

# L'accélération par sillage laser - Éléments théoriques

Dans cette partie, nous introduirons les concepts nécessaires à la compréhension de la physique de l'accélération par sillage laser, ainsi que les principaux éléments théoriques sur lesquels reposeront les résultats qui seront présentés par la suite. Afin de comprendre les mécanismes de l'interaction laser-plasma, nous commencerons d'abord par présenter quelques notions de base concernant les plasmas et les lasers. Ceci nous permettra de comprendre comment l'interaction laser-plasma peut créer une onde plasma propice à l'accélération de particules, et différents modèles seront présentés pour comprendre le mécanisme d'accélération d'électrons par sillage laser. Ensuite nous étudierons le mouvement transverse des électrons au cours de leur accélération – appelé mouvement bétatron –, et nous verrons que ce mouvement transverse leur permet d'émettre un rayonnement X communément appelé 'rayonnement bétatron'. Pour finir, nous regarderons quelles sont les principales caractéristiques d'une source X bétatron, et comment il est possible de calculer ce rayonnement à partir des trajectoires des électrons.

## II.1 Notions de base sur l'interaction laser-plasma

### II.1.1 Plasma

Souvent présenté comme le quatrième état de la matière, un plasma est un milieu constitué au moins partiellement de particules chargées, telles que des électrons libres ou des ions. Un plasma peut par exemple s'obtenir en chauffant suffisamment un gaz, de manière à arracher certains des électrons des atomes qui constituent le gaz. Pour l'atome le plus simple, l'hydrogène, l'énergie à fournir pour arracher l'électron – appelée énergie d'ionisation – est de 13.6 eV, correspondant à une température d'ionisation de plus de 100000 K. On voit tout de suite que ces valeurs sortent du cadre auquel nous sommes habitués sur notre planète. En effet, si le plasma est l'état de la matière qui constitue très majoritairement notre univers, il se rencontre difficilement à l'état naturel sur Terre (sauf dans les hautes couches de l'atmosphère), et il est nécessaire de recourir à quelques astuces pour le créer.

La grande majorité des plasmas est globalement neutre. Ainsi, si dans un plasma constitué de deux espèces de particules, par exemple des ions et des électrons, on écarte un petit volume  $\delta V$  d'électrons de sa position initiale, ceci crée un déséquilibre local de charge dans le plasma ainsi que des champs électriques s'opposant à ce déséquilibre. Le déplacement d'un petit volume de charge sur une distance  $dx$  engendre un champ  $E = en_e dx / \epsilon_0$ , avec  $e$  la charge fondamentale,  $\epsilon_0$  la permittivité du vide et  $n_e$  la densité particulaire des électrons. Les électrons

## II L'ACCÉLÉRATION PAR SILLAGE LASER - ÉLÉMENTS THÉORIQUES

---

sont alors soumis à la force de rappel :

$$F_x = m_e \ddot{x} = e \frac{en_e}{\varepsilon_0} dx,$$

où  $m_e$  est la masse de l'électron. On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique et les électrons oscillent autour de leur position initiale à la pulsation

$$\omega_p = \sqrt{\frac{n_e e^2}{\varepsilon_0 m_e}}. \quad (1)$$

Le terme  $\omega_p$  est appelé la pulsation plasma électronique, et dépend de la densité du plasma  $n_e$  : plus le plasma est dense, plus les électrons oscillent rapidement. On peut de la même manière définir une pulsation pour l'oscillation des ions :

$$\omega_{pi} = \sqrt{\frac{n_i e^2}{\varepsilon_0 m_i}} = \sqrt{Z \frac{m_e}{m_i}} \omega_p, \quad (2)$$

où  $m_i$  est la masse de l'ion concerné,  $Z$  est le degré d'ionisation de cet ion par rapport à l'atome dans son état fondamental, et où la densité ionique  $n_i = Zn_e$ , afin de respecter la neutralité globale du plasma. On constate que la pulsation  $\omega_{pi}$  est bien inférieure à  $\omega_p$  ( $\sqrt{Zm_e/m_i} \lesssim 0.02$ ).

L'accélération par sillage laser tire partie de cette grande différence entre la fréquence plasma ionique (basse fréquence) et la fréquence plasma électronique (haute fréquence). Il s'agira de déplacer les électrons, en excitant leur pulsation  $\omega_p$ , pour créer une perturbation de densité qui engendrera elle-même des champs très intenses, propices à l'accélération de particules. Ainsi pour prendre des valeurs typiques, si on considère un plasma de densité de l'ordre de  $5 \times 10^{18} \text{ cm}^{-3}$  et qu'on vide de ses électrons une petite sphère d'une taille de  $2\pi c/\omega_p \sim 10 \text{ } \mu\text{m}$  (où  $c$  est la vitesse de la lumière), on obtient un champ généré  $E = 300 \text{ GV/m}$ . Ces valeurs énormes de champs pouvant être générées dans des plasmas montrent leur avantage par rapport aux champs générés dans les cavités radiofréquences des accélérateurs conventionnels, qui sont de 3 ordres de grandeur inférieurs.

Il se pose alors deux questions : comment peut-on facilement déplacer des électrons au sein d'un plasma et comment peut-on tirer partie des champs ainsi générés afin d'accélérer des faisceaux d'électrons ? L'accélération par sillage laser propose de répondre à ces deux questions par le biais d'une impulsion laser ultra-intense et ultra-courte.

### II.1.2 Laser

Un laser (de l'acronyme anglais pour 'Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation') est un dispositif qui crée un rayonnement directif et cohérent.

Le principe du laser est de jouer sur la désexcitation coordonnée d'atomes excités au préalable par une source d'énergie extérieure (phénomène de pompage) pour produire un rayonnement électromagnétique amplifié.

La propagation dans le vide de l'onde laser est calculée au moyen des équations de Maxwell, qui s'écrivent pour les champs électriques  $\mathbf{E}$  et magnétiques  $\mathbf{B}$  :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (4)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (5)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (6)$$

avec  $\rho$  la densité de charge,  $\mathbf{J}$  la densité de courant et  $\mu_0$  la perméabilité du vide.

D'autre part, les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  du laser peuvent être dérivés à partir du potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  et du potentiel scalaire  $\Phi$  par

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (7)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (8)$$

où, dans le vide,  $\Phi = 0$ , et les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  s'écrivent alors seulement en fonction du potentiel vecteur  $\mathbf{A}$ .

Dans le cas de l'accélération par sillage laser, le laser prend la forme d'une impulsion temporelle très courte (typiquement de l'ordre de 30 fs), ce qui permet d'obtenir des puissances très élevées (térawatt, pétawatt) même si les énergies en jeu restent modestes ( $\sim 1 - 10$  J). Le spectre de cette impulsion est centré autour d'une longueur d'onde  $\lambda_0$  (on définit alors sa pulsation laser  $\omega_0 = 2\pi c/\lambda_0$ ). Pour des questions de propagation dans les cavités amplificatrices lasers, l'impulsion laser en sortie se retrouve sous la forme de modes électromagnétiques transverses (notés  $\text{TEM}_{mn}$  avec  $m$  et  $n$  des entiers définissant l'ordre des modes). Le plus simple d'entre eux,  $\text{TEM}_{00}$  correspond à un faisceau gaussien. Dans le cadre de l'interaction par sillage laser, on approxime très souvent le laser expérimental par un faisceau gaussien idéal. Si on considère un tel faisceau se propageant dans la direction  $+x$  et en définissant  $r = \sqrt{y^2 + z^2}$  pour la direction transverse, alors son potentiel vecteur dans le vide est donné par

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{r}, t) = A_0(x, r, t) \Re(e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} \mathbf{e}_\perp),$$

avec  $\mathbf{e}_\perp$  décrivant la direction de polarisation du laser, et  $k_0 = \omega_0/c$ . Pour une polarisation linéaire, on convient par exemple que  $\mathbf{e}_\perp = \mathbf{e}_y$ . Dans ce cas, le champ électrique oscille selon  $\mathbf{e}_y$  tandis que le champ magnétique oscille selon  $\mathbf{e}_z$ . On rencontrera aussi le cas d'une polarisation circulaire, pour laquelle  $\mathbf{e}_\perp = 1/\sqrt{2}(\mathbf{e}_y +$

## II L'ACCÉLÉRATION PAR SILLAGE LASER - ÉLÉMENTS THÉORIQUES

---

$i\mathbf{e}_z$ ), et où les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  tournent autour de l'axe de propagation. Pour le faisceau gaussien, schématisé en figure 1, on peut expliciter  $A_0(x, r, t)$  de la manière suivante :

$$A_0(x, r, t) = a_0 \exp\left(-2 \ln(2) \frac{(x - ct)^2}{c^2 \tau_0^2}\right) \frac{W_0}{W(x)} \exp\left(-\frac{r^2}{W^2(x)} - i \frac{k_0 r^2}{2R(x)}\right) \exp(i\phi(x)).$$

Ici,  $a_0$  est le maximum du potentiel vecteur,  $\tau_0$  est la durée FWHM (durée totale à mi-hauteur, de l'anglais 'Full Width at Half Maximum') de l'intensité de l'impulsion et  $W_0$  est le waist du faisceau, c'est-à-dire son rayon transverse à  $1/e$  du champ électrique maximal. L'évolution de la taille transverse du faisceau est alors donnée par

$$W(x) = W_0 \sqrt{1 + \frac{x^2}{Z_R^2}}, \quad (9)$$

avec  $Z_R = \pi W_0^2 / \lambda_0$  définie comme la longueur de Rayleigh. Cette valeur définit la distance à partir de laquelle le faisceau laser commence à être significativement défocalisé. Ainsi plus on essaie de focaliser un laser donné en un plan (donc plus  $W_0$  sera petit), plus ce laser diverge rapidement par la suite. On utilisera aussi dans cette thèse la largeur à mi-hauteur de l'intensité  $w_0 = \sqrt{2 \ln(2)} W_0$  à la place de  $W_0$ .

$R(x)$  représente le rayon de courbure du front d'onde à une distance  $x$  du plan focal. Il est défini par

$$R(x) = x \left(1 + \frac{Z_R^2}{x^2}\right). \quad (10)$$

$\phi(x) = \arctan(x/Z_R)$  représente la phase de Gouy du laser. Cette phase additionnelle varie de  $\pi$  lorsque l'onde passe de convergente en  $x = -\infty$  à divergente en  $x = +\infty$ .

Le terme  $\exp\left(-2 \ln(2) \frac{(x-ct)^2}{c^2 \tau_0^2}\right)$  représente la partie temporelle de l'impulsion laser, qui est aussi gaussienne.

Enfin le terme  $\frac{W_0}{W(x)} \exp\left(-\frac{r^2}{W^2(x)} - i \frac{k_0 r^2}{2R(x)}\right)$  décrit la distribution spatiale transverse du champ laser. Elle est obtenue en résolvant l'équation d'onde dans l'approximation paraxiale, qui suppose une faible divergence du faisceau par rapport à l'axe optique, et qui devient fautive lorsque  $W_0 \sim \lambda_0$ .

Il est utile pour la suite de noter quelques relations intéressantes vérifiées par le laser gaussien, liant la puissance du laser  $P_0$ , son énergie  $E_0$ , son intensité maximale  $I_0$  (définie comme la moyenne temporelle du vecteur de Poynting, soit  $I_0 = E_0^2 / \mu_0 c$ )

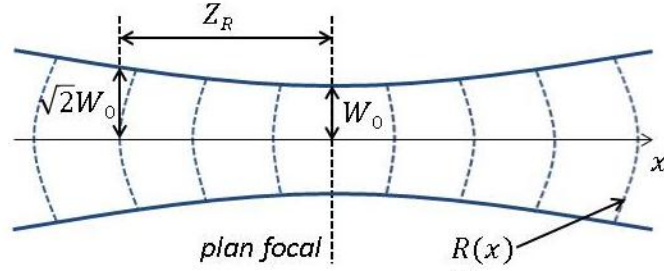


FIGURE 1 – Caractéristiques du faisceau gaussien. En bleu,  $W(x)$ , le rayon du champ à  $1/e$  de sa valeur maximale. En pointillés, la forme du front d'onde représenté par  $R(x)$ .

et le potentiel vecteur  $a_0$  normalisé à  $m_e c/e$  :

$$P_0 = 2\sqrt{\frac{\ln(2)}{\pi}} \frac{E_0}{\tau_0}, \quad (11)$$

$$I_0 = \frac{2P_0}{\pi W_0^2}, \quad (12)$$

$$a_0^2 = \frac{I_0 \lambda_0^2}{2\pi^2 \varepsilon_0 c^3}. \quad (13)$$

Cette dernière relation est souvent écrite de manière pratique avec les unités usuelles

$$a_0 = 0.855 \sqrt{I_0 [10^{18} \text{ W.cm}^{-2}] \lambda_0 [\mu\text{m}]} \quad (14)$$

### II.1.3 Interaction laser-plasma

Dans le cas de l'accélération par sillage laser, le plasma est créé en envoyant une impulsion laser gaussienne ultra-courte sur un jet de gaz, qui est souvent constitué de gaz léger tel que l'hélium.

Durant leur interaction avec le laser, les électrons des atomes du gaz sont soumis au potentiel coulombien de l'atome, ainsi qu'au champ laser. Le potentiel total est donné par :

$$V_{tot}(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} - eE_0 r.$$

On peut définir le potentiel d'ionisation  $E_i$  comme la valeur maximale atteinte par ce potentiel (en un certain  $r_{max} = \sqrt{Ze/4\pi\varepsilon_0 E_0}$ ), et on peut alors calculer l'intensité laser nécessaire pour l'ionisation :

$$I_0 = \frac{\pi^2 \varepsilon_0^3 c}{2e^6 Z^2} E_i^4. \quad (15)$$

Les valeurs d'ionisation pour les deux électrons de l'hélium sont respectivement  $E_i(He^+) = 24.6 \text{ eV}$  et  $E_i(He^{2+}) = 54.4 \text{ eV}$ . Ainsi l'intensité demandée pour ioniser

## II L'ACCÉLÉRATION PAR SILLAGE LASER - ÉLÉMENTS THÉORIQUES

totalemment l'atome d'hélium est déterminée par l'énergie d'ionisation du deuxième électron, et on obtient une intensité laser nécessaire  $I_0 = 8.78 \times 10^{15} \text{ W/cm}^{-2}$ .

