L'equation de DKP dans l'espace de Minkowski

2.1 Introduction

Dans le milieu des années 1930 [28], le succès de l'équation de Dirac dans la description des particules relativistes de spin 1/2 a motivé les scientifiques pour la recherche d'une équation du premier ordre similaire pour les particules de spin 0 et les particules de spin 1. Ce nouveau formalisme était pressenti pour remplacer les formalismes existant donnés par l'équation de Schrödinger de second ordre ou l'équation de Klein-Gordon (KG), connues aujourd'hui pour les particules de spin 0, et l'équation de Proca de second ordre pour les particules de spin 1. La première avancée majeure dans cette direction était initiée par De Broglie en 1934. Ce dernier a, depuis 1934, émis l'hypothèse d'un photo massif en état de repos. De Broglie a basé ses recherches sur une équation d'onde de premier ordre avec des matrices 16x16 résultant de produits dans des espaces de matrices γ de Dirac. Il espérait que la combinaison de deux leptons conduirait à la définition des photons massifs. L'un des étudiants de De Broglie, Petiau [27], a proposé une modification de l'algèbre de De Broglie qui a abouti à l'algèbre DKP 16x16. Il imposa sur ces matrices la relation suivante

$$\beta^a \beta^b \beta^c + \beta^c \beta^b \beta^a = \beta^a \delta^{bc} + \beta^c \delta^{ba} \tag{2.1}$$

Par la suite, Géhéniau a décomposé l'algèbre DKP 16x16 en une représentation de cinq, dix et une dimension triviale [28]. Cependant, les travaux de Pétiau en 1936 sont restés méconnus pour la plupart des chercheurs. Particulièrement, Kemmer a consulté les travaux de Pétiau après la fin de la deuxième guerre mondiale. Kemmer [29] et Duffin [30] étaient inspirés par les travaux de Proca. Kemmer conclut que l'équation de Proca peut être décrite par un ensemble d'équations couplées du premier ordre et écrite de manière analogue au cas du spin 0. Kemmer réussit à formuler l'équation de Proca explicitement sous formes matricielles 5x5 et 10x10 sans avoir aucune connaissance de la propriété de commutation vérifiée par ces matrices.

Juste après les travaux de Kemmer, Duffin a assisté à une discussion autour des équations de Proca animée par Kemmer dans un séminaire de physique. Lors de cette discussion Duffin voulait savoir comment conclure que cette nouvelle théorie était de spin 1. La réponse donnée par Kemmer à cette question n'a pas satisfait la curiosité de Duffin. Comme suite, ce dernier, très attaché au formalisme de Dirac du premier ordre, réussit à formuler les équations du spin 0 et spin 1 par desβ-matrices. Dans sa démarche, Duffin a exploité trois des quatre relations de commutation constituantes représentées dans l'équation (2.1) (non pas pour $c = b \neq a$).

A la lecture des travaux de Duffin, Kemmer écrivit à Duffin pour l'informer qu'il savait comment étendre sa théorie et qu'il attendait de lui de publier d'avantage sur cette théorie. Duffin, à l'époque très impliqué avec A.C. Schaeffer sur la théorie des fonctions, donna son approbation à Kemmer pour publier sur cette théorie. Suite à cela, Kemmer rassemble ses travaux sur le sujet et publie son papier classique de 1939 sur la théorie de méson. Son article est devenue une référence principale dans l'étude des particules bosoniques [30, 31].

Finalement, Le formalisme DKP devenait intéressant du fait qu'il contient des composantes pseudoscalaires et vectorielles présente dans la description des interactions produisant des forces nucléaires basses énergies.

2.2 Les matrices β_μ

Nous savons que les mésons sont des particules possédant une masse m et une charge$\pm e$. Leur mouvement est régi par l'équation d'onde suivante [29, 32]

$$(\beta^\mu \partial_\mu + \mathrm{k})\, \Psi_k = 0 \tag{2.2}$$

où β sont des matrices qui vérifient les relations suivantes

$$\beta^a\beta^b\beta^c + \beta^c\beta^b\beta^a = \beta^a\delta^{bc} + \beta^c\delta^{ba} \tag{2.3}$$

avec

$$\mathrm{k} = \frac{mc}{\hbar}, \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}, x_4 = ict. \tag{2.4}$$

Notons que ces matrices n'ont pas d'inverse.

A partir de l'équation (2.3) nous avons

$$\eta_4 = 2\beta_4^2 - 1, \tag{2.5}$$

et

$$\begin{cases} \beta_4 = \eta_4\beta_4 = \beta_4\eta_4, \quad \eta_4^2 = 1 \\ \eta_4\beta_k - \beta_k\eta_4 = 0 \;\; (k = 1, 2, 3) \end{cases} . \tag{2.6}$$

Conjuguons maintenant l'équation (2.2)

$$\partial_\mu \Psi_k^\dagger \beta^\mu - k\Psi_k^\dagger = 0, \tag{2.7}$$

où

$$\Psi_k^\dagger = i\Psi_k^* \eta_4. \tag{2.8}$$

Les deux équations fondamentale (2.2) et (2.7) peuvent être trouvées à partir de la densité lagrangienne définie par

$$\mathcal{L} = \frac{-i\hbar}{2}\left(\partial_\mu \bar{\Psi}\beta^\mu\Psi - \bar{\Psi}\beta^\mu\partial_\mu\Psi\right) + m\bar{\Psi}\Psi, \tag{2.9}$$

avec

$$\bar{\Psi} = \Psi^\dagger\eta_4. \tag{2.10}$$

2.2.1 -Le nombre des représentations irréductibles

Nous savons que dans le cas de l'équation de Dirac, les matrices γ admettent une seule représentation irréductible. Pour le cas de l'équation de DKP (2.2), nous avons des matrices β_μ vérifiant une certaine relation plus compliquée que celle relative aux matrices γ. Pour trouver les différentes représentations irréductibles, il faut d'abord chercher le nombre de quantités linéairement indépendantes qui, dans le cas de l'équation de Dirac, le nombre est de 16 .

