

Domaine errant en dimension supérieure

Le but de ce chapitre est de prouver le théorème 3.1.2, qui fournit une famille d'exemples d'endomorphismes polynômiaux de \mathbb{C}^2 ayant un domaine errant (voir [ABD⁺14]). On rappelle qu'en dimension complexe un, le théorème de non-errance de Sullivan (théorème 2.4.28) affirme qu'une fraction rationnelle ne peut pas avoir de domaines errants. Le théorème 3.1.2 montre donc que la situation est différente en dimension supérieure.

3.1 Généralités

3.1.1 Énoncé

Le résultat principal du chapitre est :

Théorème 3.1.1. *Il existe des polynômes de la forme $f(z) = z + z^2 + O(z^3)$ tel que pour tout polynôme g de la forme $g(w) = w - w^2 + O(w^3)$, le produit fibré*

$$P(z, w) = \left(f(z) + \frac{\pi^2}{4}w, g(w) \right)$$

ait un domaine errant, qui s'accumule sur la droite invariante $\{w = 0\}$.

En particulier, on peut choisir le polynôme g de sorte qu'il ait le même degré que celui de f . Alors P se prolonge holomorphiquement en une application sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. De plus, on fournira une famille d'exemples à coefficients réels dont le domaine errant intersecte \mathbb{R}^2 . Enfin, notons qu'il s'agit du premier exemple de domaine errant d'orbite bornée : en effet, la question de trouver un exemple de fonction transcendante entière ayant un domaine errant d'orbite bornée est ouverte.

Plus précisément, la condition requise sur f est que son *application de Lavaurs* de phase 0, noté \mathcal{L}_f , ait un point fixe attractif. L'application de Lavaurs sera définie précisément dans la section 3.2. Pour l'instant, précisons seulement qu'il s'agit d'une application holomorphe transcendante $\mathcal{L}_f : \mathcal{B}_f \rightarrow \mathbb{C}$ définie sur le bassin parabolique de f . On associera canoniquement une telle application \mathcal{L}_f à tout polynôme f de la forme $f(z) = z + z^2 + O(z^3)$, et l'application \mathcal{L}_f dépendra holomorphiquement de f .

L'énoncé complet du théorème précédent est donc :

Théorème 3.1.2. *Soit un polynôme de la forme $f(z) = z + z^2 + O(z^3)$ dont l'application de Lavaurs de phase 0 a un point fixe attractif. Alors pour tout polynôme g de la forme $g(w) = w - w^2 + O(w^3)$, le produit fibré*

$$P(z, w) = \left(f(z) + \frac{\pi^2}{4}w, g(w) \right)$$

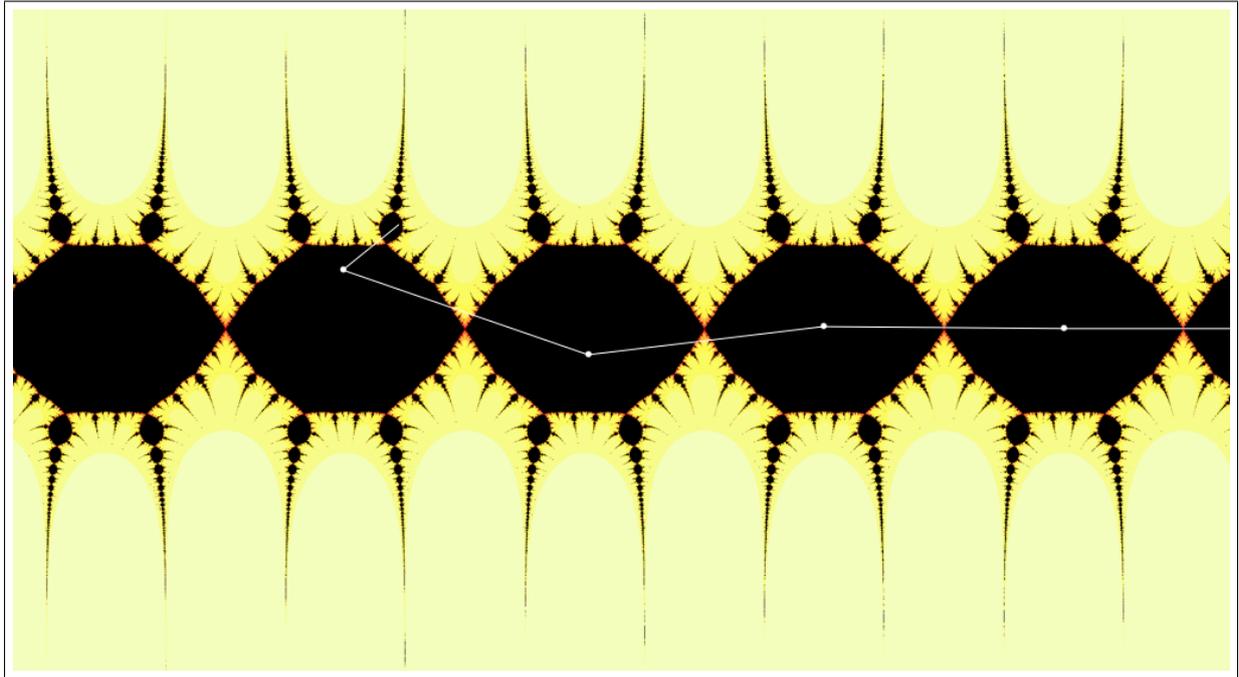


FIGURE 3.0.1 – Un domaine errant pour la fonction transcendente $z \mapsto z - \sin(z) + 2\pi$. L'ensemble de Julia est la frontière entre la partie jaune et la partie noire. L'orbite d'un point du domaine errant est représentée en blanc.

a un domaine errant, qui s'accumule sur la droite invariante $\{w = 0\}$.

Nous verrons dans la section 3.2 comment construire des polynômes $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dont l'application de Lavaurs vérifie cette condition, qui n'est donc pas vide. Plus précisément, on montrera :

Proposition 3.1.3. Il existe des polynômes de la forme $f(z) = z + z^2 + O(z^3)$ dont l'application de Lavaurs a un point fixe attractif, dans chacune des deux familles suivantes :

- $f_a(z) = z + z^2 + az^3$, avec $a \in \mathbb{C}$
- $f_b(z) = z + z^2 + bz^4$, avec $b \in \mathbb{R}$

De plus, dans la seconde famille, le point attractif que l'on construira sera réel.

3.1.2 Stratégie

Le mécanisme à la base de la construction est le suivant : on veut construire un produit fibré $P(z, w)$ tel qu'il existe une suite extraite d'itérées P^{m_k} qui converge sur un ouvert U vers un point limite $(\hat{z}, 0)$ non prépériodique.

Proposition 3.1.4. Supposons qu'il existe un ouvert U et une suite d'entiers $m_k \rightarrow \infty$ tels que P^{m_k} converge sur U vers un point $(\hat{z}, 0)$ non prépériodique. Alors P a un domaine errant.

Démonstration. On peut supposer que l'ouvert U est connexe, quitte à le restreindre. Commençons par prouver que U est dans l'ensemble de Fatou. Par normalité, il suffit de prouver que la famille totale des itérées $\{P^n, n \in \mathbb{N}\}$ est bornée (uniformément en n) sur U . Ceci vient du fait que l'infini est (super)attractif pour P et donc si une orbite de P est non bornée, alors elle converge vers l'infini. Or l'existence d'une valeur d'adhérence finie $(\hat{z}, 0)$ empêche ce comportement.

Soit donc Ω_0 la composante de Fatou dans laquelle U est inclus, et pour $i \in \mathbb{N}$, posons $\Omega_i = P^i(\Omega_0)$. Il s'agit de montrer que si $i \neq j$, alors $\Omega_i \neq \Omega_j$. Remarquons que si P^{m_k} converge

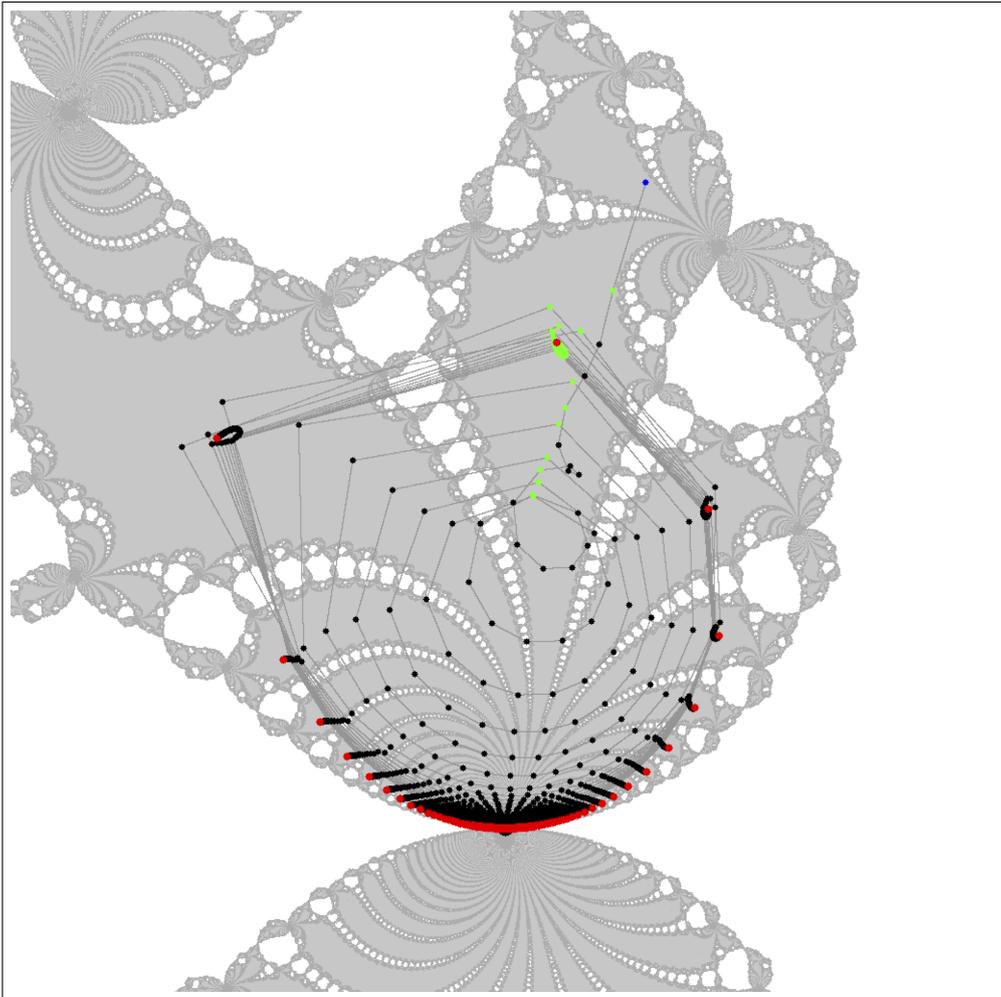


FIGURE 3.1.1 – Projection sur la droite $\{w = 0\}$ d'une orbite (en noir) dans un domaine errant. Le point de départ est dessiné en bleu, en haut à droite. Les points rouges forment l'ensemble ω -limite de l'orbite (on verra que ce sont exactement l'union des points fixes attractifs de \mathcal{L}_f et de $\{0\}$). Les points verts correspondent aux points d'une suite extraite convergente.

