

Elimination des degrés de liberté fantômes

"A theory with mathematical beauty is more likely to be correct than an ugly one that fits some experimental data"

Paul Dirac

4.1 Introduction

Nous avons vu au chapitre précédent que la géométrie de Riemann-Cartan est le cadre géométrique des théories de jauge de Poincaré locales, dont les transformations de Lorentz génèrent la courbure de l'espace-temps et les translations donne lieu à une torsion. Le lagrangien qui décrit ces théories de jauge est quadratique. La théorie est donc susceptible d'avoir des degrés de liberté fantômes (ghosts). L'objectif de ce chapitre est d'étudier l'existence des ghosts dans le secteur vectoriel est comment les éliminer.

En premier lieu, nous faisons une décomposition irréductible pour le tenseur de torsion et de contorsion pour pouvoir séparé le secteur vectoriel. Ensuite, nous analysons l'existence des ghosts.

4.2 Torsion et Contorsion

Dans le cas général, la connexion $\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}$ n'est pas symétrique. Elle contient donc une partie antisymétrique qui représente le champ de torsion. Le tenseur de torsion $Q^\mu{}_{\alpha\beta}$ est défini par [41]

$$\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} - \Gamma^\mu{}_{\beta\alpha} = 2Q^\mu{}_{\alpha\beta}. \quad (4.1)$$

Il est clair que

$$Q^\mu{}_{\alpha\beta} = -Q^\mu{}_{\beta\alpha}.$$

4.2.1 Connexions

Dans cette partie, nous voulons exprimer les connexions (supposées métriques) en fonction des symboles de Christoffel et des composantes du tenseur de torsion en utilisant la condition de la compatibilité métrique

$$\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0. \quad (4.2)$$

Comme

$$\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = \partial_\alpha g_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\alpha} g_{\lambda\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\alpha} g_{\mu\lambda} \quad (4.3)$$

nous obtenons

$$\partial_\alpha g_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\alpha} g_{\lambda\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\alpha} g_{\mu\lambda} = 0. \quad (4.4)$$

Maintenant, nous décomposons $\Gamma^\lambda_{\mu\alpha}$ en deux parties symétrique et antisymétrique

$$\Gamma^\lambda_{\mu\alpha} = \Gamma^\lambda_{(\mu\alpha)} + \Gamma^\lambda_{[\mu\alpha]}, \quad (4.5)$$

où $\Gamma^\lambda_{(\mu\alpha)}$ est la partie symétrique

$$\Gamma^\lambda_{(\mu\alpha)} = \Gamma^\lambda_{(\alpha\mu)}$$

et $\Gamma^\lambda_{[\mu\alpha]}$ est la partie antisymétrique

$$\Gamma^\lambda_{[\mu\alpha]} = -\Gamma^\lambda_{[\alpha\mu]} = Q^\lambda_{\mu\alpha}. \quad (4.6)$$

Dans ce cas nous pouvons écrire la relation (4.4) comme suit

$$\partial_\alpha g_{\mu\nu} - (\Gamma^\lambda_{(\mu\alpha)} + \Gamma^\lambda_{[\mu\alpha]})g_{\lambda\nu} - (\Gamma^\lambda_{(\nu\alpha)} + \Gamma^\lambda_{[\nu\alpha]})g_{\mu\lambda} = 0.$$

Il vient alors

$$\Gamma^\lambda_{(\mu\alpha)}g_{\lambda\nu} + \Gamma^\lambda_{(\nu\alpha)}g_{\mu\lambda} = \partial_\alpha g_{\mu\nu} - Q^\lambda_{\mu\alpha}g_{\lambda\nu} - Q^\lambda_{\nu\alpha}g_{\mu\lambda}. \quad (4.7)$$

En introduisant le tenseur $G_{\alpha\mu\nu}$ qui est défini par

$$G_{\alpha\mu\nu} = \partial_\alpha g_{\mu\nu} - Q_{\nu\mu\alpha} - Q_{\mu\nu\alpha}$$

et

$$\Gamma^\lambda_{(\mu\alpha)}g_{\lambda\nu} = \Gamma_{\nu/\mu\alpha}$$

nous obtenons

$$\Gamma_{\nu/\mu\alpha} + \Gamma_{\mu/\nu\alpha} = G_{\alpha\mu\nu} \quad (4.8)$$

$$\Gamma_{\mu/\alpha\nu} + \Gamma_{\alpha/\mu\nu} = G_{\nu\alpha\mu} \quad (4.9)$$

et

$$\Gamma_{\alpha/\nu\mu} + \Gamma_{\nu/\alpha\mu} = G_{\mu\nu\alpha}. \quad (4.10)$$

A partir de (4.8) + (4.10) – (4.9) nous trouvons

$$2\Gamma_{\nu/\mu\alpha} = G_{\alpha\mu\nu} + G_{\mu\nu\alpha} - G_{\nu\alpha\mu}$$

il vient

$$g_{\lambda\alpha}\Gamma^{\alpha}_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}(G_{\nu\mu\lambda} + G_{\mu\lambda\nu} - G_{\lambda\nu\mu})$$

nous obtenons le resultat

$$\Gamma^{\alpha}_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}(G_{\nu\mu\lambda} + G_{\mu\lambda\nu} - G_{\lambda\nu\mu}), \quad (4.11)$$

d'une autre part

$$G_{\nu\mu\lambda} = \partial_{\nu}g_{\mu\lambda} - Q_{\lambda\mu\nu} - Q_{\mu\lambda\nu} \quad (4.12)$$

$$G_{\lambda\nu\mu} = \partial_{\lambda}g_{\nu\mu} - Q_{\mu\nu\lambda} - Q_{\nu\mu\lambda} \quad (4.13)$$

et

$$G_{\mu\lambda\nu} = \partial_{\mu}g_{\lambda\nu} - Q_{\nu\lambda\mu} - Q_{\lambda\nu\mu} \quad (4.14)$$

en faisant (4.12) + (4.14) – (4.13) ce qui nous donne

$$\begin{aligned} G_{\nu\mu\lambda} + G_{\mu\lambda\nu} - G_{\lambda\nu\mu} &= \partial_{\nu}g_{\mu\lambda} + \partial_{\mu}g_{\lambda\nu} - \partial_{\lambda}g_{\nu\mu} - Q_{\lambda\mu\nu} \\ &\quad - Q_{\mu\lambda\nu} - Q_{\nu\lambda\mu} - Q_{\lambda\nu\mu} + Q_{\mu\nu\lambda} + Q_{\nu\mu\lambda} \end{aligned}$$

compte tenu du fait que

$$Q_{\mu\nu\lambda} = -Q_{\mu\lambda\nu}$$

alors

$$G_{\nu\mu\lambda} + G_{\mu\lambda\nu} - G_{\lambda\nu\mu} = \partial_{\nu}g_{\mu\lambda} + \partial_{\mu}g_{\lambda\nu} - \partial_{\lambda}g_{\nu\mu} + 2Q_{\mu\nu\lambda} + 2Q_{\nu\mu\lambda} \quad (4.15)$$

nous remplaçons ce dernier resultat dans la relation (4.11)

$$\Gamma^{\alpha}_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}(\partial_{\nu}g_{\mu\lambda} + \partial_{\mu}g_{\lambda\nu} - \partial_{\lambda}g_{\nu\mu}) + \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}(2Q_{\mu\nu\lambda} + 2Q_{\nu\mu\lambda}) \quad (4.16)$$

nous avons précédemment la relation (4.5), et d'après les relations (4.6) et (4.16), il vient alors

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}(\partial_{\nu}g_{\mu\lambda} + \partial_{\mu}g_{\lambda\nu} - \partial_{\lambda}g_{\nu\mu}) + \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}(2Q_{\mu\nu\lambda} + 2Q_{\nu\mu\lambda}) + Q^{\alpha}_{\mu\nu},$$

finalemnt, nous écrivons

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \bar{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\nu} + Q_{\mu\nu}{}^{\alpha} + Q_{\nu\mu}{}^{\alpha} + Q^{\alpha}_{\mu\nu} \quad (4.17)$$

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \bar{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\nu} + T^{\alpha}_{\mu\nu}, \quad (4.18)$$

avec

$\bar{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu}$ est le symbole de Christoffel qui est symétrique, où

$$\bar{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}(\partial_\nu g_{\mu\lambda} + \partial_\mu g_{\lambda\nu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) \quad (4.19)$$

$T^\alpha_{\mu\nu}$ est le tenseur de contorsion

$$T^\alpha_{\mu\nu} = Q_{\mu\nu}{}^\alpha + Q_{\nu\mu}{}^\alpha + Q^\alpha_{\mu\nu}. \quad (4.20)$$

4.2.2 Décomposition du tenseur de torsion $Q^{\nu\rho}{}_\alpha$

Puisque les tenseurs fondamentaux en U_4 ont un grand nombre de composantes indépendantes (24 pour la torsion et 36 pour la courbure) et il est pratique de décomposer ces objets géométriques en pièces irréductibles L_6 (où $L_6 \equiv SO(3,1)$ est le groupe de lorentz).

En premier lieu, nous devons décomposer le tenseur de torsion et pour cela nous écrivons $Q_{\lambda\mu\nu}$ comme suit

$$Q_{\lambda\mu\nu} = q_{\lambda\mu\nu} + a_1 g_{\mu\nu} Q_\lambda + a_2 g_{\mu\lambda} Q_\nu + a_3 g_{\nu\lambda} Q_\mu + b_1 \varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho} \tilde{Q}^\rho \quad (4.21)$$

où

$Q_\mu = Q^\alpha{}_{\mu\alpha}$ est la trace de tenseur du torsion

$\tilde{Q}^\rho$ est la partie axiale de torsion avec $\varepsilon^{\beta\lambda\mu\nu} Q_{\lambda\mu\nu} = \tilde{Q}^\beta$

$q^\lambda{}_{\mu\nu}$ est la composante du tenseur de torsion qui satisfait ; $q^\lambda{}_{\mu\lambda} = 0$ et $\varepsilon^{\beta\lambda\mu\nu} q_{\lambda\mu\nu} = 0$.

Nous savons que $Q_{\lambda\mu\nu} = -Q_{\lambda\nu\mu}$, alors si nous changeons $\mu \longleftrightarrow \nu$ dans la relation (4.21)

$$\begin{aligned} Q_{\lambda\nu\mu} &= q_{\lambda\nu\mu} + a_1 g_{\nu\mu} Q_\lambda + a_2 g_{\nu\lambda} Q_\mu + a_3 g_{\mu\lambda} Q_\nu + b_1 \varepsilon_{\lambda\nu\mu\rho} \tilde{Q}^\rho \\ &= -Q_{\lambda\mu\nu} \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\Rightarrow 2a_1 g_{\mu\nu} Q_\lambda + (a_2 + a_3) g_{\mu\lambda} Q_\nu + (a_2 + a_3) g_{\nu\lambda} Q_\mu = 0$$

il vient donc

$$a_1 = 0 \quad (4.22)$$

$$a_2 + a_3 = 0 \Rightarrow a_2 = -a_3 \quad (4.23)$$

nous avons aussi

$$\begin{aligned} Q_\mu &= g^{\lambda\nu} Q_{\lambda\mu\nu} = g^{\lambda\nu} q_{\lambda\mu\nu} + a_1 g^{\lambda\nu} g_{\mu\nu} Q_\lambda + a_2 g^{\lambda\nu} g_{\mu\lambda} Q_\nu \\ &\quad + a_3 g^{\lambda\nu} g_{\nu\lambda} Q_\mu + b_1 g^{\lambda\nu} \varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho} \tilde{Q}^\rho \end{aligned}$$

donc

$$Q_\mu = a_1 Q_\mu + a_2 Q_\mu + 4a_3 Q_\mu \quad (4.24)$$

comme $a_1 = 0$ il vient

$$a_2 + 4a_3 = 1 \quad (4.25)$$

avec $a_2 = -a_3 \implies$

$$a_3 = \frac{1}{3}, \quad a_2 = -\frac{1}{3}.$$

Cherchons maintenant la valeur de b_1 , en utilisant les propriétés du tenseur de Levi-Cevita représentées dans (A.6), nous obtenons

$$\begin{aligned} \tilde{Q}^\beta &= \varepsilon^{\beta\lambda\mu\nu} Q_{\lambda\mu\nu} = \varepsilon^{\beta\lambda\mu\nu} q_{\lambda\mu\nu} + a_1 g_{\mu\nu} \varepsilon^{\beta\lambda\mu\nu} Q_\lambda + a_2 g_{\mu\lambda} \varepsilon^{\beta\lambda\mu\nu} Q_\nu \\ &\quad + a_3 g_{\nu\lambda} \varepsilon^{\beta\lambda\mu\nu} Q_\mu + b_1 \varepsilon^{\beta\lambda\mu\nu} \varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho} \tilde{Q}^\rho \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\tilde{Q}^\beta = 6b_1 \delta_\rho^\beta \tilde{Q}^\rho,$$

il vient

$$b_1 = \frac{1}{6}$$

en remplaçant $a_i (i = 1, 3)$ et b_1 par ses valeurs dans la relation (4.21), nous obtenons

$$Q_{\lambda\mu\nu} = q_{\lambda\mu\nu} + \frac{1}{3} g_{\nu\lambda} Q_\mu - \frac{1}{3} g_{\mu\lambda} Q_\nu + \frac{1}{6} \varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho} \tilde{Q}^\rho. \quad (4.26)$$

