Espaces de déformation d'Epstein et de Teichmüller

Nous allons appliquer dans ce chapitre l'étude analytique du chapitre précédent à des questions dynamiques. De manière générale, on étudiera de manière infinitésimale l'espace des déformations d'un système dynamique f à l'aide de théorie de Teichmüller. Les résultats les plus importants de ce chapitre sont le théorème 2.4.38, qui porte sur la construction de l'espace de Teichmüller Teich(f), le théorème 2.4.2.4 qui affirme que Teich(f) s'immerge dans les fractions rationnelles, et les théorèmes 2.6.2 et 2.6.5 qui en sont des conséquences. Nous redonnons également une preuve rapide du théorème de Sullivan sur la non-existence de domaines errants pour les fractions rationnelles en dimension un (théorème 2.4.28). L'objet du chapitre suivant sera de construire des contre-exemples à ce théorème en dimension supérieure.

2.1 Rappels de dynamique complexe en dimension un

Le lecteur est supposé être familier avec les bases de la dynamique complexe en dimension un. Nous rappellerons cependant ici quelques notions et résultats fondamentaux que l'on utilisera de manière répétée par la suite. Nous renvoyons le lecteur à [Mil06] ou [CG93] pour une introduction à la dynamique complexe en dimension un, et pour les preuves de tous les résultats énoncés dans cette section.

Définition 2.1.1. Soit f une fraction rationnelle de degré $d \geq 2$. On définit l'ensemble de Fatou $\mathcal{F}(f)$ comme le plus grand ouvert sur lequel la famille des itérées de f forme une famille normale. Une composante de Fatou est une composante connexe de l'ensemble de Fatou. L'ensemble de Julia $\mathcal{J}(f)$ est son complémentaire.

Théorème 2.1.2. *L'ensemble de Julia est un compact non vide et complètement invariant (c'est-à-dire que $\mathcal{J}(f) = f^{-1}(\mathcal{J}(f))$. Il est soit d'intérieur vide, soit la sphère de Riemann $\mathbb{P}^1$ toute entière.*

Le théorème suivant est une description importante de l'ensemble de Julia :

Théorème 2.1.3. *L'ensemble de Julia est exactement l'adhérence des cycles répulsifs de f.*

En fait, les cycles répulsifs constituent la très grande majorité des points périodiques :

Théorème 2.1.4 (Inégalité de Fatou-Shishikura)**.** *Soit f une fraction rationnelle de degré $d \geq 2$. Il existe au plus $2d-2$ cycles non répulsifs.*

Théorème 2.1.5. *Si une composante de Fatou U est complètement invariante, alors l'ensemble de Julia est exactement la frontière de U.*

Proposition 2.1.6. On suppose ici que f est un polynôme. Alors le bassin d'attraction de l'infini est une composante de Fatou complètement invariante.

Définition 2.1.7. Soit U une composante de Fatou invariante.
- On dit que U est une composante de Fatou attractive s'il existe un point fixe $z_0 \in U$ de multiplicateur de module strictement compris entre 0 et 1.
- On dit que U est une composante de Fatou superattractive s'il existe un point fixe $z_0 \in U$ de multiplicateur nul.
- On dit que U est un une composante de Fatou parabolique si la frontière de U contient un point fixe de multiplicateur égal à 1.
- On dit que U est un disque de Siegel si U est simplement connexe et que $f_{|U} : U \to U$ est holomorphiquement conjuguée à une rotation d'angle irrationnel.
- On dit que U est un anneau de Herman si U est un anneau de module fini et que $f_{|U}$: $U \to U$ est holomorphiquement conjuguée à une rotation d'angle irrationnel.

Dans le cas d'une composante attractive, tout point de U converge vers le point fixe par itération de f. De plus, il existe une coordonnée holomorphe définie au voisinage du point fixe z_0 qui conjugue la dynamique à la multiplication par $\lambda \in \Delta$, où λ est le multiplicateur de z_0.

De même, tout point de U converge vers z_0 dans le cas superattractif et parabolique. Dans le cas superattractif, la forme normale holomorphe près de z_0 est donnée par $z \mapsto z^k$, pour un certain $k \geq 2$. Le cas parabolique est plus subtil, et nous y reviendrons plus en détail dans le chapitre suivant. Il existe des coordonnées holomorphes (appelées coordonnées de Fatou) qui conjuguent la dynamique à la translation de un sur un voisinage de z_0 intersecté avec U (mais pas sur un voisinage complet de z_0).

Enfin, mentionnons le fait que toute composante attractive ou parabolique contient toujours au moins une orbite critique.

Théorème 2.1.8 (Classification des composantes de Fatou invariantes, Fatou)**.** *Soit U une composante de Fatou invariante. Alors U est de l'un des types suivants : attractive, superattractive, parabolique, un anneau de Herman ou un disque de Siegel. De plus, pour chacune de ces possibilités, il existe une fraction rationnelle ayant une telle composante de Fatou.*

Le théorème suivant ([Sul85]) est un résultat fondamental. Nous en donnerons une preuve auto-contenue (voir théorème 2.4.28) qui s'inspire fortement de la présentation de McMullen dans les notes [McM14]. En conjonction avec le théorème de classification précédent , il permet d'obtenir une description complète et très explicite de la dynamique possible dans l'ensemble de Fatou d'une fraction rationnelle en dimension complexe un.

Théorème 2.1.9 (Pas de domaine errant, Sullivan [Sul85])**.** *Soit f une fraction rationnelle. Toute composante de Fatou de f est prépériodique.*

Définition 2.1.10. Un exemple de Lattès est une fraction rationnelle f telle qu'il existe un revêtement ramifié holomorphe de degré fini $\phi : \mathbb{C}/\Lambda \to \mathbb{P}^1$ de la sphère par un tore complexe $\mathbb{C}/\Lambda$ et un endomorphisme affine $\tilde{f} : \mathbb{C}/\Lambda \to \mathbb{C}/\Lambda$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}/\Lambda \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "\phi"'] & \mathbb{C}/\Lambda \arrow[d, "\phi"] \\ \mathbb{P}^1 \arrow[r, "f"] & \mathbb{P}^1 \end{tikzcd}$$

Les exemples de Lattès forment une famille bien comprise d'exceptions à plusieurs résultats. Leur ensemble de Julia est toute la sphère, mais certaines d'entre elles possèdent un paramètre complexe de déformation puisqu'elles possèdent un champ de droite invariant (voir la définition ci dessous et le théorème 2.4.24). Dans ce cas, on parle alors d'*exemples de Lattès flexibles*. Nous renvoyons le lecteur à [Mil06] pour une discussion détaillée des exemples de Lattès.

Les exemples de Lattès flexibles sont également les seules fractions rationnelles qui admettent des différentielles quadratiques rationnelles intégrables invariantes (voir proposition 2.3.2).

Définition 2.1.11. Un champ de droites invariant est une forme de Beltrami invariante par f dont le support est inclus dans l'ensemble de Julia $\mathcal{J}(f)$.

La conjecture suivante est centrale en dynamique complexe. Elle est équivalente à la généricité de l'hyperbolicité pour les fractions rationnelles.

Conjecture 2.1.12 (Pas de champs de droite invariants, McMullen)**.** Les exemples de Lattès flexibles sont les seules fractions rationnelles ayant un champ de droites invariant.

Notons que l'existence de champs de droites invariants implique que l'ensemble de Julia $\mathcal{J}(f)$ est de mesure de Lebesgue positive. Lorsque $\mathcal{J}(f)$ n'est pas $\mathbb{P}^1$ toute entière, $\mathcal{J}(f)$ est d'intérieur vide et la question de savoir si dans ce cas $\mathcal{J}(f)$ pouvait avoir une mesure de Lebesgue positive est longtemps restée ouverte. On sait maintenant que la réponse à cette question est oui : il existe même des polynômes quadratiques dont l'ensemble de Julia a une mesure de Lebesgue positive, d'après un théorème dû à X. Buff et A. Chéritat ([BC12]).

Définition 2.1.13. Soit f une fraction rationnelle. On notera C_f l'ensemble des points critiques de f, et $V_f = f(C_f)$ l'ensemble de ses valeurs critiques.

2.2 Divergences invariantes

Définition 2.2.1. Soit $K \subset \mathbb{P}^1$ un compact de mesure de Lebesgue nulle. Notons $\mathcal{D}(K)$ l'espace des différentielles quadratiques méromorphes sur $\mathbb{P}^1 - K$ avec un nombre fini de pôles dans $\mathbb{P}^1 - K$ qui sont tous simples, quotienté par le sous-espace des différentielles quadratiques intégrables. On appelle $\mathcal{D}(K)$ l'espace des divergences le long de K.

Soit f une fraction rationnelle ; supposons que $K = f(K)$. Alors l'opérateur de poussé en avant f_* passe au quotient et définit un endomorphisme linéaire (que l'on notera encore f_*) de $\mathcal{D}(K)$.

Définition 2.2.2. Soit une fraction rationnelle f et K un compact invariant. On note $\mathcal{D}_f(K)$ l'espace des divergences invariantes le long de K, c'est-à-dire l'espace des points fixes de $f_* : \mathcal{D}(K) \to \mathcal{D}(K)$.

Remarque 2.2.3. L'opérateur $\nabla_f = \mathrm{Id} - f_*$ induit une application linéaire naturelle de $\mathcal{D}_f(K)$ dans $Q(K \cup V_f)/\overline{\nabla_f Q(K)}$. C'est un point essentiel, puisque l'on verra que $Q(K \cup V_f)/\overline{\nabla_f Q(K)}$ représente, dans un certain sens, le plan cotangent aux mouvements holomorphes dynamiques de K.

Si q est une différentielle quadratique méromorphe en dehors de K et ayant un nombre fini de pôles, tous simples, en dehors de K, alors on notera $[q]_K$ sa classe de divergence le long de K.

Supposons maintenant que $K \subset \mathbb{C}$, comme ce sera le cas concrètement lorsque l'on travaillera en coordonnées. Soit q une différentielle quadratique holomorphe en dehors de K, ayant un pôle au plus triple à l'infini. A priori, on ne peut pas parler de la divergence de q le long de K à cause de ce pôle triple. Cependant, il existe une manière canonique d'associer à q une divergence le long de K bien définie. En effet, si l'on fixe un triplet $Z \subset \mathbb{C}$ arbitraire, il est facile de voir que l'on peut trouver une unique différentielle quadratique q_Z telle que :

— q_Z est holomorphe en dehors de $Z \cup \{\infty\}$

— q_Z a des pôles simples en Z

— $q_Z - q$ est holomorphe au voisinage de l'infini.

Ceci vient essentiellement du fait que les différentielles quadratiques $\frac{dz^2}{z-z_i}$, où $z_i \in Z$, sont linéairement indépendantes et ont un pôle triple à l'infini.

Définition 2.2.4. La différentielle quadratique $q - q_Z$ est appelée la Z-normalisation de q.

On définit alors la classe de divergence le long de K de q comme celle de sa Z-normalisation $q - q_Z$, et on la note encore $[q]_K$ ou $[q]$ s'il n'y a pas d'ambiguïté. Il est facile de voir que cette classe de divergence est indépendante du choix de triplet Z (puisque q_Z n'a que des pôles simples dans $\mathbb{C}$).

Exemple 2.2.5. Soit f une fraction rationnelle fixant 0 avec un multiplicateur non nul. Alors la divergence $\left[\frac{dz^2}{z^2}\right]_0$ est invariante. Cependant, si $f(z) = z^2$, alors $f_*\frac{dz^2}{z^2} = \frac{1}{2}\frac{dz^2}{z^2}$, et donc la divergence $\left[\frac{dz^2}{z^2}\right]_0$ n'est pas invariante. Nous verrons plus tard que cette divergence est en fait indépendante des coordonnées z utilisées dans sa définition.

Nous allons prouver le lemme suivant sur le pôle obtenu en poussé en avant une différentielle quadratique ayant un pôle double. On travaillera dans une coordonnée z ; on ne perd pas de généralité à supposer que y et $f(y)$ sont dans $\mathbb{C}$.

Lemme 2.2.6. *Soit une fraction rationnelle f, et et $y \in \mathbb{P}^1$ tel que $f(y) \notin V_f$. Soit z une coordonnée affine dans laquelle $y, f(y) \in \mathbb{C}$. Soit $q = \frac{dz^2}{(z-y)^2} + O_{z\to y}(1)$. Alors*

$$f_*q = \left(\frac{1}{(z-f(y))^2} - \frac{f''(y)}{f'(y)^2}\frac{1}{z-f(y)}\right)dz^2 + O_{z\to f(y)}(1).$$

Démonstration. Si q a un pôle double en y, alors f_*q a un pôle au plus double en $f(y)$. On peut donc écrire :

$$f_*q = \left(\frac{a}{(z-f(y))^2} + \frac{b}{z-f(y)}\right)dz^2 + O_{z\to f(y)}(1).$$

Il s'agit de calculer a et b. Pour cela, rappelons que si η est un champ de vecteur méromorphe au voisinage de y et $f(y)$, on a :

$$\operatorname{Res}(f_*q\cdot\eta, f(y)) = \operatorname{Res}(q\cdot f^*\eta, y). \tag{2.2.1}$$

Commençons par calculer a. Si l'on pose $\eta_a = (z-f(y))\frac{d}{dz}$, on a d'une part :

$$\operatorname{Res}(f_*q\cdot\eta_a, f(y)) = \operatorname{Res}\left(a\frac{dz}{(z-f(y))}, f(y)\right) = a.$$

D'autre part, d'après 2.2.1 :

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f_*q\cdot\eta_a, f(y)) &= \operatorname{Res}(q\cdot f^*\eta_a, y)\\ &= \operatorname{Res}\left(\frac{dz^2}{(z-y)^2}\cdot\frac{z-f(y)}{f'(z)}\frac{d}{dz}, y\right)\\ &= \operatorname{Res}\left(\frac{f(z)-f(y)}{z-y}\frac{1}{f'(z)}\frac{dz}{z-y}, y\right)\\ &= 1.\end{aligned}$$

Donc $a = 1$.

De même, posons $\eta_b = \frac{d}{dz}$. On a :

$$\operatorname{Res}(f_*q\cdot\eta_b, f(y)) = \operatorname{Res}\left(b\frac{dz}{z-f(y)}, f(y)\right) = b.$$

De plus :

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f_*q\cdot\eta_b, f(y)) &= \operatorname{Res}(q\cdot f^*\eta_b, y)\\ &= \operatorname{Res}\left(\frac{dz^2}{(z-y)^2}\cdot\frac{1}{f'(z)}\frac{d}{dz}, y\right)\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}\frac{1}{f'(z)(z-y)^2} &= \frac{1}{(z-y)^2}\frac{1}{f'(y)+(z-y)f''(y)+o(z-y)}\\ &= \frac{1}{f'(y)(z-y)^2}\left(1-\frac{f''(y)}{f'(y)^2}(z-y)+o(z-y)\right)\\ &= \frac{1}{f'(y)(z-y)^2}-\frac{f''(y)}{f'(y)^2}\frac{1}{z-y}+O_{z\to y}(1).\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(q\cdot f^*\eta_b, f(y)) &= \operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z-y)^2}\cdot\frac{1}{f'(z)}dz, y\right)\\ &= -\frac{f''(y)}{f'(y)^2}=b.\end{aligned}$$

□

Remarque 2.2.7. Le coefficient $a=1$ est intrinsèque, et est un nombre indépendant du choix de coordonnée z. Par contre, le coefficient b dépend du choix de coordonnée.

2.3 Différentielles quadratiques invariantes

Les deux propositions suivantes sont classiques et sont des résultats fondamentaux, utilisés de manière cruciale par exemple pour construire les espaces de déformation d'Esptein.

Proposition 2.3.1. Soit q une différentielle quadratique rationnelle à pôles simples sur $\mathbb{P}^1$. Alors $\|f_*q\|\le\|q\|$. De plus, il y a égalité si et seulement si

$$f^*f_*q=f_*f^*q=dq.$$

Proposition 2.3.2. Soit f une fraction rationnelle qui n'est pas un exemple de Lattès, et q une différentielle quadratique rationnelle à pôles simples sur $\mathbb{P}^1$. Alors $\nabla_f q=q-f_*q=0$ si et seulement si $q=0$.

Exemple 2.3.3. Soit $f_c(z)=z^2+c$, $c\in\mathbb{C}$, et q une différentielle quadratique rationnelle à pôles simples. Alors $\|q\|=\|f_*q\|$ si et seulement si $q(z)=q(-z)$ pour tout $z\in\mathbb{P}^1$. Cependant, comme aucun polynôme ne peut être un exemple de Lattès, on a toujours $q\neq f_*q$.

On verra cependant plus tard qu'il existe des polynômes quadratiques f et des différentielles quadratiques rationnelles intégrables q de norme unitaire, telles que $q-f_*q$ soit de norme arbitrairement petite.

Nous allons maintenant nous intéresser aux points fixes de l'opérateur de poussé en avant f_* sur différents espaces de différentielles quadratiques.

Définition 2.3.4. Soit f une fraction rationnelle. On notera Λ_f l'adhérence de la grande orbite critique de f, et $\Omega_f=\mathbb{P}^1-\Lambda_f$.

Définition 2.3.5. Un anneau de rotation pour f est une composante connexe de Ω_f qui est un anneau de module fini et sur laquelle f est conjuguée à une rotation irrationnelle.

Un cycle d'anneaux de rotation pour f de période p est une famille de composantes $(A,\dots,f^{p-1}(A))$ de Ω_f qui sont toutes des anneaux de rotation pour f^p.

Ces anneaux de rotations sont exactement les anneaux dans les disques de Siegel et les anneaux de Herman qui sont délimitées par des adhérences d'orbites critiques.

On peut associer à chaque anneau de rotation A une différentielle quadratique $q \in Q(\Omega_f)$ invariante par f de la manière suivante : soit ϕ une coordonnée linéarisante pour f sur A, qui redresse A sur un anneau droit $A_R = \{1 < |z| < R\}$. Soit $\tilde{q} \in Q(A_R)$: alors $q = \phi^*\tilde{q}$ est invariante par f si et seulement si $\tilde{q}$ est invariante par rotation. On vérifie sans problème que $\tilde{q} = \frac{dz^2}{z^2}$ est invariante par rotation ; de plus, $\tilde{q}$ est intégrable sur A_R. Donc $q = \phi^*\tilde{q}$ (étendue par 0 en dehors de A) est invariante et intégrable.