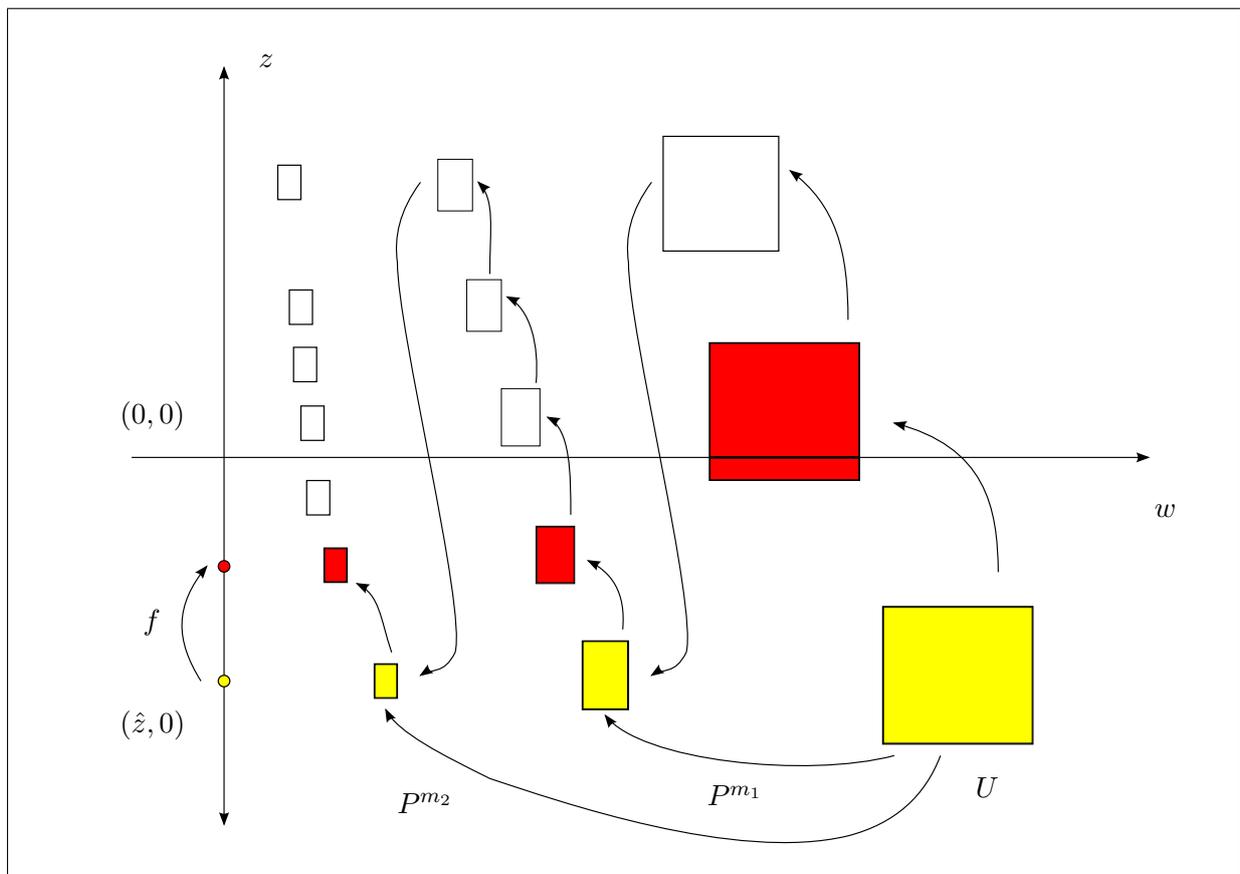


FIGURE 3.1.2 – Schéma de la dynamique de P pour $(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathcal{B}_g$. Chaque boîte est un ouvert de \mathbb{C}^2 inclus dans une composante de Fatou différente.

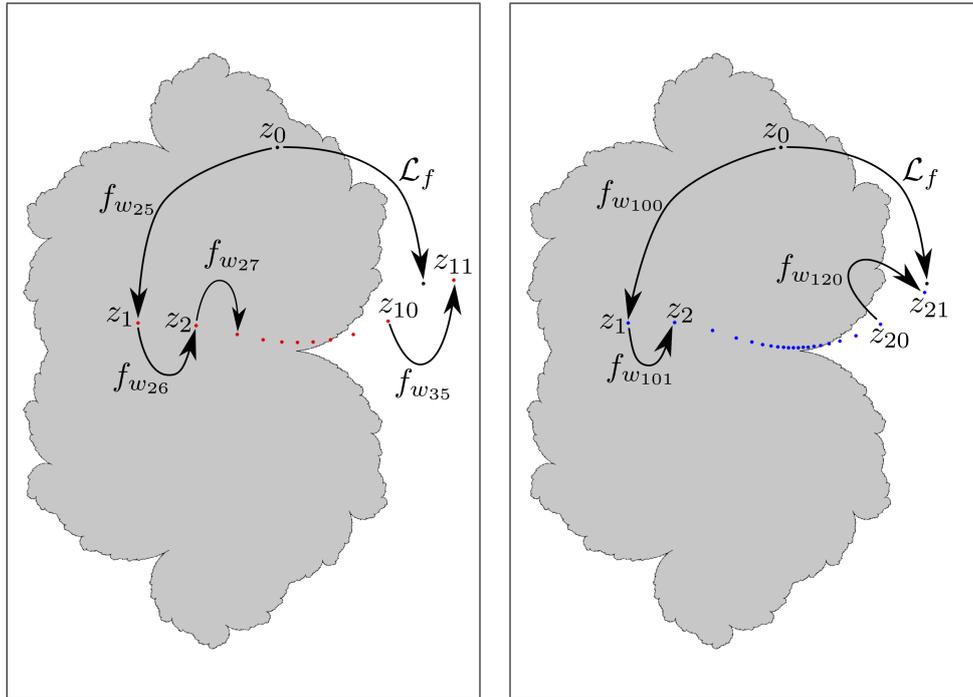


FIGURE 3.1.3 – Illustration du théorème 3.1.5 pour $f(z) = z + z^2 + 0.95z^3$ et $g(w) = w - w^2$. Le bassin parabolique \mathcal{B}_f est coloré en gris. Il est invariant par f , mais pas par $f_w := f + \frac{\pi^2}{4}w$ pour $w \neq 0$. L'application de Lavaurs \mathcal{L}_f est définie sur \mathcal{B}_f . Les points $z_0 = -0.05 + 0.9i$ et leurs images $\mathcal{L}_f(z_0)$ sont indiqués. Les autres points sont les points z_k qui sont définis par $P^{ok}(z_0, w_{n^2}) = (z_k, w_{n^2+k})$ pour $1 \leq k \leq 2n + 1$ et $w_m = g^{om}(1/2)$. Si n est assez grand, les points z_{2n+1} sont proches de $\mathcal{L}_f(z_0)$. A gauche : $n = 5$, il y a 11 points rouges. A droite : $n = 10$, il y a 21 points bleu.

vers $(\hat{z}, 0)$ sur U , alors P^{m_k} converge en fait vers $(\hat{z}, 0)$ sur Ω_0 tout entier : en effet, par le théorème d'Arzela-Ascoli, P^{m_k} admet au moins une valeur d'adhérence en tant que suite de fonctions holomorphes sur Ω_0 . De plus, toute valeur d'adhérence de cette suite est une fonction holomorphe sur Ω_0 , coïncidant avec la fonction constante égale à $(\hat{z}, 0)$ sur U , donc en fait P^{m_k} converge vers la fonction constante égale à $(\hat{z}, 0)$ sur tout Ω_0 .

Par conséquent, pour tout $i \in \mathbb{N}$, la suite P^{m_k} converge sur Ω_i vers $P^i(\hat{z}, 0) = (f^i(\hat{z}), 0)$. Or, comme $(\hat{z}, 0)$ est supposé avoir une orbite infinie, on a donc que si $i \neq j$, $P^i(\hat{z}, 0) \neq P^j(\hat{z}, 0)$, et donc $\Omega_i \neq \Omega_j$.

Ceci prouve bien que la suite de composantes $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}} = (P^n(\Omega_0))_{n \in \mathbb{N}}$ est errante. □

La stratégie pour réaliser un produit fibré ayant cette propriété est d'adapter une technique de dynamique classique en une variable, l'implosion parabolique. Le point clé de la construction est fourni par la proposition suivante :

Théorème 3.1.5 (théorème clé). *Lorsque $n \rightarrow \infty$, la suite d'applications*

$$\mathbb{C}^2 \ni (z, w) \mapsto P^{o2n+1}(z, g^{on^2}(w)) \in \mathbb{C}^2$$

converge localement uniformément dans $\mathcal{B}_f \times \mathcal{B}_g$ vers l'application

$$\mathcal{B}_f \times \mathcal{B}_g \ni (z, w) \mapsto (\mathcal{L}_f(z), 0) \in \mathbb{C} \times \{0\}.$$

La démonstration est plutôt technique et calculatoire, et fera l'objet de la section 3.5. Elle nécessitera la construction de coordonnées adaptées, les *coordonnées de Fatou approchées*, que l'on définira dans la section 3.4.

Nous allons maintenant prouver le résultat principal 3.1.2 à partir du théorème clé 3.1.5.

Démonstration du théorème 3.1.2. On suppose ici que le théorème 3.1.5 est démontré, et que f, g sont des polynômes comme dans l'énoncé du théorème 3.1.2.

Soit $\xi \in \mathcal{B}_f$ un point fixe attractif de l'application de Lavaurs \mathcal{L}_f . Soit V un disque centré en ξ , choisi de telle façon à ce que $\mathcal{L}_f(V)$ soit relativement compact dans V . Alors $\mathcal{L}_f^{ok}(V)$ converge vers ξ quand $k \rightarrow \infty$. Soit $W \in \mathcal{B}_g$ un disque arbitraire.