La décomposition du tenseur de torsion en trois parties irréductibles L_6 se lit comme suit

$$Q^\lambda{}_{\mu\nu} = q^\lambda{}_{\mu\nu} + \frac{2}{3} \delta_{[\nu}^\lambda Q_{\mu]} + \frac{1}{6} \varepsilon^\lambda{}_{\mu\nu\rho} \tilde{Q}^\rho. \quad (4.27)$$

En tenant en compte de l'isotropie et de l'homogénéité de l'univers qui impliquent $q_{\lambda\mu\nu} = 0$, la décomposition du tenseur de torsion finale est

$$Q_{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{3} g_{\nu\lambda} Q_\mu - \frac{1}{3} g_{\mu\lambda} Q_\nu + \frac{1}{6} \varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho} \tilde{Q}^\rho. \quad (4.28)$$

4.3 Tenseurs de Riemann, Ricci et le scalaire de Ricci

4.3.1 Commutateur de deux dérivées covariantes

La dérivée covariante d'un vecteur est donnée par

$$\nabla_\mu V^\alpha = T^\alpha{}_{\mu}{}^\nu V^\mu = V^\alpha{}_{,\mu} + \Gamma^\alpha{}_{\rho\mu} V^\rho \quad (4.29)$$

nous avons le commutateur de deux dérivées covariantes

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\alpha = \nabla_\mu (\nabla_\nu V^\alpha) - \nabla_\nu (\nabla_\mu V^\alpha)$$

nous écrivons

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\alpha = \nabla_\mu T^\alpha{}_\nu - \nabla_\nu T^\alpha{}_\mu, \quad (4.30)$$

la dérivée covariante d'un tenseur de type $\binom{1}{1}$

$$\nabla_\mu T^\alpha{}_\nu = T^\alpha{}_{\nu;\mu} = T^\alpha{}_{\nu,\mu} + \Gamma^\alpha{}_{\sigma\mu} T^\sigma{}_\nu - \Gamma^\sigma{}_{\nu\mu} T^\alpha{}_\sigma \quad (4.31)$$

nous obtenons donc

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\alpha = T^\alpha{}_{\nu,\mu} - T^\alpha{}_{\mu,\nu} + \Gamma^\alpha{}_{\sigma\mu} T^\sigma{}_\nu - \Gamma^\alpha{}_{\sigma\nu} T^\sigma{}_\mu + \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} T^\alpha{}_\sigma - \Gamma^\sigma{}_{\nu\mu} T^\alpha{}_\sigma, \quad (4.32)$$

avec

$$T^\alpha{}_{\nu,\mu} = (V^\alpha{}_{,\nu} + \Gamma^\alpha{}_{\rho\nu} V^\rho)_{,\mu} = V^\alpha{}_{,\nu\mu} + \Gamma^\alpha{}_{\rho\nu,\mu} V^\rho + \Gamma^\alpha{}_{\rho\nu} V^\rho{}_{,\mu}$$

et

$$T^\alpha{}_{\mu,\nu} = (V^\alpha{}_{,\mu} + \Gamma^\alpha{}_{\rho\mu} V^\rho)_{,\nu} = V^\alpha{}_{,\mu\nu} + \Gamma^\alpha{}_{\rho\mu,\nu} V^\rho + \Gamma^\alpha{}_{\rho\mu} V^\rho{}_{,\nu},$$

dans ce cas nous remplaçons ces dernières dérivées dans la relation (4.32)

$$\begin{aligned} [\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\alpha &= [\Gamma^\alpha{}_{\rho\nu,\mu} - \Gamma^\alpha{}_{\rho\mu,\nu} + \Gamma^\alpha{}_{\sigma\mu} \Gamma^\sigma{}_{\rho\nu} - \Gamma^\alpha{}_{\sigma\nu} \Gamma^\sigma{}_{\rho\mu}] V^\rho \\ &\quad + (\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} - \Gamma^\sigma{}_{\nu\mu})(V^\alpha{}_{,\sigma} + \Gamma^\alpha{}_{\rho\sigma} V^\rho) \end{aligned}$$

il vient

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\alpha = R^\alpha{}_{\rho\mu\nu} V^\rho + 2Q^\sigma{}_{\mu\nu} (V^\alpha{}_{,\sigma} + \Gamma^\alpha{}_{\rho\sigma} V^\rho)$$

finalement, nous obtenons

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\alpha = R^\alpha{}_{\rho\mu\nu} V^\rho + 2Q^\sigma{}_{\mu\nu} \nabla_\sigma V^\alpha, \quad (4.33)$$

où

$$R^\alpha{}_{\rho\mu\nu} = \Gamma^\alpha{}_{\rho\nu,\mu} - \Gamma^\alpha{}_{\rho\mu,\nu} + \Gamma^\alpha{}_{\sigma\mu} \Gamma^\sigma{}_{\rho\nu} - \Gamma^\alpha{}_{\sigma\nu} \Gamma^\sigma{}_{\rho\mu}$$

et

$$\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} - \Gamma^\sigma{}_{\nu\mu} = 2Q^\sigma{}_{\mu\nu}$$

$R^\alpha{}_{\rho\mu\nu}$ est le tenseur de Riemann (de la courbure) et $Q^\sigma{}_{\mu\nu}$ est le tenseur de torsion, dans ce cas la géométrie est dit la géométrie de Riemann-Cartan U_4 .

4.3.2 Décomposition du tenseur de Riemann $R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}$

Le tenseur de Riemann est défini comme

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = \Gamma^\alpha{}_{\beta\nu,\mu} - \Gamma^\alpha{}_{\beta\mu,\nu} + \Gamma^\alpha{}_{\rho\mu} \Gamma^\rho{}_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha{}_{\rho\nu} \Gamma^\rho{}_{\beta\mu} \quad (4.34)$$

nous remplaçons les connexions $\Gamma^\alpha{}_{\beta\nu}$ par la relation (4.18)

$$\begin{aligned} R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} &= (\bar{\Gamma}^\alpha{}_{\beta\nu} + T^\alpha{}_{\beta\nu})_{,\mu} - (\bar{\Gamma}^\alpha{}_{\beta\mu} + T^\alpha{}_{\beta\mu})_{,\nu} \\ &\quad + (\bar{\Gamma}^\alpha{}_{\rho\mu} + T^\alpha{}_{\rho\mu}) (\bar{\Gamma}^\rho{}_{\beta\nu} + T^\rho{}_{\beta\nu}) - (\bar{\Gamma}^\alpha{}_{\rho\nu} + T^\alpha{}_{\rho\nu}) (\bar{\Gamma}^\rho{}_{\beta\mu} + T^\rho{}_{\beta\mu}) \end{aligned}$$

il vient

$$\begin{aligned} R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} &= \bar{\Gamma}^\alpha{}_{\beta\nu,\mu} - \bar{\Gamma}^\alpha{}_{\beta\mu,\nu} + \bar{\Gamma}^\alpha{}_{\rho\mu} \bar{\Gamma}^\rho{}_{\beta\nu} - \bar{\Gamma}^\alpha{}_{\rho\nu} \bar{\Gamma}^\rho{}_{\beta\mu} + T^\alpha{}_{\beta\nu,\mu} - T^\alpha{}_{\beta\mu,\nu} + T^\alpha{}_{\rho\mu} T^\rho{}_{\beta\nu} \\ &\quad - T^\alpha{}_{\rho\nu} T^\rho{}_{\beta\mu} + \bar{\Gamma}^\alpha{}_{\rho\mu} T^\rho{}_{\beta\nu} + \bar{\Gamma}^\rho{}_{\beta\nu} T^\alpha{}_{\rho\mu} - \bar{\Gamma}^\alpha{}_{\rho\nu} T^\rho{}_{\beta\mu} - \bar{\Gamma}^\rho{}_{\beta\mu} T^\alpha{}_{\rho\nu} \end{aligned}$$

nous ajoutons et nous soustrayons le terme $\bar{\Gamma}^\rho{}_{\nu\mu} T^\alpha{}_{\beta\rho}$ dans cette dernière expression et en tenant en compte les relations (A.1), (A.2) et (A.3) et que $\bar{\Gamma}^\sigma{}_{\mu\nu}$ est symétrique nous obtenons

$$\begin{aligned} R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} &= \bar{R}^\alpha{}_{\beta\mu\nu} + T^\alpha{}_{\beta\nu,\mu} + \bar{\Gamma}^\alpha{}_{\rho\mu} T^\rho{}_{\beta\nu} - \bar{\Gamma}^\rho{}_{\beta\mu} T^\alpha{}_{\rho\nu} - \bar{\Gamma}^\rho{}_{\nu\mu} T^\alpha{}_{\beta\rho} \\ &\quad - (T^\alpha{}_{\beta\mu,\nu} + \bar{\Gamma}^\alpha{}_{\rho\nu} T^\rho{}_{\beta\mu} - \bar{\Gamma}^\rho{}_{\beta\nu} T^\alpha{}_{\rho\mu} - \bar{\Gamma}^\rho{}_{\nu\mu} T^\alpha{}_{\beta\rho}) + T^\alpha{}_{\rho\mu} T^\rho{}_{\beta\nu} - T^\alpha{}_{\rho\nu} T^\rho{}_{\beta\mu} \end{aligned}$$

finalement, le tenseur de Riemann en fonction du tenseur de contorsion est

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = \bar{R}^\alpha{}_{\beta\mu\nu} + \bar{\nabla}_\mu T^\alpha{}_{\beta\nu} - \bar{\nabla}_\nu T^\alpha{}_{\beta\mu} + T^\alpha{}_{\rho\mu} T^\rho{}_{\beta\nu} - T^\alpha{}_{\rho\nu} T^\rho{}_{\beta\mu}, \quad (4.35)$$

notons que $\bar{R}^\alpha{}_{\beta\mu\nu}$ est le tenseur de Riemann (ordinaire) en absence du torsion.

Ici, nous devons exprimer $R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}$ en fonction de tenseur du torsion $Q^\alpha{}_{\mu\nu}$, nous savons que

$$T^\alpha{}_{\beta\nu} = Q^\alpha{}_{\beta\nu} + Q_{\beta\nu}{}^\alpha + Q_{\nu\beta}{}^\alpha,$$

la relation (4.35) devient

$$\begin{aligned} R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} &= \bar{R}^\alpha{}_{\beta\mu\nu} + \bar{\nabla}_\mu (Q^\alpha{}_{\beta\nu} + Q_{\beta\nu}{}^\alpha + Q_{\nu\beta}{}^\alpha) - \bar{\nabla}_\nu (Q^\alpha{}_{\beta\mu} + Q_{\beta\mu}{}^\alpha + Q_{\mu\beta}{}^\alpha) \\ &\quad + (Q^\alpha{}_{\rho\mu} + Q_{\rho\mu}{}^\alpha + Q_{\mu\rho}{}^\alpha) (Q^\rho{}_{\beta\nu} + Q_{\beta\nu}{}^\rho + Q_{\nu\beta}{}^\rho) \\ &\quad - (Q^\alpha{}_{\rho\nu} + Q_{\rho\nu}{}^\alpha + Q_{\nu\rho}{}^\alpha) (Q^\rho{}_{\beta\mu} + Q_{\beta\mu}{}^\rho + Q_{\mu\beta}{}^\rho), \end{aligned} \quad (4.36)$$

qui est le tenseur de Riemann en fonction du torsion, nous devons maintenant décomposer aussi les tenseurs de torsion en des termes irréductibles ;