De plus, à une constante multiplicative près, c'est la seule : en effet, on peut développer tout élément de $Q(A_R)$ en série de Laurent :

$$\tilde{q} = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n\right) dz^2$$

et l'invariante par rotation s'écrit $\tilde{q}(e^{i\alpha}z)e^{2i\alpha} = \tilde{q}(z)$, d'où l'on tire :

$$\sum_{z\in\mathbb{Z}} a_n e^{2i\alpha} z^n e^{in\alpha} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$$

et donc $a_n = 0$ pour tout $n \neq -2$. En particulier, on voit qu'il n'existe pas de différentielle quadratique invariante par rotation intégrable au voisinage de 0.

Dans le cas d'un cycle d'anneaux de rotation $(A, \dots, f^p(A))$, le raisonnement précédent fournit une différentielle quadratique $q \in Q(A)$ invariante par f^p. On vérifie sans problème que $Q = \sum_{k=1}^p f_*^k q$ est invariante par f (et elle n'est pas nulle puisque les supports des $f_*^k q$ sont essentiellement disjoints).

La proposition suivante implique que ces points fixes sont les seuls parmi les différentielles quadratiques intégrables sur l'ensemble de Fatou. De plus, à part dans le cas où f est un exemple de Lattès flexible, la conjecture "pas de champs de droites invariants" impliquerait que ce sont les seules différentielles quadratiques invariantes.

Proposition 2.3.6. Les seules différentielles quadratiques invariantes par f dans $Q(\Omega_f)$ sont les exemples construits ci-dessus.

Démonstration. Soit $q \in Q(\Omega_f)$ une différentielle quadratique invarinte. Alors $|q|$ est une mesure invariante sur $\Omega_f \subset \mathcal{F}(f)$, à densité par rapport à la mesure de Lebesgue. Soit U une composante de Fatou périodique dont la grande orbite a une masse positive pour $|q|$. Alors U ne peut pas être une composante attractive, superattractive ou parabolique, puisque la seule mesure invariante sur la grande orbite d'une telle composante est une somme de diracs le long du cycle correspondant.

Il ne reste donc que la possibilité d'un disque de Siegel ou d'un anneau de Herman. Une telle composante de Fatou n'est jamais complètement invariante pour des raisons de degré local. Soit V une composante de $f^{-1}(U)$ qui ne fait pas partie du cycle de composantes auquel appartient U. L'invariance de q impose que $\int_{f^{-n}(V)} |q|$ soit égale à $\int_V |q|$; or les ouverts $f^{-n}(V)$ sont tous disjoints. Donc $\int_V |q| = 0$ puisqu'on a supposé q intégrable.

Ainsi, q s'annule partout sauf éventuellement sur un cycle de disques de Siegel ou d'anneaux de Herman. L'analyse précédente montre que les seules différentielles quadratiques invariantes intégrables que l'on peut obtenir sont alors celles associées à un cycle d'anneaux de rotation. □

Remarque 2.3.7. Dans le cas où l'ensemble de Julia a une mesure de Lebesgue positive, il se pourrait a priori qu'il existe des différentielles quadratiques intégrables invariantes supportées par l'ensemble de Julia. Cependant, si c'est le cas, alors l'opérateur dual du poussé en avant f_* sur les différentielles quadratiques intégrables, à savoir le tiré en arrière f^* sur les formes de Beltrami, a un point fixe μ tel que $\int_{\mathbb{P}^1} q \cdot \mu \neq 0$. Comme q est identiquement nulle sur Ω_f, ceci implique que μ est un champ de droites invariant. A part dans le cas où f est un exemple de Lattès, cette situation est conjecturée être impossible, et l'on sait dans de nombreux cas qu'il n'y a effectivement pas de champs de droites invariants.

Théorème 2.3.8 (Makienko). *Soit f une fraction rationnelle qui n'est pas un exemple de Lattès flexible, et K un C-compact invariant inclus dans son ensemble de Julia. Alors si $q \in Q(K)$ est régulière et invariante par f, et si q s'annule sur tout anneau de Herman éventuel de f, on a $q = 0$.*

Démonstration. Soit $q \in Q(K)$ régulière et invariante. La proposition 2.3.6 implique que le support de q doit être inclus dans l'ensemble de Julia $\mathcal{J}(f)$. Si $\mathcal{J}(f) \neq \mathbb{P}^1$, alors q doit s'annuler sur $\mathcal{J}(f) - K$ d'après le principe des zeros isolés. Comme K est un C-compact, le théorème 1.4.14 implique que $q = 0$.

Dans le cas où $\mathcal{J}(f) = \mathbb{P}^1$, si $q \in Q(K)$ est une différentielle quadratique intégrable invariante, alors ou bien q s'annule sur $\mathbb{P}^1 - K$ ou bien q a des zéros discrets dans $\mathbb{P}^1 - K$. Dans le premier cas, le théorème 1.4.14 implique encore que $q = 0$. Dans le second cas, $\frac{\bar{q}}{|q|}$ définit un champ de droite invariant, et q est holomorphe sur l'ouvert non vide $\mathbb{P}^1 - K \subset \mathcal{J}(f)$. Alors le lemme 3.16 (p. 49) de [McM94] implique que f est un exemple de Lattès flexible. □

Un cas particulier important de ce résultat est le cas polynômial :

Corollaire 2.3.1. Soit f un polynôme de degré $d \geq 2$. Alors si $q \in Q(\mathcal{J}_f)$ est invariante et régulière, on a $q = 0$.

Démonstration. D'après le principe du maximum, un polynôme ne peut pas avoir d'anneaux de Herman. De plus, l'ensemble de Julia est exactement la frontière du bassin d'attraction de l'infini qui est une composante connexe de $\mathbb{P}^1 - \mathcal{J}_f = \mathcal{F}_f$, donc d'après la proposition 1.4.13, $\mathcal{J}_f$ est un C-compact. □

2.4 Espace de Teichmüller

2.4.1 Espace de Teichmüller d'une surface

Nous rappelons ici les définitions et quelques propriétés fondamentales des espaces de Teichmüller de surfaces de Riemann. Nous référons le lecteur à [GL00] ou [Hub06] pour une introduction à la théorie des espaces de Teichmüller.

2.4.1.1 Définition

L'espace de Teichmüller d'une surface de Riemann $\mathcal{S}$ est une variété complexe (possiblement de dimension infinie) qui paramétrise les déformations quasiconformes de la structure complexe de $\mathcal{S}$.

Définition 2.4.1. Soit $\mathcal{S}$ une surface de Riemann hyperbolique. Soit $\phi : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ un homéomorphisme quasiconforme. On dit que ϕ est isotope à l'identité relativement à la frontière idéale de $\mathcal{S}$ s'il existe une isotopie $(\phi_t)_{t \in [0,1]}$ admettant un relèvement $(\Phi_t : \Delta \to \Delta)_{t \in [0,1]}$ tel que $\phi_1 = \phi$, $\phi_0 = \mathrm{Id}$, et pour tout $t \in [0,1]$, $\Phi_t(S^1) = S^1$.

Si $\mathcal{S}$ n'est pas hyperbolique, tout homémorphisme quasiconforme ϕ isotope à l'identité est isotope à l'identité relativement à la frontière idéale.

Définition 2.4.2. Notons :
- $\mathrm{Bel}(\mathcal{S})$ l'espace des formes de Beltrami sur $\mathcal{S}$
- $\mathrm{QC}(\mathcal{S})$ le groupe des homéomorphismes quasiconformes sur $\mathcal{S}$
- $\mathrm{QC}_0(\mathcal{S})$ le sous-groupe normal de $\mathrm{QC}(\mathcal{S})$ des éléments isotopes à l'identité relativement à la frontière idéale de $\mathcal{S}$

— $\mathrm{Mod}(\mathcal{S}) = \mathrm{QC}(\mathcal{S})/\mathrm{QC}_0(\mathcal{S})$ le groupe modulaire de $\mathcal{S}$.

Définition 2.4.3. L'espace de Teichmüller de $\mathcal{S}$, noté $\mathrm{Teich}(\mathcal{S})$, est le quotient de $\mathrm{Bel}(\mathcal{S})$ par $\mathrm{QC}_0(\mathcal{S})$.

Théorème 2.4.4. *Il existe une unique structure complexe sur* $\mathrm{Teich}(f)$ *qui rende holomorphe la projection* $\pi : \mathrm{Bel}(\mathcal{S}) \to \mathrm{Teich}(\mathcal{S})$*. Pour cette structure complexe,* π *est une submersion scindée.*

Définition 2.4.5. Soit $\mathcal{S}$ une surface de Riemann. On note $N(\mathcal{S})$ le sous-espace des différentielles de Beltrami μ sur $\mathcal{S}$ telles que pour toute différentielle quadratique $q \in Q(\mathcal{S})$, $\int_{\mathcal{S}} q \cdot \mu = 0$.

Théorème 2.4.6. *Le plan tangent de* $\mathrm{Teich}(\mathcal{S})$ *est donné par :*

$$T_0\mathrm{Teich}(\mathcal{S}) = \mathrm{bel}(\mathcal{S})/N(\mathcal{S}) \simeq Q(\mathcal{S})^*$$

Voir par exemple [GL00], théorème 6 p. 140.

En général, la dimension de $\mathrm{Teich}(\mathcal{S})$ est infinie (en fait $\mathrm{Teich}(\mathcal{S})$ est de dimension finie précisément lorsque $\mathcal{S}$ est de type fini, c'est-à-dire est obtenue à partir d'une surface de Riemann compacte en retirant un nombre fini de points). L'espace $Q(\mathcal{S})$ est réflexif si et seulement si il est de dimension finie, donc dans le cas d'une surface de Riemann de type fini (et seulement dans ce cas), on a $T_0^*\mathrm{Teich}(\mathcal{S}) \simeq Q(\mathcal{S})$. Cependant, on a toujours une injection isométrique naturelle $i : Q(\mathcal{S}) \to T_0^*\mathrm{Teich}(\mathcal{S})$ par bidualité. Il convient donc de penser aux différentielles quadratiques comme à des formes linéaires sur des espaces de Teichmüller, voire à des différentielles de fonctions définies sur des espaces de Teichmüller. Nous verrons dans la suite de nombreux exemples.

Définition 2.4.7. La distance de Teichmüller est définie par :

$$d_T([\mu], [\nu]) = \inf \log K(\phi_\mu^{-1} \circ \phi_\nu),$$

où $[\mu]$ et $[\nu] \in \mathrm{Teich}(\mathcal{S})$ et l'infimum porte sur l'ensemble des homéomorphismes quasiconformes dont les formes de Beltrami sont des représentants respectifs de $[\mu]$ et $[\nu]$.

Cette distance a été beaucoup étudiée. On peut notamment montrer qu'il s'agit d'une métrique de Fincher complète, dont la forme infinitésimale coïncide avec la norme quotient déduite de L^∞. Il s'agit également de la métrique de Kobayashi de $\mathrm{Teich}(\mathcal{S})$.

2.4.1.2 Espaces de Teichmüller marqués et mouvement holomorphes

Définition 2.4.8. Soit $E \subset \mathbb{P}^1$ un ensemble fermé contenant au moins 3 points. On définit $\mathrm{Teich}(\mathbb{P}^1, E)$ comme $\mathrm{Bel}(\mathbb{P}^1)$ quotienté par la relation d'isotopie relativement à E.

Exemple 2.4.9. L'espace $\mathrm{Teich}(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^1)$ s'identifie à $\mathrm{Bel}(\mathbb{P}^1)$. Si E est fini, $\mathrm{Teich}(\mathbb{P}^1, E)$ s'identifie à $\mathrm{Teich}(\mathbb{P}^1 - E)$.

Théorème 2.4.10. *L'espace* $\mathrm{Teich}(\mathbb{P}^1, E)$ *s'identifie canoniquement à* $\mathrm{Teich}(\mathbb{P}^1 - E) \times \mathrm{Bel}(E)$.

Voir [Eps93] ou [Mit00] pour une preuve. En particulier, si E a une mesure de Lebesgue nulle, alors $\mathrm{Teich}(\mathbb{P}^1, E)$ s'identifie canoniquement à $\mathrm{Teich}(\mathbb{P}^1 - E)$.

Rappelons également la notion de mouvement holomorphe :

Définition 2.4.11. Soit $X \subset \mathbb{P}^1$. Un mouvement holomorphe de X paramétré par une variété complexe Λ est une application $h : X \times \Lambda \to \mathbb{P}^1$ tel que :

— Pour tout $x \in X$, l'application $h(x, \cdot) : \Lambda \to \mathbb{P}^1$ est holomorphe

— Pour tout $\lambda \in \Lambda$, l'application $h(\cdot, \lambda) : X \to \mathbb{P}^1$ est injective

— Il existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tel que $h(\cdot, \lambda_0)$ est l'injection $X \to \mathbb{P}^1$.

Proposition 2.4.12. Soit $E \subset \mathbb{P}^1$ un ensemble fermé contenant un ensemble Z de cardinal 3. On définit un mouvement holomorphe de E paramétré par $\mathrm{Teich}(\mathbb{P}^1, E)$ de la manière suivante :

$$h_E : E \times \mathrm{Teich}(\mathbb{P}^1, E) \to \mathbb{P}^1$$
$$(x, [\mu]) \mapsto \phi_\mu^Z(x)$$

où ϕ_μ^Z est un représentant quasiconforme de $[\mu]$ fixant Z point par point.

Ce mouvement holomorphe est en fait, à factorisation près, le seul mouvement holomorphe de E :

Théorème 2.4.13. *Soit E un ensemble fermé de $\mathbb{P}^1$, et $h : E \times \Lambda \to \mathbb{P}^1$ un mouvement holomorphe. Alors il existe une unique application holomorphe $\phi : \Lambda \to \mathrm{Teich}(\mathbb{P}^1, E)$ envoyant le point base dans Λ sur le point base dans $\mathrm{Teich}(\mathbb{P}^1, E)$, tel que pour tout $x \in E$ et $\lambda \in \Lambda$,*

$$h(x, \lambda) = h_E(x, \phi(\Lambda))$$

Voir [Mit00].

2.4.2 Espace de Teichmüller d'une fraction rationnelle

Nous allons maintenant présenter les espaces de Teichmüller de fractions rationnelles, dont la théorie est calquée sur celle des espaces de Teichmüller de surfaces. Cette notion d'espace de Teichmüller "dynamique" a été introduite par McMullen et Sullivan dans [MS98].

2.4.2.1 Définition

On notera Rat_d l'espace des fractions rationnelles complexes de degré d, et rat_d son quotient par l'action par conjugaison du groupe des transformations de Möbius. Si $f \in \mathrm{Rat}_d$, on note $\mathcal{O}(f)$ l'orbite de f pour l'action du groupe des transformations de Möbius : c'est une sous-variété de Rat_d de dimension 3.

Définition 2.4.14. Notons :
— $\mathrm{Bel}(f)$ l'espace des formes de Beltrami sur $\mathbb{P}^1$ invariante par f
— $\mathrm{QC}(f)$ le groupe des homéomorphismes quasiconformes sur $\mathbb{P}^1$ commutant avec f
— $\mathrm{QC}_0(f)$ le sous-groupe normal de $\mathrm{QC}(f)$ des éléments isotopes à l'identité via une isotopie uniformément quasiconforme dans $\mathrm{QC}(f)$
— $\mathrm{Mod}(f) = \mathrm{QC}(f)/\mathrm{QC}_0(f)$ le groupe modulaire de f.

Définition 2.4.15. L'espace de Teichmüller de $f \in \mathrm{Rat}_d$ est $\mathrm{Teich}(f) = \mathrm{Bel}(f)/\mathrm{QC}_0(f)$.

Nous allons redémontrer l'analogue des théorèmes 2.4.4 et 2.4.6 dans le contexte des espaces de Teichmüller dynamiques.

Comme dans le cas des espaces de Teichmüller de surfaces, il existe une métrique naturelle sur $\mathrm{Teich}(f)$:

Définition 2.4.16. On définit la (pré)distance de Teichmüller sur $\mathrm{Teich}(f)$ par :

$$d_T([\mu], [\nu]) = \inf \log K(\phi_\mu^{-1} \circ \phi_\nu)$$

où l'infimum porte sur les homéomorphismes quasiconformes ϕ_μ et ϕ_ν dont la forme de Beltrami associée est un représentant de $[\mu]$ et $[\nu]$ respectivement.

On vérifie aisément l'inégalité triangulaire et la symétrie pour cette prédistance. Le fait que d_T définisse bien une distance sera prouvé dans la proposition 2.4.37.

Définition 2.4.17. Soit $Z \subset \mathbb{P}^1$ un ensemble de cardinal 3. Soit $\Psi^Z : \mathrm{Bel}(f) \to \mathrm{Rat}_d$ l'application définie par $\Psi^Z(\mu) = \phi^Z_\mu \circ f \circ (\phi^Z_\mu)^{-1}$, où ϕ^Z_μ est l'unique homéomorphisme quasiconforme associé à $\mu \in \mathrm{Bel}(f)$, et qui fixe Z.

L'application Ψ^Z passe au quotient en une application $\Psi : \mathrm{Bel}(f) \to \mathrm{rat}_d$ indépendante de Z et en des applications $\Psi^Z_T : \mathrm{Teich}(f) \to \mathrm{Rat}_d$ et $\Psi_T : \mathrm{Teich}(f) \to \mathrm{rat}_d$ (également indépendante de Z).

2.4.2.2 Différentielle de Ψ^Z_T

Si $\lambda \mapsto f_\lambda$ est une courbe holomorphe dans Rat_d passant par $f_0 = f$, alors $\dot f = \frac{df_\lambda}{d\lambda}_{|\lambda=0}$ est une section du fibré $f^*T\mathbb{P}^1$, et $Df^{-1} \circ \dot f$ est un champ de vecteurs méromorphe sur $\mathbb{P}^1$, dont les pôles sont inclus dans $\mathrm{Crit}(f)$ et de multiplicité au plus celle des points critiques de f. En notant $T(f)$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des tels champs de vecteurs, on obtient ainsi un isomorphisme canonique de $T_f\mathrm{Rat}_d$ dans $T(f)$. Dans toute la suite, on identifiera donc $T_f\mathrm{Rat}_d$ à $T(f)$.

On notera aussi $\mathrm{aut}(\mathbb{P}^1)$ l'espace des champs de vecteurs holomorphes sur $\mathbb{P}^1$ et $\mathcal{O}(f)$ l'ensemble des fractions rationnelles de degré d conjuguées à f par une transformation de Möbius. D'après [BE09], proposition 1, $\mathcal{O}(f)$ est une sous-variété de dimension complexe 3 de Rat_d, et $T_f\mathcal{O}(f) = \Delta_f \mathrm{aut}(\mathbb{P}^1) \subset T(f)$.