Notons $\pi_1 : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ la projection sur la première coordonnée, c'est-à-dire $\pi_1(z, w) := z$. D'après le théorème 3.1.5, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$,

$$\pi_1 \circ P^{o(2n+1)}(V \times g^{on^2}(W)) \Subset V.$$

Soit U une composante connexe de l'ouvert $P^{-n_0^2}(V \times g^{on_0^2}(W))$.

Au vu de la proposition 3.1.4, il suffit de prouver le lemme suivant :

Lemme 3.1.6. *La suite $(P^{on^2})_{n \geq 0}$ converge localement uniformément vers $(\xi, 0)$ sur U .*

Démonstration du lemme 3.1.6. Une récurrence facile montre que pour tout entier $n \geq n_0$,

$$P^{on^2}(U) \subseteq V \times g^{on^2}(W). \quad (3.1.1)$$

En effet, ceci est vrai par définition pour $n = n_0$. Supposons maintenant que l'inclusion est vraie pour $n \geq n_0$. Alors

$$\begin{aligned} \pi_1 \circ P^{o(n+1)^2}(U) &= \pi_1 \circ P^{o(2n+1)}(P^{on^2}(U)) \\ &\subset \pi_1 \circ P^{o(2n+1)}(V \times g^{on^2}(W)) \subset V, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit (3.1.1).

Par conséquent, la suite $(P^{on^2})_{n \geq 0}$ est uniformément bornée, et donc normale, sur U . Par ailleurs, toute valeur d'adhérence de cette suite de fonctions est de la forme $(z, 0)$ pour un certain $z \in V$. De plus, $(z, 0)$ est une valeur limite (associée à une suite extraite (n_k)) si et seulement si $(\mathcal{L}_f(z), 0)$ est une valeur limite (associée à la suite extraite $(1 + n_k)$). On en déduit que l'ensemble des valeurs d'adhérence est totalement invariant par $\mathcal{L}_f : V \rightarrow V$, et doit donc être réduit au point attractif ξ de \mathcal{L}_f , ce qui achève la preuve. \square

\square

3.2 Dynamique parabolique en une variable

Nous allons effectuer dans cette section un aperçu de la théorie classique de la dynamique parabolique locale en une variable, et notamment de l'implosion parabolique. Dans un souci de simplicité, et comme ce sera suffisant pour prouver le théorème 3.1.2, nous nous restreindrons au cas d'un polynôme avec un point fixe parabolique simple.

Dans le reste de cette section, $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est un polynôme de la forme

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + O(z^4) \quad \text{avec} \quad a_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Dans la coordonnée $Z = -1/(a_2 z)$, l'expression de f devient

$$F(Z) = Z + 1 + \frac{b}{Z} + O\left(\frac{1}{Z^2}\right) \quad \text{avec} \quad b = 1 - \frac{a_3}{a_2^2}.$$

Choisissons $R > 0$ suffisamment grand pour que F soit univalente sur $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}(0, R)$, et que l'on ait

$$\sup_{|Z| > R} |F(Z) - Z - 1| < \frac{1}{10}, \quad \sup_{|Z| > R} |F'(Z) - 1| < \frac{1}{10}. \quad (3.2.1)$$

Notons \mathbb{H}_R le demi-plan droit $\mathbb{H}_R := \{Z \in \mathbb{C} ; \Re(Z) > R\}$ et $-\mathbb{H}_R$ le demi-plan gauche correspondant.

Enfin, notons $\log : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^- \rightarrow \mathbb{C}$ la branche principale du logarithme.

3.2.1 Coordonnée de Fatou attractive

Lorsque $\Re(Z) \rightarrow +\infty$,

$$\begin{aligned} F(Z) - b \log(F(Z)) &= Z + 1 + \frac{b}{Z} + O\left(\frac{1}{Z^2}\right) - b \log\left(Z + 1 + \frac{b}{Z} + O\left(\frac{1}{Z^2}\right)\right) \\ &= Z - b \log Z + 1 + O\left(\frac{1}{Z^2}\right). \end{aligned}$$

L'application F est univalente sur le demi-plan droit \mathbb{H}_R et pour $Z \in \mathbb{H}_R$, on a :

$$F^{\circ m}(Z) - b \log(F^{\circ m}(Z)) = Z - b \log Z + m + O(1) \quad \text{quand } m \rightarrow +\infty.$$

Il s'ensuit que la suite d'applications univalentes

$$\mathbb{H}_R \ni Z \mapsto F^{\circ m}(Z) - m - b \log m \in \mathbb{C}$$

est normale et converge localement uniformément vers une application univalente $\Phi_F : \mathbb{H}_R \rightarrow \mathbb{C}$ vérifiant

$$\Phi_F \circ F = T_1 \circ \Phi_F \quad \text{avec } T_1(Z) = Z + 1.$$

De plus,

$$\Phi_F(Z) = Z - b \log Z + o(1) \quad \text{quand } \Re(Z) \rightarrow +\infty.$$

En transférant ceci à la coordonnée initiale, on voit que la suite d'applications $\mathcal{B}_f \rightarrow \mathbb{C}$ définies par

$$z \mapsto -\frac{1}{a_2 \cdot f^{\circ m}(z)} - m - b \log m \tag{3.2.2}$$

converge localement uniformément vers une *coordonnée de Fatou attractive* $\phi_f : \mathcal{B}_f \rightarrow \mathbb{C}$ qui semi-conjuge $f : \mathcal{B}_f \rightarrow \mathcal{B}_f$ à $T_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, c'est-à-dire que $\phi_f \circ f = T_1 \circ \phi_f$, et qui vérifie

$$\phi_f(z) = -\frac{1}{a_2 z} - b \log\left(-\frac{1}{a_2 z}\right) + o(1) \quad \text{quand } \Re(-1/z) \rightarrow +\infty.$$

La restriction de ϕ_f au *pétale attractif*

$$P_f^{\text{att}} := \left\{ z \in \mathbb{C} ; \Re\left(-\frac{1}{a_2 z}\right) > R \right\}$$

coïncide avec $z \mapsto \Phi_F(-1/(a_2 z))$, donc est univalente.

De plus, la convergence dans (3.2.2) est localement uniforme par rapport à f dans l'ouvert $\mathcal{B} = \{(f, z), z \in \mathcal{B}_f\}$, ce qui prouve le résultat suivant :

Proposition 3.2.1. L'application ϕ_f dépend holomorphiquement de f .

La figure 3.2.1 (appelée *l'échiquier parabolique* de f), illustre le comportement de la coordonnée de Fatou attractive prolongée à tout \mathcal{B}_f pour $f_1(z) = z + z^2 + z^3$ qui a deux points critiques $c^\pm := (-1 \pm i\sqrt{2})/3$. Le bassin parabolique \mathcal{B}_f est coloré de la façon suivante :

- bleu si $\Im(\phi_f(z)) > \Im(\phi_f(c^+))$,
- rouge si $\Im(\phi_f(z)) < \Im(\phi_f(c^-))$,
- vert si $\Im(\phi_f(c^-)) < \Im(\phi_f(z)) < \Im(\phi_f(c^+))$.

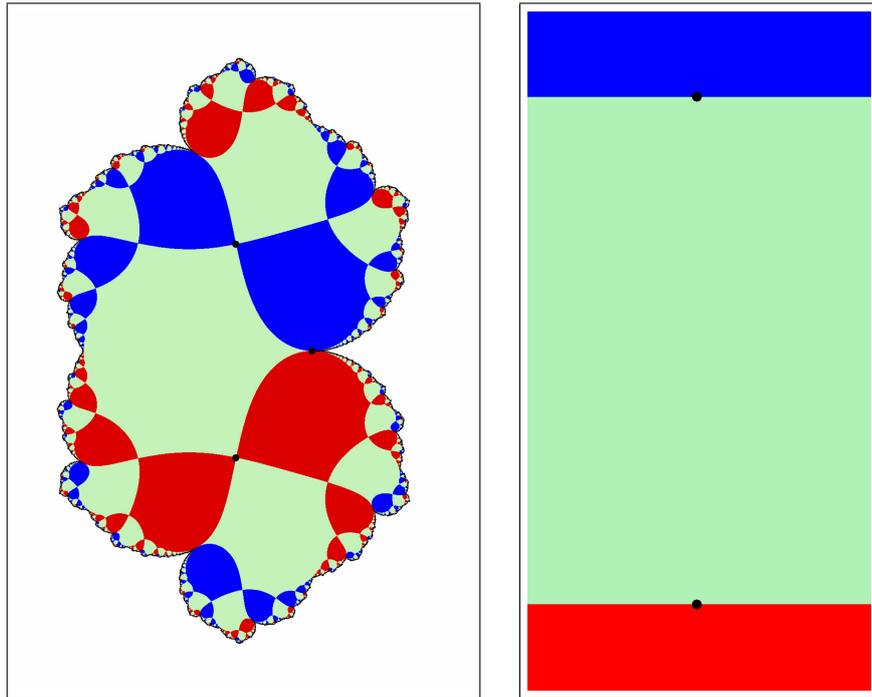


FIGURE 3.2.1 – A gauche : le bassin parabolique \mathcal{B}_f . La coordonnée de Fatou attractive ϕ_f est univalente sur chaque case. Elle envoie chaque case bleue sur un demi-plan supérieur, chaque case rouge sur un demi-plan inférieur et chaque case verte sur une bande horizontale. Le point parabolique 0 et les points critiques c^\pm sont représentés. A droite : l'image de ϕ_f . Les points $\phi_f(c^\pm)$ sont représentés.