En prenant des valeurs typiques de l'accélération par sillage laser, soit une énergie  $E_0 \sim 1 \text{ J}$ , un waist  $W_0 \sim 10 \text{ } \mu\text{m}$  ainsi qu'une durée  $\tau_0 \sim 30 \text{ fs}$ , on obtient une intensité de l'ordre de  $2 \times 10^{18} \text{ W/cm}^{-2}$ , c'est-à-dire une intensité près de 3 ordres de grandeur supérieure à celle nécessaire pour ioniser totalement le gaz d'hélium.

De plus, si on considère que le laser ionise totalement les atomes se trouvant dans un rayon de l'ordre de son waist pendant sa propagation, et en prenant une distance de propagation  $D \sim 1 \text{ cm}$  – longueur typique d'accélération dans notre cas – dans un gaz de densité  $5 \times 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ , l'énergie laser consommée pour l'ionisation des particules est donnée par :

$$E_{ioni} = 2\pi W_0^2 D n_e (E_i(\text{He}^+) + E_i(\text{He}^{2+})) = 400 \text{ } \mu\text{J}.$$

La proportion d'énergie laser perdue dans l'ionisation du plasma est ainsi minime.

Ces observations ont deux conséquences quant-au traitement de l'interaction du laser avec le gaz. Premièrement, l'intensité présente dans le piédestal de l'impulsion laser est déjà suffisante pour ioniser l'hélium. On peut donc considérer que la quasi-totalité de l'impulsion laser interagit avec un plasma déjà formé. Deuxièmement, on pourra négliger l'énergie laser perdue dans l'ionisation du gaz. Ainsi en pratique, on ne prendra pas en compte l'état gazeux, et on considèrera directement l'interaction d'un laser avec un plasma déjà totalement ionisé. Cette hypothèse permet notamment de réduire les ressources nécessaires pour les simulations numériques, le calcul de l'ionisation étant évité (on ne s'intéressera pas dans cette thèse à l'utilisation d'espèces atomiques de haut Z).

On s'intéresse à présent à la propagation du laser au sein du plasma. Le laser y vérifie l'équation de dispersion suivante :

$$\omega_0^2 = \omega_p^2 + c^2 k_0^2. \quad (16)$$

Deux cas de figures peuvent se présenter : Si  $\omega_p > \omega_0$ , alors  $k_0$  est complexe, et l'onde laser ne pourra pas se propager dans le milieu : elle sera réfléchiée et donnera une onde évanescence dans le plasma. Physiquement, cela signifie que le temps caractéristique de mouvement des électrons est plus petit que la période laser : les électrons auront le temps de réagir aux oscillations du champ laser et pourront écranter sa propagation. Un tel plasma est dit sur-dense.

Si  $\omega_p < \omega_0$ , alors à l'inverse,  $k_0$  est réel, et l'impulsion laser peut se propager dans le plasma. Physiquement, les électrons n'auront pas le temps de réagir aux oscillations rapides du champ laser, et ne pourront pas s'opposer à la propagation du laser. Un tel plasma est dit sous-dense et c'est ce genre de plasma qui nous intéresse dans l'accélération par sillage laser.

Pour un laser donné, la transition entre les régimes sous-dense et sur-dense est donnée par la densité critique  $n_c$  :

$$n_c = \frac{\omega_0^2 m_e \varepsilon_0}{e^2}. \quad (17)$$

Pour une longueur d'onde  $\lambda_0 = 800$  nm, caractéristique des lasers Ti :Saphir utilisés dans notre cas, on obtient  $n_c = 1.75 \times 10^{21}$  cm<sup>-3</sup>. Les densités utilisées en accélération par sillage laser sont généralement  $< 0.01 n_c$ .

Par ailleurs, la relation de dispersion permet d'obtenir les vitesses de phase  $v_\phi$  et de groupe  $v_g$  de l'onde laser

$$v_\phi = \frac{\omega_0}{k_0} = \sqrt{c^2 + \frac{\omega_p^2}{k_0^2}} > c, \quad (18)$$

$$v_g = \frac{d\omega_0}{dk_0} = \eta c = \frac{c}{\sqrt{1 + \omega_p^2/\omega_0^2}}, \quad (19)$$

où  $\eta$  est l'indice optique du plasma :

$$\eta = \frac{c}{v_\phi} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega_p^2/c^2 k_0^2}} \simeq 1 - \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}. \quad (20)$$

Cette expression de l'indice de réfraction est valable dans le cas d'une onde électromagnétique de faible amplitude de pulsation  $\omega_0$ . Dans un cadre moins général (mais toujours dans un cas faiblement relativiste avec  $a^2 \ll 1$ ), l'expression de l'indice de réfraction se complique pour devenir [Esarey *et al.*, 1996, Mori, 1997] :

$$\eta = \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \left[ 1 + \frac{\delta n}{n} - \frac{\langle a^2 \rangle}{2} - 2 \frac{\delta \omega_0}{\omega_0} \right] \right), \quad (21)$$

avec  $n$  la densité du plasma non perturbée,  $\delta n$  la perturbation de densité,  $\langle a \rangle$  le potentiel vecteur normalisé du laser moyenné sur un cycle optique,  $\omega_0$  la pulsation centrale du laser et  $\delta \omega_0/\omega_0$  qui exprime sa largeur de bande spectrale. L'indice est alors modifié en fonction de trois termes : le premier  $\delta n/n$  est dû à la perturbation de densité engendrée par le laser, le deuxième  $\langle a^2 \rangle/2$  provient des effets relativistes car le laser accélère les électrons, et le troisième  $\delta \omega_0/\omega_0$  correspond à la prise en compte de la largeur de bande spectrale du laser. Cette expression de l'indice de réfraction permet notamment d'étudier les phénomènes de guidage du laser lors de sa propagation dans le plasma.

Comme on utilise des densités  $n_e \ll n_c$ , on est dans un cas où  $v_g \sim c$ , ce qui a une grande importance comme on le verra dans la suite.

## II.2 Accélération d'électrons par sillage laser

### II.2.1 Création de l'onde de sillage

#### Théorie linéaire

On considère maintenant que seuls les électrons sont en mouvement, tandis que les ions constituent un fond immobile et neutralisant, cette hypothèse étant justifiée dans la suite. On suppose de plus que le plasma peut être considéré comme un fluide froid, l'énergie thermique des électrons étant faible par rapport à l'énergie gagnée du laser. Cette hypothèse permet de supprimer le terme de pression dans l'équation de conservation de l'impulsion. Ainsi, en considérant seulement l'interaction des électrons avec le champ électromagnétique du laser, celle-ci pourra s'écrire :

$$m_e \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + m_e (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (22)$$

En utilisant les expressions des champs en fonction des potentiels scalaires et vecteurs fournies dans les équations (7) et (8), cette équation peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{e}{m_e} \left( -\nabla \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \right). \quad (23)$$

En se plaçant dans la limite linéaire ( $|a| = e|A|/m_e c \ll 1$ ) [Kruer, 1988, Esarey *et al.*, 1996], et en considérant l'équation (23) au premier ordre, on obtient la vitesse  $\mathbf{v}_0$  :

$$\mathbf{v}_0 = \frac{e\mathbf{A}}{m_e} = c\mathbf{a}. \quad (24)$$

Le mouvement rapide des électrons consiste à suivre les oscillations transverses du laser, mais la moyenne temporelle de cette vitesse sur un cycle optique est nulle. Ce mouvement n'a donc pas d'influence quant-à l'excitation d'une onde de sillage. On peut néanmoins réinjecter cette solution dans (23) sous la forme  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1$  pour obtenir le mouvement au second ordre :

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = -(\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 - \frac{e}{m_e} \mathbf{v}_0 \times (\nabla \times \mathbf{A}), \quad (25)$$

$$= c^2 \frac{\nabla a^2}{2}. \quad (26)$$

Le terme obtenu  $m_e c^2 \nabla a^2 / 2$  est appelé la force pondéromotrice du laser, noté  $\mathbf{F}_p$ . Cette force correspond au mouvement moyen des électrons sur une période laser, et elle est responsable de la mise en mouvement des électrons. En effet, elle conduit à l'éjection des électrons des zones de champs forts, et en particulier, ceux-ci sont donc expulsés latéralement et longitudinalement lors du passage de l'impulsion laser. Son expression est valable pour d'autres particules (à condition de remplacer  $m_e$  par la masse appropriée, et de prendre en compte la charge éventuelle  $Z \neq 1$



pour les ions). On peut noter que cette force varie quadratiquement avec la charge et que la direction de  $F_p$  ne dépend pas de la particule considérée. Cependant, la présence de la masse au dénominateur rend cette force inefficace pour la mise en mouvement des ions ou des protons, bien plus lourds que les électrons. Ceci, ajouté au fait qu'on utilise une impulsion laser dont la durée est choisie pour être couplée avec la pulsation électronique ( $\tau_0 \sim 2\pi/\omega_p$ , mais  $\tau_0 \ll 2\pi/\omega_{pi}$ ), justifie l'hypothèse d'ions immobiles.

Toujours dans la limite faiblement relativiste ( $a_0 \ll 1$ ), on se place dans l'hypothèse d'une faible perturbation de densité  $\delta n$ . On peut écrire la densité électronique  $n_e = n_0 + \delta n$ , où  $n_0$  est la densité du plasma non perturbé (c'est-à-dire la densité ionique), et telle que  $|\delta n|/n_0 \ll 1$ . Alors, à partir de l'équation de Poisson (3), de l'équation de continuité

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (nv) = 0, \quad (27)$$

et de l'équation (23) moyennée sur une période laser, on peut aboutir à l'équation du second ordre suivante [Gorbunov & Kirsanov, 1987] portant sur la densité plasma :

$$\frac{\partial^2 \delta n}{\partial t^2} + \omega_p^2 \delta n = c^2 n_0 \frac{\langle \mathbf{a}^2 \rangle}{2}. \quad (28)$$

On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique à la fréquence  $\omega_p$ . De plus on peut voir que cette oscillation est excitée par la force pondéromotrice. Le passage du laser entraîne donc la création d'une onde plasma.

Quant-au potentiel électrostatique normalisé  $\phi = e\Phi/m_e c^2$ , il vérifie l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \omega_p^2 \phi = \omega_p^2 \frac{\langle \mathbf{a}^2 \rangle}{2}. \quad (29)$$

On effectue ensuite l'approximation quasi-statique, qui consiste à considérer que le temps d'évolution de l'enveloppe laser est grand devant le temps de transit d'un électron dans l'impulsion laser, ce qui permet de supposer que toutes les grandeurs dans le sillage vont dépendre uniquement de  $\xi = x - v_g t$ . Dans cette approximation,  $v_g$  est à la fois la vitesse de groupe du laser et la vitesse de phase de l'onde plasma. Si de plus, on considère un plasma très sous-dense tel que  $v_g \sim c$ , l'équation (29) devient alors

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + k_p^2 \phi = k_p^2 \frac{\langle \mathbf{a}(\xi)^2 \rangle}{2}, \quad (30)$$

avec  $k_p = \omega_p/c$ . À partir de l'expression de  $\langle \mathbf{a}(\xi)^2 \rangle$  dépendant de la forme de l'enveloppe laser choisie, on peut alors obtenir le potentiel électrostatique de l'onde de sillage en intégrant (30), tout en considérant la condition aux limites  $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \phi(\xi) = 0$ , car il n'y a pas de perturbation avant le passage du laser. L'expression de  $\phi$  est

alors :

$$\phi = \frac{k_p}{2} \int_{\xi}^{\infty} \langle \mathbf{a}(\xi)^2 \rangle (\xi') \sin(k_p(\xi - \xi')) d\xi'. \quad (31)$$

Dans le cas de notre impulsion laser gaussienne tel que décrite en section II.1.2, on trouve l'expression du potentiel et des champs dans l'onde de sillage :

$$\phi = -\sqrt{2\pi} a_0^2(\xi) \frac{k_p \sigma_x}{4} e^{-k_p^2 \sigma_x^2 / 2} e^{-2r^2 / W_0^2} \sin(k_p \xi), \quad (32)$$

$$E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial \xi} = E_p \sqrt{2\pi} a_0^2(\xi) \frac{k_p \sigma_x}{4} e^{-k_p^2 \sigma_x^2 / 2} e^{-2r^2 / W_0^2} \cos(k_p \xi), \quad (33)$$

$$E_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r} = -E_p \sqrt{2\pi} a_0^2(\xi) \frac{\sigma_x r}{W_0} e^{-k_p^2 \sigma_x^2 / 2} e^{-2r^2 / W_0^2} \sin(k_p \xi), \quad (34)$$

avec  $\sigma_x = c\tau_0/2\sqrt{2\ln 2}$ .  $E_p = m_e c \omega_p / e$  est le champ maximal atteint par l'onde plasma dans le régime linéaire, lorsque la perturbation de densité  $\delta n$  est totale. On constate de plus que l'excitation de l'onde de sillage est résonnante pour  $k_p \sigma_x = 1$  (résonance entre l'excitation pondéromotrice du laser et la fréquence plasma). Le champ  $E_z$  oscille sinusoïdalement selon  $\xi$  à la longueur d'onde plasma  $\lambda_p = 2\pi c / \omega_p$ , alternant zones accélératrices et décélératrices pour les électrons. De même pour le champ  $E_r$  qui définit des zones focalisantes et défocalisantes. Pour l'accélération de particules, il est nécessaire d'avoir une zone à la fois focalisante et accélératrice ; dans la théorie linéaire, sa longueur est  $\lambda_p/4$ .

### Théorie non-linéaire

La théorie linéaire précédente permet de comprendre assez simplement les mécanismes mis en jeu qui conduisent à la formation de l'onde de sillage. Cependant le modèle physique est assez limité, et un modèle non-linéaire et relativiste est utile.