Proposition 2.4.18. Soit ξ un champ de vecteur quasiconforme sur $\mathbb{P}^1$ tel que $\overline{\partial}\xi \in \mathrm{bel}(f)$. Alors $\Delta_f\xi \in T(f)$. Si de plus on suppose que ξ s'annule sur un ensemble Z de cardinal 3, alors :

$$D\Psi^Z(0) \cdot \overline{\partial}\xi = -\Delta_f\xi.$$

Démonstration. Un calcul simple montre que pour presque tout $z \notin \mathrm{Crit}(f)$, $\overline{\partial} f^*\xi = f^*\overline{\partial}\xi$. Donc d'après le lemme de Weyl, $\Delta_f\xi = \xi - f^*\xi$ est holomorphe sur $\mathbb{P}^1 - \mathrm{Crit}(f)$. Comme ξ est continue, on a $\Delta_f\xi = O(1/f')$ au voisinage de $\mathrm{Crit}(f)$, donc $\Delta_f\xi$ a en tout point critique c de f un pôle d'ordre au plus la multiplicité de c comme point critique de f ; donc $\Delta_f\xi \in T(f)$.

Par ailleurs, si $\mu_\lambda \in \mathrm{bel}(f)$ est une courbe analytique passant par 0, avec $\mu_\lambda = \lambda\overline{\partial}\xi + o(\lambda)$, alors on a :

$$\phi^Z_{\mu_\lambda} = \mathrm{Id} + \lambda\xi + o(\lambda)$$

où $\phi^Z_{\mu_\lambda}$ est l'unique homéomorphisme quasiconforme associé à μ_λ fixant Z (voir [GL00] ou [Hub06]). Si l'on différentie par rapport à λ la relation

$$\phi^Z_{\mu_\lambda} \circ f = f_\lambda \circ \phi^Z_{\mu_\lambda},$$

on obtient alors :

$$\xi \circ f = \dot f + Df(\xi),$$

où $\dot f = \frac{df_\lambda}{d\lambda}_{|\lambda=0}$. Ce qui s'écrit encore :

$$\eta := Df^{-1}(\dot f) = -\Delta_f\xi.$$

□

On notera $D\Psi(0) : \mathrm{bel}(f) \to T(f)/T_f\mathcal{O}(f)$ comme le quotient à l'arrivée de l'application linéaire $D\Psi^Z(0) : \mathrm{bel}(f) \to T(f)$. Cette application ne dépend pas du choix de Z.

Proposition 2.4.19. Soit ξ un champ de vecteur quasiconforme sur $\mathbb{P}^1$ tel que $\overline{\partial}\xi \in \mathrm{bel}(f)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $\overline{\partial}\xi \in \ker D\Psi(0)$

ii) $\Delta_f\xi \in \Delta_f \mathrm{aut}(\mathbb{P}^1)$

iii Il existe $h \in \mathrm{aut}(\mathbb{P}^1)$ tel que $\xi - h$ s'annule sur Λ_f

Démonstration. Les deux premiers points sont équivalents d'après [BE09], proposition 1.

iii) $\Rightarrow$ *ii)* : si $\xi - h$ s'annule sur Λ_f, alors comme Λ_f est invariant $\Delta_f(\xi - h)$ s'annule aussi sur Λ_f. Donc $\Delta_f(\xi - h)$ est un champ de vecteurs méromorphe (d'après la proposition précédente) s'annulant sur l'ensemble Λ_f qui n'est pas discret, donc $\Delta_f(\xi - h) = 0$ par le principe des zéros isolés.

ii) $\Rightarrow$ *iii)* : si $\Delta_f(\xi - h) = 0$, alors $\xi - h$ doit s'annuler sur V_f, par continuité de $\xi - h$. Donc $(f^k)^*(\xi - h)(v) = (\xi - h)(v) = 0$ pour tout $k \geq 0$. De plus, si $f^p(z) = v \in V_f$, alors $(f^p)^*(\xi - h)(z) = 0 = (\xi - h)(z)$. Donc $(\xi - h)$ s'annule sur la grande orbite critique de f, donc sur Λ_f par continuité. □

Notons que si l'on normalise ξ en imposant qu'il s'annule sur un ensemble Z invariant par f de cardinal 3, alors la proposition 2.4.19 reste vraie en remplaçant h par 0 dans les points *ii)* et *iii)*, et $D\Psi(0)$ par $D\Psi^Z(0)$ dans le point *i)*.

On aura également besoin de la différentielle de Ψ^Z en un point arbitraire de $\mathrm{Bel}(f)$. On rappelle le fait suivant de théorie de Teichmüller (cf [Hub06]) :

Définition 2.4.20. Soit ψ un homéomorphisme quasiconforme de $\mathbb{P}^1$. Pour toute forme de Beltrami, on note $\psi^*\mu$ la forme de Beltrami correspondant à $\phi_\mu \circ \psi$, où ϕ_μ est une forme de Beltrami associée à μ.

On notera aussi $\psi_* = (\psi^{-1})^*$.

Proposition 2.4.21. Pour tout homéomorphisme quasiconforme ψ, l'application ψ^* est biholomorphe.

Nous aurons besoin de considérer seulement ici des applications $\Psi_f^Z : \mathrm{Bel}(f) \to \mathrm{Rat}_d$ et $\Psi_g^Z : \mathrm{Bel}(g) \to \mathrm{Rat}_d$ associées à des fractions rationnelles f et g différentes. Dans toute la suite, il n'y aura pas de confusion possible et les indices f et g seront omis.

Proposition 2.4.22. Soit $\mu \in \mathrm{Bel}(f)$ et ψ l'homéomorphisme quasiconforme associé fixant Z. Soit $g = \phi \circ g \circ \phi^{-1}$. Alors

$$D\Psi_f^Z(\mu) = D\Psi_g^Z(0) \circ D\phi_*(\mu)$$

En particuliers, $\mathrm{rg} D\Psi_f^Z(\mu) = \mathrm{rg} D\Psi_g^Z(0)$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que pour tout ϕ_0 et ϕ_λ associés à des éléments μ_λ et μ_0 de $\mathrm{bel}(f)$:

$$\phi_\lambda \circ f \circ \phi_\lambda^{-1} = (\phi_\lambda \circ \phi_0^{-1}) \circ \phi_0 \circ f \circ \phi_0^{-1} \circ (\phi_\lambda \circ \phi_0^{-1})^{-1}$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$\Psi_f^Z(\mu_\lambda) = \Psi_g^Z(\phi_*\mu_\lambda)$$

si l'on a pris soin de supposer que ϕ_λ et ϕ_0 fixent Z. Il suffit alors de prendre une courbe analytique μ_λ de $\mathrm{bel}(f)$, et de différentier en $\lambda = 0$. □

2.4.2.3 Calcul de dimension

Le but de cette section est de montrer que $\Psi^Z : \mathrm{Bel}(f) \to \mathrm{Rat}_d$ est de rang constant.

Définition 2.4.23. On dit qu'un point critique est acyclique s'il n'est pas prépériodique. On dit que deux points critiques sont dans la même classe critique fermée acyclique si les deux sont acycliques et dans l'ensemble de Fatou et que les adhérences de leurs grandes orbites critiques coïncident.

Le point clé pour appliquer le théorème du rang est le décompte suivant de dimension :

Théorème 2.4.24. *Soit f une fraction rationnelle de degré $d \geq 2$. Alors*

$$\mathrm{rg} D\Psi(0) = n_H + n_J + n_a - n_p$$

où n_H est le nombre de cycles d'anneaux de Hermann de f, n_J est le nombre de champs de droites invariants ergodiques, n_a est le nombre de classes critiques fermées acycliques, et n_p est le nombre de cycles paraboliques.

Définition 2.4.25. Soit $f : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ une application holomorphe, où $\mathcal{S}$ est une surface de Riemann. Notons $M_f(\mathcal{S})$ l'espace des différentielles de Beltrami invariantes par f, et $N_f(\mathcal{S})$ le sous-espace de $M_f(\mathcal{S})$ des différentielles de Beltrami de la forme $\overline{\partial}\xi$, où ξ est un champ de vecteur quasiconforme hyperboliquement borné sur $\mathcal{S}$.

Définition 2.4.26. Soit $(\mathcal{S}_i)_{i\in I}$ une famille (au plus dénombrable) de 1-variétés complexes $\mathcal{S}_i$. Le produit restreint $\Pi^*_{i\in I} M(\mathcal{S}_i)$ est défini par :

$$\{(\mu_i)_{i\in I}, \sup_{i\in I} \|\mu_i\|_{L^\infty(\mathcal{S}_i)} < \infty\}$$

Théorème 2.4.27. *Soit f une fraction rationnelle, et Ω un ouvert complètement invariant. Soit $\Omega = \bigsqcup_i \Omega_i$ une partition de Ω en ouverts Ω_i complètement invariants par f. Alors*

$$M_f(\Omega)/N_f(\Omega) \simeq \Pi^*_i M(\Omega_i)/N(\Omega_i)$$

Démonstration. Il est clair que l'on a $M_f(\Omega) = \Pi_i M(\Omega_i)$.

Soit $\overline{\partial}\xi \in N_f(\Omega)$. Alors d'après le corollaire 1.3.1, on a :

$$\xi = \sum_i \xi_i$$

où ξ_i est un champ de vecteur quasiconforme qui coïncide avec ξ sur Ω_i, et tel que $\xi_i = 0$ en dehors de Ω_i. Ceci montre que $N_f(\Omega) = \Pi_i N_f(\Omega_i)$.

Donc $M_f(\Omega)/N_f(\Omega) = \bigoplus_i M_f(\Omega_i)/N_f(\Omega_i)$. □

Enfin, nous aurons besoin d'utiliser le théorème de classification des composantes de Fatou, qui est un corollaire du théorème de Sullivan sur la non-existence de domaines errants. Notons que McMullen (voir [McM14])a donné une preuve directe et purement infinitésimale du théorème de Sullivan, qui notamment n'utilise pas de théorie Teichmüller dynamique. Sa preuve est basée sur l'utilisation de champs de vecteurs quasiconformes. Nous allons en doner ici une version un peu raccourcie à l'aide du théorème A.

Théorème 2.4.28 (Pas de domaines errants, Sullivan)**.** *Soit f une fraction rationnelle de degré $d \geq 2$. Alors f n'a pas de domaine errant.*

Comme dans les autres versions de la preuve du théorème de Sullivan, l'argument est grandement simplifié par le lemme suivant, dû à Baker :

Lemme 2.4.29 (Lemme de Baker)**.** *Supposons que $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un domaine errant. Alors pour n assez grand, Ω_n est simplement connexe et $f_{|\Omega_n}$ est univalente.*

Démonstration du théorème 2.4.28. Supposons que f ait un domaine errant. D'après le lemme de Baker, il existe une composante de Fatou U dans l'orbite de ce domaine errant qui soit simplement connexe.

On peut construire des différentielles de Beltrami invariantes sur $\mathbb{P}^1$ en choisissant des différentielles de Beltrami μ sur U et en les tirant en arrière par f et par les branches de f^{-1} le long du domaine errant, et en les prolongeant par 0 en dehors de l'orbite du domaine errant. On a le droit de tirer en arrière par les branches inverses de f puisque d'après le lemme de Baker,

$f_{|f^n(U)}$ est univalente pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, la donnée d'une différentielle de Beltrami sur U détermine de manière unique une différentielle de Beltrami invariante sur $\mathbb{P}^1$. Considérons l'espace vectoriel $V \subset \mathrm{bel}(f)$ des différentielles de Beltrami obtenues de cette manière à partir de formes de Beltrami sur U de la forme :

$$\mu_{|U} = \phi^* \left(\sum_{k=1}^{n} a_k k \overline{z}^{k-1} \frac{\overline{dz}}{dz} \right)$$

où les a_k sont des nombres complexes et $\phi : U \to \Delta$ est une coordonnée uniformisante.

Lemme 2.4.30. *Soit $\mu \in V$ et soit ξ un champ de vecteurs quasiconforme sur $\mathbb{P}^1$ tel que $\mu = \overline{\partial}\xi$. Si ξ est hyperboliquement borné sur U, alors $\mu = 0$.*

Démonstration. Il suffit de montrer ceci pour $\tilde{\xi} = \phi_* \xi$, puisque la propriété d'être hyperboliquement bornée est invariante par le biholomorphisme ϕ. On a :

$$\tilde{\xi}(z) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \overline{z}^k - h(z) \right) \frac{d}{dz}$$

où h est holomorphe sur Δ.

Si $\tilde{\xi}$ est hyperboliquement borné, alors il s'étend continûment par 0 sur le cercle unité S^1. Donc h s'étend continûment sur le cercle unité via la formule :

$$\hat{h}(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{z}^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{z^k}$$

et donc :

$$\hat{h}(z) = \begin{cases} h(z) & \text{si } z \in \Delta \\ \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{z^k} & \text{sinon} \end{cases}$$

est holomorphe sur tout $\mathbb{P}^1$. Comme $\hat{h}$ coincide avec $z \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{z^k}$ en dehors de Δ, ceci implique que tous les a_k doivent être nuls, et donc que $\mu = 0$ sur U. Alors, par définition de μ, on en déduit que $\mu = 0$ sur $\mathbb{P}^1$. □

D'après le théorème A, on a prouvé que si $\mu \in V$ est infinitésimalement triviale sur U, alors $\mu = 0$. De plus, d'après la proposition 2.4.19, si $\mu \in \ker D\Psi^Z(0)$, alors μ est infinitésimalement triviale sur U. On a donc construit un sous-espace $V \subset \mathrm{bel}(f)$ de dimension infinie tel que $V \cap \ker D\Psi^Z(0) = \{0\}$. Ceci contredit le fait que $D\Psi^Z(0)$ a un rang fini. □

Notons que cette preuve n'utilise que de l'analyse fonctionnelle linéaire, et ne nécessite en fait pas l'information que l'application linéaire $\mathrm{bel}(f) \ni \overline{\partial}\xi \mapsto f^*\xi - \xi \in T(f)$ est la différentielle $D\Psi^Z(0)$, mais seulement la description de son noyau et le fait qu'elle ait un rang fini. En particulier, nous n'avons utilisé que la "version infinitésimale" du théorème d'Ahlfors-Bers, à savoir la résolution de l'équation $\overline{\partial}\xi = \mu$.

On aura également besoin des lemmes suivants :

Lemme 2.4.31. *Soit Ω un ouvert hyperbolique de $\mathbb{P}^1$ (pas nécessairement connexe) et $f : \Omega \to \Omega$ un revêtement holomorphe de Ω, tel que Ω/f soit une surface de Riemann (connexe). Alors la projection $\pi_1 : \Omega \to \Omega/f$ induit un identification :*

$$M_f(\Omega)/N_f(\Omega) \simeq M(\Omega/f)/N(\Omega/f).$$

Démonstration. Il est clair que $M_f(\Omega) \simeq M(\Omega/f)$. Prouvons que tout élément de $N_f(\Omega)$ passe au quotient en un élément de $N(\Omega/f)$: soit $\mu = \overline{\partial}\xi \in N_f(\Omega)$, de ξ est hyperboliquement borné. Nous allons prouver que ξ est f-invariant et donc passe au quotient en un champ de vecteur sur Ω/f. Comme μ est f-invariant et $f : \Omega \to \Omega$ est un revêtement, $\xi - f^*\xi$ est un champ de vecteur holomorphe. De plus, $\xi - f^*\xi$ est aussi hyperboliquement borné puisque f est une isométrie pour la métrique hyperbolique de Ω. En relevant via un revêtement universel au disque unité Δ, il est facile de voir qu'un tel champ de vecteur doit être identiquement nul. Donc ξ est f-invariant et μ passe au quotient en un élement de $N(\Omega/f)$.

Soit $\mu = \overline{\partial}\xi \in N(\Omega/f)$. Comme l'application $\pi_1 : \Omega \to \Omega/f$ est un revêtement entre surfaces de Riemann hyperboliques, c'est une isométrie locale pour les métriques hyperboliques, et donc $\xi_1 = \pi_1^*\xi$ est un champ de vecteur quasiconforme hyperboliqment borné, qui est invariant par f par construction. D'après le théorème A, $\hat{\xi_1}$ prolongé par 0 en dehors de Ω est encore quasiconforme (et invariant) et $\mu = \overline{\partial}\hat{\xi_1} \in N_f(\Omega)$. Ceci prouve que $N_f(\Omega) \simeq N(\Omega/f)$. □

Lemme 2.4.32. *Soit U une composante périodique de Ω_f, de période $p \in \mathbb{N}^*$. Soit Ω l'ouvert complètement invariant de Ω_f engendré par U. Alors la restriction à U induit un isomorphisme $M_f(\Omega) \to M_{f^p}(U)$, envoyant $N_f(\Omega)$ sur $N_{f^p}(U)$. En particulier,*

$$M_f(\Omega)/N_f(\Omega) \simeq M_{f^p}(U)/N_{f^p}(U)$$

Démonstration. Toute différentielle de Beltrami $\mu \in M_f(\Omega)$ est invariante par f donc par f^p. Réciproquement, si μ est une différentielle de Beltrami sur U invariante par f^p, alors μ se prolonge en une différentielle de Beltrami $\tilde{\mu}$ invariante sur Ω_i de la manière suivante : si V est une composante de Ω_i, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ (défini à un multiple de p près) tel que $f^k_{|V} : V \to U$. On définit alors $\tilde{\mu}_{|V} = (f^k)^*\mu$, et cette définition est valide si V est sur le cycle de U puisque $\mu = (f^p)^*\mu$.

Cette identification envoie $N_f(\Omega)$ sur $N_{f^p}(U)$ puisque si $\mu = \overline{\partial}\xi \in M_f(\Omega)$, alors $\hat{\xi}(z) = \xi(z)$ si $z \in U$ et 0 sinon est tel que $\overline{\partial}\hat{\xi} = \mu_{|U}$ d'après le théorème A, et donc $\mu_{|U} \in N_{f^p}(U)$. Réciproquement, prouvons que la restriction $N_f(\Omega) \to N_{f^p}(U)$ est surjective : soit $\mu \in N_{f^p}(U)$. Comme on a prouvé que $M_f(\Omega) \to M_{f^p}(U)$ est surjective, il existe une extension $\tilde{\mu} \in M_f(\Omega)$ qui prolonge μ à Ω, et $\tilde{\mu}$ restreinte à chaque composante V de Ω est obtenue par un tiré en arrière de la forme $(f^{-m} \circ f^n)^*\mu$. De plus, par définition de Ω_f, les branches $(f^{-m} \circ f^n)^*\mu$ sont des revêtements de composantes de Ω, et donc sont des isométries locales pour la métrique hyperbolique de Ω. Comme $\mu \in N_{f^p}(U)$, il existe un champ de vecteur quasiconforme ξ sur U tel que $\overline{\partial}\xi = \mu$ et ξ est hyperboliquement borné sur U. Donc, sur chaque composante de Ω, $\tilde{\mu} = \overline{\partial}((f^{-m} \circ f^n)^*\xi)$, et $(f^{-m} \circ f^n)^*\xi$ est hyperboliquement bornée sur cette composante. Donc $\tilde{\mu} \in N_f(\Omega)$. □

Lemme 2.4.33. *Soit μ une différentielle de Beltrami invariante par une fonction holomorphe g. Dans chacun des deux cas suivants : $g(z) = e^{2i\pi\alpha}z$, $\alpha \notin \mathbb{Q}$, et $g(z) = z^d$, $d \geq 2$, μ est alors invariante par toutes les rotations, et s'écrit en coordonnées locales :*

$$\mu(re^{it}) = c(r)e^{2it}\frac{d\overline{z}}{dz}$$

Démonstration. La preuve est une modification de la preuve classique de l'ergodicité des rotations d'angles irrationnels.