3.2.2 Coordonnée de Fatou répulsive

Lorsque $\Re(Z) \rightarrow -\infty$,

$$\begin{aligned} F(Z + b \log(-Z)) &= Z + b \log(-Z) + 1 + \frac{b}{Z + b \log(-Z)} + O\left(\frac{1}{Z^2}\right) \\ &= (Z + 1) + b \log(-Z - 1) + O\left(\frac{1}{Z^2}\right). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que si $R > 0$ est suffisamment grand et $\Re(Z) < -R$, alors

$$F^{om}((Z - m) + b \log(m - Z)) = O(1) \quad \text{quand} \quad m \rightarrow +\infty.$$

Si c'est le cas, la suite d'applications univalentes

$$-\mathbb{H}_R \ni Z \mapsto F^{om}(Z - m + b \log m) \in \mathbb{C}$$

converge localement uniformément vers une application $\Psi_F : -\mathbb{H}_R \rightarrow \mathbb{C}$ vérifiant

$$\Psi_F \circ T_1 = F \circ \Psi_F.$$

De plus,

$$\Psi_F(Z) = Z + b \log(-Z) + o(1) \quad \text{quand} \quad \Re(Z) \rightarrow -\infty.$$

En transférant ceci à la coordonnée initiale, on voit que

$$\mathbb{C} \ni Z \mapsto f^{om}\left(-\frac{1}{a_2 \cdot (Z - m + b \log m)}\right) \in \mathbb{C} \quad (3.2.3)$$

converge localement uniformément vers une *paramétrisation de Fatou répulsive* $\psi_f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ qui semi-conjuge $T_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ à $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, c'est-à-dire que $\psi_f \circ T_1 = f \circ \psi_f$, et qui vérifie

$$-\frac{1}{\psi_f(Z)} = Z + b \log(-Z) + o(1) \quad \text{quand} \quad \Re(Z) \rightarrow -\infty.$$

La restriction de ψ_f au demi-plan gauche $-\mathbb{H}_R$ coïncide avec $Z \mapsto -1/(a_2 \Psi_F(Z))$, et est donc univalente. L'image $P_f^{\text{rep}} := \psi_f(-\mathbb{H}_R)$ est appelée un *pétale répulsif*.

La preuve de la proposition suivante est similaire au cas attractif (voir [BÉE13], section 5 pour les détails).

Proposition 3.2.2. L'application ψ_f dépend holomorphiquement de f .

3.2.3 Application de Lavaurs

Pour $\sigma \in \mathbb{C}$, l'application de Lavaurs de phase σ est l'application

$$L_{f,\sigma} := \psi_f \circ T_\sigma \circ \phi_f : \mathcal{B}_f \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{avec} \quad T_\sigma(Z) = Z + \sigma.$$

Pour la preuve du théorème 3.1.2, nous aurons seulement besoin de l'application de Lavaurs $\mathcal{L}_f := \mathcal{L}_{f,0} := \psi_f \circ \phi_f$ de phase 0. L'intérêt des applications de Lavaurs vient du résultat suivant, dû à Pierre Lavaurs (voir [Lav89]) :

Théorème 3.2.3 (Lavaurs). *Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ un polynôme de la forme $f(z) = z + z^2 + O(z^3)$ lorsque $z \rightarrow 0$. Pour $\varepsilon \in \mathbb{C}$, posons $f_\varepsilon(z) := f(z) + \varepsilon^2$. Soit $(\varepsilon_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres complexes et $(m_n)_{n \geq 0}$ une suite d'entiers, telles que*

$$\frac{\pi}{\varepsilon_n} - m_n \rightarrow \sigma \in \mathbb{C} \quad \text{quand} \quad n \rightarrow +\infty.$$

Alors la suite de polynômes $f_{\varepsilon_n}^{\circ m_n}$ converge localement uniformément sur \mathcal{B}_f vers $\mathcal{L}_{f,\sigma}$.

Il sera également intéressant de considérer l'application

$$\mathcal{E}_f := \phi_f \circ \psi_f : \mathcal{U}_f \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{avec} \quad \mathcal{U}_f := \psi_f^{-1}(\mathcal{B}_f).$$

La paramétrisation répulsive ψ_f semi-conjuge $\mathcal{E}_f : \mathcal{U}_f \rightarrow \mathbb{C}$ à $\mathcal{L}_f : \mathcal{B}_f \rightarrow \mathbb{C}$.

Les propositions 3.2.1 et 3.2.2 impliquent que \mathcal{E}_f et \mathcal{L}_f dépendent analytiquement de f :

Proposition 3.2.4. Les applications \mathcal{E}_f et \mathcal{L}_f dépendent holomorphiquement de f .

Notons que \mathcal{E}_f commute avec T_1 :

$$\mathcal{E}_f \circ T_1 = \phi_f \circ \psi_f \circ T_1 = \phi_f \circ f \circ \psi_f = T_1 \circ \phi_f \circ \psi_f = T_1 \circ \mathcal{E}_f.$$

Donc, le revêtement universel $\exp : \mathbb{C} \ni Z \mapsto e^{2\pi i Z} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ semi-conjuge $\mathcal{E}_f : \mathcal{U}_f \rightarrow \mathbb{C}$ à une application

$$e_f : U_f \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad \text{avec} \quad U_f := \exp(U_f) \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

L'application e_f a des singularités effaçables en 0 et ∞ , et se prolonge donc en une application $e_f : \widehat{U}_f \rightarrow \mathbb{P}^1$, où $\widehat{U}_f := U_f \cup \{0, \infty\} \subset \mathbb{P}^1$. L'application $e_f : \widehat{U}_f \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ est appelée *l'application de corne* associée à f . Comme l'a observé Adam Epstein dans sa thèse [Eps93], cette application de corne est une application de type fini (voir la définition 3.2.5 ci-dessous).

La figure 3.2.2 illustre le comportement de l'application \mathcal{E}_f pour $f(z) = z + z^2 + z^3$.

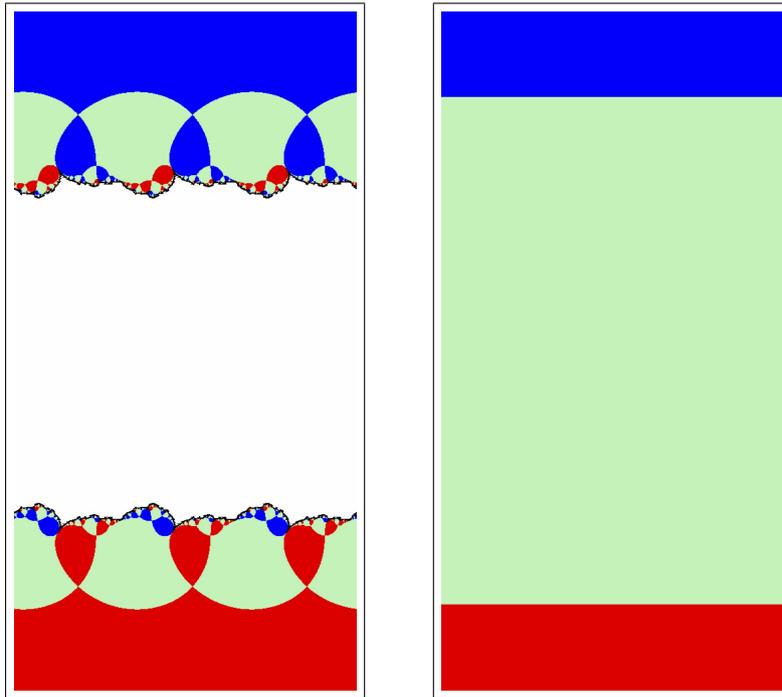


FIGURE 3.2.2 – Comportement de l'application \mathcal{E}_f pour $f(z) = z + z^2 + z^3$. Le domaine \mathcal{U}_f a deux composantes connexes, l'une contenant un demi-plan supérieur et l'autre un demi-plan inférieur. Le domaine est divisé en cases selon le comportement de \mathcal{E}_f . La restriction de E_f à chaque case est univalente. L'image des cases bleues est le demi-plan supérieur bleu à droite. L'image des cases rouges est le demi-plan inférieur rouge à droite. L'image des cases vertes est la bande verte horizontale à droite.

3.2.4 Applications de type fini

Soit $h : W \rightarrow X$ une application analytique entre variétés complexes de dimension un, éventuellement non connexes. On dit que $x \in X$ est une *valeur régulière* pour h si pour un certain voisinage U de x , $h|_V : V \rightarrow U$ est un homéomorphisme pour chaque composante V de $h^{-1}(U)$, et une *valeur singulière* pour h sinon. Notons que l'ensemble $S(h)$ des valeurs singulières est fermé. Rappelons que $w \in W$ est un *point critique* si la dérivée de h en w est nulle, et qu'alors $h(w) \in X$ est une *valeur critique*. On dit que $x \in X$ est une *valeur asymptotique* si h tend vers x le long d'un chemin sortant de tout compact de W . On montre à l'aide d'outils élémentaires de théorie des revêtements que l'union des valeurs critiques et des valeurs asymptotiques est dense dans $S(h)$. En particulier, tout point isolé de $S(h)$ est une valeur critique ou une valeur asymptotique.

Définition 3.2.5. Une application holomorphe $h : W \rightarrow X$ entre variété complexes de dimension 1 est dite *de type fini* si

- h n'est nulle part localement constante,
- h n'a pas de singularités effaçables isolées,
- X est une union finie de surfaces de Riemann compactes, et
- $S(h)$ est finie.

Si $h : W \rightarrow X$ est une application de type fini avec $W \subseteq X$, on dit que h est une application de type fini sur X .

Soit $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ un polynôme, et soit $\phi_f : \mathcal{B}_f \rightarrow \mathbb{C}$ une coordonnée de Fatou attractive définie sur le bassin parabolique d'un point fixe de f de multiplicateur 1 et soit $\psi_f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^1$ une paramétrisation de Fatou répulsive associée. Posons

$$\mathcal{E}_f = \phi_f \circ \psi_f : \mathcal{U}_f \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{avec} \quad \mathcal{U}_f = (\psi_f)^{-1}(\mathcal{B}_f).$$

Enfin, posons $\widehat{U}_f = \exp(\mathcal{U}_f) \cup \{0, \infty\}$ et soit $e_f : \widehat{U}_f \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ défini par

$$\exp \circ \mathcal{E}_f = e_f \circ \exp.$$

Le résultat suivant est énoncé dans [BÉE13], Proposition 7.3.

Proposition 3.2.6. L'application $e_f : \widehat{U}_f \rightarrow \mathbb{P}^1$ est une application de type fini sur \mathbb{P}^1 . Ses valeurs singulières sont :

- 0 et ∞ , qui sont des valeurs asymptotiques de e_f , et
- les images par $\exp \circ \phi_f$ des orbites critiques de f contenues dans \mathcal{B}_f , qui sont les valeurs critiques de e_f .

3.3 Applications de Lavaurs avec un point fixe attractif

Le but de cette section est de construire des polynômes $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dont l'application de Lavaurs a un point fixe attractif. Ainsi, on aura prouvé que la condition du théorème 3.1.2 n'est pas vide.