Dans le cas unidimensionnel où les quantités ne vont dépendre que de la direction  $x$  et du temps  $t$ , la relation  $\mathbf{p}_{\perp} = m_e c \mathbf{A}$  est vérifiée. De plus on se place dans le cadre de l'hypothèse quasi-statique, et on introduit  $\xi = x - v_g t$ . Alors on peut aboutir à une équation non-linéaire sur le potentiel  $\phi$  créé dans le plasma [Berezhiani & Murusidze, 1992, Esarey & Pilloff, 1995] :

$$\frac{1}{\omega_p^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} = \gamma_g^2 \left[ \beta_g \left( 1 - \frac{1 + a^2/2}{\gamma_g^2 (1 + \phi)^2} \right)^{-1/2} - 1 \right], \quad (35)$$

où  $\beta_g = v_g/c$  est la vitesse de groupe du laser normalisée à  $c$ , et  $\gamma_g = 1/\sqrt{1 - \beta_g^2}$  est le facteur de Lorentz associé.

En supposant ici un plasma très sous-dense et donc que  $\gamma_g \gg 1$  et  $\beta_g \approx 1$ ,

alors cette équation se simplifie en

$$\frac{1}{\omega_p^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1 + a^2/2}{(1 + \phi)^2} - 1 \right). \quad (36)$$

De plus, dans la limite d'un laser de faible amplitude (et donc  $\phi \ll 1$ ), ce qui revient à supposer une faible perturbation de la densité, on retrouve bien l'équation (30) qui avait été obtenue dans le régime linéaire.

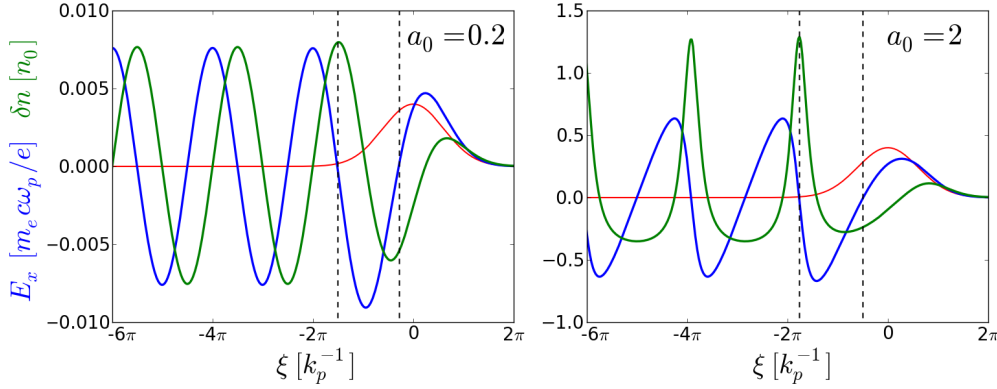


FIGURE 2 – Ondes de sillage créées par une impulsion laser (enveloppe représentée en rouge) de 30 fs dans une densité plasma de  $5 \times 10^{18} \text{ cm}^{-3}$  en 1D. On représente la modulation électronique  $\delta n$  en vert, et le champ  $E_x$  en bleu. Les pointillés noirs délimitent la première zone de champ accélérateur pour les électrons.

En figure 2, on montre les résultats fournis par l'intégration numérique de l'équation (36) dans le cas d'une impulsion laser de  $\tau_0 = 30$  fs se propageant dans un plasma de densité  $5 \times 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ . Le cas  $a_0 = 0.2$  représente un cas linéaire où l'intégration de l'équation (30) donne les mêmes résultats. La perturbation de densité reste très faible avec  $\delta n$  de l'ordre de  $10^{-2}$ . Elle est sinusoïdale, et oscille à la longueur d'onde  $\lambda_p = 2\pi c/\omega_p$  : l'impulsion laser a donc créé une oscillation du plasma à  $\omega_p$ . Dans le cas  $a_0 = 2$ , il est nécessaire de passer au modèle non-linéaire, car la modulation de la densité est maintenant non négligeable. La densité électronique présente des pics importants à chaque période plasma (avec  $\lambda_p$  qui est maintenant supérieure à  $2\pi c/\omega_p$  à cause des effets relativistes), et le champ accélérateur se raidit. Dans chacun des cas, la zone accélératrice de la première période plasma est délimitée par les pointillés noirs.

Cette zone accélératrice, ainsi que tout le sillage et le laser, se propage dans le plasma à la vitesse  $v_g$  définie par l'équation (19), ce qui correspond à un facteur de Lorentz  $\gamma_g = 18.7$  pour cette densité de  $5 \times 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ . Si on arrive à placer dans cette zone des électrons possédant une énergie suffisante ( $E > \gamma_g m_e c^2 = 9.6 \text{ MeV}$ ), alors ils pourront se déplacer en phase avec l'onde de sillage, et profiter du champ accélérateur pendant de longues distances pour en théorie atteindre des énergies considérables. La manière de piéger ces électrons dans les zones de

champs accélérateurs est appelée 'injection', et elle sera étudiée plus en détail dans la section suivante.

Cependant, cette théorie unidimensionnelle ne rend pas compte des effets transverses. Par exemple comme déjà vu dans le cas linéaire, là où le champ  $E_x$  est accélérateur, mais où  $\delta n$  est positive, alors le surplus de charge a tendance à créer un champ  $E_r$  défocalisant et à éjecter transversalement les électrons. Aussi, dans ce modèle 1D, la perturbation de densité minimale que l'on peut obtenir est  $\delta n_{min} = -0.5 n_0$ . En effet, la stationnarité de l'écoulement donne  $n(\xi)|d\xi/dt| = n_0 v_g$ , et les électrons se déplaçant à une vitesse  $dx/dt > -c$ , on obtient  $d\xi/dt \sim dx/dt - v_g > -2c$ , et donc  $n(\xi) > n_0/2$ . L'origine de cette limitation est purement due à la dimension 1 du calcul : une meilleure compréhension de la physique de l'accélération par sillage laser passe donc par des modèles multi-dimensionnels.

## II.2.2 Piégeage et accélération

Dans les sections précédentes, nous avons montré que la propagation d'une impulsion laser suffisamment intense dans un plasma sous dense génère une onde de sillage apte à accélérer sur de courtes distances des particules à des énergies élevées. Considérons maintenant un électron dans l'onde de sillage décrite précédemment. Si cet électron a une impulsion longitudinale  $p_x = \gamma m_e v_x$  initiale insuffisante, alors il ne se déplacera pas avec l'onde, et verra une succession sinusoïdale de champs accélérateurs et décélérateurs, qui le feront osciller en gardant la même position moyenne. Il ne pourra ainsi pas gagner une énergie conséquente. Cependant, si cet électron possède une énergie initiale plus importante et possède ainsi une vitesse  $v > v_g$ , il se déplacera légèrement plus rapidement que l'onde, et pourra rester pendant un temps important dans la même période accélératrice du champ. Ce sont ces électrons qui sont véritablement accélérés.

Dans le cadre de la théorie quasi-statique, on peut montrer que l'hamiltonien  $H$  d'un électron est donné par [Fubiani *et al.*, 2004] :

$$H(\xi, p_x) = \sqrt{\gamma_{\perp}^2(\xi) + p_x^2} - \beta_g p_x - \phi(\xi), \quad (37)$$

où  $\gamma_{\perp} = \sqrt{1 + a_0^2}$  est le facteur relativiste transverse de l'électron. Dans cette théorie, le mouvement de l'électron est déterminé par les équations suivantes :

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{\sqrt{\gamma_{\perp}^2(\xi) + p_x^2}} - \beta_g, \quad (38)$$

$$\frac{\partial p_x}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial \xi} = \frac{\partial \phi}{\partial \xi} - \frac{1}{2\sqrt{\gamma_{\perp}^2(\xi) + p_x^2}} \frac{\partial \gamma_{\perp}^2}{\partial \xi}. \quad (39)$$

L'hamiltonien d'une particule étant invariant,  $H(t) = H_0$ , et on a

$$p_x(\xi) = \beta_g \gamma_g^2 (H_0 + \phi) \pm \gamma_g \sqrt{\gamma_g^2 (H_0 + \phi)^2 - \gamma_\perp^2}. \quad (40)$$

Cette équation nous donne la trajectoire de l'électron dans l'espace des phases  $(\xi, p_x)$ . En supposant que le plasma est initialement froid avant le passage du laser, on trouve la condition  $H_0 = 1$ , et on définit ainsi l'orbite fluide décrite par les électrons de ce plasma :

$$p_{x,f}(\xi) = \beta_g \gamma_g^2 (1 + \phi) \pm \gamma_g \sqrt{\gamma_g^2 (1 + \phi)^2 - \gamma_\perp^2}. \quad (41)$$

Dans la figure 3, on trace l'impulsion longitudinale donnée par l'équation (40) pour quelques électrons possédant différentes valeurs de  $H_0$  dans l'onde de sillage créée par l'impulsion laser considérée dans la section précédente avec  $a_0 = 2$ . On remarque qu'on peut distinguer deux types d'électrons différents. Les électrons qui possèdent une impulsion initiale faible (ou pareillement, ceux possédant une impulsion initiale très grande) ont des orbites ouvertes dans l'espace de phase  $(\xi, p_x)$ . À l'instar des électrons fluides, ces électrons glissent sur l'onde de sillage, mais ne restent pas dans une même période du champ accélérateur : ils ne tireront pas efficacement d'énergie de l'onde de sillage. Au contraire, certains électrons possèdent une orbite fermée : ils vont se propager avec l'onde de sillage et rester dans une même période de champ accélérateur. En considérant un électron initialement situé au point indiqué en bleu sur la figure 3, cet électron est plus lent que l'onde de sillage. Il va donc glisser en arrière par rapport à la phase de l'onde de sillage – on dit qu'il déphase. Ce faisant, il va être accéléré par le champ longitudinal jusqu'à ce que sa vitesse dépasse celle de l'onde plasma. L'électron va alors se déplacer vers l'avant du sillage en continuant à être accéléré, jusqu'à ce qu'il entre dans la zone décélétratrice du champ. Le phénomène inverse va alors se produire : sa vitesse va diminuer jusqu'à devenir plus petite que celle de l'onde plasma, et l'électron se déplace à nouveau vers l'arrière du sillage, et ainsi de suite. De tels électrons sont dits piégés, et ce sont ces électrons que l'on cherche à produire en sillage laser : dans le cas présent, ils pourront être accélérés à des énergies proches de 500 MeV (point le plus haut atteint par leur orbite fermée).

D'après l'équation (40), l'impulsion  $p_x(\xi)$  est définie en tout point du sillage si la condition  $H_0 \geq \gamma_\perp / \gamma_g - \phi_{\min}$  (où  $\phi_{\min}$  est le potentiel minimal dans l'onde de sillage) est vérifiée. L'hamiltonien  $H_{sep} = \gamma_\perp / \gamma_g - \phi_{\min}$  définit l'hamiltonien de la séparatrice, qui sépare les électrons piégés et les électrons non-piégés. Si  $H_0 > H_{sep}$ , alors  $p_x$  est définie pour tout  $\xi$ , et les électrons ont une orbite ouverte, comme les électrons du plasma ambiant qui suivent la trajectoire fluide. Pour pouvoir accélérer ces électrons, ils faut donc leur faire franchir la séparatrice pour les faire passer à l'état piégé (avec  $H_0 < H_{sep}$ , ces électrons suivront alors les orbites fermées). Ce processus est appelé injection, et différentes méthodes ont été

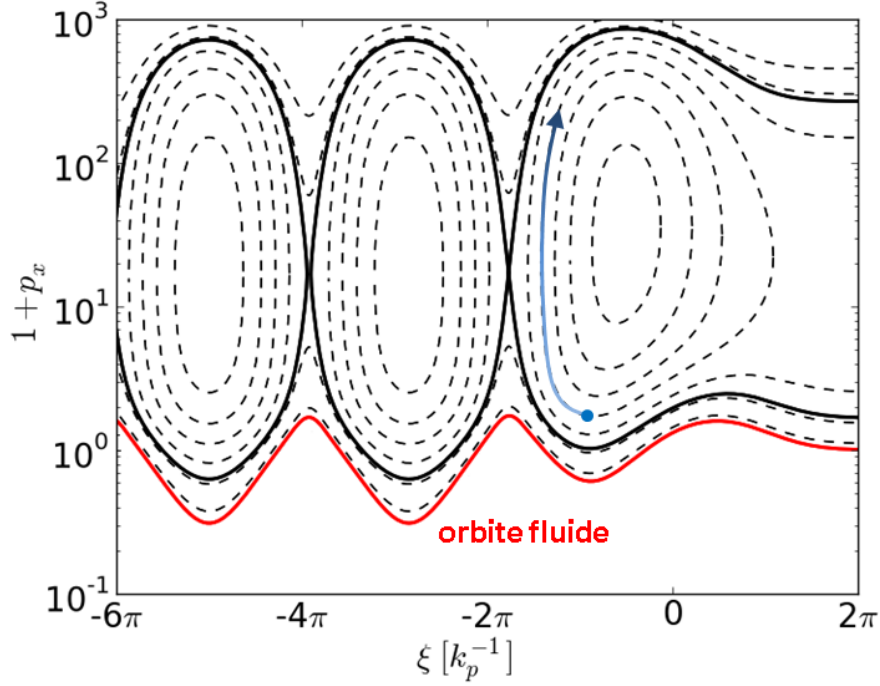


FIGURE 3 – Trajectoires de quelques électrons dans l’espace de phase  $(\xi, p_x)$  pour une impulsion laser de 30 fs dans une densité plasma de  $5 \times 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ . La courbe rouge représente la trajectoire des électrons fluides donnée par l’équation (41). La séparatrice est tracée en trait plein noir.

proposées pour le réaliser.

La distance d’accélération qui va permettre aux électrons de transiter de leur point le plus bas vers leur point le plus haut de leur orbite fermée dans la figure 3 (c’est-à-dire d’atteindre leur énergie maximale après l’injection), est appelée distance de déphasage  $L_{dph}$  des électrons. On peut la calculer en supposant que c’est la distance nécessaire pour que les électrons, qui se déplacent à  $c$ , déphasent de  $\lambda_p/2$  dans l’onde de sillage. On a, alors :

$$L_{dph} = c \frac{\lambda_p/2}{c - v_g} = \gamma_g^2 \lambda_p. \quad (42)$$

L’expression de la longueur de déphasage est susceptible de changer en passant à des dimensions supérieures. Néanmoins dans notre cas 1D, pour une densité de  $5 \times 10^{24} \text{ m}^{-3}$ , on trouve  $L_d \sim 5 \text{ mm}$ .  $L_{dph}$  peut même dépasser le mètre pour des valeurs de densités plasmas  $< 10^{23} \text{ m}^{-3}$ . Ces valeurs sont bien supérieures à  $\lambda_p$  : l’impulsion laser et son sillage ainsi que les électrons accélérés se déplacent à des valeurs très proches de  $c$ . Le déphasage s’effectue donc très lentement, ce qui permet d’atteindre des énergies aussi élevées.