Soit la relation suivante

$$\eta_\mu = 2\beta_\mu^2 - 1 \tag{2.11}$$

nous pouvons montrer les égalités suivantes

$$\begin{cases} \beta_\mu^3 = \beta_\mu, \eta_\mu^2 = 1, \\ \eta_\mu\eta_\nu - \eta_\nu\eta_\mu = 0, \eta_\mu\beta_\nu + \beta_\nu\eta_\mu = 0, (\nu \neq \mu), \\ \beta_\mu = \eta_\mu\beta_\mu = \beta_\mu\eta_\mu. \end{cases} \tag{2.12}$$

A partir de ces équations, nous formons une liste d'éléments linéairement indépendants

Élément	Nb des éléments de ce type	Élément	Nb des éléments de ce type
I	1	$\eta_\mu\beta_\nu\beta_\rho\beta_\sigma$	12
β_μ	14	$\eta_\mu\eta_\nu$	6
$\beta_\mu\beta_\nu$	12	$\eta_\mu\eta_\nu\beta_\rho$	12
$\beta_\mu\beta_\nu\beta_\rho$	12	$\eta_\mu\eta_\nu\beta_\rho\beta_\sigma$	12
$\beta_\mu\beta_\nu\beta_\rho\beta_\sigma$	6	$\eta_\mu\eta_\nu\eta_\rho$	4
η_μ	4	$\eta_\mu\eta_\nu\eta_\rho\beta_\sigma$	4
$\eta_\mu\beta_\nu$	12	$\eta_\mu\eta_\nu\eta_\rho\eta_\sigma$	1
$\eta_\mu\beta_\nu\beta_\rho$	24	Nb total	126

Table2.2-Dénombrement des différents éléments linéairement indépendant.

En tout il y a 126 éléments linéairement indépendants formés à partir des matrices β_μ. Parmi ces éléments il y a ceux qui commutent entre eux [22]. D'après Kemmer, il y en a trois qui sont définis comme suit

$$I = \text{matrice unité}, \tag{2.13}$$

$$M = \sum_\mu \eta_\mu - \sum_{\mu\prec\nu} \eta_\mu\eta_\nu, \tag{2.14}$$

$$\text{et} = \eta_1\eta_2\eta_3\eta_4 \left(1 - \sum_\mu \eta_\mu\right). \tag{2.15}$$

Alors trois représentations irréductibles de dimensions n_1, n_2, n_3 sont présentent. Suivant la théorie des groupes [22], on a la relation suivante

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 126. \tag{2.16}$$

Cette équation nous permis d'avoir les dimensions de ces représentations : on a donc le choix suivant

$$n_1 = 10, n_2 = 5, n_3 = 1 \text{ avec } 10^2 + 5^2 + 1^2 = 126. \tag{2.17}$$

Nous avons donc trois représentations irréductibles de dimensions 10, 5, 1, qui décrivent chacune, une situation physique bien déterminée. La dimension 1 est un cas trivial qui n'a pas d'intérêt physique.

2.2.2 -La représentation des matrices de Kemmer(β_μ)

Comme il a été mentionné auparavant, il existe trois représentations irréductibles pour les matrices β_μ : pour la représentation de dimension 10, nous avons

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

$$\beta_3 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1\\ 0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \beta_4 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ i&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&i&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&i&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \tag{2.19}$$

par contre, pour la représentation de dimension 5, nous avons

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0 \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

$$\beta_3 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&1&0 \end{pmatrix}, \beta_4 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&-i\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ i&0&0&0&0 \end{pmatrix} \tag{2.21}$$

On peut voir que ces matrices sont dans des formes complètement irréductibles, et dont chaque matrice de même ordre peut être écrite comme une combinaison linéaire des quatre matrices β et leurs multiplications. Parmi les trois représentation irréductible, la représentation de dimension dix, conduit à la théorie bien connue de Proca, par contre, la représentation de dimension cinq conduit à la théorie scalaire.

Belinfante [14], a par ailleurs montré que la théorie à 16 composantes peut être obtenu en définissant des matrices $\acute{\beta}_\mu$ dans une représentation réductible

$$\acute{\beta}_\mu = \frac{1}{2}\left(\gamma_\mu \otimes I + I \otimes \gamma_\mu\right). \tag{2.22}$$

Alors, nous obtenons l'équation des mésons suivante

$$\left(\partial_\mu \left(\gamma_\mu \otimes I + I \otimes \gamma_\mu\right) + \mathrm{k}\right)\Psi_k = 0. \tag{2.23}$$

Pour terminer, il est important de noter que une étude plus approfondie, basée sur (2.22), montre que la fonction d'onde Ψ_k se comporte en un produit symétrique de deux fonctions d'onde de Dirac

$$\Psi_k = \Psi_D \otimes \Psi_D. \tag{2.24}$$

Cette procédure est équivalente à la réduction des $\acute{\beta}$ et à la restriction des considérations à la représentation de rang 10 seulement (Belinfante avait étudié seulement la formulation de la théorie de Proca).

2.3 Solutions exactes des équation de Dirac et de DKP dans le cas libre à (1+1) dimensions

Le but principal de cette partie est de montrer que la fonction d'onde de l'équation DKP peut être obtenue à partir du produit direct de deux fonctions d'onde de Dirac. Lorsque nous passons de $(3+1)$ dimensions à $(1+1)$ dimensions, nous perdons la dynamique de spin et l'écriture des solutions sous la forme spinorielle devient un problème difficile. Bien que les solutions de l'équation de Dirac à $(1+1)$ dimensions peut être écrit sous une forme des ondes similaire de type U ou de type V, il n'est pas facile de le faire pour l'équation DKP. Une autre façon est que, puisque l'équation DKP est écrite comme le produit direct de deux fonctions d'onde de Dirac, on peut tester si les produits directs des fonctions d'onde de Dirac donnent les solutions de l'équation de DKP à $(1+1)$ ou non au moins dans le cas libre.

2.3.1 -L'équation de Dirac pour une particule libre à (1+1) dimensions

La forme covariante de l'équation de Dirac pour une particule libre dans l'espace de Minkowski est donnée par

$$(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\,\Psi_D = 0. \tag{2.25}$$

La fonction de Dirac Ψ_D est un spineur de deux dimensions qui s'écrit

$$\Psi_D = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}. \tag{2.26}$$

En utilisant les définitions des matrices γ^{μ}, l'equation(2.25)se reduit à un systeme d'équation comme suit

$$\begin{cases} (\partial_0 + im)\,\Psi_1 - \partial_1\Psi_2 = 0 \\ -\partial_1\Psi_1 + (\partial_0 + im)\,\Psi_2 = 0 \end{cases}. \tag{2.27}$$

Un calcul simple donne une équation différentielle pour la composante Ψ_2

$$\left(\partial_0^2 - \partial_1^2 + m^2\right)\Psi_2 = 0\cdot \tag{2.28}$$

Une équation similaire à (2.28) peut être obtenue, aussi. Les solutions de particules libres sont des ondes planes. Nous considérons séparément les solutions aux énergies positives et négatives. Pour l'énergie positive et le moment k positif, nous trouvons les solutions positives de l'équation de Dirac comme

$$\Psi_k^{+}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{L}}e^{i(kx-\omega t)}U(k) \tag{2.29}$$

avec

$$U(k) = \sqrt{\frac{\omega+m}{2\omega}}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{k}(\omega - m) \end{pmatrix}, \tag{2.30}$$

où nous avons appliqué la relation normalisation pour déterminer la constante de normalisation

$$N^{+} = \sqrt{\frac{\omega+m}{2\omega L}} \tag{2.31}$$

avec L est la longueur finie de la coordonnée spatiale.