3.3.1 Exemples cubiques

Dans cette partie, nous allons construire la première de deux familles de polynômes f dont l'application de Lavaurs a des points attractifs. Ici, la famille en question sera de degré 3, soit le plus petit degré possible (l'application de Lavaurs de $z \mapsto z + z^2$ ne convenant pas). Soit $a \in \mathbb{C}$, et soit $f_a : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ le polynôme cubique défini par

$$f_a(z) = z + z^2 + az^3.$$

Nous allons prouver que si $r > 0$ est suffisamment proche de 0 et $a \in D(1-r, r)$, alors l'application de Lavaurs $\mathcal{L}_{f_a} : \mathcal{B}_f \rightarrow \mathbb{C}$ a un point fixe attractif. Remarquons que comme \mathcal{L}_{f_a} commute avec f_a , il y a alors une infinité de tels points fixes.

Posons

$$\mathcal{U}_a := \psi_{f_a}^{-1}(\mathcal{B}_{f_a}), \quad \mathcal{E}_a := \phi_{f_a} \circ \psi_{f_a} : \mathcal{U}_a \rightarrow \mathbb{C}.$$

C'est un ouvert qui contient un demi-plan supérieur et un demi-plan inférieur. Remarquons que $\psi_{f_a} : \mathcal{U}_a \rightarrow \mathcal{B}_{f_a}$ semi-conjugué \mathcal{E}_a à \mathcal{L}_{f_a} . Comme ψ_{f_a} est univalente dans un demi-plan gauche, il suffit de prouver que \mathcal{E}_a a un point fixe attractif dont la partie réelle est arbitrairement proche de $-\infty$. Comme \mathcal{E}_a commute avec la translation de 1, il suffit de prouver que $\mathcal{E}_a : \mathcal{U}_a \rightarrow \mathbb{C}$ a un point fixe attractif.

l'ouvert \mathcal{U}_a est invariant par T_1 et l'application \mathcal{E}_a commute avec T_1 . L'ensemble

$$\mathcal{U} := \{(a, Z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} ; Z \in \mathcal{U}_a\}$$

est un ouvert de \mathbb{C}^2 et l'application

$$\mathcal{E} : \mathcal{U} \ni (a, Z) \mapsto \mathcal{E}_a(Z) \in \mathbb{C}$$

est analytique. Le revêtement universel

$$\exp : \mathbb{C} \ni Z \mapsto e^{2\pi i Z} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

semi-conjugué \mathcal{E}_a à une application

$$e_a : U_a \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad \text{avec} \quad U_a := \exp(\mathcal{U}_a) \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

L'ouvert U_a est un voisinage de 0 et ∞ dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. L'application e_a a des singularités effaçables 0 et ∞ , voir la preuve du lemme 3.3.1 ci-dessous, et se prolonge donc en une application $e_a : \widehat{U}_a \rightarrow \mathbb{P}^1$, où $\widehat{U}_a := U_a \cup \{0, \infty\} \subset \mathbb{P}^1$. On pose

$$\widehat{U} := \{(a, z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{P}^1 ; z \in \widehat{U}_a\}.$$

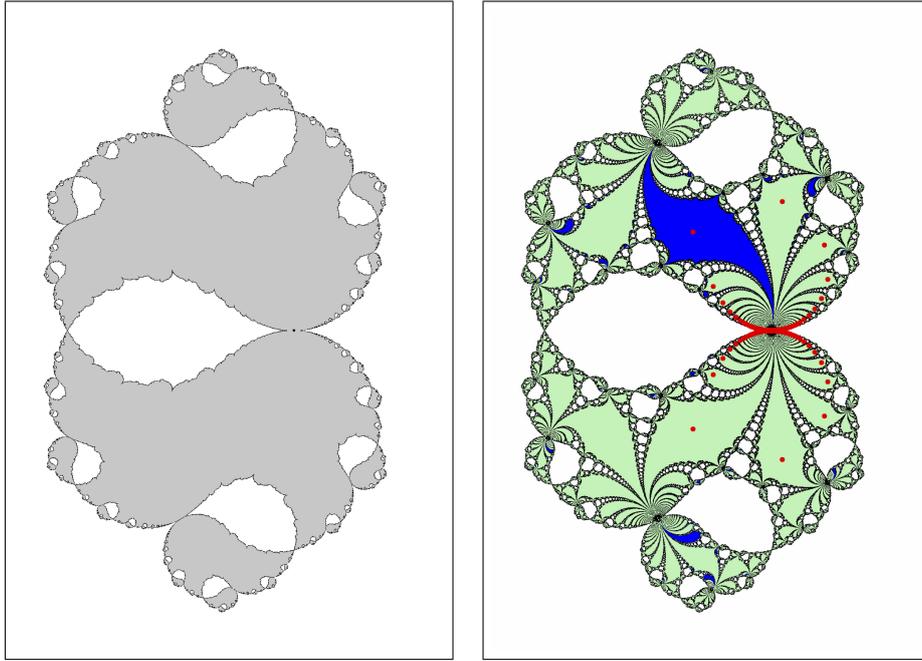


FIGURE 3.3.1 – Comportement de \mathcal{L}_f pour $f(z) = z + z^2 + 0.95z^3$. A gauche : l'ensemble des points $z \in \mathcal{B}_f$ dont l'image par \mathcal{L}_f reste dans \mathcal{B}_f . La restriction de \mathcal{L}_f au domaine blanc borné est un revêtement de $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathcal{B}_f}$. A droite : l'application de Lavaurs \mathcal{L}_f a deux ensembles complexe conjugués de points fixes. Les points fixes de \mathcal{L}_f sont indiqués en rouge et leurs bassins d'attraction en bleu (pour l'un de ces points fixes, et en vert pour les autres).

Lemme 3.3.1. *Les points 0 et ∞ dans \mathbb{P}^1 sont des points fixes de $e_a : \widehat{U}_a \rightarrow \mathbb{P}^1$. Ces deux points fixes ont un multiplicateur égal à $e^{2\pi^2(1-a)}$.*

Démonstration. Lorsque $\Im(Z) \rightarrow +\infty$, on a :

$$-\frac{1}{\psi_{f_a}(Z)} = Z + (1-a) \log(-Z) + o(1)$$

où \log est la branche principale du logarithme. Remarquons que $\log(-Z) = \log(Z) - \pi i$ as $\Im(Z) \rightarrow +\infty$. Donc,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_a(Z) &= \phi_{f_a} \circ \psi_{f_a}(Z) = Z + (1-a) \log(-Z) + o(1) \\ &\quad - (1-a) \log(Z + (1-a) \log(-Z) + o(1)) + o(1) \\ &= Z + (1-a) \log(Z) - \pi i(1-a) - (1-a) \log(Z) + o(1) \\ &= Z - \pi i(1-a) + o(1). \end{aligned}$$

Par conséquent, comme $z = \exp(Z) \rightarrow 0$, on a :

$$e_a(z) = e^{2\pi i Z} \cdot e^{2\pi^2(1-a)+o(1)} = e^{2\pi^2(1-a)} z \cdot (1 + o(1)),$$

d'où l'on déduit que 0 est un point fixe de e_a de multiplicateur $e^{2\pi^2(1-a)}$. Un argument similaire prouve que ∞ est aussi un point fixe de e_a de multiplicateur $e^{2\pi^2(1-a)}$. \square

En particulier, on voit que pour $a = 1$, l'application e_1 a des points fixes multiples en 0 et ∞ .

Lemme 3.3.2. *La multiplicité de 0 et ∞ comme points fixes de e_1 est 2.*

Démonstration. L'application $e_1 : \widehat{U}_1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ est une application de type fini dans le sens d'Epstein (voir la section 3.2.4). Donc chaque pétale attractif en 0 ou en ∞ doit capturer une orbite infinie d'une valeur singulière de e_1 . En effet, si ce n'était pas le cas, la composante B du bassin immédiat contenant ce pétale éviterait les valeurs singulières de e_1 . La restriction $e_1 : B \rightarrow B$ serait alors un revêtement et la coordonnée de Fatou attractive correspondante s'étendrait en un revêtement $\phi : B \rightarrow \mathbb{C}$. Ceci forcerait B à être isomorphe à \mathbb{C} , ce qui est impossible puisque B est inclus dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

D'après la proposition 3.2.6, l'application de type fini e_1 admet exactement deux valeurs critiques (les images des valeurs critiques de f_1 par l'application $\exp \circ \phi_{f_1}$) et deux valeurs singulières fixes qui sont respectivement 0 et ∞ . Il s'ensuit que le nombre de pétales attractifs en 0 plus le nombre de pétales attractifs en ∞ est au plus 2. Donc ce nombre doit être égal à 2, d'où le résultat. \square

Lorsque l'on perturbe a proche de 1, le point fixe multiple en 0 se scinde en une paire de points fixes de e_a : l'un en 0 avec multiplicateur $e^{2\pi^2(1-a)}$ et un autre que l'on note $\xi(a)$, avec multiplicateur $\rho(a)$. Nous allons utiliser un calcul classique de résidus pour estimer ce multiplicateur. Soit γ un petit lacet autour de 0. La formule de Cauchy donne :

$$\frac{1}{1 - e^{2\pi^2(1-a)}} + \frac{1}{1 - \rho(a)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - e_a(z)} \xrightarrow{a \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - e_1(z)} \in \mathbb{C}.$$

On en déduit :

$$\frac{1}{1 - \rho(a)} = \frac{1}{2\pi^2(1-a)} + O(1) \quad \text{quand } a \rightarrow 1.$$

Observons maintenant que

$$\rho(a) \in \mathbb{D} \iff \Re\left(\frac{1}{1 - \rho(a)}\right) > \frac{1}{2},$$

et de même,

$$a \in D(1 - r, r) \iff \Re\left(\frac{1}{2\pi^2(1-a)}\right) > \frac{1}{4\pi^2 r}.$$

Par conséquent, lorsque $r > 0$ est suffisamment proche de 0 et $a \in D(1 - r, 1)$, on en déduit que $|\rho(a)| < 1$, donc $\xi(a)$ est un point fixe attractif.