### II.2.3 Injection et *beamloading*

L'injection est un phénomène important en accélération par sillage laser. En effet, beaucoup des paramètres finaux du faisceau d'électrons accélérés dépendent de la méthode utilisée pour l'injection. Selon que l'on veut maximiser la charge du faisceau d'électrons, privilégier la stabilité tir-à-tir, viser une faible dispersion énergétique ou encore minimiser la divergence de celui-ci, la méthode d'injection pourra différer.

#### Auto-injection

Lors de la propagation de lasers suffisamment intenses dans un plasma, il est nécessaire de prendre en compte les effets relativistes dans le calcul de l'indice de réfraction du plasma, comme indiqué par l'équation (21). Dans l'hypothèse faiblement relativiste et de petites perturbations de densité  $\delta n$ , on peut alors écrire la vitesse de phase du laser sous la forme :

$$v_\phi = c \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \left[ 1 + \frac{\delta n}{n} - \frac{\langle a^2 \rangle}{2} - 2 \frac{\delta \omega_0}{\omega_0} \right] \right), \quad (43)$$

En particulier, pour notre impulsion gaussienne,  $a$  décroît radialement, donc  $\partial v_\phi / \partial r > 0$ . En conséquence, la vitesse de phase au bord de l'impulsion laser est plus élevée qu'en son centre, ce qui courbe le front d'onde du laser : l'impulsion est focalisée par le plasma. On parle d'auto-focalisation relativiste. Ce phénomène peut donc être à l'origine d'une diminution du waist laser, et d'une augmentation de  $a_0$ . La succession de cycles d'auto-focalisation et de défocalisation, ainsi que la modification de la forme temporelle de l'impulsion laser lors de sa propagation conduisent à modifier la force pondéromotrice et l'expulsion des électrons, ce qui peut conduire à un (ou des) rallongement(s) de la cavité ionique – la cavité vidée d'électrons par la force pondéromotrice – derrière le laser [Kalmykov *et al.*, 2009] (on rappelle que dans le régime non-linéaire,  $\lambda_p$  augmente avec  $a_0$ ). Les électrons qui sont proches de la séparatrice dans la cavité accélératrice pendant qu'elle s'étend bénéficient d'un temps plus long pour pouvoir acquérir une énergie suffisante afin d'atteindre la vitesse nécessaire pour se propager à la vitesse de l'onde plasma, et peuvent ainsi être injectés. Ce phénomène est appelé auto-injection car il ne nécessite aucun artifice extérieur et se produit naturellement pendant l'accélération. C'est le principe d'injection le plus simple à réaliser, à condition d'avoir des lasers d'intensités suffisantes. Cependant, c'est un mécanisme très difficile à contrôler, car reposant sur l'évolution optique non-linéaire de l'impulsion laser, et les résultats sont difficilement reproductibles avec ce schéma d'injection. Pour cette raison, d'autres mécanismes d'injection ont été développés, visant à contrôler précisément le phénomène d'injection, ou à le rendre accessible à d'autres régimes.

### Injection par gradient

En se basant sur le même principe d'injection par expansion de la cavité ionique, il est possible de maîtriser l'injection en contrôlant l'expansion de la bulle. En effet, la taille de la cavité ionique est directement proportionnelle à  $\lambda_p$  et varie donc avec la densité du plasma. Une méthode proposée par [Bulanov *et al.*, 1998] consiste à faire se propager le laser à travers un gradient de densité descendant ; l'injection se produit lorsque le laser passe d'un plasma de densité  $n_{e,1}$  à un autre de densité  $n_{e,2} < n_{e,1}$ . Expérimentalement, cette méthode a été démontrée par [Geddes *et al.*, 2008] dans la rampe descendante d'un jet de gaz, permettant de générer des faisceaux avec de faibles dispersions énergétiques.

### Injection optique

Les deux méthodes d'injection qui viennent d'être décrites exploitent l'allongement de la cavité accélératrice. D'autres techniques ne jouent pas sur la modification de la structure accélératrice elle-même, mais sur les forces ressenties par les électrons. Les schémas d'injection optique font intervenir, en plus du laser qui génère le sillage, un second laser qui vient perturber localement les champs ressentis par les électrons. Le premier schéma d'injection optique [Umstadter *et al.*, 1996] proposait de faire interagir un second laser se propageant orthogonalement au laser créant le sillage, et dont la force pondéromotrice donnerait un supplément d'accélération suffisant aux électrons pour leur faire franchir la séparatrice. Par la suite, un schéma faisant intervenir 3 lasers a été proposé [Esarey *et al.*, 1997] : le laser principal créant le sillage, un laser copropagatif suivant l'impulsion principale, et un contra-propagatif entrant en collision avec ce dernier au niveau du sillage. Les battements d'onde ainsi créés accélèrent les électrons pour leur faire franchir la séparatrice. Ce dernier schéma a par la suite été simplifié en supprimant la deuxième impulsion co-propagative, l'onde de battement étant créée directement par l'interaction entre le laser contra-propagatif et le laser principal [Fubiani *et al.*, 2004, Kotaki *et al.*, 2004]. C'est ce schéma qui a été utilisé avec succès expérimentalement [Faure *et al.*, 2006], démontrant la première injection externe réalisée en accélération par sillage laser. Enfin, en utilisant un laser de polarisation circulaire, un autre schéma d'injection optique a été proposé [Davoine *et al.*, 2009] qui permet d'injecter un paquet d'électrons du plasma sans trop augmenter leur relativement faible dispersion en énergie initiale, d'où le nom d'injection 'froide'. Ces différentes techniques d'injection optique sont schématisées en figure 4.

La technique d'injection optique, bien que permettant une grande stabilité du faisceau injecté et d'en adapter l'énergie en modifiant la position de collision, est très difficile à mettre en œuvre car nécessite expérimentalement un alignement précis des divers faisceaux lasers. Pour cette raison, la technique d'injection par ionisation lui est maintenant préférée.



### Injection par ionisation

En accélération par sillage laser, le gaz dans lequel s'effectue la propagation et l'accélération des électrons est habituellement un gaz de faible numéro atomique  $Z$  (très souvent He, ou alors  $H_2$ ). Dans le schéma d'injection par ionisation [Pak *et al.*, 2010, McGuffey *et al.*, 2010], on mélange à ce gaz une faible proportion d'un gaz de  $Z$  plus élevé, tel que le diazote  $N_2$ . Si, comme indiqué dans la section II.1.3, les énergies d'ionisation pour un gaz comme l'hélium sont assez basses, elles sont néanmoins substantiellement plus élevées dans le cas des dernières couches électroniques de l'atome d'azote : en particulier, en utilisant la formule (15), on calcule une intensité laser nécessaire  $I_0 = 7.5 \times 10^{15} \text{ W/cm}^{-2}$  pour ioniser l'azote en  $N^{5+}$ , contre  $I_0 = 7.6 \times 10^{18} \text{ W/cm}^{-2}$  pour l'ioniser en  $N^{6+}$ . Comme pour l'hélium, le début de l'impulsion laser arrache facilement les cinq premiers électrons de l'azote. Cependant, les deux derniers électrons sont arrachés beaucoup plus près du pic d'intensité maximale de l'impulsion laser. En conséquence, ces électrons voyagent plus longtemps avec les ions, et ne sont pas sensibles pendant ce temps au champ décélérateur présent à l'avant de la cavité ionique. Ils acquièrent donc plus facilement l'énergie nécessaire pour être injectés.

Cette méthode d'injection est actuellement très utilisée : car elle est premièrement très simple à réaliser, et de plus elle permet d'injecter des charges importantes. Cependant, le fait d'injecter une grande quantité de charge tout au long de la propagation de l'impulsion laser ne permet pas, par exemple, d'obtenir des faisceaux mono-énergétiques de bonne qualité. Pour remédier à ce problème, certaines expériences tendent maintenant à découpler le processus d'injection et d'accélération [Pollock *et al.*, 2011, Liu *et al.*, 2011].

Enfin un dernier schéma, qui n'a à notre connaissance pas encore été démontré expérimentalement, propose d'utiliser un champ magnétique transverse externe [Vieira *et al.*, 2011]. En présence d'un champ magnétique suffisamment puissant (quelques teslas à plusieurs centaines de teslas), l'onde de sillage est déformée. Des gradients de champs magnétiques peuvent donc modifier la taille de la cavité accélératrice en certains points, et provoquer l'injection.

### Effet de la charge de plasma : le *Beamloading*

Les schémas d'injection précédents conduisent à piéger des électrons qui se déplacent avec l'onde de sillage et génèrent leurs propres champs électromagnétiques. Jusqu'à présent, il n'a pas été tenu compte de cet effet dans les équations, mais il est évident que si cette charge devient trop importante, alors les champs présents dans l'onde de sillage peuvent être substantiellement modifiés. C'est cet effet, appelé '*beamloading*' en anglais, que nous allons introduire à présent.

On considère maintenant qu'on ne peut pas négliger le champ créé par la charge accélérée. En reprenant la théorie de création de l'onde de sillage, mais en consi-

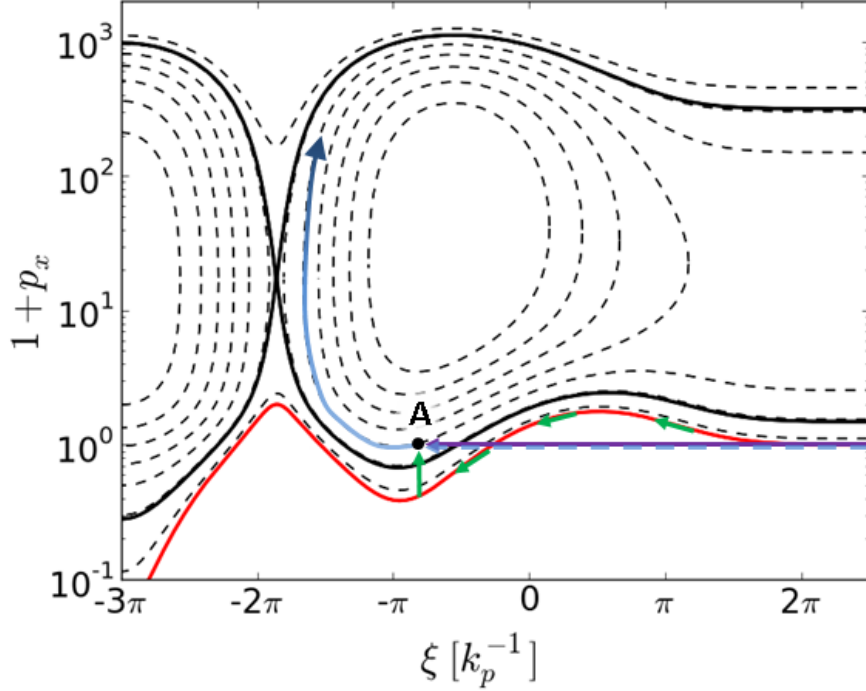


FIGURE 4 – Injection d’un électron du plasma au point A par différentes méthodes sans modification du sillage. En vert, la trajectoire d’un électron dans les injections optiques classiques et en violet dans l’injection optique froide. En pointillés bleus on représente la trajectoire de l’électron dans la méthode d’injection par ionisation (l’électron n’est libéré qu’au point A, et est lié à l’ion auparavant).

dérant maintenant  $n_e = n_0 + n_f + \delta n$ , où l’on a rajouté le terme  $n_f$  qui est la densité du faisceau accéléré, l’équation (35) portant sur la création du sillage est alors modifiée en :

$$\frac{1}{\omega_p^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} = \gamma_g^2 \left[ \beta_g \left( 1 - \frac{1 + a^2/2}{\gamma_g^2 (1 + \phi)^2} \right)^{-1/2} - 1 \right] + \frac{n_f(\xi)}{n_0}. \quad (44)$$

De même que pour le laser, on prend ici un profil temporel gaussien pour la distribution électronique du faisceau accéléré, de sorte qu’on a  $n_f(\xi) = n_{f,0} \exp[(\xi - \xi_{0,f})^2 / 2\sigma_{x,f}^2]$ , avec  $n_{f,0}$  la densité maximale du faisceau en son centre positionné à  $\xi_{0,f}$ , et où  $\sigma_{x,f}/c$  est la durée RMS du faisceau. En prenant les mêmes paramètres que pour la création de l’onde de sillage présentée en figure 2 avec  $a_0 = 2$ , on trace en figure 5 l’onde de sillage créée lorsqu’un faisceau d’électrons de durée  $\sigma_{x,f} = 2.1$  fs est présent à l’arrière de la première cavité accélératrice. On peut y voir que la présence d’un faisceau chargé modifie l’onde de sillage, et plus particulièrement diminue le champ accélérateur vu par l’arrière du faisceau accéléré [Katsouleas & Su, 1987]. En effet, les particules du faisceau initient leur propre sillage, qui est décélérateur là où le faisceau se situe, et qui tend à s’opposer et à

amortir le sillage créé par le laser dans cet exemple. Le champ décélérateur créé par le faisceau se superposant à l'onde de sillage du laser, l'arrière du faisceau subit un champ longitudinal moins fort et n'accélère pas autant qu'en l'absence de *beamloading*, tandis que les électrons à l'avant du faisceau sont accélérés par le champ de l'onde de sillage laser encore non-perturbée.