Commençons par le cas d'une rotation d'angle irrationnel : $g(z) = e^{2i\pi\alpha}z$. Soit μ une différentielle de Beltrami invariante par g. On a, en coordonnées :

$$\mu(z) = g^*\mu(z) = e^{-4i\pi\alpha}\mu(e^{2i\pi\alpha}z) \tag{2.4.1}$$

En développant en séries de Fourier le long des cercles $|z| = r$, on voit que μ doit être de la forme

$$\mu(re^{it}) = c(r)e^{2it}\frac{d\overline{z}}{dz}$$

où c est une fonction L^∞.

En effet, si l'on note $c_n(r)$ le $n^{\text{ème}}$ coefficient de Fourier de $t \mapsto \mu(re^{it})$, on déduit de 2.4.1 que pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$c_n(r)e^{4i\pi\alpha} = c_n(r)e^{2in\pi\alpha}$$

Comme $\alpha \notin \mathbb{Q}$, ceci implique que $c_n(r) = 0$ pour tout $n \neq 2$ et pour tout $r \in (0,1)$. Donc, si l'on pose $c(r) := c_2(r)$, on obtient :

$$\mu(re^{it}) = c(r)e^{2it}\frac{d\overline{z}}{dz} \tag{2.4.2}$$

En particulier, la différentielle de Beltrami μ est invariante par rotation, et on vérifie aisément que toute différentielle de Beltrami invariante par rotation doit être de cette forme.

Si l'on suppose maintenant que $g(z) = z^2$, $d \geq 2$, et que μ est invariante par g, alors μ est invariante par toutes les branches de $g^{-n} \circ g^n$, et donc par toutes les rotations d'angles $\frac{2k\pi}{d^n}$, for all $k \in \mathbb{N}$:

$$\mu(z) = e^{-4ik\pi/d^n}\mu(e^{2ik\pi/d^n}z).$$

De même, en développant en série de Fourier le long des cercles centrés en 0, on obtient :

$$\mu(re^{it}) = c(r)e^{2it}\frac{d\overline{z}}{dz}.$$

□

Lemme 2.4.34. *Soit $A(R)$ l'anneau $\{1 < |z| < R\}$, et Δ le disque unité. Soit $g(z) = e^{2i\pi\alpha}z$ une rotation d'angle irrationnel. Alors :*

i) $\dim M_g(A(R))/N_g(A(R)) = 1$

ii) $\dim M_g(\Delta)/N_g(\Delta) = 0$.

Démonstration. Soit μ une différentielle de Beltrami invariante par g. On a, en coordonnées :

$$\mu(z) = g^*\mu(z) = e^{-4i\pi\alpha}\mu(e^{2i\pi\alpha}z)$$

Soit $r > 0$ fixé, et notons $c_n(r)$ les coefficients de Fourier de la fonction 2π-périodique $t \mapsto \mu(re^{it})$. Par identification, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$c_n(r)e^{4i\pi\alpha} = c_n(r)e^{2in\pi\alpha}$$

Comme α est irrationnel, on en déduit que $c_n(r) = 0$ pour tout $n \neq 2$, et donc que $\mu(re^{it}) = c(r)e^{2it}\frac{d\overline{z}}{dz}$: μ est donc en fait invariant par toutes les rotations. Si l'on considère un champ de vecteur ξ de la forme

$$\xi(re^{it}) = h(r)re^{it}\frac{d}{dz}$$

où $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est une fonction dont la dérivée au sens des distributions est une fonction L^∞, on vérifie que

$$\overline{\partial}\xi(re^{it}) = rh'(r)e^{2it}\frac{d\overline{z}}{dz}.$$

Donc si $\mu(re^{it}) = c(r)e^{it}\frac{d\overline{z}}{dz}$, alors si l'on appelle h l'unique primitive de $r \mapsto c(r)/r$ s'annulant en $r = 1$ et $\xi(re^{it}) = rh(r)e^{it}\frac{d}{dz}$, on a bien $\overline{\partial}\xi = \mu$ au sens des distributions, et ξ est un champ de vecteur quasiconforme sur tout $\mathbb{P}^1$ s'annulant sur le cercle unité.

D'après le théorème A, ceci implique que $\mu \in N_g(\Delta)$ et que $\mu \in N_g(A(R))$ si et seulement si $h(R) = 0$. On en déduit que $M_g(\Delta) = N_g(\Delta)$ et que $N_g(A(R))$ est de codimension 1 dans $M_g(A(R))$. □

Nous sommes maintenant à même de démontrer le théorème 2.4.24.

Démonstration du théorème 2.4.24. Comme $\ker D\Psi(0) = N_f(\mathcal{F}) = N_f(\Omega_f)$ d'après la proposition 2.4.19, où $\mathcal{F}$ est l'ensemble de Fatou de f et $\mathcal{J}$ son ensemble de Julia, on a :

$$\mathrm{bel}(f)/\ker D\Psi(0) = (\mathrm{Fix}_{\mathcal{J}} \oplus M_f(\mathcal{F}))/N_f(\mathcal{F})$$

où $\mathrm{Fix}_{\mathcal{J}}$ désigne l'espace des éventuels champs de droites invariants de f.

Si c est un point critique de f, alors l'adhérence de sa grande orbite est égale à l'union de l'ensemble de Julia $\mathcal{J}$, d'un ensemble dénombrable et d'un ensemble dénombrable de cercles lisses (si l'orbite de c rencontre un cycle superattractif, de Siegel ou d'anneaux de Herman). Donc Λ_f coïncide avec $\mathcal{J}$ à un ensemble de mesure de Lebesgue négligeable près. Donc $M_f(\mathcal{F})$ s'identifie canoniquement à $M_f(\Omega_f)$. On en déduit :

$$\mathrm{Fix}(f)/\ker D\Psi(0) = \mathrm{Fix}_J \oplus M_f(\Omega_f)/N_f(\Omega_f)$$

Considérons la relation d'équivalence sur l'ensemble des composantes connexes de Ω_f qui identifie deux composantes connexes si et seulement si elles sont dans la même grande orbite, et soit Ω_i les classes de cette relation. Les Ω_i forment une partition de Ω_f en ouverts disjoints complètement invariants. D'après le théorème 2.4.27, on a :

$$\mathrm{rg} D\Psi(0) = \dim \mathrm{Fix}_J + \sum_i \dim M_f(\Omega_i)/N_f(\Omega_i).$$

Chaque composante de Ω_i est envoyée par f^n pour n assez grand dans une composante de Fatou périodique U (même si les composantes de Ω_i ne sont pas elles même nécessairement prépériodiques). Calculons $\dim M_f(\Omega_i)/N_f(\Omega_i)$ selon la nature de la composante de Fatou périodique qu'elle rencontre. Il y a 5 cas à distinguer, selon la nature de cette composante U. Notons n_i le nombre de classes critiques fermées acycliques rencontrant la grande orbite de U.

a) Le cas d'un cycle attractif

Si U est une composante d'un bassin attractif et Ω_i rencontre U, alors Ω_i est la grande orbite de U privée de l'ensemble dénombrable des points des orbites critiques attirés par ce cycle et du cycle lui-même. Donc toute composante de Ω_i est prépériodique à $U - \Lambda_f$. Ainsi, $f_{|\Omega_i} : \Omega_i \to \Omega_i$ agit discrètement, et $X_i = \Omega_i/f$ est une surface de Riemann. Dans une coordonnée linéarisante pour f^k sur le bassin immédiat d'attraction (où $k \in \mathbb{N}^*$ est la période du cycle et ρ est son multiplicateur), notons $A = \{|\rho| \leq z < 1\}$. C'est un domaine fondamental pour l'action de f sur le cycle de composantes de Fatou V contenant U, et $A - \Lambda_f$ est un domaine fondamental pour l'action de f sur Ω_i. Donc X_i est le tore $X = A/f$ privé d'un nombre fini n_i de points, égal au nombre de points de l'ensemble post-critique dans A, c'est-à-dire le nombre de classes critiques fermées rencontrant V.

D'après les lemmes 2.4.32 et 2.4.31, $\dim M_f(\Omega_i)/N_f(\Omega_i) = \dim M(X_i)/N(X_i)$. Comme X_i est un tore privé d'un nombre fini de points, tout champ de vecteur quasiconforme hyperboliquement borné sur X_i s'étend en un champ de vecteur quasiconforme s'annulant sur les points marqués. Donc le quotient $M(X_i)/N(X_i)$ est exactement le plan tangent à l'espace de Teichmüller de X_i, qui a une dimension égale au nombre n_i de points marqués (voir par exemple [Hub06]).

b) Le cas d'une composante parabolique

Si U est un bassin parabolique et Ω_i rencontre U, alors Ω_i est la grande orbite de U privée de la grande orbite des points critiques qui sont capturés par U. En particuliers, toute composante de Ω_i est itérée après un nombre fini d'itérations sur U privé d'un ensemble dénombrable de points, et est donc prépériodique. De plus, $f_{|\Omega_i} : \Omega_i \to \Omega_i$ agit discrètement, donc $X_i = \Omega_i/f$ est une surface de Riemann, qui est isomorphe à $X = U/f^p$ privé des classes de grandes orbites critiques intersectant U, où p est la période du cycle parabolique associé à U.

Via une coordonnée de Fatou, l'action de f^p sur U est conjuguée à celle de $z \mapsto z + 1$ sur un demi-plan supérieur, donc X est isomorphe à un cylindre, et X_i est isomorphe à un cylindre privé d'un nombre fini n_i de points correspondant aux n_i grandes orbites critiques capturées par U. Donc X est isomorphe à la sphère de Riemann privée de deux points a_1 et a_2, et X_i est isomorphe à la sphère de Riemann privé de n_i+2 points $a_1, \dots, a_{n_i+2}$ où les a_j, $j \geq 2$, correspondent aux grandes orbites critiques rencontrant U.

La projection $\pi : \Omega_i \to X_i$ induit un isomorphisme entre $M_f(\Omega_i)/N_f(\Omega_i)$ et $M(X_i)/N(X_i)$, d'après les lemmes 2.4.32 et 2.4.31. Par ailleurs, les éléments de $M(X)$ sont de la forme $\overline{\partial}\xi$, où ξ est un champ de vecteur quasiconforme s'annulant sur a_1 et a_2, et comme l'espace des champs de vecteurs holomorphes sur $\mathbb{P}^1$ est de dimension 3, $M(X_i)/N(X_i)$ s'identifie à $\bigoplus_{3 \leq j \leq n_i+2} T_{a_j}\mathbb{P}^1$, qui est un espace de dimension $n_i - 1$. Remarquons que $n_i - 1 \geq 0$ car il existe toujours au moins un point critique attiré dans le bassin parabolique.

c) Le cas d'un disque de Siegel

Si U est un disque de Siegel, alors l'intersection entre Λ_f et le cycle de U consiste en une union finie de n_i cercles lisses, où n_i est le nombre de classes critiques acycliques fermées capturées par le cycle de disque de Siegel (on peut avoir $n_i = 0$). Donc toute composante de Ω_i est prépériodique et est itérée en temps fini soit sur un anneau périodique A_i inclus dans U (si $n_i \neq 0$), soit sur le disque de Siegel périodique tout entier si $n_i = 0$. Dans les deux cas, notons V cette composante de périodique de Ω_i sur laquelle est itérée toute composante de Ω_i.

D'après le lemme 2.4.32, l'espace $M_f(\Omega_i)$ s'identifie à l'espace $M_{f^p}(V)$ des différentielles de Beltrami sur V et invariantes par $f^p_{|V}$, où p est la période du cycle de U, et de même $N_f(\Omega_i)$ s'identifie à $N_{f^p}(V)$. Une coordonnée ϕ linéarisante pour f^p conjugue $f^p : V \to V$ à $g(z) = e^{2i\pi\alpha}z$ sur le disque unité ou un anneau $A(R)$, où α est un nombre de rotation irrationnel. Donc d'après le lemme 2.4.34, $\dim M_f(\Omega_i)/N_f(\Omega_i) = 1$ si $n_i \neq 0$ et 0 sinon. On obtient donc $\sum_{j \in J} \dim M_f(\Omega_j)/N_f(\Omega_j) = n_i$.

d) Le cas d'un anneau de Hermann

Ce cas de figure est très semblable au précédent : Ω_i consiste encore en la grande orbite d'un anneau invariant. La seule différence est que même s'il n'y a pas de points critiques acycliques dans l'anneau de Hermann, les composantes de Ω_i sont prépériodiques à un anneau et non pas à un disque, et donc $\dim M_f(\Omega_i)/N_f(\Omega_i) = 1$. On obtient donc : $\sum_{j \in J} \dim M_f(\Omega_j)/N_f(\Omega_j) = n_i + 1$ où n_i est le nombre de classes critiques fermées acycliques capturés par U.

e) Le cas d'un cycle superattractif

Si U est un une composante du bassin d'attraction d'un cycle superattractif, alors $\Lambda_f \cap U$ est une union dénombrable d'équipotentielles (qui sont des cercles lisses) et du cycle superattractif lui-même.

Supposons dans un premier temps qu'il n'y ait aucun point critique capturé par le cycle superattractif. Alors il y a une unique classe Ω_i qui intersecte U, et c'est la grande orbite de U toute entière. D'après le lemme 2.4.32, $M_f(\Omega_i)/N_f(\Omega_i) \simeq M_{f^p}(U)/N_{f^p}(U)$, où p est la période de U. Via une coordonnée de Böttcher, $f^p_{|U} : U \to U$ est conjugué à $g(z) = z^k$, $k \geq 2$. Si $\mu \in M_g(\Delta)$, alors μ est invariante par g et donc par toute branche de $g^{-n} \circ g^n$. Donc μ est invariante par toutes les rotations d'angle rationnel. Comme dans la preuve du lemme 2.4.34, on en déduit que μ est invariant par toutes les rotations et donc que $M_g(\Delta) = N_g(\Delta)$. Donc s'il n'y a pas de points critiques attiré par le cycle superattractif, alors $\dim M_f(\Omega_i)/N_f(\Omega_i) = 0$.

Supposons maintenant que $n_i > 0$, où n_i est le nombre de classes critiques fermées acycliques rencontrant U. Appelons r_j, $j \leq n_i$, le rayon maximal en coordonnées de Böttcher parmi les cercles correspondant à une classe d'équivalence feuilletée de points critiques acycliques, numérotées par ordre décroissant. Notons $A(r, r')$ l'anneau $\{r' < |z| < r\}$. Soit $\Omega_j \subset \Omega_f$ une classe rencontrant U. Alors pour toute composante V de Ω_j, il existe une unique branche de $f^{-k} \circ f^l$ qui envoie V sur l'anneau $A(r_{j-1}, r_j)$ (avec la convention $r_{-1} = 1$). Par un raisonnement similaire au lemme 2.4.32, $M_f(\Omega_j)$ s'identifie alors à l'espace des différentielles de Beltrami sur $A(r_{j-1,r_j})$

invariantes par toutes les branches de $f^{-n} \circ f^n$, $n \in \mathbb{N}$. Donc via les coordonnées de Böttcher, $M_f(\Omega_i)$ s'identifie à l'espace $M_g(A)$ des différentielles de Beltrami invariantes par rotation sur un anneau A, et on en déduit $\dim M_f(\Omega_i)/N_f(\Omega_i) = 1$. Donc $\sum_{j \in J} \dim M_f(\Omega_j)/N_f(\Omega_j) = n_i$.

En récapitulant, chaque composante de Fatou périodique U apporte une contribution de dimension n_i, où n_i est le nombre de classes critiques fermées acycliques rencontrant U, sauf les anneaux de Herman qui apportent une contribution $n_i + 1$ et les bassins paraboliques qui apportent une contribution $n_i - 1$.

De plus et par définition, les champs de droites invariants ergodiques forment une base de l'espace Fix_J des champs de droites invariants, donc $\dim \mathrm{Fix}_{\mathcal{J}} = n_J$. Donc on obtient bien :

$$\mathrm{rg} D\Psi(0) = n_H + n_J + n_a - n_p.$$

□

2.4.2.4 Structure complexe

Rappelons la version suivante du théorème du rang constant (pour une référence, voir [Bou07], p. 53).

Théorème 2.4.35 (Théorème du rang constant)**.** *Soit $\Psi : U \to F$ une application holomorphe, où U est un ouvert d'un espace de Banach complexe E et F est une variété complexe de dimension finie. Supposons que* $\mathrm{rank} D\Psi = r$ *soit constante sur U. Alors pour tout $x_0 \in U$, il existe un germe de difféomorphisme analytique $\chi : (F, \Psi(x_0)) \to (T_{\Psi(x_0)}F, 0)$ et un germe de difféomorphisme analytique $\phi : \mathrm{Im} D\Psi(x_0) \oplus \ker D\Psi(x_0) \to E$ tel que pour tout $(u, v) \in \mathrm{Im} D\Psi(x_0) \oplus \ker D\Psi(x_0)$ au voisinage de $\phi^{-1}(x_0)$,*

$$\chi \circ \Psi \circ \phi(u, v) = u.$$

Corollaire 2.4.1. Soit $\Psi : U \to F$ vérifiant les hypothèses du théorème ci-dessus. Alors pour tout $z_0 \in \Psi(U)$, la fibre $M = \Psi^{-1}(z_0)$ est une sous-variété de Banach de E, de codimension r et dont l'espace tangent en $x_0 \in \Psi^{-1}(z_0)$ est $T_{x_0}M = \ker D\Psi(x_0)$.