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\mu\nu} &= \bar{R}_{\alpha\beta\mu\nu} + \bar{\nabla}_\mu (Q_{\alpha\beta\nu} + Q_{\beta\nu\alpha} + Q_{\nu\beta\alpha}) - \bar{\nabla}_\nu (Q_{\alpha\beta\mu} + Q_{\beta\mu\alpha} + Q_{\mu\beta\alpha}) \\ &\quad + (Q_{\alpha\rho\mu} + Q_{\rho\mu\alpha} + Q_{\mu\rho\alpha}) (Q^\rho{}_{\beta\nu} + Q_{\beta\nu}{}^\rho + Q_{\nu\beta}{}^\rho) \\ &\quad - (Q_{\alpha\rho\nu} + Q_{\rho\nu\alpha} + Q_{\nu\rho\alpha}) (Q^\rho{}_{\beta\mu} + Q_{\beta\mu}{}^\rho + Q_{\mu\beta}{}^\rho) \end{aligned} \quad (4.37)$$

nous avons

$$Q_{\alpha\beta\nu} + Q_{\beta\nu\alpha} + Q_{\nu\beta\alpha} = \frac{2}{3} g_{\alpha\nu} Q_\beta - \frac{2}{3} g_{\nu\beta} Q_\alpha + \frac{1}{6} \varepsilon_{\alpha\beta\nu\gamma} \tilde{Q}^\gamma,$$

donc la relation (4.37) devient

$$\begin{aligned}
R_{\alpha\beta\mu\nu} &= \bar{R}_{\alpha\beta\mu\nu} + \bar{\nabla}_\mu \left(\frac{2}{3} g_{\alpha\nu} Q_\beta - \frac{2}{3} g_{\nu\beta} Q_\alpha + \frac{1}{6} \varepsilon_{\alpha\beta\nu\gamma} \tilde{Q}^\gamma \right) \\
&\quad - \bar{\nabla}_\nu \left(\frac{2}{3} g_{\alpha\mu} Q_\beta - \frac{2}{3} g_{\mu\beta} Q_\alpha + \frac{1}{6} \varepsilon_{\alpha\beta\mu\gamma} \tilde{Q}^\gamma \right) \\
&\quad + \left(\frac{2}{3} g_{\alpha\mu} Q_\rho - \frac{2}{3} g_{\mu\rho} Q_\alpha + \frac{1}{6} \varepsilon_{\alpha\rho\mu\gamma} \tilde{Q}^\gamma \right) \left(\frac{2}{3} \delta_\nu^\rho Q_\beta - \frac{2}{3} g_{\nu\beta} Q^\rho + \frac{1}{6} \varepsilon^{\rho\beta\nu\sigma} \tilde{Q}^\sigma \right) \\
&\quad - \left(\frac{2}{3} g_{\alpha\nu} Q_\rho - \frac{2}{3} g_{\nu\rho} Q_\alpha + \frac{1}{6} \varepsilon_{\alpha\rho\nu\gamma} \tilde{Q}^\gamma \right) \left(\frac{2}{3} \delta_\mu^\rho Q_\beta - \frac{2}{3} g_{\mu\beta} Q^\rho + \frac{1}{6} \varepsilon^{\rho\beta\mu\sigma} \tilde{Q}^\sigma \right)
\end{aligned}$$

nous simplifions, nous trouvons

$$\begin{aligned}
R_{\alpha\beta\mu\nu} &= \bar{R}_{\alpha\beta\mu\nu} + \frac{1}{6} \bar{\nabla}_\mu \left(\varepsilon_{\alpha\beta\nu\gamma} \tilde{Q}^\gamma \right) - \frac{1}{6} \bar{\nabla}_\nu \left(\varepsilon_{\alpha\beta\mu\gamma} \tilde{Q}^\gamma \right) + \frac{2}{3} g_{\alpha\nu} \bar{\nabla}_\mu Q_\beta \\
&\quad - \frac{2}{3} g_{\alpha\mu} \bar{\nabla}_\nu Q_\beta + \frac{2}{3} g_{\mu\beta} \bar{\nabla}_\nu Q_\alpha - \frac{2}{3} g_{\nu\beta} \bar{\nabla}_\mu Q_\alpha + \frac{4}{9} g_{\alpha\mu} Q_\nu Q_\beta \\
&\quad - \frac{4}{9} g_{\alpha\nu} Q_\mu Q_\beta + \frac{4}{9} g_{\nu\beta} Q_\mu Q_\alpha - \frac{4}{9} g_{\mu\beta} Q_\alpha Q_\nu - \frac{4}{9} g_{\alpha\mu} g_{\nu\beta} Q^\rho Q_\rho \\
&\quad + \frac{4}{9} g_{\alpha\nu} g_{\mu\beta} Q_\rho Q^\rho + \frac{2}{9} \varepsilon_{\alpha\nu\mu\gamma} Q_\beta \tilde{Q}^\gamma + \frac{2}{9} \varepsilon_{\nu\beta\mu\sigma} Q_\alpha \tilde{Q}^\sigma \\
&\quad + \frac{1}{9} g_{\alpha\mu} \varepsilon^{\rho\beta\nu\sigma} \tilde{Q}^\sigma Q_\rho - \frac{1}{9} g_{\alpha\nu} \varepsilon^{\rho\beta\mu\sigma} Q_\rho \tilde{Q}^\sigma + \frac{1}{9} g_{\mu\beta} \varepsilon_{\alpha\rho\nu\gamma} \tilde{Q}^\gamma Q^\rho \\
&\quad - \frac{1}{9} g_{\nu\beta} \varepsilon_{\alpha\rho\mu\gamma} \tilde{Q}^\gamma Q^\rho + \frac{1}{36} (\varepsilon_{\alpha\rho\mu\gamma} \varepsilon^{\rho\beta\nu\sigma} - \varepsilon_{\alpha\rho\nu\gamma} \varepsilon^{\rho\beta\mu\sigma}) \tilde{Q}^\sigma \tilde{Q}^\gamma \quad (4.38)
\end{aligned}$$

nous devons simplifier le dernier terme, donc nous calculons le produit $\varepsilon_{\alpha\rho\mu\gamma} \varepsilon^{\rho\beta\nu\sigma}$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\alpha\rho\mu\gamma} \varepsilon^{\rho\beta\nu\sigma} &= g_{\beta\varepsilon} g_{\nu\pi} g_{\sigma\lambda} \varepsilon_{\alpha\rho\mu\gamma} \varepsilon^{\rho\varepsilon\pi\lambda} = -g_{\beta\varepsilon} g_{\nu\pi} g_{\sigma\lambda} \varepsilon_{\rho\alpha\mu\gamma} \varepsilon^{\rho\varepsilon\pi\lambda} \\
&= +6g_{\beta\varepsilon} g_{\nu\pi} g_{\sigma\lambda} \delta_{[\alpha}^\varepsilon \delta_\mu^\pi \delta_{\gamma]}^\lambda \quad (4.39)
\end{aligned}$$

nous avons la propriété

$$T_{[abc]} = \frac{1}{3!} (T_{abc} - T_{bac} + T_{bca} - T_{cba} + T_{cab} - T_{acb}) \quad (4.40)$$

à partir de (4.40) la relation (4.39) devient

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\alpha\rho\mu\gamma} \varepsilon^{\rho\beta\nu\sigma} &= g_{\beta\varepsilon} g_{\nu\pi} g_{\sigma\lambda} \left(\begin{aligned} &\delta_\alpha^\varepsilon \delta_\mu^\pi \delta_\gamma^\lambda - \delta_\mu^\varepsilon \delta_\alpha^\pi \delta_\gamma^\lambda + \delta_\mu^\varepsilon \delta_\gamma^\pi \delta_\alpha^\lambda \\ &- \delta_\gamma^\varepsilon \delta_\mu^\pi \delta_\alpha^\lambda + \delta_\gamma^\varepsilon \delta_\alpha^\pi \delta_\mu^\lambda - \delta_\alpha^\varepsilon \delta_\gamma^\pi \delta_\mu^\lambda \end{aligned} \right) \\
\varepsilon_{\alpha\rho\mu\gamma} \varepsilon^{\rho\beta\nu\sigma} &= g_{\beta\alpha} g_{\nu\mu} g_{\sigma\gamma} - g_{\beta\mu} g_{\nu\alpha} g_{\sigma\gamma} + g_{\beta\mu} g_{\nu\gamma} g_{\sigma\alpha} \\
&\quad - g_{\beta\gamma} g_{\nu\mu} g_{\sigma\alpha} + g_{\beta\gamma} g_{\nu\alpha} g_{\sigma\mu} - g_{\beta\alpha} g_{\nu\gamma} g_{\sigma\mu}
\end{aligned}$$

de même

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\alpha\rho\nu\gamma}\varepsilon^{\rho}{}_{\beta\mu\sigma} &= g_{\beta\alpha}g_{\nu\mu}g_{\sigma\gamma} - g_{\beta\nu}g_{\mu\alpha}g_{\sigma\gamma} + g_{\beta\nu}g_{\mu\gamma}g_{\sigma\alpha} \\ &\quad - g_{\beta\gamma}g_{\nu\mu}g_{\sigma\alpha} + g_{\beta\gamma}g_{\mu\alpha}g_{\sigma\nu} - g_{\beta\alpha}g_{\mu\gamma}g_{\sigma\nu}\end{aligned}$$

donc nous écrivons

$$\begin{aligned}\frac{1}{36}(\varepsilon_{\alpha\rho\mu\gamma}\varepsilon^{\rho}{}_{\beta\nu\sigma} - \varepsilon_{\alpha\rho\nu\gamma}\varepsilon^{\rho}{}_{\beta\mu\sigma})\tilde{Q}^{\sigma}\tilde{Q}^{\gamma} &= \frac{1}{36}g_{\beta\nu}g_{\mu\alpha}\tilde{Q}_{\gamma}\tilde{Q}^{\gamma} - \frac{1}{36}g_{\beta\mu}g_{\nu\alpha}\tilde{Q}_{\gamma}\tilde{Q}^{\gamma} \\ &\quad + \frac{1}{36}g_{\beta\mu}\tilde{Q}_{\nu}\tilde{Q}_{\alpha} - \frac{1}{36}g_{\beta\nu}\tilde{Q}_{\mu}\tilde{Q}_{\alpha} \\ &\quad + \frac{1}{36}g_{\nu\alpha}\tilde{Q}_{\beta}\tilde{Q}_{\mu} - \frac{1}{36}g_{\mu\alpha}\tilde{Q}_{\beta}\tilde{Q}_{\nu}\end{aligned}\quad (4.41)$$

en remplaçant (4.41) dans (4.38) nous obtenons le résultat final de la décomposition du tenseur de Riemann

$$\begin{aligned}R_{\alpha\beta\mu\nu} &= \bar{R}_{\alpha\beta\mu\nu} + \frac{1}{6}\bar{\nabla}_{\mu}(\varepsilon_{\alpha\beta\nu\gamma}\tilde{Q}^{\gamma}) - \frac{1}{6}\bar{\nabla}_{\nu}(\varepsilon_{\alpha\beta\mu\gamma}\tilde{Q}^{\gamma}) + \frac{2}{3}g_{\alpha\nu}\bar{\nabla}_{\mu}Q_{\beta} \\ &\quad - \frac{2}{3}g_{\alpha\mu}\bar{\nabla}_{\nu}Q_{\beta} + \frac{2}{3}g_{\mu\beta}\bar{\nabla}_{\nu}Q_{\alpha} - \frac{2}{3}g_{\nu\beta}\bar{\nabla}_{\mu}Q_{\alpha} + \frac{4}{9}g_{\alpha\mu}Q_{\nu}Q_{\beta} \\ &\quad - \frac{4}{9}g_{\alpha\nu}Q_{\mu}Q_{\beta} + \frac{4}{9}g_{\nu\beta}Q_{\mu}Q_{\alpha} - \frac{4}{9}g_{\mu\beta}Q_{\alpha}Q_{\nu} - \frac{4}{9}g_{\alpha\mu}g_{\nu\beta}Q^{\rho}Q_{\rho} \\ &\quad + \frac{4}{9}g_{\alpha\nu}g_{\mu\beta}Q_{\rho}Q^{\rho} + \frac{2}{9}\varepsilon_{\alpha\nu\mu\gamma}Q_{\beta}\tilde{Q}^{\gamma} + \frac{2}{9}\varepsilon_{\nu\beta\mu\sigma}Q_{\alpha}\tilde{Q}^{\sigma} \\ &\quad + \frac{1}{9}g_{\alpha\mu}\varepsilon^{\rho}{}_{\beta\nu\sigma}\tilde{Q}^{\sigma}Q_{\rho} - \frac{1}{9}g_{\alpha\nu}\varepsilon^{\rho}{}_{\beta\mu\sigma}Q_{\rho}\tilde{Q}^{\sigma} + \frac{1}{9}g_{\mu\beta}\varepsilon_{\alpha\rho\nu\gamma}\tilde{Q}^{\gamma}Q^{\rho} \\ &\quad - \frac{1}{9}g_{\nu\beta}\varepsilon_{\alpha\rho\mu\gamma}\tilde{Q}^{\gamma}Q^{\rho} + \frac{1}{36}g_{\beta\nu}g_{\mu\alpha}\tilde{Q}_{\gamma}\tilde{Q}^{\gamma} - \frac{1}{36}g_{\beta\mu}g_{\nu\alpha}\tilde{Q}_{\gamma}\tilde{Q}^{\gamma} \\ &\quad + \frac{1}{36}g_{\beta\mu}\tilde{Q}_{\nu}\tilde{Q}_{\alpha} - \frac{1}{36}g_{\beta\nu}\tilde{Q}_{\mu}\tilde{Q}_{\alpha} + \frac{1}{36}g_{\nu\alpha}\tilde{Q}_{\beta}\tilde{Q}_{\mu} - \frac{1}{36}g_{\mu\alpha}\tilde{Q}_{\beta}\tilde{Q}_{\nu}.\end{aligned}\quad (4.42)$$

4.3.3 Décomposition du tenseur de Ricci $R_{\beta\nu}$

A partir du tenseur de Riemann $R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}$ (4.35) nous pouvons conclure la formule du tenseur de Ricci $R_{\beta\nu}$ en fonction de contorsion

$$R_{\beta\nu} = R^{\alpha}{}_{\beta\alpha\nu} = \bar{R}^{\alpha}{}_{\beta\alpha\nu} + \bar{\nabla}_{\alpha}T^{\alpha}{}_{\beta\nu} - \bar{\nabla}_{\nu}T^{\alpha}{}_{\beta\alpha} + T^{\alpha}{}_{\rho\alpha}T^{\rho}{}_{\beta\nu} - T^{\alpha}{}_{\rho\nu}T^{\rho}{}_{\beta\alpha}$$

alors

$$R_{\beta\nu} = \bar{R}_{\beta\nu} + \bar{\nabla}_{\alpha}T^{\alpha}{}_{\beta\nu} - \bar{\nabla}_{\nu}T^{\alpha}{}_{\beta\alpha} + T^{\alpha}{}_{\rho\alpha}T^{\rho}{}_{\beta\nu} - T^{\alpha}{}_{\rho\nu}T^{\rho}{}_{\beta\alpha},\quad (4.43)$$

dans ce cas $\bar{R}_{\beta\nu}$ est le tenseur de Ricci en absence du torsion.