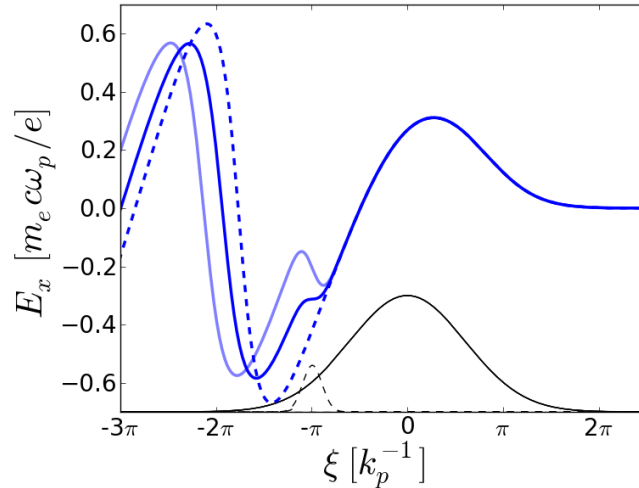


FIGURE 5 – Effet de la charge du faisceau. Champ longitudinal créé dans le sillage d'une impulsion laser (trait plein noir) et d'un faisceau d'électrons accélérés (pointillés noirs). Le champ  $E_x$  est tracé pour différents faisceaux d'électrons : laser seul (pointillés),  $n_{f,0} = 0.2$  (bleu foncé) et  $n_{f,0} = 0.4$  (bleu clair). La durée du faisceau d'électrons est de  $\sigma_{x,f} = 2.1$  fs.

S'il s'avère néfaste sur l'énergie finale qui va pouvoir être atteinte dans les expériences, cet effet peut néanmoins être exploité de manière avantageuse sur certains points. Mis en évidence expérimentalement par [Rechatin *et al.*, 2009], certaines études cherchent à exploiter cet effet de *beamloading* pour réduire la dispersion énergétique finale des électrons et ainsi améliorer la qualité du faisceau d'électrons [Tzoufras *et al.*, 2009, Davoine, 2009]. En effet, l'étalement longitudinal du faisceau dans la cavité accélératrice, conjugué au gradient longitudinal du champ accélérateur, induit une accélération différente des électrons selon l'amplitude du champ à leur position (ceux de l'arrière du faisceau voient en théorie un champ plus fort en absence de *beamloading*). Pour une distance d'accélération égale, ce phénomène conduit à une énergie plus grande pour les électrons de l'arrière du faisceau. Cependant, grâce aux effets de *beamloading*, il est possible d'annuler cette tendance et d'aplanir le champ accélérateur au niveau du faisceau (cf figure 5 avec  $n_{f,0} = 0.2$ ). De très faibles dispersions énergétiques peuvent alors être obtenues.

## II.3 Modélisation tri-dimensionnelle du sillage laser

### II.3.1 Régime du *blowout*

Les progrès technologiques constants dont ont fait preuve les lasers depuis les années 2000, avec plus d'énergie disponible sur des durées plus courtes, ont conduit à des expériences en régime fortement non-linéaire avec non plus des perturbations modérées de la densité électronique au passage du laser, mais des expulsions quasi-totales des électrons (on parle de phénomène de cavitation) [Sun *et al.*, 1987, Pukhov & Meyer-ter Vehn, 2002]. Pour comprendre l'accélération dans ces régimes et proposer des lois d'échelle à respecter pour maximiser les paramètres de sortie (principalement l'énergie du faisceau), plusieurs modèles ont été proposés tels que celui de la bulle [Kostyukov *et al.*, 2004, Gordienko & Pukhov, 2005] ou celui du *blowout* [Lu *et al.*, 2006a,b, 2007].

Nous nous baserons dans la suite sur les lois d'échelle établies dans le régime du *blowout*. Pour cela nous allons en présenter les principales caractéristiques dans cette partie. Un schéma du début de l'onde de sillage dans ce régime est représenté en figure 6. Les électrons sont totalement éjectés transversalement par la force pondéromotrice du laser. Une cavité ionique est formée immédiatement après le laser, ce qui va exercer une force de rappel sur les électrons. Ceux-ci vont alors revenir vers l'axe de propagation du laser sous la forme d'une couche mince autour de cette cavité ionique. Dans ce régime fortement non-linéaire, il n'est pas rare que l'onde de sillage soit très rapidement atténuée au delà de cette première cavité ionique, à laquelle nous nous intéresserons dorénavant. Néanmoins dans certains cas, des phénomènes intéressants tels qu'une injection massive peuvent survenir dans les cavités suivantes [Guillaume *et al.*, 2015a].

[Lu *et al.*, 2006a,b] ont déterminé la forme exacte que prenait la cavité ionique sous certaines hypothèses (choix des paramètres laser et plasma contraints, et supposition que la totalité des électrons éjectés de la cavité se retrouvent dans la couche mince autour de celle-ci). Particulièrement, lorsque l'intensité laser est suffisamment intense ( $a_0 > 4$ ), il est possible d'obtenir une cavité ionique de forme quasi-sphérique de rayon  $R$ , d'où l'appellation de 'régime de la bulle'. Pour cela, en équilibrant la force pondéromotrice transverse exercée par le laser avec la force de rappel exercée par la cavité, on peut trouver une relation à respecter qui lie les paramètres lasers et la densité plasma :  $k_p w_0 \sim \sqrt{a_0}$ . De manière plus détaillée, [Lu *et al.*, 2007] ont affiné empiriquement cette relation à l'aide de simulations PIC, et ont abouti au résultat suivant :

$$k_p R \simeq k_p w_0 = 2\sqrt{a_0}. \quad (45)$$

Cette relation est aussi celle qui assure que l'impulsion laser pourra bien rester auto-focalisée de manière suffisamment stable sur de longues distances, afin d'assurer que l'accélération plasma ne soit pas limitée par la diffraction du laser.

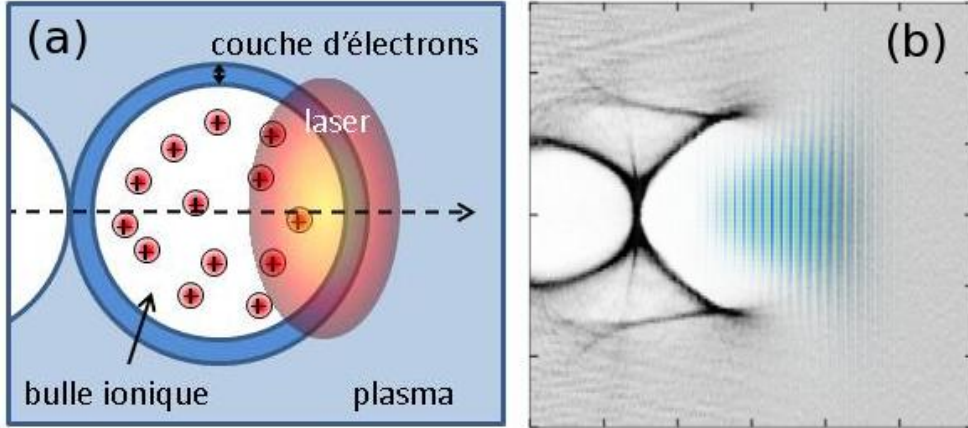


FIGURE 6 – (a) Schéma de la cavité accélératrice en régime du *blowout*. (b) Observation de *blowout* dans une simulation PIC. Dans cette simulation, les paramètres lasers sont  $\lambda_0 = 0.8 \mu\text{m}$ ,  $a_0 = 2.32$ ,  $\tau_0 = 30 \text{ fs}$ ,  $W_0 = 15.2 \mu\text{m}$ , et la densité plasma est de  $6.4 \times 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ . La densité électronique est donnée en gris, et le champ laser en nuances bleu-vert. Dans les deux images, les impulsions lasers se propagent vers la droite.

On considère dorénavant que la cavité est parfaitement sphérique. En se plaçant en symétrie cylindrique et en reprenant l'approximation quasi-statique, les champs plasmas présents dans la cavité se réduisent à :

$$\frac{E_x}{E_p} = \frac{k_p \xi}{2}, \quad \frac{E_r}{E_p} = \frac{k_p r}{4}, \quad (46)$$

$$\frac{B_\theta}{E_p} = -\frac{k_p r}{4c}, \quad (47)$$

avec  $\xi = 0$  au centre de la bulle, et  $E_p = m_e c \omega_p / e$ . Comme mentionné précédemment, un électron injecté avec une énergie suffisante à l'arrière de la cavité ionique pourra être accéléré en 'surfant' sur le champ accélérateur  $E_x$ . Cependant deux longueurs essentielles vont limiter l'énergie maximale qui peut être obtenue.

Tout d'abord, le laser perd de l'énergie pour mettre en mouvement les électrons du plasma et pour créer l'onde de sillage. Ce phénomène est connu sous le nom de déplétion laser : le front avant de l'impulsion laser s'érode à la vitesse de déplétion laser  $v_d = c \omega_p^2 / \omega_0^2$ , calculée en se basant sur la théorie non-linéaire 1D [Decker *et al.*, 1996]. Ceci permet d'estimer la longueur de déplétion  $L_d$  de l'impulsion laser

$$L_d = \frac{\omega_0^2}{\omega_p^2} c \tau_0, \quad (48)$$

définie comme la longueur de plasma sur laquelle le laser pourra se propager avant d'avoir dissipé toute son énergie dans la création de l'onde de sillage. La vitesse réelle du sillage est alors  $v_{\phi,s} = v_g - v_d$ , où  $v_g$  est la vitesse de groupe linéaire du

## II L'ACCÉLÉRATION PAR SILLAGE LASER - ÉLÉMENTS THÉORIQUES

---

laser donnée par l'équation (19), soit  $v_{\phi,s} = 1 - 3\omega_p^2/2\omega_0^2$ .

Ensuite, les électrons accélérés gagnent de l'énergie et se déplacent plus rapidement que l'onde laser. Comme dans le cas 1D, il sont alors progressivement déphasés de l'arrière de la bulle, là où ils sont injectés et où le champ  $E_x$  est accélérateur, vers le centre de la bulle, espacé d'une distance  $R$ , où  $E_x$  devient décélérateur. On peut également recalculer  $L_{dph}$  pour ce régime, en supposant toujours que les électrons se déplacent à une vitesse proche de  $c$  :

$$L_{dph} = \frac{c}{c - v_{\phi,s}} R = \frac{2\omega_0^2}{3\omega_p^2} R \quad (49)$$

$L_{dph}$  est donc la distance de plasma sur laquelle il faut propager le laser pour que les électrons atteignent leur énergie maximale en négligeant les phénomènes de diffraction du laser.

Les lois d'échelles de [Lu *et al.*, 2007] proposent que la longueur de déphasage soit égale à la longueur de déplétion du laser ( $L_{dph} \approx L_d$ ), afin d'assurer une utilisation optimale de l'énergie laser lorsque les électrons atteignent leur énergie maximale. Cette contrainte conduit à une autre condition à respecter, liant la durée du laser et sa taille transverse, à savoir

$$c\tau_0 \approx \frac{2}{3} R. \quad (50)$$

En respectant les conditions (45) et (50), ainsi que  $a_0 > 4$  (même si [Lu *et al.*, 2007] indiquent que leurs lois d'échelle restent valables pour  $a_0 > 2$ ), on peut calculer l'énergie maximale qui est atteinte par les électrons. Pour cela, on sait que les électrons sont accélérés de l'arrière de la bulle jusqu'à son centre donc sur une distance  $R$ , et que le champ accélérateur moyen auquel ils sont soumis est  $E_{x,m}/E_p = \sqrt{a_0}/2$ . Cela nous conduit à un gain d'énergie :

$$\Delta E = eE_{x,m}L_{dph} = \frac{2}{3} m_e c^2 \frac{\omega_0^2}{\omega_p^2} a_0, \quad (51)$$

$$\Delta E [\text{GeV}] = 1.7 \left( \frac{P [\text{TW}]}{100} \right)^{1/3} \left( \frac{10^{18}}{n_e [\text{cm}^{-3}]} \right)^{2/3} \left( \frac{0.8}{\lambda_0 [\mu\text{m}]} \right)^{4/3}. \quad (52)$$

Cette dernière formule indique qu'une énergie électronique plus importante est atteinte lors d'une diminution de la densité plasma (mais les relations (45) et (50) limitent le choix de la densité si on veut rester dans le cadre d'application de ces lois d'échelle, et si on souhaite rester à énergie laser constante) – il faudra cependant être capable de maintenir la structure accélératrice plus longtemps en assurant un bon guidage de l'impulsion laser, car  $L_{dph}$  augmente aussi.

Pour une impulsion gaussienne de durée FWHM 30 fs et de longueur d'onde  $\lambda_0 = 0.8 \mu\text{m}$ , ces lois d'échelle conduisent aux paramètres suivants :  $w_0 = 13.5 \mu\text{m}$ ,

$E_0 = 2.3$  J, et une densité plasma de  $2.5 \times 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ , où l'on a pris la valeur minimale  $a_0 = 4$ . On estime alors que les électrons obtiennent une énergie maximale  $E_{max} = 822$  MeV en étant accélérés sur une distance  $L_d = 6.3$  mm.

### II.3.2 Mouvement transverse dans le régime de la bulle

On a ainsi caractérisé l'accélération des électrons dans ce régime. On va maintenant calculer le mouvement transverse des électrons (cf figure 7), ce qui revêt une importance primordiale pour la compréhension et le calcul du rayonnement X émis par les électrons accélérés, et auquel on va s'intéresser dans la suite.

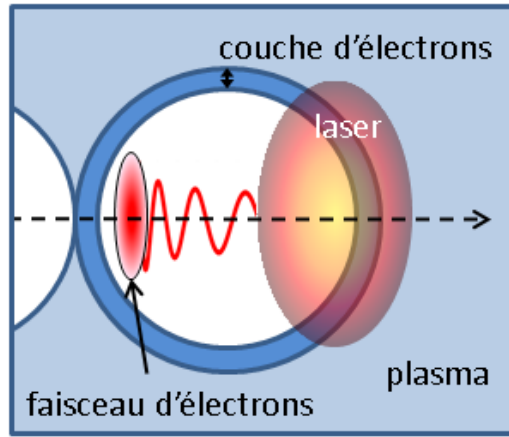


FIGURE 7 – (a) Schéma de l'accélération d'un faisceau d'électrons en régime du *blowout*. Le mouvement transverse au cours de la propagation d'une des particules du faisceau est tracé en rouge.