Soit finalement $Z(a)$ une préimage de $\xi(a)$ par \exp , c'est-à-dire $\exp(Z(a)) = \xi(a)$. Alors pour a suffisamment proche de 1, $Z(a)$ est un point fixe de \mathcal{E}_a . En effet, remarquons que $\mathcal{E}_a(Z(a)) - Z(a)$ est un entier qui ne dépend pas du choix de préimage $Z(a)$. Donc, il suffit de prouver que

$$\lim_{a \rightarrow 1} \mathcal{E}_a(Z(a)) - Z(a) = 0.$$

Nous allons le voir de la manière suivante. La fonction $\mathcal{E}_a - \text{Id}$ est périodique de période 1, donc est de la forme $u_a \circ \exp$ pour un certaine fonction $u_a : \widehat{U}_a \rightarrow \mathbb{C}$. La fonction

$$u : \widehat{U} \ni (a, z) \longmapsto u_a(z) \in \mathbb{C}$$

est analytique, donc continue. Donc,

$$\lim_{a \rightarrow 1} \mathcal{E}_a(Z(a)) - Z(a) = \lim_{a \rightarrow 1} u(a, \xi(a)) = u(1, 0) = \lim_{\Im(Z) \rightarrow +\infty} \mathcal{E}_1(Z) - Z = 0.$$

La dernière égalité vient du lemme 3.3.1. Ceci prouve que pour a suffisamment proche de 1, $Z(a)$ est un point fixe de \mathcal{E}_a de multiplicateur $\rho(a)$, ce qui achève la preuve de la première partie de la proposition 3.1.3. \square

3.3.2 Exemples réels

Dans cette section, nous allons prouver la deuxième partie de la proposition 3.1.3, à savoir l'existence de polynômes dans la famille $f_b(z) := z + z^2 + bz^4$ dont l'application de Lavaurs a un point fixe attractif réel.

Plus précisément, nous allons chercher un paramètre $b \in (-8/27, 0)$ tel que l'application de Lavaurs \mathcal{L}_{f_b} ait un point fixe critique dans $\mathbb{R} \cap \mathcal{B}_{f_b}$.

Étant donnée la construction du domaine errant, ceci impliquera que le produit fibré associé a une composante de Fatou errante qui intersecte \mathbb{R}^2 .

Schéma de la preuve. Posons

$$b := -\frac{1+2c}{4c^3} \quad \text{avec} \quad c \in [-3/2, -1/2], \quad f_c(z) := z + z^2 - \frac{1+2c}{4c^3}z^4.$$

Lorsque c décrit l'intervalle $(-3/2, -3/4)$, le paramètre correspondant b décroît de $-4/27$ à $-8/27$ et quand c croît de $-3/4$ à $-1/2$, le paramètre b croît de $-8/27$ à 0 . Le point c est un point critique du polynôme f_c . Par conséquent,

$$\deg_c \phi_{f_c} = \deg_c T_1 \circ \phi_{f_c} = \deg_c \phi_{f_c} \circ f_c = (\deg_{f_c(c)} \phi_{f_c}) \cdot (\deg_c f_c) \geq 2.$$

Donc, c est un point critique de ϕ_{f_c} , et donc un point critique de \mathcal{L}_{f_c} .

Fait 1 : lorsque $c \in (-3/2, -1/2]$, le point critique c appartient au bassin parabolique \mathcal{B}_{f_c} .

Fait 2 : la fonction $\mathfrak{L} : (-3/2, -1/2] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\mathfrak{L}(c) := \mathcal{L}_{f_c}(c)$ est continue.

Fait 3 : $\mathfrak{L}(-1/2) > 0$.

Fait 4 : il existe une suite c_n convergeant vers $-3/2$ avec $\mathfrak{L}(c_n) < c_n$.

Ces quatre faits sont suffisants pour prouver la proposition. En effet, la fonction $c \mapsto \mathfrak{L}(c) - c$ prend une valeur strictement positive en $c = -1/2$ et prend des valeurs strictement négatives arbitrairement proche de $-3/2$. Comme elle est continue, on déduit du théorème des valeurs intermédiaires qu'elle s'annule en au moins un point de $(-3/2, -1/2)$. \square

Une expérience numérique suggère que la fonction $\mathfrak{L}(c) - c$ s'annule pour une valeur de c proche de -0.586 . Ainsi, pour

$$f(z) = z + z^2 - 0.2136z^4$$

l'application de Lavaurs $\mathcal{L}_f : \mathcal{B}_f \rightarrow \mathbb{C}$ a un point fixe (super)attractif.

Démonstration du fait 1. Il suffit de montrer que $z < f_c(z) \leq 0$ pour $z \in [c, 0)$. En effet, si ce n'est pas le cas, la suite $(f_c^n(c))_{n \geq 0}$ reste dans $[c, 0)$ et est décroissante, donc elle doit converger vers le seul point fixe dans $[c, 0]$, c'est-à-dire le point fixe parabolique 0 .

Pour voir que $f_c - \text{Id} > 0$ sur $[c, 0)$, remarquons que si $c \in [-3/2, -1/2]$, alors $b \in [-8/27, 0]$ et si $z \in [c, 0)$, alors

$$1 + bz^2 \geq 1 + bc^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4c} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

Donc :

$$f_c(z) - z = z^2 + bz^4 = z^2 \cdot (1 + bz^2) \geq \frac{2}{3}z^2 > 0.$$

Pour voir que $f_c \leq 0$ sur $[c, 0)$, il suffit de prouver que $g(z) := 1 + z + bz^3 \geq 0$ sur $[c, 0)$. Comme précédemment, si $c \in [-3/2, -1/2]$ et $z \in [c, 0)$, on a :

$$g'(z) = 1 + 3bz^2 \geq 1 + 3bc^2 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{4c} \geq -\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = 0.$$

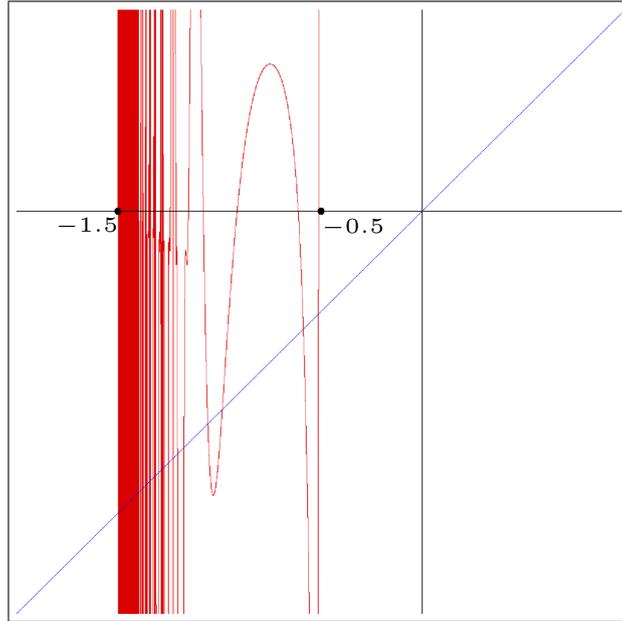


FIGURE 3.3.2 – Le graphe de la fonction $\mathfrak{L} : (-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$, qui intersecte la diagonale. Quand c tend vers $-\frac{3}{2}$, $\mathfrak{L}(c)$ accumule tout l'intervalle $f(\mathbb{R}) = (-\infty, x]$ avec $x := \frac{27}{16} + \frac{9}{8}\sqrt{3} \simeq 3.63$. Chaque intersection avec la diagonale correspond à un paramètre $c \in \mathbb{R}$ pour lequel l'application de Lavaurs \mathcal{L}_{f_c} a un point fixe superattractif.

Donc, g est croissante sur $[c, 0)$ et comme

$$g(c) = 1 + c + bc^3 = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}c \geq 0.$$

la preuve du fait 1 est achevée. \square

Démonstration du fait 2. Pour $c \in \mathbb{C} \setminus 0$ on peut considérer la coordonnée de Fatou attractive ϕ_{f_c} et la paramétrisation de Fatou répulsive ψ_{f_c} de f_c (normalisée avec la même convention que dans la section 3.2). Les formules (3.2.2) et (3.2.3) définissant ϕ_{f_c} et ψ_{f_c} comme limites montrent que ϕ_{f_c} et ψ_{f_c} prennent des valeurs réelles sur l'axe réel. Posons

$$\mathcal{B} := \{(c, z) \in (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C} ; z \in \mathcal{B}_{f_c}\}.$$

Les propositions 3.2.1 et 3.2.2 impliquent que

$$\mathcal{B} \ni (c, z) \mapsto \phi_{f_c}(z) \in \mathbb{C}, (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C} \ni (c, Z) \mapsto \psi_{f_c}(Z) \in \mathbb{C}$$

sont continues, ainsi que leur composition

$$\mathcal{L} : \mathcal{B} \ni (c, z) \mapsto \psi_{f_c} \circ \phi_{f_c}(z).$$

Par ailleurs, pour $c \in (-3/2, 1/2]$, le point (c, c) appartient à \mathcal{B} et donc on en déduit que la fonction $\mathfrak{L} : c \mapsto \mathcal{L}(c, c)$ est continue sur $(-3/2, -1/2]$. \square

Démonstration du fait 3. Soit $c = -1/2$, de sorte que $f := f_{-1/2}$ est le polynôme quadratique $z \mapsto z + z^2$. La paramétrisation de Fatou répulsive envoie les réels suffisamment proche de $-\infty$ sur des points de \mathbb{R}^+ qui sont proches de 0. Comme $f(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$ et comme $\psi_f(z) = f^{\circ m} \circ \psi_f(z - m)$ pour tout $m \geq 0$, on voit que $\psi_f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$. Par conséquent, $\mathfrak{L}(-1/2) = \psi_f \circ \phi_f(-1/2) > 0$. \square

Démonstration du fait 4. Commençons par étudier le comportement de $\phi_{f_c}(c)$ lorsque c est proche de $-3/2$. Posons $c = -\frac{3}{2} + t$. On calcule :

$$f_c(c) = \frac{3}{4}c + \frac{1}{2}c^2 = -\frac{3}{4}t + O(t^2).$$

Soit $\Phi(c) := \phi_{f_c}(c)$. Alors le développement asymptotique de ϕ_{f_c} (voir section 3.2.1) en 0 donne :

$$\Phi(c) = \phi_{f_c} \circ f_c(c) - 1 = \frac{4}{3t} - \log\left(\frac{4}{3t}\right) - 1 + o(1)$$

Donc, la suite d'applications (Φ_n) définies par :

$$\Phi_n(u) := \Phi\left(-\frac{3}{2} + \frac{4}{3(n+u)}\right) - n + \log n + 1$$

converge uniformément vers l'identité sur les compacts de \mathbb{R} .

Considérons maintenant l'application $f := f_{c_0}$ pour $c_0 := -3/2$.