De même, à partir de la relation (4.36) nous obtenons le tenseur de Ricci en fonction

de torsion

$$\begin{aligned}
R_{\beta\nu} = & \bar{R}_{\beta\nu} + \bar{\nabla}_\alpha (Q_{\beta\nu}{}^\alpha + Q_{\nu\beta}{}^\alpha + Q^\alpha{}_{\beta\nu}) - 2\bar{\nabla}_\nu Q_\beta \\
& + 2Q_\rho (Q_{\beta\nu}{}^\rho + Q_{\nu\beta}{}^\rho + Q^\rho{}_{\beta\nu}) \\
& + 2Q^\alpha{}_{\nu\rho} Q_{\beta\alpha}{}^\rho + Q_{\nu\alpha\rho} Q_\beta{}^{\alpha\rho}
\end{aligned} \tag{4.44}$$

il reste de trouver la formule du tenseur de Ricci en fonction des termes irréductibles, compte tenu de la relation (4.42) $\times g^{\mu\alpha}$ nous obtenons

$$\begin{aligned}
R_{\beta\nu} = & \bar{R}_{\beta\nu} - \frac{2}{3}g_{\nu\beta}\bar{\nabla}_\alpha Q^\alpha - \frac{4}{3}\bar{\nabla}_\nu Q_\beta + \frac{1}{6}\bar{\nabla}_\alpha \left(\varepsilon^\alpha{}_{\beta\nu\rho} \tilde{Q}^\rho \right) \\
& + \frac{8}{9}Q_\nu Q_\beta - \frac{8}{9}g_{\nu\beta} Q_\rho Q^\rho + \frac{1}{18}g_{\beta\nu} \tilde{Q}_\rho \tilde{Q}^\rho - \frac{1}{18} \tilde{Q}_\beta \tilde{Q}_\nu
\end{aligned} \tag{4.45}$$

et

$$\begin{aligned}
R^{\beta\nu} = & \bar{R}^{\beta\nu} - \frac{2}{3}g^{\nu\beta}\bar{\nabla}_\lambda Q^\lambda - \frac{4}{3}\bar{\nabla}^\nu Q^\beta + \frac{1}{6}\bar{\nabla}_\lambda \left(\varepsilon^{\lambda\beta\nu}{}_\sigma \tilde{Q}^\sigma \right) \\
& + \frac{8}{9}Q^\nu Q^\beta - \frac{8}{9}g^{\nu\beta} Q_\sigma Q^\sigma + \frac{1}{18}g^{\nu\beta} \tilde{Q}_\sigma \tilde{Q}^\sigma - \frac{1}{18} \tilde{Q}^\beta \tilde{Q}^\nu.
\end{aligned} \tag{4.46}$$

4.3.4 Décomposition du scalaire de Ricci R

De même, le scalaire de Ricci R est donné par

$$\begin{aligned}
R = g^{\beta\nu} R_{\beta\nu} = & g^{\beta\nu} \bar{R}_{\beta\nu} + g^{\beta\nu} \bar{\nabla}_\alpha T^\alpha{}_{\beta\nu} - g^{\beta\nu} \bar{\nabla}_\nu T^\alpha{}_{\beta\alpha} + g^{\beta\nu} T^\alpha{}_{\rho\alpha} T^\rho{}_{\beta\nu} - g^{\beta\nu} T^\alpha{}_{\rho\nu} T^\rho{}_{\beta\alpha} \\
R = & \bar{R} + \bar{\nabla}_\alpha T^{\alpha\beta}{}_\beta - \bar{\nabla}_\beta T^{\alpha\beta}{}_\alpha + T^\alpha{}_{\rho\alpha} T^{\rho\nu}{}_\nu - T^\alpha{}_{\rho\nu} T^{\rho\nu}{}_\alpha
\end{aligned}$$

avec $\bar{R} = g^{\beta\nu} \bar{R}_{\beta\nu}$

$$R = \bar{R} + \bar{\nabla}_\alpha (T^{\alpha\nu}{}_\nu - T^{\nu\alpha}{}_\nu) + T^\alpha{}_{\rho\alpha} T^{\rho\nu}{}_\nu - T^\alpha{}_{\rho\nu} T^{\rho\nu}{}_\alpha \tag{4.47}$$

$\bar{R}$ représente le scalaire de Ricci en absence du torsion.

Nous trouvons la formule du scalaire de Ricci en fonction du torsion à partir du (4.44)

$$R = \bar{R} - 4\bar{\nabla}_\alpha Q^\alpha - 4Q_\rho Q^\rho + 2Q_{\mu\nu\rho} Q^{\nu\mu\rho} + Q^{\mu\nu\rho} Q_{\mu\nu\rho}. \tag{4.48}$$

Afin de trouver la formule du scalaire de Ricci en fonction des termes irréductibles, nous utilisons la relation (4.45)

$$R = \bar{R} - 4\bar{\nabla}_\alpha Q^\alpha - \frac{8}{3}Q_\rho Q^\rho + \frac{1}{6}\tilde{Q}_\beta \tilde{Q}^\beta. \tag{4.49}$$

4.4 Décomposition des termes quadratiques en $Q^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$

4.4.1 Décomposition de $Q_{\mu\nu\rho}Q^{\mu\nu\rho}$

Nous calculons le produit

$$\begin{aligned} Q_{\mu\nu\rho}Q^{\mu\nu\rho} &= \left[\frac{1}{3}g_{\rho\mu}Q_{\nu} - \frac{1}{3}g_{\nu\mu}Q_{\rho} + \frac{1}{6}\varepsilon_{\mu\nu\rho\beta}\tilde{Q}^{\beta} \right] \times \left[\frac{1}{3}g^{\rho\mu}Q^{\nu} - \frac{1}{3}g^{\nu\mu}Q^{\rho} + \frac{1}{6}\varepsilon^{\mu\nu\rho\gamma}\tilde{Q}_{\gamma} \right] \\ &= \frac{4}{9}Q_{\nu}Q^{\nu} - \frac{1}{9}Q_{\rho}Q^{\rho} + \frac{1}{18}\varepsilon_{\rho}{}^{\nu\rho\gamma}\tilde{Q}_{\gamma}Q_{\nu} - \frac{1}{9}Q_{\rho}Q^{\rho} + \frac{4}{9}Q_{\rho}Q^{\rho} - \frac{1}{18}\varepsilon_{\nu}{}^{\nu\rho\gamma}\tilde{Q}_{\gamma}Q_{\rho} \\ &\quad + \frac{1}{18}\varepsilon^{\rho}{}_{\nu\rho\beta}\tilde{Q}^{\beta}Q^{\nu} - \frac{1}{18}\varepsilon^{\nu}{}_{\nu\rho\beta}Q^{\rho}\tilde{Q}^{\beta} + \frac{1}{36}\varepsilon_{\mu\nu\rho\beta}\varepsilon^{\mu\nu\rho\gamma}\tilde{Q}_{\gamma}\tilde{Q}^{\beta} \end{aligned}$$

Comme

$$g_{\alpha\beta}\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} = 0, \quad \varepsilon_{\mu\nu\rho\beta}\varepsilon^{\mu\nu\rho\gamma} = -6\delta_{\beta}^{\gamma}$$

nous obtenons

$$Q_{\mu\nu\rho}Q^{\mu\nu\rho} = \frac{2}{3}Q_{\rho}Q^{\rho} - \frac{1}{6}\tilde{Q}_{\beta}\tilde{Q}^{\beta}. \quad (4.50)$$

4.4.2 Décomposition de $Q_{\mu\nu\rho}Q^{\nu\rho\mu}$

Nous calculons aussi

$$\begin{aligned} Q_{\mu\nu\rho}Q^{\nu\rho\mu} &= \left[\frac{1}{3}g_{\rho\mu}Q_{\nu} - \frac{1}{3}g_{\nu\mu}Q_{\rho} + \frac{1}{6}\varepsilon_{\mu\nu\rho\beta}\tilde{Q}^{\beta} \right] \times \left[\frac{1}{3}g^{\mu\nu}Q^{\rho} - \frac{1}{3}g^{\rho\nu}Q^{\mu} + \frac{1}{6}\varepsilon^{\nu\rho\mu\gamma}\tilde{Q}_{\gamma} \right] \\ &= \frac{1}{9}Q_{\rho}Q^{\rho} - \frac{1}{9}Q_{\nu}Q^{\nu} + \frac{1}{18}\varepsilon^{\nu}{}_{\mu}{}^{\mu\gamma}\tilde{Q}_{\gamma}Q_{\nu} - \frac{4}{9}Q_{\rho}Q^{\rho} + \frac{1}{9}Q_{\rho}Q^{\rho} \\ &\quad - \frac{1}{18}\varepsilon_{\mu}{}^{\rho\mu\gamma}\tilde{Q}_{\gamma}Q_{\rho} + \frac{1}{18}\varepsilon^{\nu}{}_{\nu\rho\beta}\tilde{Q}^{\beta}Q^{\rho} - \frac{1}{18}\varepsilon_{\mu\nu}{}^{\nu}{}_{\beta}\tilde{Q}^{\beta}Q^{\mu} \\ &\quad + \frac{1}{36}\varepsilon_{\mu\nu\rho\beta}\varepsilon^{\nu\rho\mu\gamma}\tilde{Q}_{\gamma}\tilde{Q}^{\beta} \end{aligned}$$

$$Q_{\mu\nu\rho}Q^{\nu\rho\mu} = -\frac{1}{3}Q_{\rho}Q^{\rho} - \frac{1}{6}\tilde{Q}_{\beta}\tilde{Q}^{\beta} \quad (4.51)$$

alors

$$AQ_{\mu\nu\rho}Q^{\mu\nu\rho} + BQ_{\mu\nu\rho}Q^{\nu\rho\mu} + CQ_{\mu}Q^{\mu} = \frac{1}{3}(2A - B + 3C)Q_{\rho}Q^{\rho} - \frac{1}{6}(A + B)\tilde{Q}_{\beta}\tilde{Q}^{\beta}. \quad (4.52)$$