Démonstration. Avec les notations du théorème du rang constant, on a $\Psi(x) = z_0$si et seulement si $\chi \circ \Psi(u, v) = \chi(z_0) = u$, où $(u, v) = \psi^{-1}(x)$, ce qui équivaut à $\psi(\chi(z_0), v)) = x$. Comme ψ est un (germe de) difféomorphisme, ceci fournit une carte locale en x_0 pour M, qui est donc une sous-variété de Banach modelée sur $\ker D\Psi(x_0)$. □

La première application du théorème 2.4.24 est que Ψ^Z a un rang constant :

Corollaire 2.4.2. Soit f une fraction rationnelle, Z un triplet de points et $\mu \in \mathrm{Bel}(f)$. Alors $\mathrm{rg} D\Psi^Z(0) = \mathrm{rg} D\Psi^Z(\mu)$.

Démonstration. Il est clair que n_f, n_p et n_H sont invariants par conjugaison quasiconforme. Le nombre n_J est également invariant puisqu'un homéomorphisme quasiconforme preserve les ensembles de mesure de Lebesgue nulle (voir [GL00]). Donc si $\phi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ conjugue quasiconformément f à une autre fraction rationnelle g, alors ϕ^* envoie les champs de droite invariants par f sur les champs de droites invariants par g. Le lemme 2.4.22 conclue la preuve. □

Rappelons que $\mathrm{QC}(f)$ est le groupe des homéomorphismes quasiconformes de $\mathbb{P}^1$ commutant avec f.

Définition 2.4.36. On notera $\mathcal{B}\mathrm{QC}(f)$ l'espace des formes de Beltrami correspondant aux éléments de $\mathrm{QC}(f)$. De même, on notera $\mathcal{B}\mathrm{QC}_0(f)$ l'espace des formes de Beltrami associées aux éléments de $\mathrm{QC}_0(f)$.

Notons que l'on a $\mathcal{B}\mathrm{QC}_0(f) \subset \mathcal{B}\mathrm{QC}(f) \subset \mathrm{Bel}(f)$.

Corollaire 2.4.3. L'espace $\mathcal{B}\mathrm{QC}(f)$ est une sous-variété de Banach de $\mathrm{Bel}(f)$, d'espace tangent au point base égal à l'espace $N_f(\Omega_f)$ des différentielles de Beltrami de la forme $\overline{\partial}\xi$, où ξ est un champ de vecteurs quasiconforme invariant par f.

Démonstration. L'espace des formes de Beltrami associées aux homéomorphismes quasiconformes commutant avec f est exactement la fibre $\Psi^{-1}(f)$. Mais d'après le corollaire précédent, Ψ^Z a un rang constant sur $\mathrm{Bel}(f)$, donc d'après le théorème du rang constant, $(\Psi^Z)^{-1}(f)$ est une sous-variété de Banach de codimension finie, dont l'espace tangent au point base est $\ker D\Psi(0) = N_f(\Omega_f)$. De plus, $N_f(\Omega_f)$ est aussi l'espace des formes de Beltrami de la forme $\overline{\partial}\xi$, où ξ est un champ de vecteurs quasiconforme invariant par f, d'après la proposition 2.4.19. □

Notons qu'en particulier, $\mathcal{B}\mathrm{QC}(f)$ est localement connexe par arc au point base. Donc tout élément de $\mathcal{B}\mathrm{QC}(f)$ suffisamment proche du point base appartient en fait à $\mathcal{B}\mathrm{QC}_0(f)$.

Proposition 2.4.37. La prémétrique de Teichmüller est une métrique.

En particulier, ceci implique que $\mathrm{Teich}(f)$ est un espace séparé.

Démonstration. Soir $[\mu]$ et $[\nu]$ des points de $\mathrm{Teich}(f)$ tels que $d_T([\mu],[\nu]) = 0$. Ceci signifie qu'il existe une suite de représentants ϕ_n et ψ_n de $[\mu]$ et $[\nu]$ respectivement tels que la dilatatation maximale de $\phi_n \circ \psi_n^{-1}$ tende vers 1.

Les fractions rationnelles $g = \phi_n \circ f \circ \phi_n^{-1}$ et $h = \psi_n \circ f \circ \psi_n^{-1}$ ne dépendent pas des représentants ϕ_n et ψ_n. Comme les coefficients de Beltrami de $\phi_n \circ \psi_n^{-1}$ tendent vers 0 dans la topologie L^∞, on en déduit que $\phi_n \circ \psi_n^{-1}$ converge uniformément vers l'identité, et donc que $g = h$ et que tous les $\phi_n \circ \psi_n^{-1}$ appartiennent à $\mathrm{QC}(f)$. Comme par hypothèse les formes de Beltrami associées à $\phi_n \circ \psi_n^{-1}$ tendent vers 0, on en déduit que pour n suffisamment grand elles appartiennent à un voisinage connexe par arc de 0 dans $\mathcal{B}\mathrm{QC}(f)$, et donc dans $\mathcal{B}\mathrm{QC}_0(f)$.

Ceci signifie exactement que $[\mu] = [\nu]$ dans $\mathrm{Teich}(f)$. □

Théorème 2.4.38. *Il existe une unique structure de variété complexe sur* $\mathrm{Teich}(f)$ *faisant de la projection* $\pi : \mathrm{Bel}(f) \to \mathrm{Teich}(f)$ *une application holomorphe. Pour cette structure complexe,* π *est une submersion scindée.*

Démonstration du théorème 2.4.38. Soit $\mu \in \mathrm{Bel}(f)$. D'après le théorème du rang constant 2.4.2, il existe des germes de biholomorphismes $\phi : (\mathrm{Im} D\Psi^Z(\mu) \oplus \ker D\Psi^Z(\mu), 0) \to (\mathrm{Bel}(f), \mu)$ et $\chi : (\mathrm{Rat}_d, g) \to (\mathrm{Rat}_d, g)$ tels que $\chi \circ \Psi^Z \circ \phi(u,v) = u$ pour tout $(u,v) \in \mathrm{Im} D\Psi^Z(\mu) \oplus \ker D\Psi^Z(\mu)$, où $g = \phi_\mu \circ f \circ \phi_\mu^{-1}$.

En particulier, $\Psi^Z \circ \phi(u_1,v_1) = \Psi^Z \circ \phi(u_2,v_2)$ si et seulement si $u_1 = u_2$; de plus, si l'on note $\mu_i = \phi(u_i,v_i)$, $1 \leq i \leq 2$, alors $\Psi^Z(\mu_1) = \Psi^Z(\mu_2)$ si et seulement si $\phi_1^Z \circ (\phi_2^Z)^{-1} \in \mathrm{QC}(f)$ où ϕ_i^Z est l'homéomorphisme quasiconforme correspondant à μ_i et fixant Z.

Rappelons que $\pi : \mathrm{Bel}(f) \to \mathrm{Teich}(f)$ est l'application quotient.

Lemme 2.4.39. *Pour* μ_1 *et* μ_2 *dans* $\mathrm{Bel}(f)$ *suffisamment près du point base, on a* $\pi(\mu_1) = \pi(\mu_2)$ *si et seulement si* $u_1 = u_2$.

Preuve du lemme 2.4.39. En effet, si $\pi(\mu_1) = \pi(\mu_2)$, alors $\phi_1^Z \circ (\phi_2^Z)^{-1} \in \mathrm{QC}_0(f)$ et en particulier $\phi_1^Z \circ (\phi_2^Z)^{-1} \in \mathrm{QC}(f)$, donc $u_1 = u_2$. Si l'on suppose maintenant que $u_1 = u_2$, alors $\psi := \phi_1^Z \circ (\phi_2^Z)^{-1} \in \mathrm{QC}(f)$, et il s'agit prouver qu'en fait $\psi \in \mathrm{QC}_0(f)$. Soit $\phi_i^Z(t)$ les homéomorphismes quasiconformes correspondant à $\mu_i(t) = \phi(tu_i, tv_i)$, $1 \leq i \leq 2$ et $t \in [0,1]$, et $\psi_t = \phi_1^Z(t) \circ (\phi_2^Z)(t)^{-1}$. Puisque pour tout $t \in [0,1]$, $\mu_i(t) = \phi^{-1}(tu_i, tvi)$, on a $\psi_t \in \mathrm{QC}(f)$, et $\psi_0 = \mathrm{Id}$. Les applications $t \mapsto \mu_i(t)$ sont analytiques, donc d'après la version paramétrique du théorème d'Ahlfors-Bers c'est aussi le cas des applications $t \mapsto \phi_i^Z(t)$. Donc, pour tout $z \in \mathbb{P}^1$, l'application $t \mapsto \psi_t(z) = \phi_1^Z(t) \circ (\phi_2^Z)(t)^{-1}(z)$ est continue et ψ_t est une isotopie à l'identité à travers des éléments de $\mathrm{QC}(f)$. De plus, comme les $\phi_i^Z(t)$ ont une dilatation uniformément bornée, c'est aussi le cas de ψ_t.[1] Donc $\psi = \psi_1 \in \mathrm{QC}_0(f)$, ce qui achève la preuve du lemme. □

1. Notons cependant que le coefficient de Beltrami de ψ_t ne dépend pas a priori continument de t.

Lemme 2.4.40. *La paramétrisation* $\phi : \mathrm{Bel}(f) \to \mathrm{Im} D\Psi^Z(\mu) \oplus \ker D\Psi^Z(\mu)$ *passe au quotient en une paramétrisation* $\tilde{\phi} : \mathrm{Im} D\Psi^Z(\mu) \to \mathrm{Teich}(f)$ *qui donne à* $\mathrm{Teich}(f)$ *une structure de variété topologique. De plus,* $\pi : \mathrm{Bel}(f) \to \mathrm{Teich}(f)$ *est une application fibrée.*

Preuve du lemme 2.4.40. Soit $\mu \in \mathrm{Bel}(f)$, et $\epsilon > 0$ suffisamment petit pour que le disque $D(\mu, \epsilon)$ soit contenu dans le domaine de définition des coordonnées locales ϕ^{-1} fournies par le théorème du rang constant. Considérons l'application $\tilde{\pi} : \mathrm{Im} D\Psi^Z(\mu) \oplus \ker D\Psi^Z(\mu) \to \mathrm{Teich}(f)$ definie par $\tilde{\pi} = \pi \circ \phi$. D'après le lemme 2.4.39, il existe une application $\tilde{\phi} : \mathrm{Im} D\Psi^Z(\mu) \to \mathrm{Teich}(f)$ telle que $\tilde{\pi}(u, 0) = \tilde{\phi}(u)$, et cette application est une bijection sur son image. De plus, elle est continue puisque π et ϕ sont continues. Donc, quitte à restreindre, c'est un homéomorphisme sur son image. Ceci fournit donc paramétrisation locale $\tilde{\phi}$ qui fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Bel}(f) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathrm{Im} D\Psi^Z(\mu) \oplus \ker D\Psi^Z(\mu) \arrow[d, "\pi_1"] \\
\mathrm{Teich}(f) \arrow[r, "\tilde{\phi}"] & \mathrm{Im} D\Psi^Z(\mu)
\end{tikzcd}$$

où π_1 est la projection sur la première coordonnée. Puisque d'après la proposition 2.4.37 l'espace $\mathrm{Teich}(f)$ est séparé, ceci prouve que c'est une variété topologique. De plus, ce diagramme signifie exactement que π est une application fibrée. $\square$

Nous allons maintenant prouver qu'il existe une structure complexe sur $\mathrm{Teich}(f)$ qui rende l'application quotient π holomorphe. Ce sera une conséquence du lemme suivant :

Lemme 2.4.41. *Soit* X *une variété topologique,* M *une variété complexe, et* $h : X \to M$ *une application continue tel que pour tout* $x \in X$ *il existe des paramétrisations* ϕ *et* ψ *qui fassent commuter le diagramme suivant :*

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{C}^n, 0) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\phi"'] & (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m, 0) \arrow[d, "\psi"] \\
(X, x) \arrow[r, "h"] & (M, h(x))
\end{tikzcd}$$

(l'application i *étant l'injection linéaire canonique). Alors il existe une structure complexe sur* X *qui rend* h *holomorphe.*

Démonstration du lemme 2.4.41. Soit ϕ_1, ϕ_2 and ψ_1, ψ_2 des paramétrisations de X et M respectivement, dont les images respectives ont une intersection non vide. Nous allons prouver que la fonction de transition $\phi_2^{-1} \circ \phi_1$ est holomorphe. En effet, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{C}^n, 0) \arrow[rr, "i"] \arrow[d, "\phi_1"'] & & (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m, 0) \arrow[dl, "\psi_1"] \arrow[dd, "\Phi"] \\
X \arrow[r, "h"] & M & \\
(\mathbb{C}^n, 0) \arrow[rr, "i"] \arrow[u, "\phi_2"] & & (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m, 0) \arrow[ul, "\psi_2"']
\end{tikzcd}$$

On a donc $\Phi(x, 0) = (\phi(x), 0)$ pour tout $x \in \mathbb{C}^n$ (suffisamment près de 0), où $\phi = \phi_2^{-1} \circ \phi_1$ est une fonction de transition pour X, et $\Phi = \psi_2^{-1} \circ \psi_1$ est une fonction (holomorphe) de transition pour M. En particulier, ϕ est holomorphe. Ceci prouve que les cartes ϕ_i forment un atlas complexe. Par construction, f est holomorphe pour cet atlas. $\square$

Retournons maintenant à la preuve du théorème. D'après le lemme 2.4.39, l'application Ψ_T^Z : $\mathrm{Teich}(f) \to \mathrm{Rat}_d$ satisfait les conditions du lemme 2.4.41, où les paramétrisations de $X = \mathrm{Teich}(f)$ sont celles du lemme 2.4.40. Donc, il existe une structure complexe sur $\mathrm{Teich}(f)$ qui rende l'application $\Psi_T^Z : \mathrm{Teich}(f) \to \mathrm{Rat}_d$ holomorphe. De plus, le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Bel}(f) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathrm{Im} D\Psi^Z(\mu) \oplus \ker D\Psi^Z(\mu) \arrow[d, "\pi_1"] \\
\mathrm{Teich}(f) \arrow[r, "\tilde{\phi}"] & \mathrm{Im} D\Psi^Z(\mu)
\end{tikzcd}$$

prouve que π est une submersion holomorphe scindée. Clairement, il y a au plus une telle structure complexe sur $\mathrm{Teich}(f)$. □

Nous allons maintenant prouver que l'espace de Teichmüller s'immerge dans l'espace des paramètres. Ce résultat est le but de [Ast14].

Théorème B. L'application $\Psi_T^Z : \mathrm{Teich}(f) \to \mathrm{Rat}_d$ est une immersion, dont l'image est transverse à $\mathcal{O}(f)$.

Démonstration. D'après le corollaire 2.4.2 il suffit de montrer que c'est une immersion en 0. Par définition, on a $\Psi^Z = \Psi_T^Z \circ \pi$, et donc

$$D\Psi^Z(0) = D\Psi_T^Z([0]) \circ D\pi(0)$$

L'injectivité de $D\Psi_T^Z([0])$ est alors équivalente à la propriété : $\ker D\Psi^Z(0) = \ker D\pi(0)$.

D'après la proposition 2.4.19, $\ker D\Psi^Z(0) = N_f(\Omega_f)$, et d'après le corollaire 2.4.3, $\ker D\pi(0) = N_f(\Omega_f)$, ce qu'il fallait démontrer. □

On peut maintenant prouver le corollaire 2.4.4, qui concerne la description des espaces tangents et cotangents $T_0\mathrm{Teich}(f)$ and $T_0^*\mathrm{Teich}(f)$.

Corollaire 2.4.4. On a l'identification suivante :

$$T_0\mathrm{Teich}(f) = \mathrm{bel}(f)/\{\overline{\partial}\xi, \xi = f^*\xi\}$$

$$T_0^*\mathrm{Teich}(f) = Q(\Lambda_f)/\overline{\nabla_f Q(\Lambda_f)}.$$

Démonstration. La première partie est une conséquence directe du corollaire 2.4.3.

Comme $\mathrm{Teich}(f)$ est une variété de dimension finie, il suffit de montrer que

$$\left(Q(\Lambda_f)/\overline{\nabla_f Q(\Lambda_f)}\right)^*$$

s'identifie à $T_0\mathrm{Teich}(f)$.

Soit $E = Q(\Lambda_f)$, et $F = \overline{\nabla_f Q(\Lambda_f)}$. Comme F est fermé, le dual topologique de E/F est $F^\perp \subset E^*$. On a $E^* = \mathrm{Bel}(\mathbb{P}^1)/N(\Omega_f)$. De plus, $F^\perp = \ker \Delta_f$, puisque $\Delta_f : E^* \to E^*$ est l'opérateur adjoint de ∇_f. Donc :

$$(E/F)^* = \{\mu \in \mathrm{bel}(f)\}/\{\mu \in N_f(\Omega_f)\} = T_0\mathrm{Teich}(f)^*$$

□

Notons que l'on en déduit en particulier que $Q(\Lambda_f)/\overline{\nabla_f Q(\Lambda_f)}$ a une dimension finie, inférieure ou égale à $2d - 2$.

2.5 Espace de déformation d'Epstein

Dans cette section, nous présentons la théorie des espaces de déformations d'Epstein (voir [Eps09], [Eps93] et [BE09]), qui lui a permis entre autre d'obtenir des résultats fondamentaux sur la transversalité du lieu dans l'espace des paramètres où certaines relations critiques sont préservées.

L'idée est la suivante : on se donne deux ensembles finis A et B tels que $A \subset B$ et $f(A) \subset B$, et l'on s'intéresse à $f_{|A} : A \to B$. Pour que cela ait un sens dynamique, il faut que A soit composé de cycles ou de morceaux d'orbites critiques de f. On veut décrire les fractions rationnelles g pour lesquelles on a un diagramme :

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{P}^1, A) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"'] & (\mathbb{P}^1, B) \arrow[d, "\psi"] \\
(\mathbb{P}^1, \phi(A)) \arrow[r, "g"] & (\mathbb{P}^1, \psi(B))
\end{tikzcd}$$

où ϕ et ψ sont des bijections, avec $\phi_{|A} = \psi_{|A}$.

On va construire une variété complexe $\mathrm{Def}_A^B(f)$, qui va paramétriser holomorphiquement des fractions rationnelles de la forme $g = \phi \circ f \circ \psi^{-1}$, où $\phi_{|A} = \psi_{|A}$ et ϕ et ψ sont des homéomorphismes quasiconformes. On obtient ainsi un espace plus grand que $\mathrm{Teich}(f)$, qui paramétrise les fractions rationnelles de la forme $g = \phi \circ f \circ \phi^{-1}$. Plus précisément, on verra qu'il y a une immersion naturelle de $\mathrm{Teich}(f)$ dans les espaces $\mathrm{Def}_A^B(f)$.

