1);
53 Ph<complex> p, q;
54 //
55 problem helmholtz(p,q)= int2d(sh)(-dx(p)*dx(conj(q)) - dy(p)*dy(conj(q)) +k*k*p*conj(q) //
// forme bilin non amortie
56 -amort*1i*freq*rho*p*conj(q) ) // terme d'amortissement
57 -int1d(sh,f12)(g*conj(q)) // CL paroi rayonnante (th de Green)
58 ;
59 solve helmholtz(p,q)
60 //
61 Ph pR=real(p), pI=imag(p);
62 plot (pR, wait=true, cmm="Re(p)", fill=1, value=true);
63 //plot (pI, wait=true, cmm="Im(p)", fill=1, value=true);

```

Il ne reste plus qu'à faire boucler le calcul. Ici nous n'avons pas introduit de critère de convergence et avons simplement effectué une boucle de trois itérations :

```

64 //
65 // boucle
66 //
67 int i;
68 for(i=0; i<3; i++) // boucle plutot qu'un while avec condition de sortie basee sur convergence
69 {
70 // Probleme avec efforts transmis:
71 problem StatiqueIsotropeCouple(ux,uy,w,s,init=i)=
72     int2d(Th)( lambda*div(ux,uy)*div(w,s) +2.*mu*(epsilon(ux,uy)') // (pour impression
// LaTeX)
73     *epsilon(w,s) )
74 - int2d(Th) (gravity*s)
75 + on(st2,ux=0,uy=0) // tenu en haut
76 + on(st4,ux=0,uy=0) // tenu en bas
77 - int1d(Th,interface)(p*N.x*w + p*N.y*s + (dx(ux)+dy(uy))*(N.y*w+N.x*s) )
78 ;
79 Th1 = movemesh(Th, [x+uu, y+vv]);
80 //plot(Th1);
81 mesh sh = buildmesh(f11(10*nmaille)+f12(10*nmaille)+f13(10*nmaille)+f14(10*nmaille));
82 //plot(sh);
83 solve helmholtz(p,q)
84 }
85 plot(Th1);

```