Pour l'énergie négative et le moment k négatif, nous trouvons les solutions positives de l'équation de Dirac comme

$$\Psi_{-k}^{-}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{L}}e^{-i(kx-\omega t)}V(k) \tag{2.32}$$

avec

$$V(k) = \sqrt{\frac{\omega + m}{2\omega}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{k}(\omega - m) \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2.33}$$

Ces solutions vérifient les relations

$$U^{\dagger}(k) V(-k) = 0 \quad \text{et} \quad V^{\dagger}(-k) U(k) = 0 \cdot \tag{2.34}$$

2.3.2 -L'équation de DKP pour une particules libre à (1+1) dimensions

L'équation de DKP pour une particule libre dans l'espace de Minkowski est

$$(i\beta^{\mu}\partial_{\mu} - 2m) \Psi_k = 0. \tag{2.35}$$

Dans notre cas, nous limitons aux particules de spin 1. En appliquant les proprietés du produit tensoriel

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B \rightarrow a_{1n}B & \\ \downarrow & \\ a_{m1}B & a_{mn}B \end{pmatrix}, \tag{2.36}$$

on obtient les matrices β^{μ} à une dimention sous la forme suivante

$$\beta^0 = \sigma^3 \otimes I + I \otimes \sigma^3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \tag{2.37}$$

$$\beta^1 = -i\left(\sigma^2 \otimes I + I \otimes \sigma^2\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.38}$$

La fonction de kemmer Ψ_k est reduit a un spineur de 4 dimensions qui s'écrit

$$\Psi_k = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_0 \\ \Psi_{\tilde{0}} \\ \Psi_2 \end{pmatrix}. \tag{2.39}$$

En utilisant les définitions des matrices β_μ, l'equation(2.35)se reduit a un systeme d'équation comme suit

$$\begin{cases} (2\partial_0 + 2im)\,\Psi_1 - \partial_1\Psi_0 - \partial_1\Psi_{\tilde{0}} = 0 \\ -\partial_1\Psi_1 - 2im\Psi_0 + \partial_1\Psi_2 = 0 \\ -\partial_1\Psi_1 - 2im\Psi_0 + \partial_1\Psi_2 = 0 \\ (-2\partial_0 - 2im)\,\Psi_1 + \partial_1\Psi_0 + \partial_1\Psi_{\tilde{0}} = 0 \end{cases}. \tag{2.40}$$

On deduit

$$\Psi_{\tilde{0}} = \Psi_0 \Rightarrow \Psi_0 = \frac{i}{2m}\partial_1\left(\Psi_1 - \Psi_2\right)\cdot \tag{2.41}$$

On peut réecrit le systeme d'éqs. comme suit

$$\begin{cases} \partial_0\left(\Psi_1 + \Psi_2\right) + im\left(\Psi_1 - \Psi_2\right) - 2\partial_1\Psi_0 = 0 \\ \partial_0\left(\Psi_1 - \Psi_2\right) + im\left(\Psi_1 + \Psi_2\right) = 0 \end{cases}. \tag{2.42}$$

$$\Rightarrow \left(\Psi_1 + \Psi_2\right) = \frac{i}{m}\partial_0\left(\Psi_1 - \Psi_2\right)\cdot \tag{2.43}$$

Un calcul simple donne une équation différentielle pour la composante $\chi = \left(\Psi_1 - \Psi_2\right)$:

$$\left(\partial_0^2 - \partial_1^2 + m^2\right)\chi = 0\cdot \tag{2.44}$$

La solution χest de la forme

$$\chi^{\pm}\left(x,t\right) = Ne^{i(kx\mp\omega t)} \tag{2.45}$$

avec $\omega = \sqrt{k^2 + m^2}$et N est la constante de normalisation.

Pour les energies positive $\omega \succ 0$,le spineur Ψ_k^+ peut s'écrire comme suit

$$\Psi_k^+\left(x,t\right) = \frac{1}{\sqrt{L}}e^{i(kx-\omega t)}\tilde{U}\left(k\right) \tag{2.46}$$

avec

$$\tilde{U}(k) = \frac{m}{\omega}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(1+\frac{\omega}{m}\right) \\ -\frac{k}{2m} \\ -\frac{k}{2m} \\ -\frac{1}{2}\left(1-\frac{\omega}{m}\right) \end{pmatrix}. \tag{2.47}$$

Pour le cas des energies négatives $\omega \prec 0$,le spineur Ψ_{-k}^{-} peut s'écrire comme suit

$$\Psi_{-k}^{-}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{-i(kx-\omega t)}\tilde{V}(k) \tag{2.48}$$

avec

$$\tilde{V}(k) = \frac{m}{\omega}\begin{pmatrix} \frac{1}{2m}(\omega - m) \\ -\frac{k}{2m} \\ -\frac{k}{2m} \\ \frac{1}{2m}(\omega + m) \end{pmatrix}. \tag{2.49}$$

Pour ces solutions, nous avons

$$\tilde{U}^{\dagger}(k)\tilde{V}(-k) = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{V}^{\dagger}(-k)\tilde{U}(k) = 0\cdot \tag{2.50}$$

En conséquence, on peut voir que les solutions de l'équation DKP peuvent être obtenues par le produit direct des solutions de l'équation de Dirac

$$\tilde{U}(k) = U(k) \otimes U(k) \tag{2.51}$$

$$\tilde{V}(k) = V(k) \otimes V(k). \tag{2.52}$$

2.4 Conclusion

Nous avons étudié les solutions u-type et v-type de l'équation DKP. Pour ce faire, nous avons d'abord examiné les solutions de l'équation de Dirac pour le même cas et exprimé ces solutions en termes de solutions d'ondes planes, à savoir u-type et v-type solutions. Nous avons constaté que les solutions de l'équation de DKP pour les particules libres peuvent être obtenues à partir du produit direct de ces solutions de type u et de type V. Il s'agit des solutions de type u et v de l'équation DKP.

Chapitre 3

Solution de l'équation de DKP dans un espace-temps courbe à (1+1) dimensions pour le spin 1

3.1 Introduction

L'équation des bosons massifs DKP est une équation relativiste qu'a été d'abord proposée par Duffin–Kemmer–Petiau à la fin des années 1930. Elle définit le mouvement d'une particule vectorielle de spin 1. Elle est similaire à l'équation de Dirac où les matrices γ de Dirac ont été remplacées par les matrices β avec une algèbre plus compliquée que celle relative aux γ.

Dans le cas de $(1+3)$ dimensions, la fonction d'onde de la particule admet seize composantes $\Psi_k\,(k = 1, ...16)$, et à $(1+1)$ dimensions, le système est réduit à quatre composantes seulement trois composantes sont linéairement indépendantes.