2.5.1 Définition et généralités

Définition 2.5.1. Soit $A \subset B \subset \mathbb{P}^1$ deux ensembles finis. On définit $\varpi_{A,B} : \mathrm{Teich}(\mathbb{P}^1, B) \to \mathrm{Teich}(\mathbb{P}^1, A)$ l'application d'oubli, qui est induite par l'identité

$$\mathrm{Id} : \mathrm{bel}(\mathbb{P}^1 \setminus A) \to \mathrm{bel}(\mathbb{P}^1 \setminus B).$$

Définition 2.5.2. Soit $A, B \subset \mathbb{P}^1$ deux ensembles finis tels que $A \subset f^{-1}(B)$ et $V_f \subset B$. Comme $f : \mathbb{P}^1 - f^{-1}(B) \to \mathbb{P}^1 - B$ est un revêtement, on peut tirer en arrière par f toute structure complexe sur $\mathbb{P}^1 - B$ pour obtenir une structure complexe sur $\mathbb{P}^1 - f^{-1}(B)$ et donc sur $\mathbb{P}^1 - A$. Cette application de tiré en arrière passe au quotient et définit une application holomorphe $\sigma_{f,A,B} : \mathrm{Teich}(\mathbb{P}^1, B) \to \mathrm{Teich}(\mathbb{P}^1, A)$.

Définition 2.5.3. Soit $A, B \subset \mathbb{P}^1$ des ensembles finis, tels que
- $A \subset B \cap f^{-1}(B)$
- $\mathrm{card}\, A \geq 3$
- $V_f \subset B$.

On définit $\mathrm{Def}_A^B(f) = \{\tau \in \mathrm{Teich}(\mathbb{P}^1, B), \varpi_{A,B}(\tau) = \sigma_{f,A,B}(\tau)\}$

Proposition 2.5.4. La codifférentielle de $\varpi_{A,B}$ est l'injection $D\varpi_{A,B}(0) : Q(A) \to Q(B)$. La codifférentielle de $\sigma_{f,A,B}$ est le poussé en avant $D\sigma_{f,A,B}(0) = f_* : Q(A) \to Q(B)$.

Voir [Eps09].

Théorème 2.5.5. *Soit f une fraction rationnelle de degré $d \geq 2$ qui n'est pas un exemple de Lattès. Alors l'espace $\mathrm{Def}_A^B(f)$ est une sous-variété de $\mathrm{Teich}(\mathbb{P}^1, B)$, de dimension $\mathrm{card}\, B - A$ et de plan cotangent $Q(B)/\nabla_f Q(A)$.*

Démonstration. D'après le théorème des fonctions implicites, il suffit de montrer que $D\sigma_{f,A,B} - D\varpi_{A,B}$ est surjective. Or d'après la proposition 2.5.4 et la proposition 2.3.2, l'application duale $D^*\sigma_{f,A,B} - D^*\varpi_{A,B} : Q(A) \to Q(B)$ est injective (puisque f n'est pas un exemple de Lattès), ce qui achève la preuve. Le fait que la dimension soit égale à $\mathrm{card}\, B - A$ vient du fait que $\dim Q(B) = \mathrm{card}\, B - 3$, $\dim Q(A) = \mathrm{card}\, A - 3$, et de l'injectivité de ∇_f sur $Q(A)$. $\square$

Il y a une application holomorphe naturelle $\Phi_{A,B} : \mathrm{Def}_A^B(f) \to \mathrm{rat}_d$ donnée par $[\mu] \mapsto g = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$, où ψ est un homéomorphisme quasiconforme associé à $[\mu]$ et ϕ est un second homéomorphisme quasiconforme associé à $\sigma_{f,A,B}([\mu]) = \varpi_{A,B}([\mu])$. On peut montrer (voir [Eps09]) que la classe de g dans rat_d ne dépend pas du choix des représentants ϕ et ψ. Comme dans le cas de l'espace de Teichmüller dynamique, on peut relever cette application en une application holomorphe $\Phi_{A,B}^Z : \mathrm{Def}_A^B(f) \to \mathrm{Rat}_d$ par le choix d'un ensemble $Z \subset A$ de cardinal 3, en normalisant ϕ et ψ par la condition de fixer Z point par point.

Si $\lambda \mapsto [\mu_\lambda]$ est une courbe holomorphe dans $\mathrm{Def}_A^B(f)$ représentée par un homéomorphisme quasiconforme ψ_λ, et

$$f_\lambda = \psi_\lambda \circ f \circ \phi_\lambda^{-1} = \Phi_{A,B}^Z([\mu_\lambda]) \in \mathrm{Rat}_d,$$

un calcul simple montre que :

$$\eta := Df^{-1} \cdot \dot{f} = f^*\dot{\psi} - \dot{\phi} \tag{2.5.1}$$

(on rappelle que la notation $\dot{f}$ désigne la dérivée par rapport à λ en $\lambda = 0$).

Théorème 2.5.6. *L'application* $\Phi_{A,B}^Z : \mathrm{Def}_A^B(f) \to \mathrm{Rat}_d$ *est une immersion holomorphe si* A *ne contient pas de cycles paraboliques.*

Voir [Eps09] pour la preuve. Une conséquence majeure de ce résultat est que l'on peut transférer tous les résultats de transversalités prouvés dans l'espace $\mathrm{Def}_A^B(f)$ à Rat_d.

On suppose maintenant qu'on a choisi A de façon à ce que A ne contienne pas de cycle parabolique. Soit ϕ un homéomorphisme quasiconforme de $\mathbb{P}^1$, dont la forme de Beltrami μ est f-invariante : alors $g = \phi^{-1} \circ f \circ \phi$ est une fraction rationnelle. En particulier, si l'on note $[\mu]$ la classe de μ dans $\mathrm{Teich}(\mathbb{P}^1 - B)$, on voit que $[\mu] \in \mathrm{Def}_A^B(f)$. Autrement dit, il existe une application naturelle $\Phi : \mathrm{Teich}(f) \to \mathrm{Def}_A^B(f)$. Cette application est holomorphe. A. Epstein a une preuve non publiée du fait que cette application est une immersion, et en a déduit que l'application $\Psi_T^Z : \mathrm{Teich}(f) \to \mathrm{Rat}_d$ est une immersion, à l'aide du théorème 2.5.6.

Nous suivons ici un cheminement logique différent : on a démontré directement que Ψ_T^Z était une immersion, donc comme $\Psi_T^Z = \Phi_{A,B} \circ \Phi$, on en déduit le corollaire suivant :

Corollaire 2.5.1. Supposons que f ne soit pas un exemple de Lattès et que A ne contienne pas de cycles paraboliques. Alors l'application $\Phi : \mathrm{Teich}(f) \to \mathrm{Def}_A^B(f)$ est une immersion.

Notons que la codifférentielle de Φ est l'application linéaire naturelle

$$D\Phi(0)^* : Q(B)/\nabla_f Q(A) \to Q(\Lambda_f)/\overline{\nabla_f Q(\Lambda_f)}$$

induite par l'inclusion $Q(B) \to Q(\Lambda_f)$.

En particulier, son noyau est :

$$\ker D\Phi(0)^* = \left(Q(B) \cap \overline{\nabla_f Q(\Lambda_f)}\right) / \nabla_f Q(A).$$

2.6 Application : valeurs critiques sommables

Définition 2.6.1. Une valeur critique v d'une fraction rationnelle f est dite sommable si la série $\sum_{n \geq 0} \|Df^n(v)\|^{-1}$ converge (la norme est celle de la métrique sphérique).

Théorème 2.6.2 (Makienko, [Mak05], [Mak10])**.** *Soit* f *une fraction rationnelle qui n'est pas un exemple de Lattès, a* r *valeurs critiques sommables* v_i*, aucun anneau de Herman et telle que l'adhérence des orbites des* v_i *sont des* C*-compacts. Alors*

$$\dim \ker D\Phi(0)^* \geq r.$$

En particulier, $\dim \mathrm{Teich}(f) \leq 2d - 2 - r$.

Démonstration. Soit $u_v \in \Gamma(T\mathbb{P}^1)^*$ une forme linéaire non nulle de support inclus dans le singleton $\{v\}$, où v est une valeur critique sommable. Soit $w_n = \sum_{k=0}^{n}(f^k)_* u_v$: w_n est bien définie puisque comme v est sommable, $f^n(v) \notin \mathrm{Crit}(f)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La condition de sommabilité implique que w_n converge dans $\Gamma(T\mathbb{P}^1)^*$ vers un élément w vérifiant $\nabla_f w = u_v$.

Soit $Z \subset \mathbb{P}^1$ un 3-cycle répulsif de f. D'après le théorème 1.4.8, il existe une différentielle quadratique $q \in Q(K \cup Z)$ et $r_1 \in \Gamma(T\mathbb{P}^1)^*$ de support inclus dans Z telles que $w = \overline{\partial} q + r_1$. On obtient donc :

$$\nabla_f \overline{\partial} q = u_v - \nabla_f r_1,$$

le terme de droite étant une forme linéaire de support inclus dans $Z \cup \{v\}$, car $f(Z) = Z$. D'après la proposition 1.4.10, $f_* q$ est régulière et d'après la proposition 1.4.11, on a : $\mathrm{supp}\,(\overline{\partial} \nabla_f q) \subset V_f \cup Z$: donc $\nabla_f q \in Q(V_f \cup Z)$.

Les r valeurs critiques sommables fournissent r différentielles quadratiques linéairement indépendantes, par injectivité de ∇_f (théorème 2.3.8) et unicité dans le théorème 1.4.8. Ces différentielles quadratiques appartiennent par construction à

$$Q(B) \cap \nabla_f Q(\Lambda_f) \subset \ker D\Phi(0)^*.$$

(en effet, ici $A = Z$ et donc $Q(A) = \{0\}$). □

En particulier, ce théorème affirme que si toutes les valeurs critiques sont sommables, que f n'a pas d'anneaux de Herman et que son ensemble de Julia est un C-compact (ces deux dernières propriétés étant automatiquement vérifiées si f est un polynôme), alors f n'a pas de champs de droites invariants (cf. conjecture 2.1.12).

Nous allons maintenant donner une preuve simplifiée d'un résultat de Levin (voir [Lev11]).

Soit $\lambda \mapsto f_\lambda$ une famille holomorphe à un paramètre de fractions rationnelles de degré $d \geq 2$. On rappelle les notations suivantes :

$$\eta = Df^{-1} \cdot \frac{df_\lambda}{d\lambda}_{|\lambda=0} \in T(f)$$

est un champ de vecteur méromorphe à pôles inclus dans $\mathrm{Crit}(f)$, de multiplicités au plus celles des points critiques de f. L'espace vectoriel complexe $T(f)$ des tels champs de vecteurs a une dimension égale à $2d+1$ et s'identifie canoniquement à $T_f \mathrm{Rat}_d$.

On notera aussi :

$$\eta_n = Df^{-n} \cdot \frac{d(f_\lambda)^n}{d\lambda}_{|\lambda=0}.$$

Ainsi, $\eta = \eta_1$.

Lemme 2.6.3. *On a :*

$$\eta_n = \sum_{k=0}^{n-1} (f^k)^* \eta$$

Démonstration. Nous allons procéder par récurrence. Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$:

$$\eta_n = \sum_{k=0}^{n-1} (f^k)^* \eta.$$

On a :

$$\begin{aligned}
\eta_{n+1} &= Df^{-(n+1)} \cdot \frac{d}{d\lambda}_{|\lambda=0} f_\lambda^{n+1} \\
\eta_{n+1} &= Df^{-(n+1)} \cdot \left(\dot{f} \circ f^n + Df \circ f^n \cdot (\dot{f^n})\right) \\
\eta_{n+1} &= (f^n)^* \eta + Df^{-n} \cdot (\dot{f^n}) \\
\eta_{n+1} &= (f^n)^* \eta + \eta_n.
\end{aligned}$$

D'où le résultat par récurrence. □

Une conséquence de cette formule est que si v est une valeur critique sommable, alors $\eta_n(v)$ converge :

Définition 2.6.4. Si v est une valeur critique sommable, on note

$$\xi(v) = \sum_{k=0}^{\infty} (f^k)^* \eta(v) \in T_v \mathbb{P}^1.$$

Une façon de penser à ces vecteurs $\xi(v_i)$ est comme un ratio limite entre une dérivée dynamique (par rapport à z) et paramétrique (par rapport à λ).

On rappelle que l'application $\nabla_f : Q(K) \to Q(K \cup V_f)$, K étant un compact invariant de l'ensemble de Julia, est injective dans chacun des deux cas suivants :

— f n'a pas de champs de droites invariants

— K est un C-compact et f n'a pas d'anneaux de Herman.

Théorème 2.6.5 (Levin, [Lev11])**.** *Supposons que f soit une fraction rationnelle qui a r valeurs critiques sommables $(v_i)_{1\leq i\leq r}$, et que si $i \neq j$, v_i ne soit pas dans l'orbite de v_j. Suposons aussi que ∇_f soit injective sur $Q(K)$, où K est l'adhérence des orbites des v_i. L'application linéaire*

$$\begin{aligned} \mathcal{V} : T(f) &\to \bigoplus_{1\leq i\leq r} T_{v_i}\mathbb{P}^1 \\ \eta &\mapsto (\xi(v_i))_{1\leq i\leq r} \end{aligned}$$

a un rang maximal, c'est-à-dire égal à r.

Démonstration. Soit $A = Z$ un cycle répulsif de cardinal 3 de f. Soit $B = A \cup V_f$. Comme dans la preuve du théorème 2.6.2, à chaque valeur critique sommable v_i on va associer une différentielle quadratique intégrable q_i telle que $\nabla_f q_i \in Q(B)$. D'après le théorème 2.5.5, la dimension de $\mathrm{Def}_A^B(f)$ est égale au nombre de valeurs critiques de f, donc en particulier est supérieure à r. D'après le théorème 2.5.6, il suffit donc de montrer que la restriction de $\mathcal{V}$ à l'image de $D\Phi_{A,B}^Z(0)$ a un rang égal à r. Pour $\eta \in \mathrm{Im}\, D\Phi_{A,B}^Z(0)$, on a $\eta = 0$ sur Z et donc $(f^n)^*\eta = 0$ sur Z pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, il suffit de prouver le résultat en remplaçant les vecteurs $\xi(v_i)$ par les nombres complexes

$$\frac{d}{dt}_{|t=0} \log \mathrm{BR}(z_1, z_2, z_3, v_i + t\xi(v_i)) = \mathrm{Res}(\phi_i \cdot \xi, v_i)$$

où $Z = \{z_1, z_2, z_3\}$, BR est le birapport, et ϕ_i est la différentielle quadratique élémentaire de pôles z_1, z_2, z_3, v_i codant la différentielle logarithmique du birapport (voir proposition 1.2.12). En effet, l'application $T_{v_i}\mathbb{P}^1 \ni \mathbf{v} \mapsto \mathrm{Res}(\phi_i \cdot \mathbf{v}, v_i) \in \mathbb{C}$ est un isomorphisme.

Soit donc $\eta = D\Phi_{A,B}^Z(0) \cdot [\mu]$, où $\eta \in T(f)$ et $[\mu] \in T_0\mathrm{Def}_A^B(f)$.

On posera

$$B_i^Z([\mu]) := \frac{d}{dt}_{|t=0} \log \mathrm{BR}(z_1, z_2, z_3, v_i + t\xi(v_i)),$$

où $\xi(v_i) \in T_{v_i}\mathbb{P}^1$ est associé à η et à $[\mu] \in T_0\mathrm{Def}_A^B(f)$.

Soit $q_{i,0} = \phi_i$, et soit $u_i \in \Gamma(T\mathbb{P}^1)^*$ la forme linéaire de support $\{v_i\}$ définie par $T_{v_i}\mathbb{P}^1 \ni \mathbf{v} \mapsto \mathrm{Res}(\phi_i \cdot \mathbf{v}, v_i) \in \mathbb{C}$. Comme dans la preuve du théorème 2.6.2, on pose $w_i = \sum_{n\geq 0} f_*^n u_i$, et q_i la différentielle quadratique régulière telle que $\overline{\partial} q_i = w_i$. Par construction,

$$q_i = \sum_{n\geq 0} q_{i,n}$$

où $q_{i,n}$ est une différentielle quadratique élémentaire ayant des pôles en $f^n(v_i)$ et en $B = Z \cup V_f$, et tel que $\overline{\partial} q_{i,n} = f_*^n \overline{\partial} q_{i,0}$.

Remarqons que
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Res}(q_{i,n}\cdot\eta, f^n(v_i)) = B_i^Z([\mu]).$$

En effet, par définition,
$$\langle f_*^n u_i, \eta\rangle = \mathrm{Res}(q_{i,n}\cdot (f^n)^*\eta, f^n(v_i)) = \frac{d}{dt}\log \mathrm{BR}\left(z_1,z_2,z_3,v_i+t((f^n)^*\eta)(v_i)\right),$$
et $\xi(v_i)=\sum_{n\geq 0}((f^n)^*\eta)(v_i)$.

Si $\lambda\mapsto[\mu_\lambda]$ est une courbe holomorphe de $\mathrm{Def}_A^B(f)$ tangente à $[\mu]\in T_0\mathrm{Def}_A^B(f)$ au point base, on peut relever $\lambda\mapsto[\mu_\lambda]$ en une courbe holomorphe de représentants $\lambda\mapsto\mu_\lambda$, et les solutions normalisées ψ_λ des équations de Beltrami associées vérifient que $\overline{\partial}\dot\psi=\overline{\partial}\frac{d}{d\lambda}\psi_\lambda$ est un représentant de $[\mu]$.