L'équation sur les composantes transverse du mouvement est :

$$\frac{d\mathbf{p}_\perp}{dt} = -e(\mathbf{E}_\perp + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_\perp). \quad (53)$$

En négligeant l'interaction directe entre les électrons accélérés et le champ laser qui est souvent peu intense à l'arrière de la bulle, là où les électrons sont injectés et accélérés, et en reprenant les expressions (46) et (47) décrivant les champs de la bulle, on obtient

$$\frac{d^2\mathbf{x}_\perp}{dt^2} + \left(\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{dt}\right) \frac{d\mathbf{x}_\perp}{dt} = -\frac{\omega_p^2}{2\gamma} \mathbf{x}_\perp. \quad (54)$$

Cette équation est celle d'un oscillateur harmonique amorti dont le taux d'amortissement  $\tau$  est donné par  $2/\tau = (1/\gamma)d\gamma/dt$ . Ce taux d'amortissement diminue au cours de l'accélération. L'oscillation se fait à la pulsation caractéristique  $\omega_\beta = \omega_p/\sqrt{2\gamma(t)}$ , et décroît progressivement lorsque les électrons acquièrent de l'énergie.  $\mathbf{E}_\perp + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_\perp$  induit donc une force transverse focalisante dont l'amplitude varie linéairement avec la position transverse : un électron injecté sur l'axe

de propagation ne va pas osciller transversalement. Cependant, les électrons sont toujours injectés légèrement hors axe, ou alors avec une vitesse transverse non nulle, et ont donc ce mouvement d'oscillation.

On a de plus sur l'axe de propagation :

$$\frac{d\gamma v_x}{dt} = -\frac{e}{m_e} E_x.$$

On suppose que l'angle d'oscillation de l'électron autour de l'axe de propagation reste faible, ce qui est justifié par le fait que les électrons sont principalement accélérés vers l'avant par le champ  $E_x$ . Ceci nous permet d'écrire que  $\gamma v_x \simeq \gamma c$ , et on réécrit alors l'équation (54) sous la forme

$$\frac{d^2 \mathbf{x}_\perp}{dt^2} - \left( \frac{e E_x}{\gamma m_e c} \right) \frac{d\mathbf{x}_\perp}{dt} = -\omega_\beta^2 \mathbf{x}_\perp. \quad (55)$$

La résolution de cette équation est possible pour un profil d'accélération adiabatique (c'est-à-dire tel que  $(1/\omega_\beta^2) d\omega_\beta/dt \ll 1$ ), et on peut alors utiliser l'approximation WKB (Wentzel-Kramers-Brillouin) et montrer que (55) admet des solutions données par [Kostyukov *et al.*, 2004, Glinec, 2006, Corde, 2012] :

$$y = y_0 \left( \frac{\gamma_0}{\gamma(t)} \right)^{1/4} \cos \left( \int_{t_0}^t \omega_\beta(t') dt' + \psi_y \right), \quad (56)$$

$$z = z_0 \left( \frac{\gamma_0}{\gamma(t)} \right)^{1/4} \cos \left( \int_{t_0}^t \omega_\beta(t') dt' + \psi_z \right), \quad (57)$$

où  $\psi_y$  et  $\psi_z$  sont des phases dépendant des conditions initiales. Ces équations décrivent le mouvement transverse des électrons au cours de l'accélération dans la cavité ionique. Ce mouvement transverse, qu'on appelle mouvement bétatron, consiste en des oscillations sinusoïdales à la fréquence  $\omega_\beta$ . De plus on remarque que l'amplitude des oscillations décroît à partir de l'amplitude initiale proportionnellement à  $\gamma^{-1/4}$ . À partir des équations (56) et (57), on peut obtenir l'évolution des angles de trajectoire de l'électron au cours de l'accélération :

$$\theta_y = -\frac{k_p y_0}{\sqrt{2} \gamma_0} \left( \frac{\gamma_0}{\gamma(t)} \right)^{3/4} \sin \left( \int_{t_0}^t \omega_\beta(t') dt' + \psi_y \right), \quad (58)$$

$$\theta_z = -\frac{k_p z_0}{\sqrt{2} \gamma_0} \left( \frac{\gamma_0}{\gamma(t)} \right)^{3/4} \sin \left( \int_{t_0}^t \omega_\beta(t') dt' + \psi_z \right), \quad (59)$$

où on a supposé que  $\theta_y \simeq v_y/c$  et  $\theta_z \simeq v_z/c$  (toujours avec l'hypothèse de faibles angles). Les expressions de ces angles montrent que la divergence diminue proportionnellement à  $\gamma^{-3/4}$ . En conséquence, les électrons accélérés à de très hautes énergies finissent par être très collimatés autour de l'axe (on rappelle qu'on se



place dans l'hypothèse où les interactions entre les électrons et l'arrière de l'impulsion laser sont négligées). Typiquement, pour des énergies électroniques de l'ordre de quelques centaines de mégaélectronvolts, les électrons sont collimatés sur des angles de l'ordre de la dizaine de milliradians.

Ce mouvement transverse des électrons au cours de leur accélération est appelé mouvement ou oscillation bétatron des électrons, et va être à l'origine de leur production de rayonnement, qui est ainsi appelé source ou rayonnement bétatron. C'est ce phénomène qui va nous intéresser dans cette thèse, et nous allons l'étudier plus en détail dans la prochaine section.

## II.4 La source de rayonnement bétatron

Afin de mieux comprendre les propriétés de la source bétatron, le début de cette partie introduira tout d'abord dans un cadre plus général le calcul du rayonnement d'une particule chargée en mouvement. Avant de se lancer dans les équations physiques décrivant ce rayonnement, donnons premièrement un exemple assez simple pour comprendre cette notion. Supposons un électron initialement au repos ; les lignes de champs électriques partent de cet électron en ligne droite dans toutes les directions. Faisons maintenant subir à cet électron un changement de vitesse  $\Delta v$  sur un intervalle de temps  $\Delta t$ . On représente sur la figure 8 le champ électrique de l'électron à un temps  $t$  postérieur à cette accélération. À cause de la vitesse finie de la propagation de l'information, le champ électrique émis ne va pas s'adapter instantanément en tout point de l'espace à l'accélération de l'électron (l'information va se déplacer à partir de l'électron source à la vitesse  $c$ ). Ainsi une perturbation du champ prend naissance, et un observateur placé en un point éloigné de la particule voit cette perturbation comme une onde se propageant vers lui à la vitesse  $c$ . Cette zone de transition du champ correspond à la propagation d'un rayonnement électromagnétique émis par la particule.

Si les vitesses mises en jeu dans le mouvement de la particule sont faibles, la déformation du champ sera peu importante, et on comprend pourquoi des vitesses relativistes sont requises pour émettre un rayonnement variant rapidement sur une courte période temporelle ou spatiale, c'est-à-dire un rayonnement à haute fréquence associé à des photons de haute énergie. De plus, cet argument simple permet de comprendre que le rayonnement d'une particule chargée est lié à la vitesse finie de la propagation de l'information, et donc à la notion de champ retardé, que nous allons introduire dans la suite.

### II.4.1 Rayonnement d'une particule chargée relativiste

#### Potentiels de Liénard-Wiechert et champs retardés

Dans cette partie, nous établirons les équations du rayonnement pour une particule chargée relativiste. Les principaux résultats et idées du calcul seront donnés,

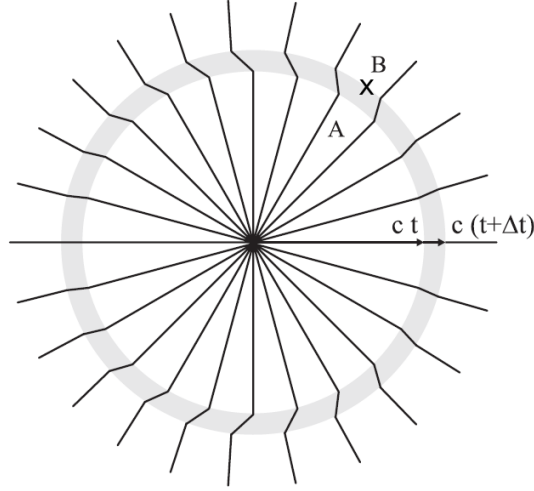


FIGURE 8 – Champ électrique d'un électron à un temps  $t$  après une accélération  $\Delta v/\Delta t$  et initialement au repos. La zone grisée correspond à la zone de transition du champ et se propage à la vitesse  $c$  vers l'extérieur. Un observateur en B au temps  $t$  ne perçoit donc pas encore le nouveau champ électrique émis par l'électron : il le percevra en  $c(t + \Delta t)$ . *Figure tirée de [Khan, 2008].*

mais pour plus de détail, le lecteur est invité à se reporter à l'ouvrage [Jackson, 1975] dont sont tirés les calculs.

L'émission d'un champ électromagnétique par une particule relativiste devant être analysée, il est plus facile de recourir au formalisme usuel impliquant les quadri-vecteurs. On localise ainsi une particule par sa quadri-position  $x = (x_0, \mathbf{x})$ , où  $x_0 = ct$ . L'équation d'onde quadri-dimensionnelle satisfaite par le quadri-potential  $A^\alpha = (\phi, \mathbf{A})$  dans la jauge de Lorentz ( $\partial_\alpha A^\alpha = 0$ ) est donnée par

$$\square A^\alpha = \mu_0 J^\alpha, \quad (60)$$

avec  $J^\alpha = (c\rho, \mathbf{J})$ , où  $\rho$  est la densité de charge, et  $\mathbf{J}$  la densité de courant, et  $\square = \partial^2/c^2 \partial t^2 - \nabla^2$  désigne l'opérateur d'Alambertien.

Il est possible d'exprimer la solution de l'équation (60) à l'aide de la fonction de Green retardée  $D_r$ , sous la forme

$$A^\alpha(x) = \mu_0 \int D_r(x - x') J^\alpha(x') d^4 x', \quad (61)$$

avec  $D_r(x - x') = (1/2\pi)\theta(x_0 - x'_0)\delta[(x - x')^2]$ , où  $\delta(x)$  est la distribution de Dirac, et  $\theta(x)$  la fonction de Heaviside.  $D_r$  est appelée fonction de Green retardée, car elle est nulle en tout point d'observation  $x_0$  antérieur au point source  $x'_0$ .

De plus, en considérant un électron à une quadri-position  $r(\tau)$  ( $\tau$  est le temps

propre de l'électron), le quadri-vecteur courant associé en un point  $x$  est :

$$J^\alpha(x) = -ec \int u^\alpha(\tau) \delta^{(4)}[x - r(\tau)] d\tau, \quad (62)$$

où  $u^\alpha = (\gamma c, \gamma \mathbf{v})$  est le quadri-vecteur vitesse de l'électron.

En injectant les formules pour le quadri-vecteur courant (62) et pour la fonction de Green dans l'expression du quadri-vecteur potentiel (61), et en intégrant sur la quadri-position  $\delta^{(4)}(x')$ , on arrive à l'expression des potentiels de Liénard-Wiechert :

$$A^\alpha(x) = - \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{u^\alpha(\tau)}{u \cdot [x - r(\tau)]} \Big|_{\tau=\tau_0}. \quad (63)$$

Dans cette équation,  $\tau_0$  est le temps retardé, donné par la contrainte du cône de lumière  $x^0 - r^0(\tau_0) = |\mathbf{x} - \mathbf{r}(\tau_0)| = R$ . En utilisant cette contrainte, on peut reformuler l'équation (63) pour donner une expression plus agréable des potentiels scalaire et vecteur en notation non-covariante :

$$\phi(\mathbf{x}, t) = - \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})R} \right]_{ret}, \quad (64)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = - \frac{\mu_0 c e}{4\pi} \left[ \frac{\boldsymbol{\beta}}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})R} \right]_{ret}. \quad (65)$$

où  $\mathbf{n}$  est un vecteur unitaire dans la direction de  $\mathbf{x} - \mathbf{r}(\tau)$ ,  $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$  est la vitesse normalisée, et où le subscript 'ret' indique que les quantités doivent être calculées au temps retardé  $\tau_0$ . Ces expressions tiennent compte du fait que le champ en  $x$  au temps  $\tau$  a été émis par l'électron en un temps antérieur  $\tau - R/c$ .

À partir des formules sur les potentiels (64) et (65), et en utilisant (7) et (8), on accède aux champs électromagnétiques générés par l'électron :

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = - \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[ \left( \frac{\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}}{\gamma^2 (1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3 R^2} \right)_{ret} + \frac{1}{c} \left( \frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3 R} \right)_{ret} \right], \quad (66)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c} [\mathbf{n} \times \mathbf{E}]_{ret}, \quad (67)$$

avec  $\dot{\boldsymbol{\beta}} = d\boldsymbol{\beta}/dt$  l'accélération normalisée.

Ces champs se divisent naturellement en deux termes. Le premier terme (champ de vitesse), qui décroît en  $1/R^2$ , est un terme statique, tandis que le deuxième (champ d'accélération) décroît en  $1/R$  est un terme radiatif. L'observation étant réalisé loin de la source, c'est ce terme qui prédomine dans nos calculs de rayonnement. Dans la suite, on ne considèrera que ce terme dans les calculs, et le terme statique sera négligé.

On va maintenant dériver plusieurs formules utiles pour le calcul du rayonnement.