Dans ce chapitre, nous commençons d'abord par une brève description de l'univers de Friedman-Robertson-Walker(FRW). Ensuite, nous passons à la résolution de l'équation de DKP à deux dimensions dans un espace -temps courbe. Comme nous allons voir, nous proposons au premier lieu des différentes formes du facteur d'échelle et nous essayons de déduire les fonctions d'onde correspondantes pour chaque cas en remplaçons les matrices de Kemmer par les matrices de Dirac et le spineur de Kemmer Ψ_k par le produit tensoriel de deux spineur de

Dirac $\Psi_k = \Psi_D \otimes \Psi_D$.

3.2 L'univers de Friedmann-Robertson-Walker(FRW)

La théorie quantique des champs dans l'univers de Friedman-Robertson-Walker est une théorie approximative de la gravitation quantique dans laquelle les champs de la matière sont quantifiés et le champ gravitationnel généré par la courbure de l'espace est traité classiquement. Dans notre travail nous nous intéressons au modèle cosmologique standard qui se repose essentiellement sur l'hypothèse suivante ; l'univers est localement homogène, isotrope et en expansion lorsqu'on le décrit dans le système des cordonnées comobiles (principe cosmologique). La modélisation mathématique de cette hypothèse nous amène à décrire l'espace-temps par une métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) dont la forme générale s'écrit

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2\right) \tag{3.1}$$

où (t, r, θ, ϕ) représente le système des coordonnées comobiles (les coordonnées comobi1es veulent dire que pour un observateur à l'origine r = 0, une galaxie aura les coordonnées r, θ, ϕ constantes. Ainsi, dans chaque direction d'observation θ=θ_0, $\phi = \phi_0$, les galaxies qui s'y trouvent auront chacune une coordonnée radiale r constante). La métrique (FLRW) nous permet de décrire la géométrique globale de l'univers en fonction de deux paramètres cosmologiques ; le facteur d'échelle $a(t)$ qui représente l'expansion de l'univers (temps,on peut le déterminer par les équations d'Einstein) et le scalaire

k qui représente la courbure spatiale. Suivant la valeur donnée à k, il est possible de postuler trois familles d'univers
$$\begin{cases} k = +1 & \text{univers fermé} \\ k = 0 & \text{univers plat} \\ k = -1 & \text{univers ouvert} \end{cases}.$$

Les équations d'Einstein liant la courbure de l'univers à la présence de la matière s'écrivent

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\lambda\kappa} R_{\lambda\kappa} = -8\pi G T_{\mu\nu} \tag{3.2}$$

où $R_{\mu\nu}$ est le tenseur de Ricci definit par

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda,\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu,\lambda} + \Gamma^{\mu}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\kappa} - \Gamma^{\kappa}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\lambda\kappa} \tag{3.3}$$

$\mathrm{T}^{\mu\nu}$ est le tenseur energie-implusion du fluide cosmologique .

et les connexions affines (symboles de Christoffel) sont définis par

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\kappa} = \frac{1}{2}g^{\mu\lambda}\left(g_{\lambda\nu,\kappa} + g_{\lambda\kappa,\nu} - g_{\nu\kappa,\lambda}\right). \tag{3.4}$$

Sans difficulté nous obtenons $\Gamma^{0}_{00} = \Gamma^{i}_{00} = 0$. Ce qui signifie qu'une particule qui est au repos reste toujours au repos dans ce système de coordonnées. Il résulte donc que le système de coordonnées comobiles suit le mouvement de l'observateur. Les symboles de Christoffel non nulles sont

$$\Gamma^{0}_{ij} = a\dot{a}\ \tilde{g}_{ij} \tag{3.5}$$

$$\Gamma^{i}_{0j} = \frac{\dot{a}}{a}\delta_{ij} \tag{3.6}$$

$$\Gamma^{i}_{lj} = k\ \tilde{g}_{lj}x^{i} \tag{3.7}$$

où

$$\tilde{g}_{ij} = \delta_{ij} + k\frac{x^{i}x^{j}}{1-kr^{2}} \tag{3.8}$$

En particulier, si nous choisissons l'univers plat, alors les symboles de Christoffel peuvent être réécrits

$$\Gamma^{0}_{ij} = a\dot{a}\delta_{ij} \tag{3.9}$$

$$\Gamma^{i}_{0j} = \frac{\dot{a}}{a}\delta^{i}_{j} \tag{3.10}$$

$$\Gamma^{i}_{lj} = 0 \tag{3.11}$$

Dans la représentation conforme (η, x), ces symboles deviennent

$$\Gamma^{\eta}_{\eta\eta} = \frac{\acute{a}}{a} \tag{3.12}$$

$$\Gamma^{\eta}_{ij} = \frac{\acute{a}}{a}\delta_{ij} \tag{3.13}$$

$$\Gamma^{i}_{\eta j} = \frac{\acute{a}}{a}\delta^{i}_{j} \tag{3.14}$$

où la prime désigne la dérivation par rapport à η.

Les différentes composantes de $R_{\mu\nu}$ sont

$$R_{00} = 3\frac{\ddot{a}}{a},\ R_{ij} = -\left(2\dot{a} + a\ddot{a} + 2k\right)\tilde{g}_{ij} \quad et \quad R_{0i} = \frac{\dot{a}}{a}k(\delta_{lj}\tilde{g}_{il} - \delta_{li}\tilde{g}_{jl})x^{j} \tag{3.15}$$

Au voisinage de l'origine $\tilde{g}_{ij} \sim \delta_{ij}$, il vient alors

$$R_{0i} = 0. \tag{3.16}$$

En prenant la trace des équations d'Einstein nous arrivons à

$$R = 8\pi GT. \tag{3.17}$$

Ce qui donne

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right), \tag{3.18}$$

où G est la constante de Newton et $T_{\mu\nu}$ le tenseur énergie-impulsion du fluide cosmologique. Sous l'hypothèse d'un fluide parfait, ce tenseur prend la forme suivante

$$T_{\mu\nu} = p g_{\mu\nu} + (p + \rho) u_\mu u_\nu \tag{3.19}$$

où $u_\mu$désigne le quadri-vitesse du gaz . Ici p et ρ sont respectivement la pression et la densité

dépendante du temps. Le fluide est choisi parfait car c'est la plus simple réalisation d'un tenseur énergie-impulsion diagonal et qui, par isotropie à toutes ses composantes spatiales égales.

$$T^{00} = \rho(t), \; T^{0i} = 0 \;, T^{ij} = a^{-2} p(t) \delta_{ij} \tag{3.20}$$

avec

$$T = g_{u\nu} T^{\mu\nu} = -\rho + 3p \tag{3.21}$$

En substituant les derniers résultats (3.15)et (3.20) et (3.21)dans l'équation d'Einstein pour obtenir les équations fondamentales de la cosmologie

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3} G (\rho + 3p) \tag{3.22}$$

$$4\pi G (\rho - p) = \frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{k}{a^2} \tag{3.23}$$

En combinant ces deux dernières équations, nous arrivons à

$$8\pi G\rho\left(t\right)=3\left(\frac{\dot{a}^{2}}{a^{2}}+\frac{k}{a^{2}}\right) \tag{3.24}$$

Cette équation est dénommée l'équation fondamentale de Friedmann qui gouverne l'expansion de l'univers et elle permet de déterminer la structure de l'univers selon son contenu.