Le lemme suivant va permettre de déterminer une représentation naturelle de la forme linéaire B_i^Z en termes de différentielles quadratiques :

Lemme 2.6.6. *Soit $\mu=\overline{\partial}\dot\psi$ un représentant de $[\mu]\in T_0\mathrm{Def}_A^B(f)$. On a :*
$$\int_{\mathbb{P}^1}\nabla_f q_i\cdot\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{Res}(q_{i,n}\cdot\eta, f^n(v_i)).$$

Démonstration du lemme 2.6.6. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, la forme différentielle $q_{i,n}\cdot\eta$ est méromorphe sur $\mathbb{P}^1$, donc la somme de ses résidus est nulle : donc
$$\mathrm{Res}(q_{i,n}\cdot\eta, f^n(v)) = -\sum_{z\in Z\cup C_f}\mathrm{Res}(q_{i,n}\cdot\eta, z).$$

Donc :
$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{Res}(q_{i,n}\cdot\eta, f^n(v_i)) = -\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{z\in Z\cup C_f}\mathrm{Res}(q_{i,n}\cdot\eta)$$

D'après 2.5.1, on a $\eta=f^*\dot\psi-\dot\phi$, et $\dot\phi=\dot\psi$ sur $A=Z$. Donc pour tout $z\in A$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$:
$$\mathrm{Res}(q_{i,n}\cdot\eta,z)=\mathrm{Res}(q_{i,n}\cdot(f^*\dot\psi-\cdot\psi),z)=\mathrm{Res}(f_*q_{i,n}\cdot\dot\psi,f(z))-\mathrm{Res}(q_{i,n}\cdot\dot\psi,z).$$

Donc :
$$-\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{z\in A}\mathrm{Res}(q_{i,n}\cdot\eta,z)=\sum_{z\in A}\mathrm{Res}(\nabla_f q_i\cdot\dot\psi,z).$$

De plus, pour tout $c\in V_f$:
$$\begin{aligned}-\sum_{c\in C_f}\mathrm{Res}(q_{i,n}\cdot\eta,c) &= -\sum_{c\in C_f}\mathrm{Res}(q_{i,n}\cdot(f^*\dot\psi-\dot\phi),c)\\ &= -\sum_{c\in C_f}\mathrm{Res}(q_{i,n}\cdot f^*\dot\psi,c)\\ &= -\sum_{v\in V_f}\mathrm{Res}(f_*q_{i,n}\cdot\dot\psi,v)\\ &= \sum_{v\in V_f}\mathrm{Res}(\nabla_f q_{i,n}\cdot\dot\psi,v)\end{aligned}$$

et donc :
$$-\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{c\in C_f}\mathrm{Res}(q_{i,n}\cdot\eta,c)=\sum_{v\in V_f}\mathrm{Res}(\nabla_f q_i\cdot\dot\psi,v).$$

Pour résumer, on a donc :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Res}(q_{i,n} \cdot \eta, f^n(v_i)) = \sum_{z\in B} \operatorname{Res}(\nabla_f q_i \cdot \dot{\psi}, z).$$

Il suffit alors pour conclure d'appliquer la proposition 1.1.11, qui affirme que

$$\sum_{z\in B} \operatorname{Res}(\nabla_f q_i \cdot \dot{\psi}, z) = \int_{\mathbb{P}^1} \nabla_f q_i \cdot \overline{\partial}\dot{\psi}.$$

□

Retournons maintenant à la preuve du théorème 2.6.5. D'après le lemme ci-dessus, on a donc :

$$B_i^Z([\mu]) = \int_{\mathbb{P}^1} \nabla_f q_i \cdot [\mu]$$

pour tout $[\mu] \in \operatorname{Def}_A^B(f)$. Autrement dit, la classe de la différentielle quadratique $\nabla_f q_i$ dans $Q(B)/\nabla_f Q(A)$ représente la forme linéaire $B_i^Z : T_0\operatorname{Def}_A^B(f) \to \mathbb{C}$. Or, les classes des r différentielles quadratiques $\nabla_f q_i$ sont linéairement indépendantes dans $T_0^*\operatorname{Def}_A^B(f) = Q(B)/\nabla_f Q(A)$, par injectivité de ∇_f (voir théorème 2.3.8). Donc, les r formes linéaires B_i^Z sont linéairement indépendantes, ce qui équivaut au fait que l'application $\mathcal{V}$ ait un rang égal à r. □

2.7 Déformation de mesures

Dans cette section, nous introduisons un espace de déformation $\operatorname{Def}_K(f)$ analogue dans un certain sens à l'espace de déformation d'Epstein $\operatorname{Def}_A^B(f)$, où K est un compact invariant arbitraire (en particulier, pas nécessairement fini). La grande différence réside dans le fait que nous ne pouvons garantir en général que $\operatorname{Def}_K(f)$ est muni d'une structure de sous-variété analytique. Par contre, tout mouvement holomorphe dynamique de K se factorise par $\operatorname{Def}_K(f)$, donc si l'on suppose *a priori* l'existence d'un mouvement holomorphe dynamique paramétré par une variété complexe Λ, on pourra toujours supposer que $\Lambda \subset \operatorname{Def}_K(f)$. On a alors une description du plan cotangent $T_0^*\Lambda$ en termes de différentielles quadratiques.

Si l'on se donne une mesure de Radon invariante ergodique ν sur un compact hyperbolique K, on construira une (classe de) différentielle quadratique représentant la différentielle de l'exposant de Lyapunov de ν. Cette construction (de nature purement formelle) généralise la construction d'une classe de différentielle quadratique représentant la différentielle du multiplicateur d'un cycle (voir [Eps09]).

2.7.1 Mouvements holomorphes dynamiques et espaces de déformation

Définition 2.7.1. Soit f une fraction rationnelle et K un compact invariant par f. Soit $h : K \times \Lambda \to \mathbb{P}^1$ un mouvement holomorphe de K. On dit que h est un mouvement holomorphe dynamique s'il existe une application holomorphe $\Lambda \ni \lambda \mapsto f_\lambda \in \operatorname{Rat}_d$ telle que pour tout $\lambda \in \Lambda$, pour tout $z \in K$:

$$h_\lambda \circ f(z) = f_\lambda \circ h_\lambda(z).$$

De plus, on dira que h est admissible si les valeurs critiques de f_λ dépendent holomorphiquement de λ, et si $\lambda \mapsto f_\lambda$ est une immersion.

Définition 2.7.2. Soit K un compact invariant par f. On notera :

— $\varpi_K : \operatorname{Teich}(\mathbb{P}^1, K \cup V_f) \to \operatorname{Teich}(\mathbb{P}^1, K)$ l'application d'oubli

— $\sigma_{f,K} : \operatorname{Teich}(\mathbb{P}^1, K \cup V_f) \to \operatorname{Teich}(\mathbb{P}^1, K)$ l'application de tiré en arrière

— $\operatorname{Def}_K(f) = \{\tau \in \operatorname{Teich}(\mathbb{P}^1, K \cup V_f), \varpi_K(\tau) = \sigma_{f,K}(\tau)\}$

La définition de $\mathrm{Def}_K(f)$ est calquée sur celle des espaces de déformations d'Epstein. Cependant, lorsque K est de cardinal infini, il n'est pas clair en général que $\mathrm{Def}_K(f)$ est une sous-variété complexe de $\mathrm{Teich}(\mathbb{P}^1, K \cup V_f)$. Ce serait notamment le cas si l'application $\varpi_K - \sigma_{f,K}$ était Fredholm (on fait ici un abus de notation : la soustraction n'est définie que localement et en coordonnées). Ceci nous amène à la question suivante :

Question : Sous quelle condition sur un compact K invariant par f peut-on garantir l'existence d'une constante $C_K > 0$ telle que l'application $\nabla_f : Q(K) \to Q(K \cup V_f)$ vérifie

$$\|q\| \leq C_K \|\nabla_f q\| \tag{2.7.1}$$

pour tout $q \in Q(K)$?

Nous verrons que même lorsque $\nabla_f : Q(K) \to Q(K \cup V_f)$ est injective, il n'existe pas nécessairement une telle constante lorsque K est de cardinal infini.

Il reste par contre vrai que tout point de $\mathrm{Def}_K(f)$ correspond à un triplet (ϕ, ψ, g), g étant une fraction rationnelle, faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{P}^1, K) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"'] & (\mathbb{P}^1, K \cup V_f) \arrow[d, "\psi"] \\
(\mathbb{P}^1, \phi(K)) \arrow[r, "g"] & (\mathbb{P}^1, \psi(K \cup V_f))
\end{tikzcd}$$

Soit $Z \subset K$ un ensemble de cardinal 3. On notera $\Psi_K^Z : \mathrm{Def}_K(f) \to \mathrm{Rat}_d$ l'application qui au triplet (ϕ, ψ, g) associe g, où ϕ et ψ sont normalisées en fixant ponctuellement Z. Si $\mathrm{Def}_K(f)$ contient une variété complexe Λ, alors $\Psi_K^Z : \Lambda \to \mathrm{Rat}_d$ est holomorphe.

La proposition suivante, qui est une application dynamique du théorème 2.4.13, dit essentiellement que $\mathrm{Def}_K(f)$ est l'ensemble universel paramétrant tout mouvement holomorphe dynamique admissible de K.

Proposition 2.7.3. Soit $(h, \lambda \mapsto f_\lambda)$ un mouvement holomorphe dynamique admissible. Soit $\phi : \Lambda \to \mathrm{Teich}(\mathbb{P}^1, K \cup V_f)$ l'application holomorphe fournie par le théorème 2.4.13. Alors pour tout $\lambda \in \Lambda$, $\phi(\lambda) \in \mathrm{Def}_K(f)$, et $f_\lambda = \Psi_K^Z \circ \phi(\lambda)$.

Démonstration. Si $\phi(\lambda) \in \mathrm{Teich}(K \cup V_f)$ est représenté par un homéomorphisme quasiconforme ψ_λ, on sait par hypothèse que $\psi_\lambda \circ f = f_\lambda \circ \psi_\lambda$ sur K. Soit χ_λ l'unique représentant de $\sigma_{f,K}(\phi(\lambda))$ tel que $g_\lambda = \psi_\lambda \circ f \circ \chi_\lambda^{-1}$ soit holomorphe sur $\mathbb{P}^1 - V_f$. L'application g_λ est continue et holomorphe en dehors d'un ensemble fini, donc est holomorphe sur tout $\mathbb{P}^1$: g_λ est donc une fraction rationnelle. Ses valeurs critiques (avec multiplicité) sont les éléments de $\psi_\lambda(V_f)$, c'est-à-dire les mêmes que celles de f_λ. De plus, elle est homotope à f_λ. Donc $f_\lambda = g_\lambda$, et $\psi_\lambda \circ f = \chi_\lambda \circ f$ sur K ; comme $f(K) = K$, on en déduit que ψ_λ coïncide avec χ_λ sur K, et donc que $\sigma_{f,K}(\tau) = \varpi_{f,K}(\tau)$. $\square$

Dans la suite, on s'intéressera seulement à des petites déformations de f. Étant donnée la proposition 2.7.3, si Λ est une variété complexe de dimension $k \leq 2d - 2$ paramétrant un mouvement dynamique holomorphe admissible de K, alors pour des considérations locales on ne perd pas de généralité à supposer que Λ est un petit polydisque de dimension k dans $\mathrm{Def}_K(f)$. Si c'est le cas, alors

$$T_0\Lambda \subset \ker(D\sigma_{f,K}(0) - D\varpi_{K \cup V_f, K}(0)),$$

et tout élément de $Q(K \cup V_f)/\overline{\nabla_f Q(K)}$ définit naturellement une forme linéaire sur $T_0\Lambda$.

Corollaire 2.7.1. Soit K un compact invariant. Supposons que $\nabla_f Q(K)$ soit dense dans $Q(K \cup V_f)$. Alors il n'existe pas de mouvement holomorphe dynamique admissible non-trivial de K.

Démonstration. Soit trois points $z_i \in K$, $1 \leq 1 \leq 3$, et $z \in K - \{z_i\}$. La différentielle au point base de la fonction $B : \Lambda \ni \lambda \mapsto \log \mathrm{BR}(z_1 : z_2 : z_3 : z)$ est représentée par la classe de $q_{z_1,z_2,z_3,z}$ dans $Q(K \cup V_f)/\overline{\nabla_f Q(K)}$ (voir proposition 1.2.12). Donc, si $Q(K \cup V_f)/\overline{\nabla_f Q(K)}$ est trivial, aucun point ne bouge, et donc tout mouvement holomorphe admissible est en fait trivial. □

Ainsi, si par exemple $K = \mathcal{J}$, on obtient l'obstruction suivante à la $\mathcal{J}$-stabilité : si $\nabla_f Q(\mathcal{J})$ est dense dans $Q(\mathcal{J} \cup V_f)$ alors f n'est pas $\mathcal{J}$-stable.

2.7.2 Transformée de Beurling-Ahlfors

Dans toute cette section, K désigne un compact invariant par f, de mesure de Lebesgue nulle, et $h : K \times \Lambda \to \mathbb{P}^1$ un mouvement holomorphe dynamique admissible, paramétré par $\Lambda \subset \mathrm{Def}_K(f)$.

Soit ν une mesure de Radon invariante ergodique pour f, à support inclus dans K. On note $\nu_\lambda = (h_\lambda)_* \nu$. Pour tout $\lambda \in \Lambda$, ν_λ est une mesure de Radon invariante et ergodique pour f_λ. On note $\mathcal{L}_\nu(\lambda)$ l'exposant de Lyapunov de ν_λ pour f_λ. La fonction $\mathcal{L}_\nu$ est donc bien définie, et est harmonique sur Λ.

Rappelons le fait suivant classique en théorie du potentiel :

Théorème 2.7.4. *Soit ν une mesure de Radon de support K compact dans $\mathbb{C}$. Soit*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \log |z - y| d\nu(y).$$

Alors u est une fonction sous-harmonique, harmonique en dehors de K, et $dd^c u = \nu$ (au sens des courants).

La fonction u s'appelle le potentiel logarithmique de la mesure ν.

Théorème 2.7.5. *Soit ν une mesure de Radon invariante par f, de support $K \subsetneq \mathbb{P}^1$. Soit z une coordonnée affine dans laquelle $K \subset \mathbb{C}$. La classe de divergence le long de K*

$$B(\nu) = \left[\int_{\mathbb{C}} \frac{d\nu(y)}{(z-y)^2} dz^2 \right]$$

est indépendante de la coordonnée z. De plus, si $\int_K \|Df\|^{-2} d\nu < +\infty$ elle est invariante par f.

Remarquons que si K est hyperbolique, il est inclus dans l'ensemble de Julia $\mathcal{J}(f)$, et donc K ne peut pas être $\mathbb{P}^1$ tout entière, et dans ce cas on pourra donc bien trouver une carte affine dans laquelle $K \subset \mathbb{C}$. De plus, seule la classe de divergence de q est bien définie (indépendante des coordonnées). La notation $B(\nu)$ fait référence à la transformation de Beurling-Ahlfors, qui fait également intervenir une convolution avec $\frac{1}{z^2}$.

Démonstration. Montrons que la divergence $B(\nu)$ ne dépend pas du choix de coordonnées z. Remarquons que si l'on note u le potentiel logarithmique de ν (dans la coordonnée z), alors

$$2\pi \frac{\partial^2}{\partial z^2} u(z) = \int_{\mathbb{C}} \frac{d\nu(y)}{(z-y)^2}.$$

Soit $w = \phi(z)$ une nouvelle coordonnée affine dans laquelle $K \subset \mathbb{C}$, et posons $\psi = \phi^{-1}$. Il suffit de montrer que les différentielles quadratiques $\frac{\partial^2}{\partial z^2} u(z) dz^2$ et $\frac{\partial^2}{\partial w^2} u \circ \psi(w) dw^2$ diffèrent d'une différentielle quadratique intégrable sur K. On a :

$$\frac{\partial}{\partial w} u(\psi(w)) = \psi'(w) \frac{\partial u}{\partial z}(\psi(w))$$

$$\frac{\partial^2}{\partial w^2}u(\psi(w)) = \psi''(w)\frac{\partial u}{\partial z}(\psi(w)) + (\psi'(w))^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(\psi(w)).$$

Donc :

$$\frac{\partial^2}{\partial w^2}u\circ\psi(w)dw^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(z)dz^2 = \frac{\psi''(w)}{\psi'(w)^2}\frac{\partial u}{\partial z}(z)dz^2$$

avec $\psi(w) = z$.

Or, $\frac{\partial u}{\partial z} = \int_{\mathbb{C}}\frac{d\nu(y)}{z-y}$, et ψ est un changement de carte holomorphe, donc $\frac{\psi''(w)}{\psi(w)^2}\frac{\partial u}{\partial z}(z)dz^2$ est une différentielle quadratique intégrable au voisinage de K. Donc la divergence est bien inchangée par changement de cartes.

Soit $q = \int_{\mathbb{C}}\frac{d\nu(y)}{(z-y)^2}dz^2$ une différentielle quadratique représentant $B(\nu)$ (dans une coordonnée z choisie telle que $f^{-1}(K)\subset\mathbb{C}$). Montrons que sa divergence est invariante. Commençons par calculer f_*q :

$$\begin{aligned}
f_*q(z) &= \sum_{x\in f^{-1}(z)}\frac{1}{f'(x)^2}\int_{\mathbb{C}}\frac{d\nu(y)}{(x-y)^2}dz^2\\
&= \int_{\mathbb{C}}\sum_{x\in f^{-1}(z)}\frac{d\nu(y)}{f'(x)^2(x-y)^2}dz^2\\
&= \int_{\mathbb{C}} f_*\left(\frac{dz^2}{(z-y)^2}\right)d\nu(y)\\
&= \int_{\mathbb{C}}\left(\frac{1}{(z-f(y))^2} + \frac{f''(y)}{f'(y)^2}\frac{1}{z-f(y)}\right)d\nu(y)dz^2 + \phi
\end{aligned}$$

où ϕ est une différentielle quadratique qui a des pôles au plus simples aux valeurs critiques de f, et un pôle au plus double en $f(\infty)\notin K$: donc la divergence de ϕ le long de K est nulle. Pour la dernière égalité, on a utilisé le lemme 2.2.6. Par ailleurs, la différentielle quadratique $\int_{\mathbb{C}}\frac{f''(y)}{f'(y)^2}\frac{1}{z-f(y)}d\nu(y)dz^2$ est intégrable au voisinage de K puisque par hypothèse,

$$\|Df\|^{-1}\in L^2(\nu).$$

Donc la divergence de q est bien invariante. □

Rappelons que si $[q]$ est une divergence invariante le long de K, $\nabla_f[q]$ définit naturellement un élément de

$$Q(K\cup V_f)/\overline{\nabla_f Q(K)}$$

et définit donc naturellement un élément de $T_0^*\Lambda$.

Définition 2.7.6. Si $\Phi:\Lambda\to\mathbb{C}$ est une fonction holomorphe, on dira qu'une divergence invariante code la différentielle $D\Phi(0)$ si elle représente cette différentielle dans $T_0^*\Lambda$. Dans le cas d'une fonction $\Phi:\Lambda\to\mathbb{R}$ qui est $\mathbb{R}$-différentiable, on dit qu'une divergence invariante $[q]$ code la différentielle $D\Phi(0)$ si pour tout $[\mu]\in T_0\Lambda$,

$$D\Phi(0)\cdot[\mu] = \Re\left(\int_{\mathbb{P}^1}\nabla_f[q]\cdot[\mu]\right).$$

Théorème 2.7.7. *Soit K un compact hyperbolique invariant, et ν une mesure de Radon invariante régulière de support K. Alors la divergence $B(\nu)$ code la différentielle de l'exposant de Lyapunov de ν, $D\mathcal{L}_\nu(0)$.*

Démonstration. Soit ν une mesure de Radon comme dans les hypothèses du théorème.