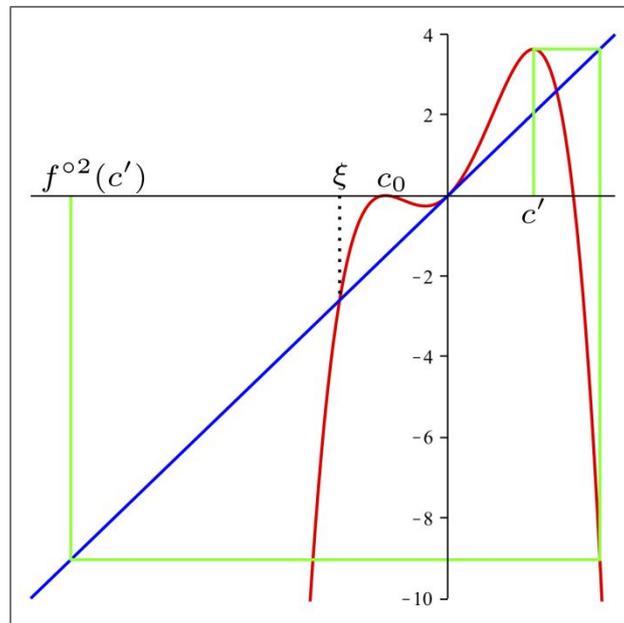


FIGURE 3.3.3 – Le graphe de la fonction $f(z) := z + z^2 - \frac{4}{27}z^4$ et les premières itérées du point critique $c' := \frac{3}{4}(1 + \sqrt{3})$.

Les points fixes de f sont 0 , $\xi := -\frac{3\sqrt{3}}{2}$ et $\xi' := \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Les points critiques de f sont $c_0 = -\frac{3}{2}$, $c' := \frac{3}{4}(1 + \sqrt{3})$ et $c'' := \frac{3}{4}(1 - \sqrt{3})$. On voit que

$$f^{\circ 2}(c') < \xi < c_0 < c'' < 0 < c' < \xi' < f(c').$$

Donc, f envoie l'intervalle $(-\infty, \xi)$ dans lui-même et les orbites de tout point de cet intervalle convergent vers $-\infty$. En particulier, l'orbite de c' converge vers $-\infty$. De plus, $f - \text{Id} \geq 0$ sur $[0, c']$, et f est croissante sur $[0, c']$. Donc, on peut définir une suite $(c'_m)_{m \geq 0}$ par récurrence en posant $c'_0 := c'$ et pour $m \geq 0$,

$$c'_{m+1} \in (0, c'), f(c'_{m+1}) = c'_m.$$

Cette suite est décroissante et converge vers un point fixe de f , donc converge vers 0 .

Fixons m_0 suffisamment grand pour que $x := c'_{m_0}$ appartienne au pétale répulsif P_f^{rep} . Alors $f^{\circ(m_0+2)}(x) < \xi$. Soit $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que pour tout $c \in (c_0, c_0 + \varepsilon)$, le point x

appartienne au pétale répulsif de f_c et $f_c^{om_0+2}(x) < \xi(c)$, où $\xi(c)$ est le plus petit point fixe réel de f_c . En particulier, pour tout $m \geq m_0 + 2$, on a : $f_c^{om}(x) < \xi(c) < c$.

Pour $c \in (c_0, c_0 + \varepsilon)$, posons

$$\Psi(c) := \psi_{f_c}^{-1}(x)$$

et

$$\Psi_n(u) := \Psi\left(-\frac{3}{2} + \frac{4}{3(n+u)}\right).$$

Remarquons que $\Psi(c) = X_0 + O(t)$ comme x est dans le pétale répulsif de f_c et ψ_c dépend continument de c . Donc, on a $\Psi_n(u) = X_0 + O(1/n)$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, ceci implique pour n assez grand, l'équation

$$\Phi_n(u) = \Psi_n(u) + \{\log n\}$$

admet au moins une solution $u_n \in (X_0 - 1, X_0 + 2)$, où $\{\log n\}$ désigne la partie fractionnaire de $\log n$.

Posons alors :

$$c_n := -\frac{3}{2} + \frac{4}{3(n+u_n)}, \quad s_n := \lfloor \log n \rfloor.$$

On a :

$$\begin{aligned} \phi_{f_{c_n}}(c_n) &= \Phi_n(u_n) + n - \log n - 1 \\ &= \Psi_n(u_n) + \{\log n\} + n - \log n - 1 \\ &= \Psi_n(u_n) + n - s_n - 1. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}(c_n) &= \psi_{f_{c_n}} \circ \phi_{f_{c_n}}(c_n) \\ &= \psi_{f_{c_n}}(\Psi_n(u_n) + n - s_n - 1) \\ &= \psi_{f_{c_n}}(\psi_{f_{c_n}}^{-1}(x) + n - s_n - 1) = f_{c_n}^{\circ(n-s_n-1)}(x). \end{aligned}$$

Enfin, comme $n - s_n - 1 > m_0$ pour n suffisamment grand et comme $f_c^{om}(x) < c$ pour tout $m \geq m_0 + 2$ et pour tout $c \in (c_0, c_0 + \varepsilon)$, on en déduit que $\mathfrak{L}(c_n) = f_{c_n}^{\circ(n-s_n-1)}(x) < c_n$ pour n assez grand. Ceci achève la preuve du fait 4. \square

3.4 Construction de coordonnées de Fatou approchées

Dans cette section, nous allons construire des *coordonnées de Fatou approchées* adaptées à notre cadre de dynamique fibrée. On considère des polynômes $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ de la forme :

$$f(z) = z + z^2 + az^3 + O(z^4), \quad g(w) = w - w^2 + O(w^3).$$

On pose

$$f_w(z) = f(z) + \frac{\pi^2}{4}w.$$

On veut montrer qu'il existe des coordonnées φ_w et $\varphi_{g(w)}$ qui en un certain sens sont des approximations des coordonnées de Fatou de f dans des domaines bien choisis, et tels que $\varphi_{g(w)} \circ f_w \circ \varphi_w^{-1}$ ressemble à une translation. Ces changements de variables sont normalisés de façon à ce que $\varphi_{g(w)} \circ f_w \circ \varphi_w^{-1}$ soit défini dans une région qui sera presque une bande verticale de largeur 1 et sera proche d'être la translation de vecteur $\sqrt{w}/2$. Ces coordonnées seront données par des formules explicites : dans ce sens notre approche est similaire à celle de [BSU12].

3.4.1 Notation

Les notations suivantes seront utilisées dans le reste de cette section ainsi que dans la suivante (voir aussi la figure 3.4.1).

Tout d'abord, fixons $R > 0$ suffisamment grand pour que $F : Z \mapsto -1/f(-1/Z)$ soit univalente sur $\mathbb{C} \setminus \overline{D}(0, R)$, et

$$\sup_{|Z|>R} |F(Z) - Z - 1| < \frac{1}{10}, \quad \sup_{|Z|>R} |F'(Z) - 1| < \frac{1}{10}.$$

Appelons \mathbb{H}_R le demi-plan droit $\mathbb{H}_R := \{Z \in \mathbb{C} ; \Re(Z) > R\}$ et $-\mathbb{H}_R$ le demi-plan gauche $-\mathbb{H}_R := \{Z \in \mathbb{C} ; \Re(Z) < -R\}$. Définissons le *pétale attractif* P_f^{att} par

$$P_f^{\text{att}} = \left\{ z \in \mathbb{C} ; \Re\left(-\frac{1}{z}\right) > R \right\}$$

Alors :

- la restriction de la coordonnée de Fatou attractive ϕ_f au pétale attractif P_f^{att} est univalente, et
- la restriction de la paramétrisation ψ_f au demi-plan gauche $-\mathbb{H}_R$ est univalente.

Nous utiliserons la notation ψ_f^{-1} seulement pour la branche inverse $\psi_f^{-1} : P_f^{\text{rep}} \rightarrow -\mathbb{H}_R$ de ψ_f dans le pétale répulsif $P_f^{\text{rep}} := \psi_f(-\mathbb{H}_R)$. Rappelons que

$$\phi_f \circ f = T_1 \circ \phi_f, \quad f \circ \psi_f = \psi_f \circ T_1,$$

$$\phi_f(z) \sim -\frac{1}{z} \quad \text{quand} \quad \Re\left(-\frac{1}{z}\right) \rightarrow +\infty, \quad \psi_f(Z) \sim -\frac{1}{Z} \quad \text{quand} \quad \Re(Z) \rightarrow -\infty.$$

Ensuite, pour $r > 0$ on pose $B_r := D(r, r)$ et on fixe $r > 0$ suffisamment petit pour que

$$B_r \subset \mathcal{B}_g, \quad g(B_r) \subset B_r.$$

Dans le reste du chapitre, on supposera que $w \in B_r$, et donc $g^{om}(w) \rightarrow 0$ lorsque $m \rightarrow +\infty$. La notation \sqrt{w} désigne la branche de la racine carrée sur B_r qui a une partie réelle positive.

Enfin, on fixe un réel positif

$$\frac{1}{2} < \alpha < \frac{2}{3}. \tag{3.4.1}$$

La raison de ce choix d'intervalle de valeurs pour α sera explicité durant la preuve. Pour $w \in B_r$, posons

$$r_w := |w|^{(1-\alpha)/2} \xrightarrow{w \rightarrow 0} 0, \quad R_w := |w|^{-\alpha/2} \xrightarrow{w \rightarrow 0} +\infty.$$

Soit \mathcal{R}_w le rectangle

$$\mathcal{R}_w := \left\{ Z \in \mathbb{C} ; \frac{r_w}{10} < \Re(Z) < 1 - \frac{r_w}{10} \text{ and } -\frac{1}{2} < \Im(Z) < \frac{1}{2} \right\}, \tag{3.4.2}$$

et soit D_w^{att} et D_w^{rep} les disques

$$D_w^{\text{att}} := D\left(R_w, \frac{R_w}{10}\right), \quad D_w^{\text{rep}} := D\left(-R_w, \frac{R_w}{10}\right).$$

Dans cette section, la notation $O(h)$ désigne une quantité qui est définie pour $w \in B_r$ suffisamment proche de 0 et qui est bornée par une $C \cdot h$, où C est une constante indépendante de w . De même, $o(h)$ désigne une quantité telle que $o(h)/h$ converge vers zero lorsque $w \rightarrow 0$.

3.4.2 Propriétés des coordonnées de Fatou approchées

Notre but dans ce paragraphe est d'énoncer précisément les propriétés des coordonnées de Fatou approchées, de manière axiomatique. Les constructions de ces coordonnées ainsi que la preuve du fait qu'elles vérifient ces propriétés seront présentées dans la suite.