A partir de la loi de conservation de l'énergie $\nabla_{\mu}T^{\mu 0}$, nous obtenons l'équation différentielle du premier ordre

$$\dot{\rho}+3\frac{\dot{a}}{a}\left(p+\rho\right)=0. \tag{3.25}$$

Suivant les observations [35] qui montrent la courbure spatiale est très proche de zéro, nous considérerons dans la suite de ce mémoire que l'univers est plat et fixerons par conséquent k = 0.

La dernière équation va permettre de déterminer totalement l'évolution de $a(t)$. Pour cela nous postulons une équation d'état reliant la densité et la pression

$$p=\omega\rho. \tag{3.26}$$

avec ω constant, car l'univers primordial est suffisamment homogène, pour cela, on trouve que

$$\rho=\rho_{0}\left(\frac{a}{a_{0}}\right)^{-3(1+\omega)}, \tag{3.27}$$

où ρ_0=$\rho(t_0)$ et $a_0 = a(t_0)$ sont respectivement la densité du fluide cosmique et le rayon de l'univers observé actuellement (dans la suite, l'indice 0 est réfère à l'instant présent). Suivant la valeur ω on distingue différentes situations

3.2.1 a)Un univers dominé par la matière (matière non –relativiste) pour $\omega = 0$

$$\rho=\rho_{0}\left(\frac{a}{a_{0}}\right)^{-3}. \tag{3.28}$$

En cosmologie, la matière est souvent appelée poussière et sa pression peut être considérée comme négligeable. Elle se compose de la matière baryonique et probablement de la matière non baryonique de nature encore inconnue. Dans un univers plat et d'après l'équation Friedmann

$$\frac{\dot{a}^{2}}{a^{2}}=\frac{8\pi G\rho_{0}}{3}\frac{a_{0}^{3}}{a^{3}} \tag{3.29}$$

Le facteur d'expansion devient

$$a(t) \sim t^{\frac{2}{3}} \tag{3.30}$$

A l'aide de la définition de la constante de Hubble $H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$ on peut déduire l'âge d'un univers plat dominé par la matière non relativiste $t_0 = \frac{2}{3H(t_0)}$.

3.2.2 b)Un univers dominé par le rayonnement (matière relativiste) pour $\omega = (\frac{1}{3})$

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-4} \tag{3.31}$$

Le rayonnement est constitué de rayonnement électromagnétique (photons), neutrinos (si $k_B T \geq mc^2$) et ondes gravitationnelles . Pour k=0, nous avons

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G \rho_0}{3} \frac{a_0^3}{a^3}, \tag{3.32}$$

ce qui réduit $a(t)$ à

$$a(t) \sim \sqrt{t} \tag{3.33}$$

3.2.3 c)Un univers dominé par l'énergie du vide (modèle de Sitter) $\omega = -1$

L'Univers est en accélération et correspond à un espace de de Sitter tel que

$$\rho = \Lambda = cste$$

Λ est la constante cosmologique. Dans un univers plat, l'équation de Friedmann étant

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G \Lambda}{3} \tag{3.34}$$

Le facteur d'échelle devient alors $a(t) = e^{Ht}$ avec $H = \sqrt{\frac{8\pi G\Lambda}{3}}$.[33]

3.3 Solution de l'équation de DKP dans un espace-temps courbe à (1+1) dimensions pour le spin 1

Dans le système d'unités où la constante de Planck $\hbar$ et la vitesse de la lumière c sont égales à 1, l'équation covariante de DKP s'écrira

$$\left[i\widetilde{\beta}^{\mu}\left(\partial_{\mu}-\Sigma_{\mu}\right)-m\right]\Psi_{k}\left(x\right)=0. \tag{3.35}$$

où m est la masse de la particule, et β sont les matrices de Kemmer qui vérifient les relations de commutation(2.3) .Les matrices $\widetilde{\beta}^{\mu}$ peuvent s'écrire aussi en fonction des matrices β^{μ}comme suit

$$\widetilde{\beta}^{\mu}=e_{i}^{\mu}\left(x\right)\beta^{\mu}, \tag{3.36}$$

où le tilde est utilisé pour désigner les matrices β dans l'espace-temps courbe et $e_{i}^{\mu}\left(x\right)$ sont des tétrades satisfaisant

$$g_{\mu\nu}=e_{\mu}^{i}e_{\nu}^{j}\eta_{ij}. \tag{3.37}$$

Notons que η_{ij}est la métrique habituelle de Minkowski

$$\eta_{ij}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

et les indices Grec et Latin représentent respectivement l'espace-temps courbe et plat. Les connexions de spin pour les particules de spin-1 données dans l'équation (5.1) sont écrites comme

$$\Sigma_{\mu}=\Gamma_{\mu}\otimes I+I\otimes\Gamma_{\mu}, \tag{3.38}$$

où Γ_{μ} sont les connexions de spin pour les particules de spin-1/2 vérifiant la relation

$$\Gamma_{\mu}=-\frac{1}{8}g_{\mu\alpha}\Gamma_{\nu\lambda}^{\alpha}\left[\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}\right]. \tag{3.39}$$

Ici $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$se sont les symboles de Christoffel

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}=\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\left(\partial_{\mu}g_{\beta\nu}+\partial_{\nu}g_{\beta\mu}-\partial_{\beta}g_{\mu\nu}\right). \tag{3.40}$$

En vertu de la relation générale de la métrique

$$ds^2 = -C_0^2\left(x,t\right)dt^2 + C_1^2\left(x,t\right)dx^2, \tag{3.41}$$

l'équation (3.35) peut se réécrire comme suit

$$\left[\frac{1}{C_0}\beta^0\partial_0 + \frac{1}{C_1}\beta^1\partial_1 - \frac{1}{C_0}\beta^0\Sigma_0 - \frac{1}{C_1}\beta^1\Sigma_1 + m\right]\Psi_k\left(x\right) = 0. \tag{3.42}$$

D'où l'on remplace les matrices de Dirac γ par les matrices de Pauli $\gamma^\alpha = (\sigma^3, -i\sigma^2)$

$$\beta^\mu = \sigma^\mu \otimes I + I \otimes \sigma^\mu \Rightarrow \begin{cases} \beta^0 = \sigma^3 \otimes I + I \otimes \sigma^3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ \beta^1 = -i\left(\sigma^2 \otimes I + I \otimes \sigma^\mu\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \tag{3.43}$$

D'autre part, les connexions de spin (3.38) deviennent

$$\Sigma_\mu = \lim_{\gamma\to\sigma}\Sigma_\mu = \Gamma_\mu \otimes I + I \otimes \Gamma_\mu \Rightarrow \begin{cases} \Sigma_0 = 0 \\ \Sigma_1 = -\frac{1}{2}\frac{\dot{C}_1}{C_0}\left(\alpha^1 \otimes I + I \otimes \alpha^1\right) \end{cases} \quad \text{avec } \alpha^1 = \gamma^0\gamma^1 \tag{3.44}$$

Maintenant passant aux applications.