### Puissance rayonnée

Dans le cas où la particule est faiblement relativiste, alors l'expression du champ électrique de la particule obtenue dans l'équation (66) se réduit à

$$\mathbf{E} = \frac{e}{4\pi c\epsilon_0} \left( \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})}{R} \right)_{ret}. \quad (68)$$

On peut alors calculer le vecteur de Poynting :

$$\boldsymbol{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}. \quad (69)$$

La puissance rayonnée sur une surface  $\Sigma$  s'obtient en calculant le flux du vecteur de Poynting à travers cette surface. On peut donc calculer  $dP/d\Omega$ , la puissance rayonnée par unité d'angle solide  $d\Omega$  :

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{16\pi^2 c\epsilon_0} |\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})|^2. \quad (70)$$

En notant  $\theta$  l'angle formé par le vecteur accélération normalisé  $\dot{\boldsymbol{\beta}}$  et la direction d'observation  $\mathbf{n}$ , alors cette formule se réduit à  $dP/d\Omega = (e^2/16\pi^2 c^3 \epsilon_0) |\dot{\mathbf{v}}|^2 \sin^2 \theta$ , et on peut calculer la puissance rayonnée instantanée totale  $P$  par intégration sur l'angle solide :

$$P = \frac{e^2}{6\pi c^3 \epsilon_0} |\dot{\mathbf{v}}|^2. \quad (71)$$

Cette expression de la puissance est la formule de Larmor valable pour une charge accélérée non-relativiste. En utilisant le fait que  $P$  est un invariant de Lorentz, il est possible de généraliser cette formule au cas relativiste (cf [Jackson, 1975]), pour aboutir à

$$P = \frac{e^2}{6\pi c^3 \epsilon_0} \gamma^6 [(\dot{\boldsymbol{\beta}})^2 - (\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})^2]. \quad (72)$$

### Énergie rayonnée par unité d'angle solide et par unité de fréquence

Pour une particule relativiste en mouvement accéléré quelconque, on peut écrire la puissance rayonnée par unité d'angle solide sous la forme générale

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = |\mathbf{A}(t)|^2, \quad (73)$$

$$\mathbf{A}(t) = (c\epsilon_0)^{1/2} [R\mathbf{E}]_{ret}. \quad (74)$$

Comme déjà précisé, l'observation est réalisée loin de la source. On suppose que cette distance est suffisante pour que le vecteur  $\mathbf{n}$  varie peu au cours du mouvement et puisse être considéré comme constant. De plus, on suppose que le

rayonnement s'effectue sur un intervalle de temps fini (ou que le mouvement de la particule est borné), de sorte que l'énergie rayonnée est finie. Alors on définit  $\mathbf{A}(\omega)$  la transformée de Fourier de  $\mathbf{A}(t)$  :

$$\mathbf{A}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{A}(t) e^{i\omega t} dt. \quad (75)$$

On peut alors montrer à l'aide du théorème de Parseval que l'énergie rayonnée totale par unité d'angle solide  $dI/d\Omega$  vérifie

$$\frac{dI}{d\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{A}(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{A}(\omega)|^2 d\omega.$$

Il est maintenant possible de définir l'énergie rayonnée par unité d'angle solide et par unité de fréquence  $d^2I/d\omega d\Omega$  :

$$\frac{dI}{d\Omega} = \int_0^{\infty} \frac{d^2I}{d\omega d\Omega} d\omega = \int_0^{\infty} (|\mathbf{A}(\omega)|^2 + |\mathbf{A}(-\omega)|^2) d\omega = 2 \int_0^{\infty} |\mathbf{A}(\omega)|^2 d\omega,$$

en utilisant le fait que  $\mathbf{A}$  est une quantité réelle.

En injectant l'expression du champ électrique rayonné (66) dans l'équation précédente, et en utilisant l'expression de  $\mathbf{A}$  (74), on obtient :

$$\frac{d^2I}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{16\pi^3 c \varepsilon_0} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3} \right]_{ret} e^{i\omega t} dt \right|^2. \quad (76)$$

Il reste à effectuer le changement de variable  $t = t' + R(t')/c$  du temps retardé au temps d'observation, et d'approximer  $R$  par  $R_0 + \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}(t')$ , en utilisant le fait que l'observation se fait suffisamment loin de la source, pour obtenir

$$\frac{d^2I}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{16\pi^3 c \varepsilon_0} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}(t)) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}(t)]}{(1 - \boldsymbol{\beta}(t) \cdot \mathbf{n})^2} e^{i\omega(t - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}(t)/c)} dt \right|^2. \quad (77)$$

Cette expression nous donne l'énergie rayonnée par unité d'angle solide et par unité de fréquence au cours du mouvement d'une particule chargée accélérée. Il suffit donc d'avoir la connaissance de la trajectoire de la particule  $\mathbf{r}(t)$ , de  $\boldsymbol{\beta}(t)$  et  $\dot{\boldsymbol{\beta}}(t)$  pour pouvoir calculer le rayonnement émis à une fréquence  $\omega$  dans la direction  $\mathbf{n}$ .

De plus, la présence du terme  $(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^2$  au dénominateur assure que l'émission se fait préférentiellement dans la direction de déplacement de la particule et ce d'autant plus que la particule est énergétique. Plus précisément, on peut montrer que le rayonnement instantané est majoritairement émis dans un cône d'angle  $1/\gamma$  centré autour de la direction de propagation de la particule.

Il est également possible de montrer que pour des forces de même intensité

appliquées longitudinalement  $\mathbf{F}_{\parallel}$  ou transversalement  $\mathbf{F}_{\perp}$  sur la particule, alors le rayonnement émis grâce à la contribution de la force transverse contient une énergie qui est plus grande d'un facteur  $\gamma^2$ . Cette observation est à l'origine de plusieurs conséquences. Par exemple, c'est pour cette raison que les aimants ajoutés dans les synchrotrons de troisième génération ont pour but de faire osciller transversalement les électrons accélérés. Enfin, dans le cas qui nous intéresse de la source de rayonnement bêatron, le rayonnement ne va donc pas provenir de l'accélération longitudinale de nos électrons, mais de leur accélération et mouvement transverse dans la cavité; ceci montre l'importance de contrôler celui-ci en plus des autres caractéristiques intrinsèquement liées à l'accélération (charge injectée, énergie atteinte...)

#### II.4.2 Rayonnement synchrotron d'une particule en mouvement circulaire instantané

Les formules sur le rayonnement obtenues jusqu'ici sont valables pour un mouvement arbitraire de la particule. Nous allons maintenant supposer que la particule se déplace en suivant un mouvement circulaire instantané. Pour un mouvement fini, en intégrant par parties, l'équation (77) peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2 \omega^2}{16\pi^3 c \varepsilon_0} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}) e^{i\omega(t - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}(t)/c)} dt \right|^2. \quad (78)$$

On considère une particule dont le mouvement s'effectue dans le plan  $(x, y)$ , et qui à un instant  $t$  se dirige vers  $+x$ . On note  $\rho$  le rayon de courbure instantané de sa trajectoire. L'observation s'effectue dans le plan  $(y, z)$ , et on note  $\theta$  l'angle entre  $\mathbf{n}$  et l'axe  $x$ . On suppose de plus que cette particule est très relativiste ( $\beta \sim 1$ ). On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}) &= \beta \left[ -\mathbf{e}_{\parallel} \sin\left(\frac{vt}{\rho}\right) + \mathbf{e}_{\perp} \cos\left(\frac{vt}{\rho}\right) \sin\theta \right], \\ t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}(t)}{c} &= t - \frac{\rho}{c} \sin\left(\frac{vt}{\rho}\right) \cos\theta, \end{aligned}$$

où  $\mathbf{e}_{\parallel}$  est un vecteur unitaire dans la direction  $y$  et  $\mathbf{e}_{\perp} = \mathbf{n} \times \mathbf{e}_{\parallel}$ .

Pour une particule relativiste, on a vu que le rayonnement était dirigé dans la direction du mouvement. On considère ainsi que  $\theta \ll 1$  sur les zones où le rayonnement est significatif. Avec cette hypothèse, on effectue des développements limités sur  $\theta$  et pour un laps de temps  $t$  petit pour aboutir à :

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2 \omega^2}{16\pi^3 c \varepsilon_0} \left| -\mathbf{e}_{\parallel} A_{\parallel}(\omega) + \mathbf{e}_{\perp} A_{\perp}(\omega) \right|^2 \quad (79)$$

où les termes  $A_{\parallel}(\omega)$  et  $A_{\perp}(\omega)$  sont donnés par :

$$A_{\parallel}(\omega) = \frac{c}{\rho} \int_{-\infty}^{\infty} t \exp \left( i \frac{\omega}{2} \left[ \left( \frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right) t + \frac{c^2 t^3}{3\rho^2} \right] \right) dt,$$

$$A_{\perp}(\omega) = \theta \int_{-\infty}^{\infty} t \exp \left( i \frac{\omega}{2} \left[ \left( \frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right) t + \frac{c^2 t^3}{3\rho^2} \right] \right) dt.$$

En posant le changement de variable  $x = ct/(\rho\sqrt{1/\gamma^2 + \theta^2})$ , et en introduisant le paramètre  $\zeta = (\omega\rho/3c)(1/\gamma^2 + \theta^2)^{3/2}$ , on aboutit à la formule suivante :

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{12\pi^3 c \varepsilon_0} \left( \frac{\omega\rho}{c} \right)^2 \left( \frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^2 \left[ K_{2/3}^2(\zeta) + \frac{\theta^2}{(1/\gamma^2) + \theta^2} K_{1/3}^2(\zeta) \right] \quad (80)$$

où  $K_{\nu}$  est la fonction de Bessel modifiée du second ordre d'indice  $\nu$ .

La décroissance des fonctions de Bessel modifiées implique que l'énergie rayonnée est négligeable à tout angle pour  $\zeta \gg 1$ . On définit la fréquence critique  $\omega_c$  telle que  $\zeta = 1/2$  sur l'axe ( $\zeta$  étant minimal pour  $\theta = 0$ , le rayonnement est émis à plus hautes fréquences sur l'axe) :

$$\omega_c = \frac{3}{2} \gamma^3 \frac{c}{\rho}. \quad (81)$$

La plus grande part de l'énergie rayonnée est donc émise à des fréquences inférieures à  $\omega_c$ .

En intégrant l'expression (80) sur tout l'angle solide, on obtient la distribution fréquentielle de l'énergie rayonnée :

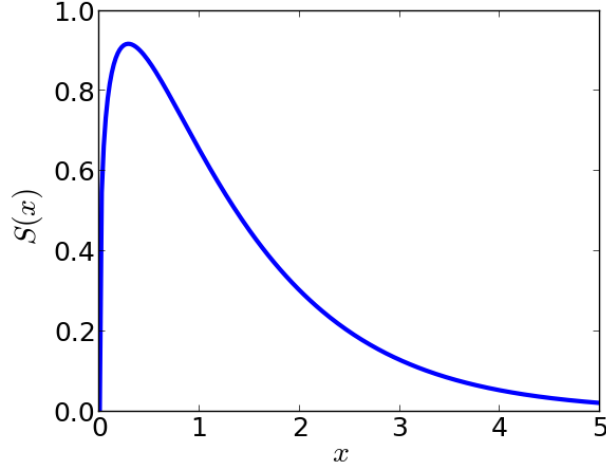
$$\frac{dI}{d\omega} = \sqrt{3} \frac{e^2}{4\pi c \varepsilon_0} \gamma \frac{\omega}{\omega_c} \int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(x) dx = \sqrt{3} \frac{e^2}{4\pi c \varepsilon_0} \gamma S(\omega/\omega_c) \quad (82)$$

Ces fonctions sont valables pour une particule en mouvement circulaire instantané. Le type de rayonnement émis dans ce cas, et décrit dans les équations précédentes, est nommé rayonnement synchrotron, car il a été observé pour la première fois dans un synchrotron à la fin des années 40 [Elder *et al.*, 1947]. La courbe d'émission synchrotron est tracée en figure 9 à titre d'exemple. Dans la suite, nous étudions plus précisément le cas d'une source bétatron, et montrons comment elle se rapporte à un rayonnement synchrotron.

### II.4.3 Rayonnement bétatron

#### Composante fréquentielle du spectre : onduleur et *wiggler*

On considère dans un premier temps un électron en mouvement sinusoïdal d'amplitude  $y_0$  et pour lequel  $\gamma = cste$ . Ce cas correspond au mouvement bétatron où l'on néglige l'accélération. Il correspond aussi au mouvement que subit


 FIGURE 9 – Fonction d'émission synchrotron  $S(x) = x \int_x^\infty K_{5/3}(\xi) d\xi$ .

l'électron dans les structures magnétiques d'insertion des synchrotrons de troisième génération, où des aimants font osciller transversalement les électrons en sortie d'accélérateur. On introduit le paramètre de force de l'oscillation  $K = \gamma\psi$ , où  $\psi$  est l'angle maximal entre l'axe de propagation et la direction du mouvement atteint au cours de l'oscillation (cf figure 10a). On a donc  $\psi = \max(dy/dx) = k_\beta y_0$ , avec  $k_\beta = \omega_\beta/c$ , de sorte que

$$y(x) = y_0 \sin(k_\beta x) = \frac{K}{\gamma k_\beta} \sin(k_\beta x). \quad (83)$$

L'énergie de l'électron étant constante, les vitesses transverses et longitudinales de l'électron sont couplées par l'équation :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_x^2 - \beta_y^2}}, \quad (84)$$

avec  $\beta_x = v_x/c$  et  $\beta_y = v_y/c$ . En injectant la valeur de  $\beta_y$ , on trouve

$$\beta_x^2 = 1 - \frac{1}{\gamma^2} - \frac{K^2}{\gamma^2} \sin^2(k_\beta x),$$

et dans la limite où l'oscillation est assez faible ( $\psi \ll 1$ ), on obtient

$$\beta_x \simeq 1 - \frac{1}{2\gamma^2} - \frac{K^2}{2\gamma^2} \sin^2(k_\beta x).$$

En moyennant la vitesse longitudinale sur une période, ceci donne :

$$\bar{\beta}_x = 1 - \frac{2 + K^2}{4\gamma^2}.$$



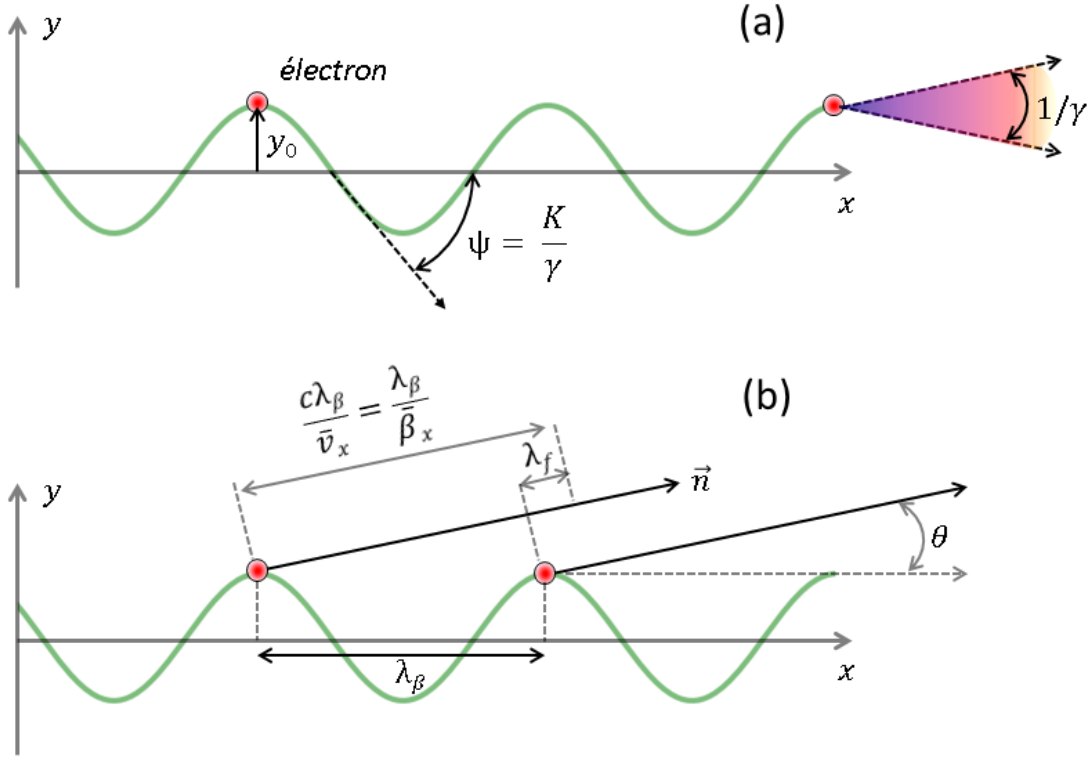


FIGURE 10 – (a) Illustration de l'émission de rayonnement synchrotron d'un électron oscillant transversalement et sinusoidalement. La trajectoire de l'électron est tracée en vert, et le cône violet représente son émission de rayonnement. (b) Schéma pour le calcul de la longueur d'onde fondamentale du rayonnement  $\lambda_f$  émise dans la direction  $\mathbf{n}$  formant un angle  $\theta$  avec l'axe de propagation de l'électron  $x$ . La figure (b) est adaptée de [Corde, 2012].