4.5 Décomposition des termes quadratiques en $R_{\alpha\beta\mu\nu}$

4.5.1 Décomposition de $R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu}$

Nous avons le produit

$$R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu} = \left[\begin{aligned} &\bar{R}_{\alpha\beta\mu\nu} + \frac{1}{6}\bar{\nabla}_\mu \left(\varepsilon_{\alpha\beta\nu\gamma} \tilde{Q}^\gamma \right) - \frac{1}{6}\bar{\nabla}_\nu \left(\varepsilon_{\alpha\beta\mu\gamma} \tilde{Q}^\gamma \right) + \frac{2}{3}g_{\alpha\nu}\bar{\nabla}_\mu Q_\beta \\ &- \frac{2}{3}g_{\alpha\mu}\bar{\nabla}_\nu Q_\beta + \frac{2}{3}g_{\mu\beta}\bar{\nabla}_\nu Q_\alpha - \frac{2}{3}g_{\nu\beta}\bar{\nabla}_\mu Q_\alpha + \frac{4}{9}g_{\alpha\mu}Q_\nu Q_\beta \\ &- \frac{4}{9}g_{\alpha\nu}Q_\mu Q_\beta + \frac{4}{9}g_{\nu\beta}Q_\mu Q_\alpha - \frac{4}{9}g_{\mu\beta}Q_\alpha Q_\nu - \frac{4}{9}g_{\alpha\mu}g_{\nu\beta}\tilde{Q}^\gamma Q_\gamma \\ &+ \frac{4}{9}g_{\alpha\nu}g_{\mu\beta}Q_\gamma Q^\gamma + \frac{2}{9}\varepsilon_{\alpha\nu\mu\gamma}Q_\beta \tilde{Q}^\gamma + \frac{2}{9}\varepsilon_{\nu\beta\mu\gamma}Q_\alpha \tilde{Q}^\gamma \\ &+ \frac{1}{9}g_{\alpha\mu}\varepsilon^\gamma{}_{\beta\nu\sigma}\tilde{Q}^\sigma Q_\gamma - \frac{1}{9}g_{\alpha\nu}\varepsilon^\gamma{}_{\beta\mu\sigma}\tilde{Q}^\sigma Q_\gamma + \frac{1}{9}g_{\mu\beta}\varepsilon_{\alpha\sigma\nu\gamma}\tilde{Q}^\gamma Q^\sigma \\ &- \frac{1}{9}g_{\nu\beta}\varepsilon_{\alpha\sigma\mu\gamma}\tilde{Q}^\gamma Q^\sigma + \frac{1}{36}g_{\beta\nu}g_{\mu\alpha}\tilde{Q}_\gamma \tilde{Q}^\gamma - \frac{1}{36}g_{\beta\mu}g_{\nu\alpha}\tilde{Q}_\gamma \tilde{Q}^\gamma \\ &+ \frac{1}{36}g_{\beta\mu}\tilde{Q}_\nu \tilde{Q}_\alpha - \frac{1}{36}g_{\beta\nu}\tilde{Q}_\mu \tilde{Q}_\alpha + \frac{1}{36}g_{\nu\alpha}\tilde{Q}_\beta \tilde{Q}_\mu - \frac{1}{36}g_{\mu\alpha}\tilde{Q}_\beta \tilde{Q}_\nu \end{aligned} \right] \\ \times \left[\begin{aligned} &\bar{R}^{\alpha\beta\mu\nu} + \frac{1}{6}\bar{\nabla}^\mu \left(\varepsilon^{\alpha\beta\nu}{}_{\rho} \tilde{Q}^\rho \right) - \frac{1}{6}\bar{\nabla}^\nu \left(\varepsilon^{\alpha\beta\mu}{}_{\rho} \tilde{Q}^\rho \right) + \frac{2}{3}g^{\alpha\nu}\bar{\nabla}^\mu Q^\beta \\ &- \frac{2}{3}g^{\alpha\mu}\bar{\nabla}^\nu Q^\beta + \frac{2}{3}g^{\mu\beta}\bar{\nabla}^\nu Q^\alpha - \frac{2}{3}g^{\nu\beta}\bar{\nabla}^\mu Q^\alpha + \frac{4}{9}g^{\alpha\mu}Q^\nu Q^\beta \\ &- \frac{4}{9}g^{\alpha\nu}Q^\mu Q^\beta + \frac{4}{9}g^{\nu\beta}Q^\mu Q^\alpha - \frac{4}{9}g^{\mu\beta}Q^\alpha Q^\nu - \frac{4}{9}g^{\alpha\mu}g^{\nu\beta}Q_\rho Q^\rho \\ &+ \frac{4}{9}g^{\alpha\nu}g^{\mu\beta}Q_\rho Q^\rho + \frac{2}{9}\varepsilon^{\alpha\nu\mu}{}_{\rho}Q^\beta \tilde{Q}^\rho + \frac{2}{9}\varepsilon^{\nu\beta\mu}{}_{\rho}Q^\alpha \tilde{Q}^\rho \\ &+ \frac{1}{9}g^{\alpha\mu}\varepsilon^{\rho\beta\nu}{}_{\theta}\tilde{Q}^\theta Q_\rho - \frac{1}{9}g^{\alpha\nu}\varepsilon^{\rho\beta\mu}{}_{\theta}Q_\rho \tilde{Q}^\theta + \frac{1}{9}g^{\mu\beta}\varepsilon^{\alpha\theta\nu\rho}\tilde{Q}_\rho Q_\theta \\ &- \frac{1}{9}g^{\nu\beta}\varepsilon^{\alpha\theta\mu\rho}\tilde{Q}_\rho Q_\theta + \frac{1}{36}g^{\nu\beta}g^{\alpha\mu}\tilde{Q}_\rho \tilde{Q}^\rho - \frac{1}{36}g^{\mu\beta}g^{\alpha\nu}\tilde{Q}_\rho \tilde{Q}^\rho \\ &+ \frac{1}{36}g^{\mu\beta}\tilde{Q}^\nu \tilde{Q}^\alpha - \frac{1}{36}g^{\nu\beta}\tilde{Q}^\mu \tilde{Q}^\alpha + \frac{1}{36}g^{\alpha\nu}\tilde{Q}^\beta \tilde{Q}^\mu - \frac{1}{36}g^{\alpha\mu}\tilde{Q}^\beta \tilde{Q}^\nu \end{aligned} \right]$$

En tenant en compte les propriétés suivantes

$$\begin{aligned} g_{\alpha\nu}\bar{\nabla}^\mu \left(\varepsilon^{\alpha\beta\nu}{}_{\rho} \tilde{Q}^\rho \right) &= \bar{\nabla}^\mu \left(\varepsilon^{\alpha\beta}{}_{\alpha\rho} \tilde{Q}^\rho \right) = 0, \quad \varepsilon^{\alpha\beta}{}_{\alpha\rho} = 0 \\ g^{\beta\mu}\bar{R}_{\mu\beta\alpha\nu} &= \bar{R}^\beta{}_{\beta\alpha\nu} = 0, \quad \bar{R}_{\mu\beta\alpha}{}^\alpha = 0 \\ \bar{R}^\mu{}_{\gamma\beta\nu}Q^\nu Q^\beta &= 0, \quad \bar{R}^\mu{}_{\gamma\beta\nu}\tilde{Q}^\nu \tilde{Q}^\beta = 0 \\ \varepsilon^{\mu\theta\beta\rho}\tilde{Q}_\rho Q_\theta \tilde{Q}_\beta \tilde{Q}_\mu &= 0, \quad \varepsilon^{\mu\theta\beta\rho}\tilde{Q}_\rho \tilde{Q}_\theta Q_\beta Q_\mu = 0 \\ Q^\nu Q^\beta \bar{\nabla}^\alpha \left(\varepsilon^\mu{}_{\nu\beta\rho} \tilde{Q}^\rho \right) &= 0, \quad \tilde{Q}^\nu \tilde{Q}^\beta \bar{\nabla}^\alpha \left(\varepsilon^\mu{}_{\nu\beta\rho} \tilde{Q}^\rho \right) = 0 \\ \bar{\nabla}^\mu \left(\varepsilon^{\alpha\beta\nu}{}_{\rho} \tilde{Q}^\rho \right) \bar{\nabla}_\mu \left(\varepsilon_{\alpha\beta\nu\gamma} \tilde{Q}^\gamma \right) &= \varepsilon^{\alpha\beta\nu}{}_{\rho} \varepsilon_{\alpha\beta\nu\gamma} \left(\bar{\nabla}^\mu \tilde{Q}^\rho \right) \left(\bar{\nabla}_\mu \tilde{Q}^\gamma \right). \end{aligned} \quad (4.53)$$

Nous remarquons que nous obtenons 625 termes nous passons par plusieurs étapes de

simplification, nous trouvons finalement 24 termes ;

$$\begin{aligned}
R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu} = & \bar{R}_{\alpha\beta\mu\nu}\bar{R}^{\alpha\beta\mu\nu} + \frac{2}{3}\bar{R}_{\alpha\beta\mu\nu}\bar{\nabla}^\mu \left(\varepsilon^{\alpha\beta\nu}{}_\rho \tilde{Q}^\rho \right) + \frac{8}{3}\bar{R}^\nu{}_{\beta\mu\nu}\bar{\nabla}^\mu Q^\beta \\
& + \frac{32}{9}\bar{R}^\mu{}_{\beta\mu\nu}Q^\nu Q^\beta - \frac{16}{9}\bar{R}^{\mu\nu}{}_{\mu\nu}Q_\rho Q^\rho + \frac{2}{9}\bar{R}_{\alpha\beta}{}^\beta{}_\nu \tilde{Q}^\nu \tilde{Q}^\alpha \\
& + \frac{1}{9}\bar{R}_{\alpha\beta}{}^{\alpha\beta} \tilde{Q}_\rho \tilde{Q}^\rho + \frac{1}{18}\bar{\nabla}^\mu \left(\varepsilon^{\alpha\beta\nu}{}_\rho \tilde{Q}^\rho \right) \bar{\nabla}_\mu \left(\varepsilon_{\alpha\beta\nu\gamma} \tilde{Q}^\gamma \right) \\
& - \frac{1}{18}\bar{\nabla}^\nu \left(\varepsilon^{\alpha\beta\mu}{}_\rho \tilde{Q}^\rho \right) \bar{\nabla}_\mu \left(\varepsilon_{\alpha\beta\nu\gamma} \tilde{Q}^\gamma \right) + \frac{8}{9}\bar{\nabla}^\nu Q^\alpha \bar{\nabla}^\mu \left(\varepsilon_{\mu\nu\alpha\rho} \tilde{Q}^\rho \right) \\
& + \frac{16}{9}\bar{\nabla}_\mu Q^\mu \bar{\nabla}_\alpha Q^\alpha + \frac{32}{9}\bar{\nabla}^\mu Q^\beta \bar{\nabla}_\mu Q_\beta + \frac{128}{27}Q_\rho Q^\rho \bar{\nabla}_\mu Q^\mu \\
& - \frac{128}{27}Q^\mu Q^\beta \bar{\nabla}_\mu Q_\beta - \frac{8}{27}\tilde{Q}_\rho \tilde{Q}^\rho \bar{\nabla}_\mu Q^\mu + \frac{8}{27}\tilde{Q}^\mu \tilde{Q}^\alpha \bar{\nabla}_\mu Q_\alpha \\
& + \frac{88}{81}\tilde{Q}_\rho \tilde{Q}^\rho Q_\gamma Q^\gamma - \frac{48}{81}Q^\mu Q^\beta \tilde{Q}_\mu \tilde{Q}_\beta + \frac{192}{81}Q_\gamma Q^\gamma Q_\alpha Q^\alpha \\
& + \frac{1}{108}\tilde{Q}_\rho \tilde{Q}^\rho \tilde{Q}_\gamma \tilde{Q}^\gamma + \frac{8}{9}\bar{R}_{\alpha\beta\mu\nu}\varepsilon^{\alpha\nu\mu\rho}Q^\beta \tilde{Q}_\rho + \frac{8}{9}\bar{R}^\mu{}_{\beta\mu\nu}\varepsilon^{\rho\beta\nu\theta}Q_\rho \tilde{Q}_\theta \\
& + \frac{8}{27}\varepsilon^{\alpha\nu\mu\rho}Q^\beta \tilde{Q}_\rho \bar{\nabla}_\mu \left(\varepsilon_{\alpha\beta\nu\gamma} \tilde{Q}^\gamma \right) + \frac{4}{27}\varepsilon^{\rho\beta\nu\theta}Q_\rho \tilde{Q}_\theta \bar{\nabla}^\mu \left(\varepsilon_{\mu\beta\nu\rho} \tilde{Q}^\rho \right) \quad (4.54)
\end{aligned}$$

4.5.2 Décomposition de $R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\mu\nu\alpha\beta}$

Le produit de $R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\mu\nu\alpha\beta}$ est donné par

$$\begin{aligned}
R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\mu\nu\alpha\beta} = & \left[\begin{aligned} & \bar{R}_{\alpha\beta\mu\nu} + \frac{1}{6}\bar{\nabla}_\mu \left(\varepsilon_{\alpha\beta\nu\gamma} \tilde{Q}^\gamma \right) - \frac{1}{6}\bar{\nabla}_\nu \left(\varepsilon_{\alpha\beta\mu\gamma} \tilde{Q}^\gamma \right) + \frac{2}{3}g_{\alpha\nu}\bar{\nabla}_\mu Q_\beta \\ & - \frac{2}{3}g_{\alpha\mu}\bar{\nabla}_\nu Q_\beta + \frac{2}{3}g_{\mu\beta}\bar{\nabla}_\nu Q_\alpha - \frac{2}{3}g_{\nu\beta}\bar{\nabla}_\mu Q_\alpha + \frac{4}{9}g_{\alpha\mu}Q_\nu Q_\beta \\ & - \frac{4}{9}g_{\alpha\nu}Q_\mu Q_\beta + \frac{4}{9}g_{\nu\beta}Q_\mu Q_\alpha - \frac{4}{9}g_{\mu\beta}Q_\alpha Q_\nu - \frac{4}{9}g_{\alpha\mu}g_{\nu\beta}Q^\gamma Q_\gamma \\ & + \frac{4}{9}g_{\alpha\nu}g_{\mu\beta}Q_\gamma Q^\gamma + \frac{2}{9}\varepsilon_{\alpha\nu\mu\gamma}Q_\beta \tilde{Q}^\gamma + \frac{2}{9}\varepsilon_{\nu\beta\mu\gamma}Q_\alpha \tilde{Q}^\gamma \\ & + \frac{1}{9}g_{\alpha\mu}\varepsilon^{\gamma}{}_{\beta\nu\sigma}\tilde{Q}^\sigma Q_\gamma - \frac{1}{9}g_{\alpha\nu}\varepsilon^{\gamma}{}_{\beta\mu\sigma}\tilde{Q}^\sigma Q_\gamma + \frac{1}{9}g_{\mu\beta}\varepsilon_{\alpha\sigma\nu\gamma}\tilde{Q}^\gamma Q^\sigma \\ & - \frac{1}{9}g_{\nu\beta}\varepsilon_{\alpha\sigma\mu\gamma}\tilde{Q}^\gamma Q^\sigma + \frac{1}{36}g_{\beta\nu}g_{\mu\alpha}\tilde{Q}_\gamma \tilde{Q}^\gamma - \frac{1}{36}g_{\beta\mu}g_{\nu\alpha}\tilde{Q}_\gamma \tilde{Q}^\gamma \\ & + \frac{1}{36}g_{\beta\mu}\tilde{Q}_\nu \tilde{Q}_\alpha - \frac{1}{36}g_{\beta\nu}\tilde{Q}_\mu \tilde{Q}_\alpha + \frac{1}{36}g_{\nu\alpha}\tilde{Q}_\beta \tilde{Q}_\mu - \frac{1}{36}g_{\mu\alpha}\tilde{Q}_\beta \tilde{Q}_\nu \end{aligned} \right] \\
& \times \left[\begin{aligned} & \bar{R}^{\mu\nu\alpha\beta} + \frac{1}{6}\bar{\nabla}^\alpha \left(\varepsilon^{\mu\nu\beta}{}_\rho \tilde{Q}^\rho \right) - \frac{1}{6}\bar{\nabla}^\beta \left(\varepsilon^{\mu\nu\alpha}{}_\rho \tilde{Q}^\rho \right) + \frac{2}{3}g^{\mu\beta}\bar{\nabla}^\alpha Q^\nu \\ & - \frac{2}{3}g^{\alpha\mu}\bar{\nabla}^\beta Q^\nu + \frac{2}{3}g^{\alpha\nu}\bar{\nabla}^\beta Q^\mu - \frac{2}{3}g^{\nu\beta}\bar{\nabla}^\alpha Q^\mu + \frac{4}{9}g^{\alpha\mu}Q^\nu Q^\beta \\ & - \frac{4}{9}g^{\mu\beta}Q^\alpha Q^\nu + \frac{4}{9}g^{\nu\beta}Q^\mu Q^\alpha - \frac{4}{9}g^{\alpha\nu}Q^\mu Q^\beta - \frac{4}{9}g^{\alpha\mu}g^{\nu\beta}Q_\rho Q^\rho \\ & + \frac{4}{9}g^{\mu\beta}g^{\alpha\nu}Q_\rho Q^\rho + \frac{2}{9}\varepsilon^{\mu\beta\alpha}{}_\rho Q^\nu \tilde{Q}^\rho + \frac{2}{9}\varepsilon^{\beta\nu\alpha}{}_\rho Q^\mu \tilde{Q}^\rho \\ & + \frac{1}{9}g^{\alpha\mu}\varepsilon^{\rho\nu\beta}{}_\theta \tilde{Q}^\theta Q_\rho - \frac{1}{9}g^{\mu\beta}\varepsilon^{\rho\nu\alpha}{}_\theta Q_\rho \tilde{Q}^\theta + \frac{1}{9}g^{\alpha\nu}\varepsilon^{\mu\theta\beta\rho}\tilde{Q}_\rho Q_\theta \\ & - \frac{1}{9}g^{\nu\beta}\varepsilon^{\mu\theta\alpha\rho}\tilde{Q}_\rho Q_\theta + \frac{1}{36}g^{\nu\beta}g^{\alpha\mu}\tilde{Q}_\rho \tilde{Q}^\rho - \frac{1}{36}g^{\mu\beta}g^{\alpha\nu}\tilde{Q}_\rho \tilde{Q}^\rho \\ & + \frac{1}{36}g^{\alpha\nu}\tilde{Q}^\beta \tilde{Q}^\mu - \frac{1}{36}g^{\nu\beta}Q^\mu \tilde{Q}^\alpha + \frac{1}{36}g^{\mu\beta}\tilde{Q}^\nu \tilde{Q}^\alpha - \frac{1}{36}g^{\alpha\mu}\tilde{Q}^\beta \tilde{Q}^\nu \end{aligned} \right]
\end{aligned}$$