3.3.1 -Cas d'un facteur d'échelle $a(t) = e^{Ht}$

Les fonctions d'onde de Dkp se laissent exprimer comme produit tensoriel des deux fonctions d'onde de Dirac.

A $(1+1)$ dimensions, Ψ_D est un spineur à deux composantes ce qui donne un spineur de Ψ_k à quatre composantes.

$$\Psi_k = \Psi_D \otimes \Psi_D = \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\rho \\ \rho\varphi \\ \varphi\rho \\ \varphi\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_0 \\ \Psi_{\tilde{0}} \\ \Psi_2 \end{pmatrix}. \tag{3.45}$$

D'autre part, la métrique générale (3.41) devient

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2Ht}dx^2, \tag{3.46}$$

et elle se réduit en fonction de temps conforme

$$\eta = -\frac{1}{H}e^{-Ht}, \tag{3.47}$$

à la forme

$$ds^2 = \frac{1}{H\eta}\left(-d\eta^2 + dx^2\right) \tag{3.48}$$

avec

$$d\eta = \frac{dt}{a(t)} \Rightarrow \begin{cases} \partial_0 = \frac{1}{a}\partial_\eta \\ a(\eta) = -\frac{1}{H\eta} \end{cases}, \tag{3.49}$$

$$\text{et } C_0 = 1, C_1 = a(t), \tag{3.50}$$

Pour déterminer les composantes $\Psi_1, \Psi_0, \Psi_{\tilde{0}}$ et Ψ_2, il suffit de chercher des solutions sous la forme

$$\Psi_\kappa(\eta, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{(ik_x x)}\chi(\eta) \tag{3.51}$$

où la fonction $\chi(\eta)$ ne dépend que de temps. Portons les équations (3.44), (3.49), (3.50) et (3.51) dans l'équation (3.42). Il vient

$$\left[\beta^0\partial_\eta + \beta^1\left(ik_x - \frac{1}{2\eta}\left(\sigma^1 \otimes I + I \otimes \sigma^1\right)\right) - \frac{im}{\eta H}\right]\chi(\eta) = 0 \tag{3.52}$$

En vertu des relations (3.43) et (3.44), cette équation peut s'écrire comme des trois équations différentielles couplées

$$\left(\partial_\eta + \frac{1}{2\eta} - \frac{im}{2\eta H}\right)\chi_1 + k_x^2\chi_0 + \frac{1}{2\eta}\chi_2 = 0 \tag{3.53a}$$

$$\left(\partial_\eta + \frac{1}{2\eta} + \frac{im}{2\eta H}\right)\chi_2 + k_x^2\chi_0 + \frac{1}{2\eta}\chi_1 = 0 \tag{3.53b}$$

$$(ik_x)(\chi_1 - \chi_2) - \frac{im}{\eta H}\chi_0 = 0 \tag{3.53c}$$

avec

$$\chi_0 = \chi_{\tilde{0}} \tag{3.54}$$

On obtient à partir de ce système des nouvelles équations différentielles

$$(3.53c) \Rightarrow \chi_0 = \frac{\eta H}{m} k_x \left(\chi_1 - \chi_2\right) \tag{3.55a}$$

$$(3.53a) - (3.53b) \Rightarrow \left(\chi_1 + \chi_2\right) = \frac{2\eta H}{im} \partial_\eta \left(\chi_1 - \chi_2\right) \tag{3.55b}$$

$$(3.53a) + (3.53b) \Rightarrow \left(\partial_\eta + \frac{1}{\eta}\right)\left(\chi_1 + \chi_2\right) - \frac{im}{2\eta H}\left(\chi_1 - \chi_2\right) - 2ik_x\chi_0 = 0 \tag{3.55c}$$

Remplaçons les équations $(3.55a)$et$(3.55b)$dans l'équation $(3.55c)$,on obtient

$$\left[\partial_\eta^2 + \frac{2}{\eta}\partial_\eta + k_x^2 + \frac{m^2}{4\eta^2 H^2}\right]\left(\chi_1 - \chi_2\right) = 0. \tag{3.56}$$

Par le changement $\chi = \frac{1}{\sqrt{\eta}}\varphi$, on réduit (3.56) à l'équation

$$\left[\partial_\eta^2 + \frac{1}{\eta}\partial_\eta + k_x^2 - \left(\frac{1}{4} - \frac{m^2}{4H^2}\right)\frac{1}{\eta^2}\right]\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) = 0, \tag{3.57}$$

de type Bessel

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{z}\partial_z + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right)\right]\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) = 0. \tag{3.58}$$

D'où ces solutions peuvent être écrites sous la forme

$$\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) = N_1 J_\nu\left(z\right) + N_2 J_{-\nu}\left(z\right) \tag{3.59}$$

où

$$\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) = N_3 H_\nu^{(1)}\left(z\right) + N_4 H_\nu^{(2)}\left(z\right). \tag{3.60}$$

avec les N_i se sont des constantes arbitraires et z et ν sont donnés par

$$z = k_x\eta, \;\; \nu = i\left|\tilde{\nu}\right| = i\sqrt{\frac{m^2}{4H^2} - \frac{1}{4}}. \tag{3.61}$$

A l'aide des équations $(3.55a)$ et $(3.55b)$ et la relation de récurrence des fonctions Bessel

$$z\frac{d}{dz}H_\nu^{(2)}\left(z\right) - \nu H_\nu^{(2)}\left(z\right) = -zH_{\nu+1}^{(2)}\left(z\right), \tag{3.62}$$

on détermine aisément la solution régulière de l'équation (3.35) à l'infinie

$$\Psi_\kappa\left(\eta, x\right) = \frac{N_\infty}{\sqrt{2\pi}} e^{(ik_x x)} \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{\eta}}\left\{\left(\frac{iH}{m}\left(1 - 2\nu\right) + 1\right)H_\nu^{(2)}\left(z\right) + \frac{2iHk_x}{m}\eta H_{\nu+1}^{(2)}\left(z\right)\right\} \\ \frac{Hk_x}{m}\sqrt{\eta}H_\nu^{(2)}\left(z\right) \\ \frac{Hk_x}{m}\sqrt{\eta}H_\nu^{(2)}\left(z\right) \\ \frac{1}{2\sqrt{\eta}}\left\{\left(\frac{iH}{m}\left(1 - 2\nu\right) - 1\right)H_\nu^{(2)}\left(z\right) + \frac{2iHk_x}{m}\eta H_{\nu+1}^{(2)}\left(z\right)\right\} \end{pmatrix}. \tag{3.63}$$