Il suffit de prouver le théorème pour un représentant de $\nabla_f B(\nu)$: on travaillera donc avec un représentant $\phi \in Q(V_f \cup Z)$.

Rappelons quelques notations : si $[\mu] \in T_0\Lambda$ est représenté par $\overline{\partial}\xi$, où ξ est un champ de vecteur quasiconforme, alors les valeurs de ξ (Z-normalisé) sur K ne dépendent que de $[\mu]$ et non du choix du représentant. De plus, ξ est le champ de vecteur correspondant au mouvement holomorphe de K :

$$\xi = \frac{dh_\lambda}{d\lambda}_{|\lambda=0}.$$

Si l'on note $\eta = Df^{-1} \cdot \frac{df_\lambda}{d\lambda} \in T_f\mathrm{Rat}_d$ la déformation infinitésimale correspondante, c'est-à-dire $\eta = D\Phi_K^Z(0) \cdot [\mu]$, on a la relation suivante sur K :

$$\eta = f^*\xi - \xi,$$

et η est un champ de vecteur méromorphe, dont les pôles sont exactement les points critiques de f avec la même multiplicité.

Lemme 2.7.8. *Il existe un représentant q de $B(\nu)$ tel que $\nabla_f q \in Q(V_f \cup Z)$ et*

$$D\mathcal{L}_\nu(0) \cdot [\mu] = -\Re\left(\sum_{y \in C_f \cup Z} \mathrm{Res}(q \cdot \eta, y)\right)$$

Démonstration. Notons que dans la preuve de ce lemme, on effectuera des calculs en coordonnées et que le représentant exhibé (et encore moins sa construction) n'est pas nécessairement naturel. Ce n'est pas gênant puisque la conclusion du théorème porte sur un objet qui est lui bien défini : la divergence $B(\nu)$.

Commençons par calculer $D\mathcal{L}_\nu(0) \cdot [\mu]$. Observons que comme K est hyperbolique, pour tout $\lambda \in \Lambda$ et pour tout $y \in K$, $f'_\lambda \circ h_\lambda(y) \neq 0$. Donc pour tout $y \in K$, $\log|f'_\lambda \circ h_\lambda(y)| = \Re(\log f'_\lambda \circ h_\lambda(y))$ est bien définie (et est indépendante du choix de la branche de logarithme complexe, qui peut dépendre de y). De plus, on a :

$$\frac{d}{dt}\log|f'_t \circ h_t(y)| = \Re\left(\frac{d}{dt}\log f'_t \circ h_t(y)\right) = \Re\left(\frac{f''(y)}{f'(y)}\xi(y) + \frac{\dot{f}'(y)}{f'(y)}\right).$$

(la différentiation étant réelle).

Comme $(\lambda, y) \mapsto \log|f'_\lambda \circ h_\lambda(y)|$ est intégrable par rapport à ν en y et analytique en λ, on peut dériver sous l'intégrale :

$$D\mathcal{L}_\nu(0) \cdot [\mu] = \int_K \frac{d}{d\lambda}\log|f'_\lambda \circ h_\lambda(y)| d\nu(y) \tag{2.7.2}$$

$$= \int_K \Re\left(\frac{f''(y)}{f'(y)}\xi(y) + \frac{\dot{f}'(y)}{f'(y)}\right) d\nu(y). \tag{2.7.3}$$

Soit $q_2 = \int_K \frac{d\nu(y)}{(z-y)^2}$, Z-normalisé de manière à n'avoir comme pôles en dehors de K que 3 pôles simples en Z : q_2 est un représentant de $B(\nu)$.

D'après le lemme 2.2.6,

$$\nabla_f q_2 = \int_K \frac{f''(y)}{f'(y)^2}\frac{d\nu(y)}{(z - f(y))}dz^2 + \phi_2$$

où $\phi_2 \in Q(V_f \cup Z)$.

Soit $u \in \Gamma(T\mathbb{P}^1)^*$ définie par :

$$\langle u, X\rangle = \int_K \frac{f''(y)}{f'(y)} \frac{X \circ f(y)}{f'(y)} d\nu(y) = f_*(\frac{f''}{f'} \otimes \nu).$$

Ainsi, u est bien définie puisque K est hyperbolique, et donc ne contient pas de points critiques. D'après la proposition 1.4.24, il existe $v \in \Gamma(T\mathbb{P}^1)^*$ telle que $\nabla_f v = -u$, et une différentielle quadratique régulière $q_1 \in Q(K \cup V_f)$ telle que le support de $\overline{\partial} q_1 - v$ soit contenu dans Z. En particulier, si l'on pose $q = q_1 + q_2$, on a $\nabla_f q \in Q(V_f \cup Z)$ et q représente $B(\nu)$. De plus, q_1 est de la forme :

$$q_1 = \int_K q_1(y) d\nu(y)$$

où $q_1(y) \in Q(V_f \cup Z \cup \{y\})$.

On a :

$$\begin{aligned}
-\sum_{z \in C_f \cup Z} \mathrm{Res}(q \cdot \eta, z) &= -\sum_{z \in C_f \cup Z} \int_K \mathrm{Res}\left((q_1(y) + \frac{dz^2}{(z-y)^2}) \cdot \eta, z\right) d\nu(y) \\
&= \int_K \mathrm{Res}(q_1(y) \cdot \eta, y) d\nu(y) + \int_K \mathrm{Res}\left(\frac{dz^2}{(z-y)^2} \cdot \eta, y\right) d\nu(y) \\
&= \int_K \mathrm{Res}(q_1(y) \cdot (f^*\xi - \xi), y) d\nu(y) + \int_K \mathrm{Res}\left(\frac{dz^2}{(z-y)^2} \cdot \eta, y\right) d\nu(y)
\end{aligned}$$

Par ailleurs, on a :

$$\eta(z) = \eta(y) + (z-y)\left(\frac{\dot{f}'(y)}{f'(y)} - \frac{\dot{f}(y) f''(y)}{f'(y)^2}\right) + O(z-y)$$

et donc

$$\mathrm{Res}\left(\frac{dz^2}{(z-y)^2} \cdot \eta, y\right) = \frac{\dot{f}'(y)}{f'(y)} - \frac{f''(y)}{f'(y)^2} \dot{f}(y).$$

En réinjectant, on en déduit :

$$\begin{aligned}
-\sum_{z \in C_f \cup Z} \mathrm{Res}(q \cdot \eta, z) &= \langle v, f^*\xi - \xi\rangle + \int_K \frac{\dot{f}'(y)}{f'(y)} - \frac{f''(y)}{f'(y)} \eta(y) \\
&= \langle u, \xi\rangle + \int_K \frac{\dot{f}'(y)}{f'(y)} + \frac{f''}{f'}(y)\xi(y) - \frac{f''}{f'}(y) f^*\xi(y) d\nu(y)
\end{aligned}$$

En utilisant la définition de u, c'est-à-dire :

$$\langle u, \xi\rangle = \int_K \frac{f''}{f'}(y) f^*\xi(y) d\nu(y),$$

on a donc :

$$-\sum_{z \in C_f \cup Z} \mathrm{Res}(q \cdot \eta, z) = \int_K \left(\frac{f''(y)}{f'(y)}\xi(y) + \frac{\dot{f}'(y)}{f'(y)}\right) d\nu(y).$$

Le lemme est alors prouvé, au regard de l'équation 2.7.2. □

Retournons maintenant à la preuve du théorème 2.7.7. D'après le lemme ci-dessus, il existe un représentant q de $B(\nu)$ tel que $\nabla_f q \in Q(V_f \cup Z)$ et

$$D\mathcal{L}_\nu(0) \cdot [\mu] = -\Re\left(\sum_{y \in C_f \cup Z} \mathrm{Res}(q \cdot \eta, y)\right).$$

Or, si $y \in Z$, $\eta(y) = f^*\xi(y) - \xi(y)$, et donc :

$$\mathrm{Res}(q \cdot \eta, y) = \mathrm{Res}(q \cdot (\xi - f^*\xi), y).$$

De plus, si $c \in C_f$ est un point critique, et que c_λ est un point critique de f_λ dépendant holomorphiquement de λ, tel que $c = c_0$, on a :

$$\frac{d}{d\lambda}_{|\lambda=0} f_\lambda(c_\lambda) = \frac{df_\lambda}{d\lambda}_{|\lambda=0}(c).$$

Donc :

$$\begin{aligned} -\sum_{y \in C_f \cup Z} \mathrm{Res}(q \cdot \eta, y) &= \sum_{y \in C_f \cup Z} \mathrm{Res}(q \cdot (\xi - f^*\xi), y) \\ &= \sum_{y \in V_f \cup Z} \mathrm{Res}(\nabla_f q \cdot \xi, y) \\ &= \int_{\mathbb{P}^1} \nabla_f q \cdot \overline{\partial}\xi. \end{aligned}$$

La dernière égalité vient de la proposition 1.1.11 et du fait que $\nabla_f q \in Q(K \cup V_f)$. Pour achever la preuve du théorème, rappelons que la quantité

$$\int_{\mathbb{P}^1} \nabla_f q \cdot \overline{\partial}\xi$$

ne dépend ni du représentant q de $B(\nu)$, ni du représentant $\overline{\partial}\xi$ de $[\mu] \in T_0\Lambda$. $\square$

2.8 Sommes de Birkhoff de différentielles quadratiques

Dans cette section, nous allons nous intéresser au comportement des sommes de Birkhoff :

$$S_n q = \frac{1}{n} \sum_{k \leq n-1} f_*^k q$$

où $q \in Q(\Lambda_f)$.

L'intérêt de ces sommes vient notamment du fait que $S_n q$ converge vers 0 (dans $Q(\Lambda_f)$) si et seulement si $q \in \overline{\nabla_f Q(\Lambda_f)}$, c'est-à-dire si et seulement si q représente la forme linéaire triviale dans $T_0^*\mathrm{Teich}(f)$ (voir [Mak10]).

Ainsi, dans le cas des polynômes quadratiques, on pourrait reformuler la conjecture "pas de champ de droite invariants" de la façon suivante : notons q_c une différentielle quadratique élémentaire ayant un pôle en c et trois pôles sur un 3-cycle de f_c.

Conjecture 2.8.1. Soit $c \in \mathbb{C}$ tel que $c \in \mathcal{J}(f_c)$, où $f_c(z) = z^2 + c$. Alors $S_n q_c$ converge vers 0.

Nous allons étudier le comportement de $S_n q$ en l'absence de champs de droite invariants. On montrera notamment que dans le cas où K est l'adhérence d'une orbite critique capturée par un cycle attractif, la propriété 2.7.1 n'est pas vérifiée.

L'outil principal est le résultat suivant de théorie ergodique :

Théorème 2.8.2 (Lemme ergodique de la moyenne)**.** *Soit $T : X \to X$ un opérateur non-dilatant d'un espace de Banach X, et $S_n x = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k x$. Il y a exactement trois possibilités (mutuellement exclusives) :*

- *$S_n x$ admet une suite extraite convergeant faiblement vers 0 : alors $x \in \overline{(\mathrm{Id} - T)X}$ et $S_n x$ converge en fait vers 0 en norme*

— *$S_n x$ admet une suite extraite convergeant faiblement vers $y \neq 0$: alors y est un point fixe de T et $S_n x$ converge en fait vers y en norme*
— *$S_n x$ n'a aucune valeur d'adhérence faible dans X.*

Proposition 2.8.3. Soit $q \in Q(\Lambda_f)$. La suite $\|S_n q\|$ converge vers une limite l avec $l \leq \|[q]\|_T$, la norme de $[q] \in T_0^*\mathrm{Teich}(f)$ pour la métrique de Teichmüller.

Démonstration. Soit $q \in Q(\Lambda_f)$. Commençons par montrer que $n\|S_n q\|$ vérifie la propriété de sous-additivité
$$(n+p)\|S_{n+p}q\| \leq n\|S_n q\| + p\|S_n q\|.$$
ce qui implique classiquement que $\|S_n q\|$ converge vers son infimum. Soit $n, p \in \mathbb{N}$. On a :
$$\begin{aligned}(n+p)S_{n+p}q &= \sum_{k=0}^{n+p-1} f_*^k q \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} f_*^k q + f_*^n \sum_{k=0}^{p-1} f_*^k q\end{aligned}$$
et donc, comme $\|f_* q\| \leq \|q\|$ pour toute différentielle quadratique intégrable q :
$$(n+p)\|S_{n+p}q\| \leq n\|S_n q\| + p\|S_p q\|.$$

Il reste maintenant à montrer que la limite de $\|S_n q\|$ est inférieure à la distance de q à $\overline{\nabla_f Q(\Lambda_f)}$. Soit $\epsilon > 0$, et soit $\phi_1, \phi_2 \in Q(\Lambda_f)$ telles que $q = \nabla_f \phi_1 + \phi_2$, avec $\|\phi_2\| \leq \delta + \epsilon$, où $\delta := d(q, \overline{\nabla_f Q(\Lambda_f)})$. On a :
$$S_n q = \nabla_f S_n \phi_1 + S_n \phi_2,$$
et $\|\nabla_f S_n \phi_1\| = O(\frac{1}{n})$, et $\lim_{n\to\infty} \|S_n \phi_2\| \leq \|\phi_2\|$. Donc :
$$\lim_{n\to\infty} \|S_n q\| \leq \delta + \epsilon,$$
et comme ϵ est arbitraire, on a
$$\lim_{n\to\infty} \|S_n q\| \leq \delta.$$
□

Rappelons la définition suivante :

Définition 2.8.4. On appellera anneau de rotation toute composante connexe de Ω_f qui est un anneau de module fini inclus dans un anneau de Herman ou un disque de Siegel.

Si $\Omega \subset \mathbb{P}^1$ est un ouvert complètement invariant par f, notons $\mathrm{Fix}(f_*, \Omega)$ l'espace des différentielles quadratiques invariantes par f dans $Q(\Omega)$.

Proposition 2.8.5. Soit $\Omega \subset \Omega_f$ la grande orbite d'un anneau de rotation, et $q \in Q(\Omega)$. Alors $Q(\Omega) = \mathrm{Fix}(f_*, \Omega) \oplus \overline{\nabla_f Q(\Omega)}$ et $S_n q$ converge vers la projection de q sur $\mathrm{Fix}(f_*)$ parallèlement à $\overline{\nabla_f Q(\Omega)}$.

Démonstration. D'après le lemme ergodique moyen, si $q \in Q(\Omega)$ est tel que $S_n q$ ne converge pas vers 0, alors $q \notin \overline{\nabla_f Q(\Omega)}$. Par ailleurs, l'analyse faite dans la section 2.4.2.3 montre que $\dim Q(\Omega)/\overline{\nabla_f Q(\Omega)} = 1$, et l'opérateur $f_* : Q(\Omega) \to \Omega$ admet exactement une droite de vecteur propre. Donc $Q(\Omega) = \mathrm{Fix}(f_*, \Omega) \oplus \overline{\nabla_f Q(\Omega)}$ et le reste est une application directe du lemme ergodique de la moyenne. □

Proposition 2.8.6. Soit $\Omega \subset \Omega_f$ l'intersection de Ω_f et de la grande orbite du bassin d'attraction d'un cycle attractif, superattractif ou parabolique, et $q \in Q(\Omega)$. Alors ou bien $q \in \overline{\nabla_f Q(\Omega)}$ et $S_n q$ converge vers 0, ou bien $S_n q$ n'a aucune valeur d'adhérence faible dans $Q(\Omega)$. Dans le second cas, la suite de mesures $|S_n q|$ converge faiblement-* vers une somme de diracs équidistribués le long du cycle, de masse totale $||[q]||_T$.

Démonstration. Supposons que $q \in Q(\Omega)$ et $q \notin \overline{\nabla_f Q(\Omega)}$. Alors $S_n q$ ne converge pas vers 0, et comme $f_* : Q(\Omega) \to Q(\Omega)$ n'a pas de points fixes non nuls, la suite de différentielles quadratiques $S_n q$ n'a aucune valeur d'adhérence faible dans $Q(\Omega)$ d'après le lemme ergodique moyen.

Cependant, par compacité faible-*, la suite de mesures $|S_n q|$ admet au moins une valeur d'adhérence, que l'on notera ν. Cette valeur d'adhérence ne peut pas être nulle, et est une mesure de Radon invariante, de support inclus dans l'adhérence $\overline{\Omega}$. Comme tout point du bassin d'attraction converge vers le cycle, le support de ν est en fait inclus dans le cycle lui-même et la frontière du bassin, qui est incluse dans l'ensemble de Julia $\mathcal{J}$. Or ν ne peut pas charger l'ensemble de Julia : en effet, pour n'importe quel ensemble $A \subset \mathbb{P}^1$ tel que $f^{-1}(A) \subset A$, la suite $\int_A |S_n q|$ est décroissante, donc converge vers $\nu(A)$ et est majorée par

$$\int_A S_n |q| = \frac{1}{n} \sum_{k \leq n-1} \int_{f^{-n}(A)} |q|.$$

Soit U un ouvert de Ω tel que $f^{-1}(U) \subset U$ (on peut par exemple construire un tel ouvert en prenant un domaine fondamental D, et en posant $U = \sum_{n\geq 0} f^{-n}(D)$). Posons $A = (\mathbb{P}^1 - \Omega) \cup U$: alors A est un voisinage de la frontière $\partial\Omega$. De plus, la suite $\int_{f^{-n}(A)} |q|$ converge vers 0. Donc $\nu(A) = 0$ et donc $\nu(\partial\Omega) = \nu(\mathcal{J}(f)) = 0$.

Ceci prouve que ν est une mesure supportée par le cycle et invariante, donc elle ne peut qu'être une somme de diracs équidistribuée le long du cycle. Par ailleurs, la masse totale de $|S_n q|$ décroit, donc elle converge, et donc ne dépend pas de la suite extraite. Donc la suite de mesures $|S_n q|$ n'a qu'une valeur d'adhérence faible-*, donc converge. □

Corollaire 2.8.1. Supposons que f n'ait pas de champ de droites invariant. Alors pour tout $q \in Q(\Lambda_f)$, la suite de mesures $|S_n q|$ converge faiblement-* vers une mesure de Radon invariante, qui ne dépend que de la classe de q dans $Q(\Lambda_f)/\overline{\nabla_f Q(\Omega)}$, et de masse totale inférieure à $\|[q]\|_T$.

Démonstration. Comme f n'a pas de champ de droites invariants, il n'y a pas de différentielles quadratiques invariantes intégrables supportées par son ensemble de Julia $\mathcal{J}(f)$. Il suffit alors d'appliquer les propositions ci-dessus. □