Après simplification et compte tenu des propriétés (4.53), nous obtenons

$$\begin{aligned}
R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\mu\nu\alpha\beta} = & \bar{R}_{\alpha\beta\mu\nu}\bar{R}^{\mu\nu\alpha\beta} + \frac{2}{3}\bar{R}_{\alpha\beta\mu\nu}\bar{\nabla}^\alpha\left(\varepsilon^{\mu\nu\beta}{}_\rho\tilde{Q}^\rho\right) + \frac{16}{3}\bar{R}_{\alpha\beta}{}^\beta{}_\nu\bar{\nabla}^\alpha Q^\nu \\
& + \frac{32}{9}\bar{R}^\mu{}_{\beta\mu\nu}Q^\nu Q^\beta + \frac{16}{9}\bar{R}^{\nu\mu}{}_{\mu\nu}Q_\rho Q^\rho + \frac{1}{9}\bar{R}^{\mu\nu}{}_{\mu\nu}\tilde{Q}_\rho\tilde{Q}^\rho \\
& + \frac{2}{9}\bar{R}^\nu{}_{\beta\mu\nu}\tilde{Q}^\beta\tilde{Q}^\mu + \frac{1}{9}\bar{\nabla}^\alpha\left(\varepsilon^{\mu\nu\beta}{}_\rho\tilde{Q}^\rho\right)\bar{\nabla}_\mu\left(\varepsilon_{\alpha\beta\nu\gamma}\tilde{Q}^\gamma\right) \\
& + \frac{16}{9}\bar{\nabla}_\mu Q^\mu\bar{\nabla}_\nu Q^\nu + \frac{32}{9}\bar{\nabla}^\beta Q^\mu\bar{\nabla}_\mu Q_\beta + \frac{104}{27}Q_\rho Q^\rho\bar{\nabla}_\nu Q^\nu \\
& - \frac{128}{27}Q_\alpha Q_\nu\bar{\nabla}^\alpha Q^\nu - \frac{7}{27}\tilde{Q}_\rho\tilde{Q}^\rho\bar{\nabla}_\mu Q^\mu + \frac{8}{27}\tilde{Q}_\alpha\tilde{Q}_\nu\bar{\nabla}^\alpha Q^\nu \\
& - \frac{40}{81}Q^\alpha Q^\nu\tilde{Q}_\alpha\tilde{Q}_\nu + \frac{16}{81}\tilde{Q}_\rho\tilde{Q}^\rho Q_\gamma Q^\gamma + \frac{192}{81}Q_\rho Q^\rho Q_\beta Q^\beta \\
& + \frac{1}{108}\tilde{Q}_\rho\tilde{Q}^\rho\tilde{Q}_\beta\tilde{Q}^\beta + \frac{8}{9}\bar{\nabla}_\mu Q_\alpha\bar{\nabla}^\nu\left(\varepsilon^{\mu\nu\alpha\rho}\tilde{Q}_\rho\right) + \frac{8}{9}\bar{R}_{\alpha\beta\mu\nu}\varepsilon^{\mu\beta\alpha\rho}\tilde{Q}_\rho Q^\nu \\
& + \frac{8}{9}\bar{R}^\mu{}_{\beta\mu\nu}\varepsilon^{\rho\nu\beta\theta}\tilde{Q}_\theta Q_\rho + \frac{4}{27}\varepsilon^{\beta\nu\alpha\rho}\tilde{Q}_\rho Q^\mu\bar{\nabla}_\mu\left(\varepsilon_{\alpha\beta\nu\gamma}\tilde{Q}^\gamma\right) \\
& + \frac{4}{27}\varepsilon^{\mu\beta\alpha\rho}\tilde{Q}_\rho Q^\nu\bar{\nabla}_\mu\left(\varepsilon_{\alpha\beta\nu\gamma}\tilde{Q}^\gamma\right) + \frac{4}{27}\varepsilon^{\rho\nu\beta\theta}\tilde{Q}_\theta Q_\rho\bar{\nabla}_\mu\left(\varepsilon^\mu{}_{\beta\nu\gamma}\tilde{Q}^\gamma\right) \quad (4.55)
\end{aligned}$$

4.5.3 Décomposition de $R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\mu\beta\nu}$

Finalement, nous calculons le dernier produit

$$\begin{aligned}
R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\mu\beta\nu} = & \left[\begin{aligned} & \bar{R}_{\alpha\beta\mu\nu} + \frac{1}{6}\bar{\nabla}_\mu\left(\varepsilon_{\alpha\beta\nu\gamma}\tilde{Q}^\gamma\right) - \frac{1}{6}\bar{\nabla}_\nu\left(\varepsilon_{\alpha\beta\mu\gamma}\tilde{Q}^\gamma\right) + \frac{2}{3}g_{\alpha\nu}\bar{\nabla}_\mu Q_\beta \\ & - \frac{2}{3}g_{\alpha\mu}\bar{\nabla}_\nu Q_\beta + \frac{2}{3}g_{\mu\beta}\bar{\nabla}_\nu Q_\alpha - \frac{2}{3}g_{\nu\beta}\bar{\nabla}_\mu Q_\alpha + \frac{4}{9}g_{\alpha\mu}Q_\nu Q_\beta \\ & - \frac{4}{9}g_{\alpha\nu}Q_\mu Q_\beta + \frac{4}{9}g_{\nu\beta}Q_\mu Q_\alpha - \frac{4}{9}g_{\mu\beta}Q_\alpha Q_\nu - \frac{4}{9}g_{\alpha\mu}g_{\nu\beta}\tilde{Q}^\gamma Q_\gamma \\ & + \frac{4}{9}g_{\alpha\nu}g_{\mu\beta}Q_\gamma Q^\gamma + \frac{2}{9}\varepsilon_{\alpha\nu\mu\gamma}Q_\beta\tilde{Q}^\gamma + \frac{2}{9}\varepsilon_{\nu\beta\mu\gamma}Q_\alpha\tilde{Q}^\gamma \\ & + \frac{1}{9}g_{\alpha\mu}\varepsilon^\gamma{}_{\beta\nu\sigma}\tilde{Q}^\sigma Q_\gamma - \frac{1}{9}g_{\alpha\nu}\varepsilon^\gamma{}_{\beta\mu\sigma}Q_\gamma\tilde{Q}^\sigma + \frac{1}{9}g_{\mu\beta}\varepsilon_{\alpha\sigma\nu\gamma}\tilde{Q}^\gamma Q^\sigma \\ & - \frac{1}{9}g_{\nu\beta}\varepsilon_{\alpha\sigma\mu\gamma}\tilde{Q}^\gamma Q^\sigma + \frac{1}{36}g_{\beta\nu}g_{\mu\alpha}\tilde{Q}_\gamma\tilde{Q}^\gamma - \frac{1}{36}g_{\beta\mu}g_{\nu\alpha}\tilde{Q}_\gamma\tilde{Q}^\gamma \\ & + \frac{1}{36}g_{\beta\mu}\tilde{Q}_\nu\tilde{Q}_\alpha - \frac{1}{36}g_{\beta\nu}\tilde{Q}_\mu\tilde{Q}_\alpha + \frac{1}{36}g_{\nu\alpha}\tilde{Q}_\beta\tilde{Q}_\mu - \frac{1}{36}g_{\mu\alpha}\tilde{Q}_\beta\tilde{Q}_\nu \end{aligned} \right] \\
& \times \left[\begin{aligned} & \bar{R}^{\alpha\mu\beta\nu} + \frac{1}{6}\bar{\nabla}^\beta\left(\varepsilon^{\alpha\mu\nu}{}_\rho\tilde{Q}^\rho\right) - \frac{1}{6}\bar{\nabla}^\nu\left(\varepsilon^{\alpha\mu\beta}{}_\rho\tilde{Q}^\rho\right) + \frac{2}{3}g^{\alpha\nu}\bar{\nabla}^\beta Q^\mu \\ & - \frac{2}{3}g^{\alpha\beta}\bar{\nabla}^\nu Q^\mu + \frac{2}{3}g^{\mu\beta}\bar{\nabla}^\nu Q^\alpha - \frac{2}{3}g^{\nu\mu}\bar{\nabla}^\beta Q^\alpha + \frac{4}{9}g^{\alpha\beta}Q^\nu Q^\mu \\ & - \frac{4}{9}g^{\alpha\nu}Q^\mu Q^\beta + \frac{4}{9}g^{\nu\mu}Q^\beta Q^\alpha - \frac{4}{9}g^{\mu\beta}Q^\alpha Q^\nu - \frac{4}{9}g^{\alpha\beta}g^{\nu\mu}Q_\rho Q^\rho \\ & + \frac{4}{9}g^{\alpha\nu}g^{\mu\beta}Q_\rho Q^\rho + \frac{2}{9}\varepsilon^{\alpha\nu\beta}{}_\rho Q^\mu\tilde{Q}^\rho + \frac{2}{9}\varepsilon^{\nu\mu\beta}{}_\rho Q^\alpha\tilde{Q}^\rho \\ & + \frac{1}{9}g^{\alpha\beta}\varepsilon^{\rho\mu\nu}{}_\theta\tilde{Q}^\theta Q_\rho - \frac{1}{9}g^{\alpha\nu}\varepsilon^{\rho\mu\beta}{}_\theta Q_\rho\tilde{Q}^\theta + \frac{1}{9}g^{\mu\beta}\varepsilon^{\alpha\theta\nu\rho}\tilde{Q}_\rho Q_\theta \\ & - \frac{1}{9}g^{\nu\mu}\varepsilon^{\alpha\theta\beta\rho}\tilde{Q}_\rho Q_\theta + \frac{1}{36}g^{\nu\mu}g^{\alpha\beta}\tilde{Q}_\rho\tilde{Q}^\rho - \frac{1}{36}g^{\mu\beta}g^{\alpha\nu}\tilde{Q}_\rho\tilde{Q}^\rho \\ & + \frac{1}{36}g^{\mu\beta}\tilde{Q}^\nu\tilde{Q}^\alpha - \frac{1}{36}g^{\nu\mu}\tilde{Q}^\beta\tilde{Q}^\alpha + \frac{1}{36}g^{\alpha\nu}\tilde{Q}^\beta\tilde{Q}^\mu - \frac{1}{36}g^{\alpha\beta}\tilde{Q}^\mu\tilde{Q}^\nu \end{aligned} \right]
\end{aligned}$$