3.3.2 -Cas d'un facteur d'échelle $a(t) = a_0 t$

Suivant les mêmes étapes précédentes, nous obtenons pour la métrique

$$ds^2 = -dt^2 + (a_0 t)^2 \, dx^2, \tag{3.64}$$

Cette équation se réécrite comme

$$ds^2 = a^2(\eta)\left(-dt^2 + dx^2\right), \tag{3.65}$$

où

$$d\eta = \frac{dt}{a(t)} \Rightarrow \begin{cases} \partial_0 = \frac{1}{a}\partial_\eta \\ \eta = \frac{1}{a_0}\ln t \\ a(\eta) = a_0 e^{a_0 \eta} \end{cases} . \tag{3.66}$$

Les équations différentielles couplées sont

$$\begin{aligned}
\left(2\partial_0 + \frac{\dot{a}}{a} + iM\right)\Psi_1 - \frac{1}{a}\partial_1\Psi_0 - \frac{1}{a}\partial_1\Psi_{\tilde{0}} + \frac{\dot{a}}{a}\Psi_2 &= 0 && (3.67)\\
-\frac{1}{a}\partial_1\Psi_1 - iM\Psi_0 + \frac{1}{a}\partial_1\Psi_2 &= 0 && (3.68)\\
-\frac{1}{a}\partial_1\Psi_1 - iM\Psi_{\tilde{0}} + \frac{1}{a}\partial_1\Psi_2 &= 0 && (3.69)\\
\left(2\partial_0 + \frac{\dot{a}}{a} - iM\right)\Psi_2 - \frac{1}{a}\partial_1\Psi_0 - \frac{1}{a}\partial_1\Psi_0 + \frac{\dot{a}}{a}\Psi_1 &= 0 && (3.70)
\end{aligned}$$

Considérons la fonction d'onde $\Psi_\kappa(t,x)$ sous la forme

$$\begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_0 \\ \Psi_{\tilde{0}} \\ \Psi_2 \end{pmatrix} = a^{\frac{-1}{2}}(t)\,\frac{e^{ik_x x}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_0(t) \\ h_{\tilde{0}}(t) \\ h_2(t) \end{pmatrix} \tag{3.71}$$

Nous obtenons le système couplé suivant

$$\begin{aligned}
\left(\partial_0 + i\frac{M}{2}\right)h_1 - i\frac{k_x}{a}h_0 + \frac{\dot{a}}{2a}h_2 &= 0 && (3.72)\\
\frac{-k_x}{a}h_1 - Mh_0 + \frac{k_x}{a}h_2 &= 0 && (3.73)\\
\left(\partial_0 - i\frac{M}{2}\right)h_2 - i\frac{k_x}{a}h_0 + \frac{\dot{a}}{2a}h_1 &= 0 && (3.74)
\end{aligned}$$

Par un simple calcul nous arrivons aux équations

$$h_0 = \frac{-1k_x}{Ma}(h_1 - h_2) \tag{3.75}$$

$$(h_1 + h_2) = \frac{2i}{M}\left(\partial_0 - \frac{\dot{a}}{2a}\right)(h_1 - h_2) \tag{3.76}$$

$$\left(\partial_0 + \frac{\dot{a}}{2a}\right)(h_1 + h_2) + i\frac{M}{2}(h_1 - h_2) - 2i\frac{k_x}{a}h_0 = 0 \tag{3.77}$$

A partir de ces équations on obtient

$$\left[\partial_0^2 + \frac{\dot{a}^2 - 2a\ddot{a}}{4a^2} + \left(\frac{M}{2}\right)^2 + \left(\frac{k_x}{a}\right)^2\right](h_1 - h_2) = 0 \tag{3.78}$$

Considérons maintenant le facteur d'échelle $a(t) = a_0 t$ et en remplaçant dans l'équation(3.78). Il vient alors

$$\left[\partial_0^2 + \left(\frac{1}{4} + \frac{k_x^2}{a_0^2}\right)\frac{1}{t^2} + \left(\frac{M}{2}\right)^2\right](h_1 - h_2) = 0 \tag{3.79}$$

Par le changement

$$(h_1 - h_2) = \sqrt{t}\chi(z)$$

on réduit (3.79) à l'équation de type Bessel

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{z}\partial_z + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right)\right]\chi(z) = 0. \tag{3.80}$$

D'où ces solutions peuvent être écrites sous la forme

$$\chi(z) = N_1 J_\nu(z) + N_2 J_{-\nu}(z) \tag{3.81}$$

où

$$\chi(z) = N_3 H_\nu^{(1)}(z) + N_4 H_\nu^{(2)}(z), \tag{3.82}$$

avec les N_i se sont des constantes arbitraires et z et ν sont donnés par

$$z = \frac{M}{2}t,\ \nu = i|\tilde{\nu}| = i\frac{k_x}{a_0}. \tag{3.83}$$

A l'aide des équations (3.75) et (3.76) et la relation de récurrence des fonctions Bessel

$$z\frac{d}{dz}H_\nu^{(2)}(z) - \nu H_\nu^{(2)}(z) = -zH_{\nu+1}^{(2)}(z), \tag{3.84}$$

on détermine aisément la solution régulière de l'équation (3.35) à l'infinie

$$\Psi_\kappa(\eta,x)=\frac{N_\infty}{\sqrt{2\pi a_0 t}}e^{(ik_x x)}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{t}}{2}\left\{\left(1+\frac{2i\nu}{m^2 t}\right)H_\nu^{(2)}\left(\frac{M}{2}t\right)-\frac{i}{m}H_{\nu+1}^{(2)}\left(\frac{M}{2}t\right)\right\}\\ \frac{-k_x}{Ma_0\sqrt{t}}H_\nu^{(2)}(z)\\ \frac{-k_x}{Ma_0\sqrt{t}}H_\nu^{(2)}(z)\\ \frac{\sqrt{t}}{2}\left\{\left(-1+\frac{2i\nu}{m^2 t}\right)H_\nu^{(2)}\left(\frac{M}{2}t\right)-\frac{i}{m}H_{\nu+1}^{(2)}\left(\frac{M}{2}t\right)\right\}\end{pmatrix}. \tag{3.85}$$