Le rayonnement émis par l'électron se propage dans la direction du mouvement de l'électron. Comme indiqué sur la figure 10b, on considère l'émission dans la direction  $\mathbf{n}$  qui forme un angle  $\theta$  avec l'axe  $x$ . En une oscillation bétatron – donc sur une distance  $\lambda_\beta = 2\pi/k_\beta$  –, le rayonnement émis s'est propagé à  $c$  pendant une durée égale à  $\lambda_\beta/\bar{v}_x$ , soit sur une longueur  $c\lambda_\beta/\bar{v}_x = \lambda_\beta/\beta_x$ . Il se trouve donc en avance sur l'électron d'une longueur  $\lambda_f$ , qui est donnée par :

$$\lambda_f = \lambda_\beta \left( \frac{1}{\beta_x} - \cos \theta \right) \simeq \frac{\lambda_\beta}{2\gamma^2} \left( 1 + \frac{K^2}{2} + \gamma^2 \theta^2 \right), \quad (85)$$

en supposant que l'angle  $\theta$  est petit.

Le rayonnement émis par cet électron dans la direction  $\mathbf{n}$  va être constitué de la longueur d'onde fondamentale  $\lambda_f$  donnant une pulsation fondamentale  $\omega_f = 2\pi c/\lambda_f$ , et de ses harmoniques  $\omega_n = n\omega_f$ . Ces pulsations diminuent avec l'angle, mais augmentent avec l'énergie électronique. Selon la valeur de  $K$ , on distingue deux types de régimes pour le mouvement.

Si  $K \ll 1$ , alors l'électron rayonne globalement dans des directions ayant un

angle variant peu, et toutes incluses dans le cône d'ouverture  $1/\gamma$ . Le spectre du rayonnement sera principalement constitué de la fréquence fondamentale, donnée sur l'axe par  $\lambda_f \simeq \lambda_\beta/2\gamma^2$ . La présence du terme  $2\gamma^2$  au dénominateur traduit l'effet Doppler relativiste entre l'observateur qui perçoit le rayonnement dans le référentiel du laboratoire, et la particule qui émet le rayonnement en se déplaçant dans sa direction. Avec un tel paramètre de force  $K \ll 1$ , on parlera de 'régime d'onduleur' par analogie avec les éléments d'insertion des synchrotrons.

Si  $K \gg 1$ , la direction du mouvement de l'électron varie de  $K/\gamma$ , ce qui est supérieur à l'angle d'ouverture du cône d'émission du rayonnement ( $1/\gamma$ ). Ainsi, un observateur placé dans la direction  $\mathbf{n}$  ne voit pas ce rayonnement en continu, mais pendant des impulsions très brèves et répétitives lorsque la direction du vecteur vitesse de l'électron est proche de  $\mathbf{n}$ , à un angle  $1/\gamma$  près. En conséquence, le rayonnement émis dans sa direction sera constitué non seulement de la fréquence fondamentale, mais aussi de nombreuses harmoniques. Dans ce cas, on parle de 'régime de *wiggler*'.

On note également que dans ce deuxième régime, l'émission totale se fait dans un cône d'ouverture  $K/\gamma$  dans la direction de l'oscillation de l'électron, contre  $1/\gamma$  dans la direction perpendiculaire.

### Analogie avec le rayonnement synchrotron

En négligeant l'accélération longitudinale de l'électron, il est possible de décrire le rayonnement émis par ce pseudo-mouvement bétatron en termes de rayonnement synchrotron décrit dans la section précédente. On peut pour cela calculer le rayon de courbure pour la trajectoire sinusoïdale de l'électron (on rappelle que pour une trajectoire  $y = f(x)$ , le rayon de courbure est défini par  $\rho(x) = |(1 + y'^2)^{3/2}/y''|$ ) :

$$\rho = \frac{1}{k_\beta \psi} \frac{[1 + \psi^2 \cos^2(k_\beta x)]^{3/2}}{|\sin(k_\beta x)|}. \quad (86)$$

La valeur maximale du rayon de courbure est obtenue aux extrema de la trajectoire, et est définie par  $\rho_{max} = 1/(k_\beta \psi) = \gamma/(k_\beta K)$ . En injectant cette valeur dans l'équation (81), il est possible de confondre le rayonnement émis avec un rayonnement de type synchrotron à la fréquence critique [Esarey *et al.*, 2002] :

$$\omega_c = \frac{3}{2} K \gamma^2 \omega_\beta \quad (87)$$

Le spectre du rayonnement sera donc constitué d'une suite d'harmoniques. En intégrant sur l'angle solide, l'amplitude en sera déterminée par la fonction  $S(\omega/\omega_c)$  précédemment définie.

À partir du mouvement bétatron de l'électron caractérisé dans la section II.3.2,

on peut définir la pulsation et le paramètre de force du mouvement bêatron par :

$$\omega_\beta = \frac{\omega_p}{\sqrt{2\gamma}}, \quad (88)$$

$$K = \gamma k_\beta y_0 = k_p y_0 \sqrt{\frac{\gamma}{2}} \quad (89)$$

Pour une source bêatron, c'est le régime de *wiggler* qui nous intéresse, car c'est celui qui est naturellement atteint expérimentalement, et de plus c'est le régime qui permet d'atteindre des puissances rayonnées et des énergies de photons plus grandes, grâce à l'émergence des harmoniques. Dans ce cas, on obtient les relations suivantes pour le paramètre de force et la fréquence critique du rayonnement émis :

$$K = 1.33 \times 10^{-10} \sqrt{\gamma n_e [\text{cm}^{-3}]} r_\beta [\mu\text{m}], \quad (90)$$

$$\hbar\omega_c [\text{keV}] = 5.24 \times 10^{-24} \gamma^2 n_e [\text{cm}^{-3}] r_\beta [\mu\text{m}]. \quad (91)$$

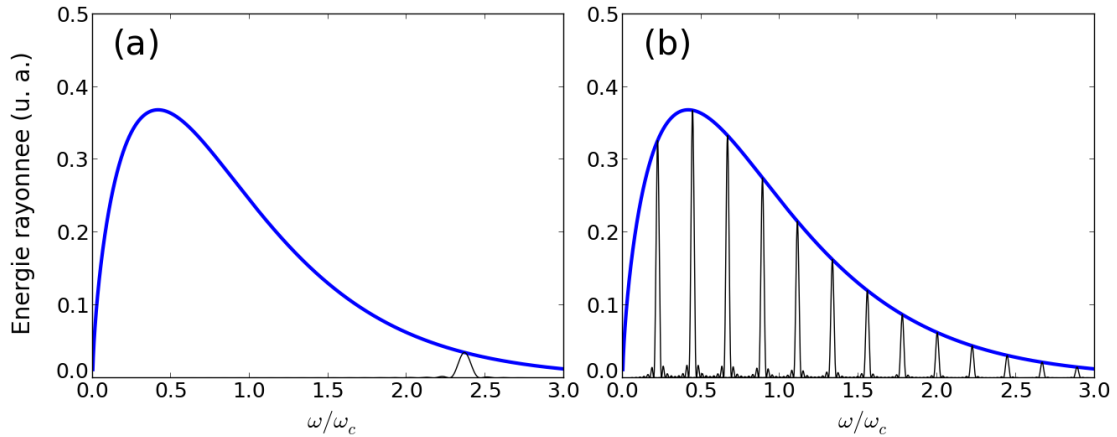


FIGURE 11 – Énergie rayonnée par unité d'angle solide et par unité de fréquence  $d^2I/d\omega d\Omega$  dans le cas onduleur (a) et dans le cas *wiggler* (b) dans la direction de l'axe, en noir. En bleu, l'enveloppe donnée par  $(\omega/\omega_c)^2 K_{2/3}^2$  (selon la formule (80), dans la direction de l'axe uniquement).

Dans une direction donnée, le spectre est donc constitué d'une succession d'harmoniques s'atténuant au-delà de la fréquence  $\omega_c$  (cf figure 11b). Dans le cas des sources bêatrons que nous rencontrerons dans cette ouvrage, ce qui nous intéresse n'est pas  $d^2I/d\omega d\Omega$  en tant que tel, mais son intégration sur l'angle solide pour obtenir les spectres fréquentiels. Même dans ce cas où on ne considère qu'un seul électron d'énergie constante, les fréquences d'émission dépendant de l'angle d'observation, cette intégration fait disparaître cette discrétisation fréquentielle de l'énergie pour faire apparaître un spectre continu et lisse, dont l'enveloppe est donnée par l'équation (82). Par la suite, les spectres  $dI/d\omega$  obtenus seront souvent comparés à cette fonction synchrotron théorique. La nature synchrotron de

la source de rayonnement bétatron a d'ailleurs été démontrée récemment expérimentalement [Fourmaux *et al.*, 2011b].

Pour décrire un mouvement bétatron idéal, il faudrait considérer l'accélération des électrons en même temps que leur oscillation. Dans ce cas, le spectre obtenu s'obtient en écrivant le mouvement total sous la forme d'une somme de mouvements définis sur des intervalles de temps  $\Delta t_i$  sur lesquels  $\gamma_i \approx cste$ . Il est donc possible d'approximer la distribution  $dI/d\omega$  émise pendant l'intervalle de temps  $\Delta t_i$  par un spectre synchrotron de forme  $S(\omega/\omega_{c,i})$ . Dans ce cas, on obtient une forme de spectre légèrement modifiée [Thomas, 2010] :

$$S'(x) = x^2 \int_{-1}^1 \frac{1}{(1 - \mu^2)^{3/2}} K_{2/3}^2(x[1 - \mu^2]^{-7/4}) d\mu \quad (92)$$

Cependant, l'utilisation de la formule  $S(\omega/\omega_c)$  pour comparer les spectres de sources bétatrons en utilisant les paramètres maximaux atteints par les électrons pendant leur accélération est une approximation suffisamment bonne pour déterminer les propriétés de la source bétatron, notamment sa fréquence critique, même si cette formule sous-estime l'émission à basse fréquence (qui se produit en partie lorsque les électrons n'ont pas encore atteint leur énergie maximale).

### Exemple de calcul de rayonnement

Des exemples de calcul de trajectoires bétatrons, obtenues à partir de l'intégration numérique de l'équation (53), sont tracés en figure 12. Pour tracer ces courbes, on a supposé que l'électron était injecté à l'arrière de la bulle (à une position  $\xi = -R = -2\sqrt{a_0}/k_p$ ) créée par un laser ayant pour maximum de son potentiel vecteur normalisé  $a_0 = 4$  dans un plasma de densité  $n_e = 5 \times 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ , les champs de la bulle étant estimés théoriquement à l'aide des lois d'échelle. Dans les deux cas, l'électron a une impulsion initiale  $p_{x,0} = 30 m_e c$ , et selon les conditions transverses initiales, l'intégration de l'équation du mouvement conduit à une trajectoire confinée dans un plan (fig. 12a) ou à un mouvement tri-dimensionnel hélicoïdal (fig. 12b). Pour les deux mouvements, les oscillations sont atténuées au cours du mouvement en  $\gamma^{-1/4}$  lorsque l'électron gagne de l'énergie. On trace en figure 12c,d les distributions angulaires  $dI/d\Omega$  correspondantes du rayonnement émis. Comme l'émission est principalement émise dans la direction du vecteur vitesse de l'électron, cette distribution dépend fortement de la trajectoire. Expérimentalement, les informations fournies par la source bétatron permettent d'ailleurs d'imager les trajectoires électroniques [Ta Phuoc *et al.*, 2006, 2008a]. Enfin, sur la distribution angulaire émise par l'électron dans un mouvement plan, on retrouve les caractéristiques citées plus tôt sur l'émission, avec une largeur de tâche de  $K/\gamma$  dans la direction d'oscillation, et de  $1/\gamma$  dans la direction orthogonale ( $K \sim 8$  et  $\gamma \sim 900$  à la fin de l'accélération).

En figure 12e, on trace également la distribution fréquentielle  $dI/d\omega$  du rayonnement correspondant à la figure 12c. Avec l'intégration angulaire, la discrétisation fréquentielle de l'énergie a disparu, et l'émission de rayonnement se fait sur une large bande spectrale, avec une émission significative au delà de 10 keV. En effet, l'énergie critique du rayonnement à la fin de l'oscillation est donnée par  $\omega_c \sim 18$  keV.