Nous trouvons dans ce dernier cas la résultat suivant

$$\begin{aligned}
R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\mu\beta\nu} = & \bar{R}_{\alpha\beta\mu\nu}\bar{R}^{\alpha\mu\beta\nu} + \frac{2}{3}\bar{R}_{\alpha\beta\mu\nu}\bar{\nabla}^\beta\left(\varepsilon^{\alpha\mu\nu}{}_\rho\tilde{Q}^\rho\right) + \frac{8}{3}\bar{R}^\nu{}_{\beta\mu\nu}\bar{\nabla}^\beta Q^\mu \\
& - \frac{20}{9}\bar{R}^\nu{}_{\beta\mu\nu}Q^\mu Q^\beta + \frac{8}{9}\bar{R}^{\nu\mu}{}_{\mu\nu}Q_\rho Q^\rho + \frac{1}{9}\bar{R}_{\alpha\beta}{}^\beta{}_\nu\tilde{Q}^\nu\tilde{Q}^\alpha \\
& - \frac{1}{18}\bar{R}^{\nu\mu}{}_{\mu\nu}\tilde{Q}_\rho\tilde{Q}^\rho + \frac{8}{9}\bar{R}_{\alpha\beta\nu\mu}\varepsilon^{\alpha\beta\nu\rho}Q^\mu\tilde{Q}_\rho - \frac{4}{9}\bar{R}^\nu{}_{\beta\mu\nu}\varepsilon^{\mu\beta\rho\theta}Q_\rho\tilde{Q}_\theta \\
& + \frac{1}{12}\bar{\nabla}^\beta\left(\varepsilon^{\alpha\mu\nu\rho}\tilde{Q}_\rho\right)\bar{\nabla}_\mu\left(\varepsilon_{\alpha\beta\nu\gamma}\tilde{Q}^\gamma\right) + \frac{1}{36}\bar{\nabla}^\nu\left(\varepsilon^{\alpha\mu\beta\rho}\tilde{Q}_\rho\right)\bar{\nabla}_\nu\left(\varepsilon_{\alpha\beta\mu\gamma}\tilde{Q}^\gamma\right) \\
& + \frac{4}{27}\varepsilon^{\nu\mu\beta\rho}Q^\alpha\tilde{Q}_\rho\bar{\nabla}_\mu\left(\varepsilon_{\alpha\beta\nu\gamma}\tilde{Q}^\gamma\right) + \frac{2}{27}\varepsilon^{\alpha\nu\beta\rho}Q^\mu\tilde{Q}_\rho\bar{\nabla}_\mu\left(\varepsilon_{\alpha\beta\nu\gamma}\tilde{Q}^\gamma\right) \\
& + \frac{8}{9}\bar{\nabla}^\beta Q^\mu\bar{\nabla}_\mu Q_\beta + \frac{8}{9}\bar{\nabla}_\mu Q^\mu\bar{\nabla}_\alpha Q^\alpha + \frac{8}{9}\bar{\nabla}^\nu Q^\mu\bar{\nabla}_\nu Q_\mu - \frac{88}{27}Q^\mu Q^\beta\bar{\nabla}_\mu Q_\beta \\
& + \frac{56}{27}Q_\alpha Q^\alpha\bar{\nabla}_\mu Q^\mu - \frac{4}{27}\tilde{Q}_\rho\tilde{Q}^\rho\bar{\nabla}_\mu Q^\mu + \frac{4}{27}\tilde{Q}^\mu\tilde{Q}^\beta\bar{\nabla}_\mu Q_\beta \\
& - \frac{4}{81}\tilde{Q}_\rho\tilde{Q}^\rho Q_\mu Q^\mu + \frac{16}{81}\tilde{Q}^\mu\tilde{Q}^\beta Q_\mu Q_\beta + \frac{96}{81}Q_\mu Q^\mu Q_\alpha Q^\alpha \\
& + \frac{1}{216}\tilde{Q}_\rho\tilde{Q}^\rho\tilde{Q}_\gamma\tilde{Q}^\gamma. \tag{4.56}
\end{aligned}$$

4.5.4 Décomposition de $R_{\beta\nu}R^{\beta\nu}$

Le produit de deux tenseurs de Ricci est donné par

$$\begin{aligned}
R_{\beta\nu}R^{\beta\nu} = & \left[\bar{R}_{\beta\nu} - \frac{2}{3}g_{\nu\beta}\bar{\nabla}_\alpha Q^\alpha - \frac{4}{3}\bar{\nabla}_\nu Q_\beta + \frac{1}{6}\bar{\nabla}_\alpha\left(\varepsilon^\alpha{}_{\beta\nu\rho}\tilde{Q}^\rho\right) \right] \\
& \times \left[\bar{R}^{\beta\nu} - \frac{2}{3}g^{\nu\beta}\bar{\nabla}_\lambda Q^\lambda - \frac{4}{3}\bar{\nabla}^\nu Q^\beta + \frac{1}{6}\bar{\nabla}_\lambda\left(\varepsilon^{\lambda\beta\nu}{}_\sigma\tilde{Q}^\sigma\right) \right] \\
& + \left[\frac{8}{9}Q_\nu Q_\beta - \frac{8}{9}g_{\nu\beta}Q_\rho Q^\rho + \frac{1}{18}g_{\beta\nu}\tilde{Q}_\rho\tilde{Q}^\rho - \frac{1}{18}\tilde{Q}_\beta\tilde{Q}_\nu \right]
\end{aligned}$$

il vient donc

$$\begin{aligned}
R_{\beta\nu}R^{\beta\nu} = & \bar{R}_{\beta\nu}\bar{R}^{\beta\nu} - \frac{4}{3}\bar{R}\bar{\nabla}_\lambda Q^\lambda - \frac{8}{3}\bar{R}_{\beta\nu}\bar{\nabla}^\nu Q^\beta + \frac{16}{9}\bar{R}_{\beta\nu}Q^\nu Q^\beta \\
& - \frac{16}{9}\bar{R}Q_\sigma Q^\sigma + \frac{1}{9}\bar{R}\tilde{Q}_\sigma\tilde{Q}^\sigma - \frac{1}{9}\bar{R}_{\beta\nu}\tilde{Q}^\beta\tilde{Q}^\nu + \frac{32}{9}\bar{\nabla}_\alpha Q^\alpha\bar{\nabla}_\lambda Q^\lambda \\
& + \frac{160}{27}Q_\sigma Q^\sigma\bar{\nabla}_\alpha Q^\alpha - \frac{10}{27}\tilde{Q}_\sigma\tilde{Q}^\sigma\bar{\nabla}_\nu Q^\nu + \frac{16}{9}\bar{\nabla}_\nu Q_\beta\bar{\nabla}^\nu Q^\beta \\
& - \frac{64}{27}Q^\nu Q^\beta\bar{\nabla}_\nu Q_\beta + \frac{4}{27}\tilde{Q}^\beta\tilde{Q}^\nu\bar{\nabla}_\nu Q_\beta + \frac{192}{81}Q_\rho Q^\rho Q_\beta Q^\beta \\
& - \frac{16}{81}Q_\nu Q^\nu\tilde{Q}_\sigma\tilde{Q}^\sigma - \frac{8}{81}Q_\nu Q_\beta\tilde{Q}^\beta\tilde{Q}^\nu + \frac{1}{108}\tilde{Q}_\beta\tilde{Q}^\beta\tilde{Q}_\sigma\tilde{Q}^\sigma \\
& - \frac{4}{9}\bar{\nabla}_\nu Q_\beta\bar{\nabla}_\lambda\left(\varepsilon^{\lambda\beta\nu}{}_\sigma\tilde{Q}^\sigma\right) + \frac{1}{36}\bar{\nabla}_\lambda\left(\varepsilon^{\lambda\beta\nu}{}_\sigma\tilde{Q}^\sigma\right)\bar{\nabla}_\alpha\left(\varepsilon^\alpha{}_{\beta\nu\rho}\tilde{Q}^\rho\right). \tag{4.57}
\end{aligned}$$

4.5.5 Décomposition de $R_{\beta\nu}R^{\nu\beta}$

Dans ce cas, nous avons

$$R_{\beta\nu}R^{\nu\beta} = \left[\begin{aligned} &\bar{R}_{\beta\nu} - \frac{2}{3}g_{\nu\beta}\bar{\nabla}_\alpha Q^\alpha - \frac{4}{3}\bar{\nabla}_\nu Q_\beta + \frac{1}{6}\bar{\nabla}_\alpha \left(\varepsilon^\alpha{}_{\beta\nu\rho} \tilde{Q}^\rho \right) \\ &+ \frac{8}{9}Q_\nu Q_\beta - \frac{8}{9}g_{\nu\beta}Q_\rho Q^\rho + \frac{1}{18}g_{\beta\nu}\tilde{Q}_\rho \tilde{Q}^\rho - \frac{1}{18}\tilde{Q}_\beta \tilde{Q}_\nu \end{aligned} \right] \\ \times \left[\begin{aligned} &\bar{R}^{\nu\beta} - \frac{2}{3}g^{\nu\beta}\bar{\nabla}_\lambda Q^\lambda - \frac{4}{3}\bar{\nabla}^\beta Q^\nu + \frac{1}{6}\bar{\nabla}_\lambda \left(\varepsilon^{\lambda\nu\beta}{}_\sigma \tilde{Q}^\sigma \right) \\ &+ \frac{8}{9}Q^\nu Q^\beta - \frac{8}{9}g^{\nu\beta}Q_\sigma Q^\sigma + \frac{1}{18}g^{\nu\beta}\tilde{Q}_\sigma \tilde{Q}^\sigma - \frac{1}{18}\tilde{Q}^\beta \tilde{Q}^\nu \end{aligned} \right]$$

nous obtenons donc

$$R_{\beta\nu}R^{\nu\beta} = \bar{R}_{\beta\nu}\bar{R}^{\nu\beta} - \frac{4}{3}\bar{R}\bar{\nabla}_\lambda Q^\lambda - \frac{8}{3}\bar{R}_{\beta\nu}\bar{\nabla}^\beta Q^\nu + \frac{16}{9}\bar{R}_{\beta\nu}Q^\nu Q^\beta \\ - \frac{16}{9}\bar{R}Q_\sigma Q^\sigma + \frac{1}{9}\bar{R}\tilde{Q}_\sigma \tilde{Q}^\sigma - \frac{1}{9}\bar{R}_{\beta\nu}\tilde{Q}^\beta \tilde{Q}^\nu + \frac{32}{9}\bar{\nabla}_\alpha Q^\alpha \bar{\nabla}_\lambda Q^\lambda \\ + \frac{160}{27}Q_\sigma Q^\sigma \bar{\nabla}_\alpha Q^\alpha - \frac{10}{27}\tilde{Q}_\sigma \tilde{Q}^\sigma \bar{\nabla}_\alpha Q^\alpha + \frac{16}{9}\bar{\nabla}_\nu Q_\beta \bar{\nabla}^\beta Q^\nu \\ - \frac{64}{27}Q^\nu Q^\beta \bar{\nabla}_\nu Q_\beta + \frac{4}{27}\tilde{Q}^\beta \tilde{Q}^\nu \bar{\nabla}_\nu Q_\beta + \frac{192}{81}Q_\rho Q^\rho Q_\sigma Q^\sigma \\ - \frac{16}{81}\tilde{Q}_\rho \tilde{Q}^\rho Q_\beta Q^\beta - \frac{8}{81}Q_\nu Q_\beta \tilde{Q}^\beta \tilde{Q}^\nu + \frac{1}{108}\tilde{Q}_\rho \tilde{Q}^\rho \tilde{Q}_\nu \tilde{Q}^\nu \\ - \frac{4}{9}\bar{\nabla}_\nu Q_\beta \bar{\nabla}_\lambda \left(\varepsilon^{\lambda\nu\beta}{}_\sigma \tilde{Q}^\sigma \right) + \frac{1}{36}\bar{\nabla}_\lambda \left(\varepsilon^{\lambda\nu\beta}{}_\sigma \tilde{Q}^\sigma \right) \bar{\nabla}_\alpha \left(\varepsilon^\alpha{}_{\beta\nu\rho} \tilde{Q}^\rho \right). \quad (4.58)$$

4.5.6 Décomposition de R^2

Nous calculons le produit

$$R^2 = \left[\bar{R} - 4\bar{\nabla}_\mu Q^\mu - \frac{8}{3}Q_\rho Q^\rho + \frac{1}{6}\tilde{Q}_\rho \tilde{Q}^\rho \right] \\ \times \left[\bar{R} - 4\bar{\nabla}_\alpha Q^\alpha - \frac{8}{3}Q_\gamma Q^\gamma + \frac{1}{6}\tilde{Q}_\gamma \tilde{Q}^\gamma \right]$$

ce qui nous donne finalement

$$R^2 = \bar{R}^2 - 8\bar{R}\bar{\nabla}_\alpha Q^\alpha + 16\bar{\nabla}_\mu Q^\mu \bar{\nabla}_\alpha Q^\alpha + \frac{64}{3}Q_\gamma Q^\gamma \bar{\nabla}_\mu Q^\mu \\ - \frac{4}{3}\tilde{Q}_\gamma \tilde{Q}^\gamma \bar{\nabla}_\mu Q^\mu - \frac{16}{3}\bar{R}Q_\rho Q^\rho + \frac{1}{3}\bar{R}\tilde{Q}_\rho \tilde{Q}^\rho \\ + \frac{64}{9}Q_\rho Q^\rho Q_\gamma Q^\gamma - \frac{8}{9}Q_\rho Q^\rho \tilde{Q}_\gamma \tilde{Q}^\gamma + \frac{1}{36}\tilde{Q}_\gamma \tilde{Q}^\gamma \tilde{Q}_\rho \tilde{Q}^\rho. \quad (4.59)$$

4.6 Le lagrangien total

Dans la théorie de jauge de Poincaré le lagrangien L_G quadratique est défini par la forme suivante [42]

$$\begin{aligned}
L_G = & \frac{1}{2}M_{Pl}^2 R + \frac{1}{2}M_{Pl}^2 (a_1 Q_{\mu\nu\rho} Q^{\mu\nu\rho} + a_2 Q_{\mu\nu\rho} Q^{\nu\rho\mu} + a_3 Q_\mu Q^\mu) \\
& + b_1 R^2 + b_2 R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} + b_3 R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\rho\sigma\mu\nu} \\
& + b_4 R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\rho\nu\sigma} + b_5 R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + b_6 R_{\mu\nu} R^{\nu\mu}
\end{aligned} \tag{4.60}$$

où M_{Pl}^2 est la masse de Planck, a_i , et b_i sont des paramètres sans dimensions.