3.3.3 -Cas d'un facteur d'échelle $a(t)=\sqrt{\Gamma+\Lambda t}$

Dans notre cas, nous posons

$$ds^2=-\frac{1}{a^2(t)}dt^2+a^2(t)\,dx^2, \tag{3.86}$$

Si nous choisissons

$$d\eta=\frac{dt}{a(t)}\Rightarrow\begin{cases}\partial_0=\frac{1}{a}\partial_\eta\\ \eta=\frac{2}{\Lambda}a(t)\\ a(\eta)=\frac{\Lambda}{2}\eta\end{cases}, \tag{3.87}$$

l'équation (3.86) se réécrite comme

$$ds^2=-d\eta^2+a^2(\eta)\,dx^2. \tag{3.88}$$

Afin d'obtenir une forme de type Minkowski, il suffit de remplacer le temps η par le temps conforme τ comme suit

$$d\tau=\frac{d\eta}{a(\eta)}\Rightarrow\begin{cases}\partial_\eta=\frac{1}{a}\partial_\tau\\ \tau=\frac{2}{\Lambda}\ln\eta\\ a(\tau)=e^{\frac{\Lambda}{2}\tau}\end{cases}. \tag{3.89}$$

Il vient alors

$$ds^2=a^2(\tau)\left(-d\tau^2+dx^2\right). \tag{3.90}$$

Considérons la fonction d'onde $\Psi_\kappa(t,x)$ sous la forme

$$\begin{pmatrix}\Psi_1\\ \Psi_0\\ \Psi_{\tilde{0}}\\ \Psi_2\end{pmatrix}=\frac{e^{ik_x x}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\begin{pmatrix}h_1(t)\\ h_0(t)\\ h_{\tilde{0}}(t)\\ h_2(t)\end{pmatrix} \tag{3.91}$$

Remplaçons dans l'équation(3.42), nous obtenons le système couplé suivant

$$\begin{cases} (2a\partial_0 + \dot{a} + im)\, h_1 - 2i\left(\frac{k}{a}\right) h_0 + \dot{a}h_2 = 0 \\ (2a\partial_0 + \dot{a} - im)\, h_2 - 2i\left(\frac{k}{a}\right) h_0 + \dot{a}h_1 = 0 \\ i\left(\frac{k}{a}\right)(h_1 - h_2) + imh_0 = 0 \end{cases} \tag{3.92}$$

avec

$$\begin{cases} \Sigma_0 = 0 \\ \Sigma_1 = \frac{1}{2}\dot{a}a\left(\sigma^1 \otimes I + I \otimes \sigma^1\right) \end{cases}. \tag{3.93}$$

Par un simple calcul nous arrivons aux équations

$$h_0 = \frac{-1}{m}\left(\frac{k}{a}\right)(h_1 - h_2) \tag{3.94}$$

$$h_1 + h_2 = i\frac{a\partial_0}{m}(h_1 - h_2) \tag{3.95}$$

$$(2a\partial_0 + 2\dot{a})(h_1 + h_2) + im(h_1 - h_2) - 4i\left(\frac{k_x}{a}\right) h_0 = 0 \tag{3.96}$$

A partir de ces équations on obtient

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + 2\frac{\dot{a}}{a}\frac{d}{dt} + \left(\frac{m}{2}\right)^2 \frac{1}{a^2} + \left(\frac{k}{a^2}\right)^2\right](h_1 - h_2) = 0 \tag{3.97}$$

Remplaçons $a(t) = \sqrt{\Gamma + \Lambda t}$ et $\chi(t) = (h_1 - h_2)$ .Il vient alors

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + 2\frac{\Gamma}{\Gamma + \Lambda t}\frac{d}{dt} + \left(\frac{m}{2}\right)^2 \frac{1}{\Gamma + \Lambda t} + \left(\frac{k}{\Gamma + \Lambda t}\right)^2\right]\chi(t) = 0 \tag{3.98}$$

Par le changement $\chi(t) = \frac{1}{\sqrt{u}}\varphi(u)$, on réduit (3.98) à l'équation

$$\left[\frac{d^2}{du^2} + \left(\frac{1}{4} + \left(\frac{2k}{\Lambda}\right)^2\right)\frac{1}{u^2} + \left(\frac{m}{\Lambda}\right)^2\right]\varphi(u) = 0, \quad \text{avec } u = \sqrt{\Gamma + \Lambda t}\ . \tag{3.99}$$

Faisons un deuxième changement $u = \rho\beta$. Nous obtenons l'équation

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \left(\frac{1}{4} + \left(\frac{2k}{\Lambda}\right)^2\right)\frac{1}{\rho^2} + \left(\frac{m\beta}{\Lambda}\right)^2\right]\varphi(\rho) = 0 \tag{3.100}$$

de type Bessel

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{z}\partial_z + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right)\right]\varphi(z) = 0. \tag{3.101}$$

D'où ces solutions peuvent être écrites sous la forme

$$\varphi(z) = N_1 J_\nu(z) + N_2 J_{-\nu}(z) \tag{3.102}$$

où

$$\varphi(z) = N_3 H_\nu^{(1)}(z) + N_4 H_\nu^{(2)}(z), \tag{3.103}$$

avec les N$_i$ se sont des constantes arbitraires et z et ν sont donnés par

$$z = \frac{m\beta}{\Lambda}\rho,\ \ \nu = i\left|\tilde{\nu}\right| = i\frac{2k_x}{\Lambda}. \tag{3.104}$$

A l'aide des équations (3.94) et (3.95) et la relation de récurrence des fonctions Bessel

$$z\frac{d}{dz}H_\nu^{(2)}(z) - \nu H_\nu^{(2)}(z) = -zH_{\nu+1}^{(2)}(z), \tag{3.105}$$

On détermine aisément la solution régulière de l'équation (3.35) à l'infinie

$$\Psi_\kappa(\rho, x) = \frac{N_\infty}{\sqrt{2\pi}}e^{(ik_x x)}\begin{pmatrix} \frac{i\Lambda}{2m\beta\rho^{3/2}}\left(-\frac{1}{2}+\nu-\frac{2im\beta\rho}{\Lambda}\right)H_\nu^{(2)}(z) - \frac{i}{4\sqrt{\rho}}H_{\nu+1}^{(2)}(z) \\ \frac{-k}{ma\sqrt{\rho}}H_\nu^{(2)}(z) \\ \frac{-k}{ma\sqrt{\rho}}H_\nu^{(2)}(z) \\ \frac{i\Lambda}{2m\beta\rho^{3/2}}\left(-\frac{1}{2}+\nu+\frac{2im\beta\rho}{\Lambda}\right)H_\nu^{(2)}(z) - \frac{i}{4\sqrt{\rho}}H_{\nu+1}^{(2)}(z) \end{pmatrix}. \tag{3.106}$$

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exposé une breve description de l'univers de (FRW). Ainsi, nous avons écrire l'éq. DKP pour les particules massives de spin-1 dans le (FRW) univers. Ensuite nous avons considéré comme application des facteurs d'échelle pour lesquels l'éq. DKP est soluble.