Afin d'obtenir le terme de Gauss-Bonnet et qui est défini par

$$G \propto R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$$

nous devons faire la limite $Q = 0$, et qu'il implique

$$R = \bar{R}, R_{\mu\nu} = \bar{R}_{\mu\nu} = \bar{R}_{\nu\mu}, R_{\mu\nu\rho\sigma} = \bar{R}_{\mu\nu\rho\sigma} = \bar{R}_{\rho\sigma\mu\nu} \text{ et } \bar{R}_{\mu\nu\rho\sigma} \bar{R}^{\mu\rho\nu\sigma} = \frac{1}{2} \bar{R}_{\mu\nu\rho\sigma} \bar{R}^{\mu\nu\rho\sigma},$$

le lagrangien L_G devient alors

$$L_G |_{Q=0} = \frac{1}{2}M_{Pl}^2 \bar{R} + b_1 \bar{R}^2 + (b_5 + b_6) \bar{R}_{\mu\nu} \bar{R}^{\mu\nu} + \left(b_2 + b_3 + \frac{b_4}{2}\right) \bar{R}_{\mu\nu\rho\sigma} \bar{R}^{\mu\nu\rho\sigma}. \tag{4.61}$$

Donc il faut les contraintes $b_5 = -4b_1 - b_6$ et $b_4 = 2(b_1 - b_2 - b_3)$.

Dans notre travail, nous dénotons le terme de Gauss-Bonnet $\bar{G}$ par

$$\bar{G} = b_1 \left(\bar{R}^2 - 4\bar{R}_{\mu\nu} \bar{R}^{\mu\nu} + \bar{R}_{\mu\nu\rho\sigma} \bar{R}^{\mu\nu\rho\sigma} \right)$$

b_1 représente la constante de couplage de ce terme.

4.7 Elimination des fantômes

Soit le lagrangien obtenue à partir de résultat (A.17)

$$\begin{aligned}
L_G = & -\frac{8}{9}(\kappa - \beta) \Upsilon_{\mu\alpha} \Upsilon^{\mu\alpha} + \frac{1}{18}(\kappa - 2\beta) S_{\nu\gamma} S^{\nu\gamma} + \frac{1}{2}m_T^2 Q^2 + \frac{1}{2}m_S^2 \tilde{Q}^2 \\
& + \frac{24}{81}\beta \tilde{Q}^2 Q^2 + \frac{8}{81}(4\beta - 9b_2) \left[\left(\tilde{Q}^\nu Q_\nu \right)^2 + 3\tilde{Q}^\beta \tilde{Q}^\nu \bar{\nabla}_\nu Q_\beta \right] \\
& + \frac{1}{27}\beta \tilde{Q}^2 \bar{\nabla}_\alpha Q^\alpha + \frac{8}{27}(\beta - 3b_2) \tilde{Q}_\mu Q_\gamma \bar{\nabla}^\mu \tilde{Q}^\gamma + \frac{1}{3}(\beta - 3b_2) \left(\bar{\nabla}_\nu \tilde{Q}^\nu \right)^2 \\
& + \frac{1}{9}\beta \left(2\bar{G}_{\nu\gamma} \tilde{Q}^\nu \tilde{Q}^\gamma + \bar{R} \tilde{Q}^2 \right) + \dots
\end{aligned} \tag{4.62}$$

Pour que la théorie donne des résultats précis, les fantômes doivent être éliminés. La composante axiale $\tilde{Q}_\nu$ présente des termes très inquiétants en contairement à la trace du torsion Q_ν , et qui apparaissent sous trois formes ;

1-Le terme le plus pathologique est $\left(\bar{\nabla}_\nu \tilde{Q}^\nu \right)^2$ qui introduit les fantômes associé principalement à la composante temporelle $\tilde{Q}^0$ (la composante temporelle parceque on s'intéresse au terme donc il faut que $\beta - 3b_2 = 0 \Rightarrow \beta = 3b_2$ cette contrainte a déjà été retrouvée dans la littérature afin de garantir un spectre stable sur Minkowski.

2-La présence des instabilités relie au terme $2\bar{G}_{\nu\gamma} \tilde{Q}^\nu \tilde{Q}^\gamma + \bar{R} \tilde{Q}^2$ est apparente dans les équations du champ métrique où à nouveau la composante temporelle entrera avec des dérivées secondes, l'écriture du couplage $\bar{G}_{\nu\gamma} \tilde{Q}^\nu \tilde{Q}^\gamma$ est due à la condition de continuité ou de divergence $\nabla^\nu \bar{G}_{\nu\gamma} = 0$ et donc elle élimine directement les fantômes. Il reste le terme $\bar{R} \tilde{Q}^2$ alors nous devons imposer $\beta = 0$

Nous avons précédemment $\beta = 3b_2$ et maintenant $\beta = 0$ donc

$$\beta = b_2 = 0 \tag{4.63}$$

$$\begin{aligned}
\beta &= b_1 + b_2 - b_3 = 0 \\
\Rightarrow b_1 &= b_3
\end{aligned} \tag{4.64}$$

$$L_{G|\beta=b_2=0} = -\frac{8}{9}\kappa \Upsilon_{\mu\alpha} \Upsilon^{\mu\alpha} + \frac{1}{18}\kappa S_{\nu\gamma} S^{\nu\gamma} + \frac{1}{2}m_T^2 Q^2 + \frac{1}{2}m_S^2 \tilde{Q}^2 + \dots$$

3-Il ya d'autre termes pathologiques comme $\tilde{Q}_\sigma \tilde{Q}^\sigma \bar{\nabla}_\alpha Q^\alpha, \tilde{Q}_\gamma Q_\mu \bar{\nabla}^\mu \tilde{Q}^\gamma, \bar{\nabla}_\mu Q_\beta \bar{\nabla}_\lambda \left(\varepsilon^{\lambda\mu\beta\sigma} \tilde{Q}_\sigma \right) \dots$ qu'ils doivent être éliminés.

4-Nous remarquons que les deux termes cinétiques $\Upsilon_{\mu\alpha} \Upsilon^{\mu\alpha}, S_{\nu\gamma} S^{\nu\gamma}$ sont en fonctions de $-\kappa$ et $+\kappa$ respectivement (nous posons $\beta = 0$) et donc nous ne savons pas s'ils sont positifs ou négatifs, il faut donc poser

$$\kappa = 0 \tag{4.65}$$

$$\kappa = 0 \Rightarrow b_6 = -4b_1 \quad (4.66)$$

5-Les termes $\bar{\nabla}_\nu V^\nu$ et $\bar{\nabla}_\nu \tilde{V}^\nu$ sont des termes de surface nous les néglige.

Pour une théorie libre de ghosts, le lagrangien L_G s'écrit alors

$$\begin{aligned} L_G = & \frac{1}{2}M_{Pl}^2 R + \frac{1}{2}M_{Pl}^2 (a_1 Q_{\mu\nu\rho} Q^{\mu\nu\rho} + a_2 Q_{\mu\nu\rho} Q^{\nu\rho\mu} + a_3 Q_\mu Q^\mu) \\ & + b_1 (R^2 + R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\rho\sigma\mu\nu} - 4R_{\mu\nu} R^{\nu\mu}) . \end{aligned}$$

Nous concluons que la théorie libre de ghosts est celle de Gauss-Bonnet avec torsion.

4.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié l'existence des ghosts dans le secteur vectoriel et comment les éliminer. Nous avons vu que les termes cinétiques pour Q_μ et $\tilde{Q}_\mu$ ont des signes opposés, en montrant ainsi que la présence d'un fantôme est inévitable. La seule possibilité d'une théorie stable est d'annuler exactement les deux termes cinétiques et, par conséquent, tout le secteur vectoriel devient non dynamique.

Chapitre 5

Cosmologie avec torsion

"Cosmology is among the oldest subjects to captivate our species. And it's no wonder. We're storytellers, and what could be more grand than the story of creation?"
Brian Green

5.1 Introduction

La cosmologie est la branche de l'astrophysique qui décrit la formation et l'évolution de l'univers à travers le modèle standard de la cosmologie ou le modèle Λ CDM qui suppose que l'univers a été créé dans le "Big Bang". Ce modèle a prouvé une certaine concordance avec les résultats obtenus par les collaborations PLANCK [7] et WMAP [8]. Cependant, malgré le succès qu'il a connu, ce modèle souffre de plusieurs problèmes comme par exemple le problème de l'énergie noire et de sa nature.

L'objectif de ce chapitre est de montrer que l'introduction de la torsion constitue une alternative à l'inflation. La prise en compte de la torsion est une simple généralisation pour implémenter des concepts comme le spin dans la relativité générale. Cependant, il est vite apparu que la torsion, telle que considérée par exemple dans la théorie d'Einstein-Cartan-Sciama-Kibble (ECKS), ne semble pas donner d'effets pertinents sur les structures astrophysiques observées. Néanmoins, il a été constaté que pour des densités de l'ordre de 10^{44}Kg/cm^3 pour les électrons et de 10^{51}Kg/cm^3 pour les protons et les neutrons, la torsion pouvait donner des conséquences observables si tous les spins des particules sont alignés. Ces énormes densités ne peuvent être atteintes que dans l'univers primordial, de sorte que la cosmologie est la seule approche viable pour tester les effets de torsion. Cependant aucun test confirmant l'existence de la torsion n'a été réalisé jusqu'à présent et il reste encore à débattre si l'espace temps est Riemannien ou non. Compte tenu du point de vue cosmologique et, en particulier des transitions de phase primordiales et de l'inflation, il semble très probable que, dans certaines régions du premier univers, la présence de champs magnétiques locaux aurait pu aligner les spins de particules. A des densités très élevées, cet effet pourrait influencer l'évolution des perturbations primordiales restant comme une empreinte dans les structures à grande échelle observées

aujourd'hui. En d'autres termes, un objectif principal pourrait être de sélectionner des échelles de perturbation liées à la présence de torsion aux premières époques qui donnent des effets cosmologiques observables aujourd'hui.

5.2 Modèle standard de la cosmologie

5.2.1 Principe cosmologique

Le principe cosmologique sur lequel est basé le modèle standard de Friedmann-Robertson-Walker stipule que l'univers est localement homogène, isotrope et en expansion, ce qui a pour conséquence mathématique l'existence d'un système de coordonnées comobiles (t, r, θ, ϕ) dans lequel la métrique à quatre dimensions de l'espace-temps s'écrit

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin\theta d\phi^2 \right] \quad (5.1)$$

où t est le temps cosmique. C'est la métrique générale qui nous permet de décrire la géométrie et la dynamique de l'univers. La fonction $a(t)$ est dite facteur d'échelle qui représente l'expansion de l'univers. La constante K représente la courbure spatiale et elle ne peut prendre que l'une des trois valeurs suivantes :

$$\begin{array}{ll} \text{pour un univers fermé} & ; \quad K = +1 \\ \text{pour un univers plat} & ; \quad K = 0 \\ \text{pour un univers ouvert} & ; \quad K = -1 \end{array}$$

5.2.2 Equations de Friedmann

En relativité générale, les connexions affines (symboles de Christoffel) liées à la métrique (5.1) sont définies par

$$\Gamma^\mu{}_{\nu\kappa} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} (g_{\lambda\nu,\kappa} + g_{\lambda\kappa,\nu} - g_{\nu\kappa,\lambda}). \quad (5.2)$$

Les symboles de Christoffel non nulles sont

$$\Gamma^0{}_{ij} = a\dot{a}\tilde{g}_{ij} \quad (5.3)$$

$$\Gamma^i{}_{0j} = \frac{\dot{a}}{a}\delta_{ij} \quad (5.4)$$

$$\Gamma^i{}_{jl} = K\tilde{g}_{ij}x^i \quad (5.5)$$

avec

$$\tilde{g}_{ij} = \delta_{ij} + K \frac{x^i x^j}{1 - Kr^2}, \quad x^i \equiv (r, \theta, \phi). \quad (5.6)$$