Nous affirmons qu'il existe une famille de domaines (V_w) et d'application d'univalentes $(\varphi_w : V_w \rightarrow \mathbb{C})$ paramétrées par $w \in B_r$, vérifiant les propriétés suivantes :

Propriété 1 (Comparaison avec les coordonnées de Fatou attractives). *Lorsque $w \rightarrow 0$ dans B_r ,*

$$D_w^{\text{att}} \subset \phi_f(V_w \cap P_f^{\text{att}}), \quad \sup_{Z \in D_w^{\text{att}}} \left| \frac{2}{\sqrt{w}} \cdot \varphi_w \circ \phi_f^{-1}(Z) - Z \right| \rightarrow 0.$$

Ceci signifie que $\frac{2}{\sqrt{w}}\varphi_w$ est une approximation des coordonnées de Fatou du côté attractif. Il existe une propriété similaire du côté répulsif :

Propriété 2 (Comparaison avec les coordonnées de Fatou répulsives). *Lorsque $w \rightarrow 0$ dans B_r , on a :*

$$1 + \frac{\sqrt{w}}{2} \cdot D_w^{\text{rep}} \subset \varphi_w(V_w \cap P_f^{\text{rep}})$$

et

$$\sup_{Z \in D_w^{\text{rep}}} \left| \psi_f^{-1} \circ \varphi_w^{-1} \left(1 + \frac{\sqrt{w}}{2} Z \right) - Z \right| \rightarrow 0.$$

Enfin, la dernière propriété affirme que $\frac{2}{\sqrt{w}}\varphi_w$ est presque une coordonnée de Fatou :

Propriété 3 (Conjugaison approchée à une translation). *Lorsque $w \rightarrow 0$ dans B_r , on a :*

$$\mathcal{R}_w \subset \varphi_w(V_w), \quad f_w \circ \varphi_w^{-1}(\mathcal{R}_w) \subset V_{g(w)}$$

et

$$\sup_{Z \in \mathcal{R}_w} \left| \varphi_{g(w)} \circ f_w \circ \varphi_w^{-1}(Z) - Z - \frac{\sqrt{w}}{2} \right| = o(w).$$

Pour améliorer la présentation de la preuve, qui comporte plusieurs changement de coordonnées, on adoptera les conventions suivantes :

- les caractères d'imprimerie (comme z, V_w, \dots) seront utilisés pour les objets auxquels on pense comme vivant dans les coordonnées initiales ;
- les lettres cursives (comme Z, \mathcal{R}_w, \dots) seront utilisées pour les objets auxquels on pense comme vivant dans les coordonnées de Fatou approchées
- la coordonnée Z sera utilisées pour la coordonnée de Fatou exacte.

On écrira donc des expressions comme $\phi_f(z) = Z$ ou $\varphi_w(z) = Z$.

Le produit fibré P fixe l'origine et laisse invariante la droite complexe $\{w = 0\}$. On peut poser la question de l'existence d'autres *courbes paraboliques invariantes* près de l'origine, dans le sens d'Écalle et Hakim (voir [Éca85] et [Hak98]).

Question. Existe-t-il des applications holomorphes $\xi^\pm : B_r \rightarrow \mathbb{C}$ telles que $\xi^\pm(w) \rightarrow 0$ lorsque $w \rightarrow 0$ et telles que $f_w \circ \xi^\pm(w) = \xi^\pm \circ g(w)$ pour $w \in B_r$?

Nous nous contenterons d'un résultat plus faible :

Lemme 3.4.1. *Soit $\zeta^\pm : B_r \rightarrow \mathbb{C}$ défini par*

$$\zeta^\pm(w) = \pm c_1 \sqrt{w} + c_2 w \quad \text{avec} \quad c_1 = \frac{\pi i}{2}, \quad c_2 = \frac{a\pi^2}{8} - \frac{1}{4}.$$

Alors,

$$f_w \circ \zeta^\pm(w) = \zeta^\pm \circ g(w) + O(w^2).$$

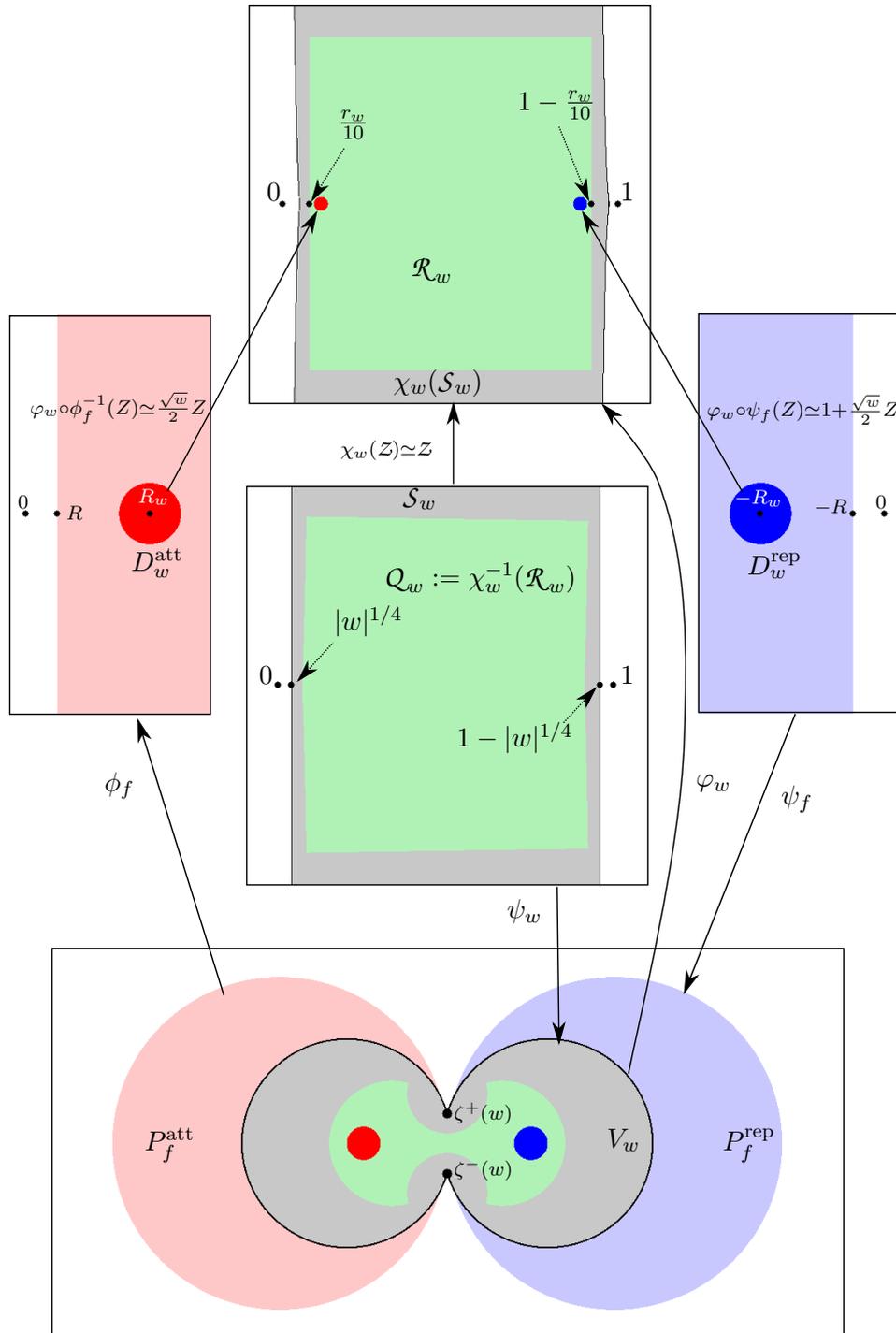


FIGURE 3.4.1 – Les différents changements de coordonnées utilisés dans la preuve.

Démonstration. Un calcul élémentaire montre que

$$f_w \circ \zeta^\pm(w) = \pm c_1 \sqrt{w} + \left(c_2 + c_1^2 + \frac{\pi^2}{4} \right) w \pm (ac_1^3 + 2c_1c_2)w\sqrt{w} + O(w^2).$$

D'autre part

$$\sqrt{g(w)} = \sqrt{w} - \frac{1}{2}w\sqrt{w} + O(w^2),$$

donc

$$\zeta \circ g(w) = \pm c_1 \sqrt{w} + c_2 w \mp \frac{c_1}{2} w \sqrt{w} + O(w^2).$$

On déduit le résultat du choix de c_1 et c_2 puisque

$$c_2 + c_1^2 + \frac{\pi^2}{4} = c_2, \quad ac_1^3 + 2c_1c_2 = -\frac{c_1}{2}. \quad \square$$

Soit $\psi_w : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^1 \setminus \{\zeta^+(w), \zeta^-(w)\}$ le revêtement universel défini par

$$\psi_w(Z) := \frac{\zeta^-(w) \cdot e^{2\pi i Z} - \zeta^+(w)}{e^{2\pi i Z} - 1} = ic_1 \sqrt{w} \cot(\pi Z) + c_2 w. \quad (3.4.3)$$

La restriction de ce revêtement universel est univalente sur une bande verticale

$$\mathcal{S}_0 := \{Z \in \mathbb{C} ; 0 < \Re(Z) < 1\},$$

et son inverse est donné par

$$\psi_w^{-1}(z) = \frac{1}{2\pi i} \log \left(\frac{z - \zeta^+(w)}{z - \zeta^-(w)} \right).$$

Dans cette formule, $\log(\cdot)$ désigne la branche du logarithme définie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ et telle que $\log(-1) = \pi i$.

Pour $w \in B_r$, soit $\chi_w : \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathbb{C}$ l'application définie par

$$\chi_w(Z) := Z - \frac{\sqrt{w}(1-a)}{2} \log \left(\frac{2 \sin(\pi Z)}{\pi \sqrt{w}} \right), \quad (3.4.4)$$

où la branche du logarithme est ici définie sur $\frac{1}{\sqrt{w}}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-)$ et s'annule en 1.

Considérons maintenant

$$\mathcal{S}_w := \{Z \in \mathbb{C} ; |w|^{1/4} < \Re(Z) < 1 - |w|^{1/4}\}$$

et son image par ψ_w :

$$V_w := \psi_w(\mathcal{S}_w) \subset \mathbb{C}.$$

Lemme 3.4.2. *Si $w \in B_r$ est suffisamment proche de 0, alors $\chi_w : \mathcal{S}_w \rightarrow \mathbb{C}$ est univalente. De plus, χ_w est proche de l'identité dans le sens suivant :*

$$\text{si } Z \in \mathcal{S}_w \cap \{Z, \Im(Z) < 1\} \text{ alors } \chi_w(Z) = Z + O\left(|w|^{1/2} \log |w|\right) = Z + o(r_w).$$

Démonstration. Remarquons que

$$\chi_w'(Z) = 1 - \frac{\sqrt{w}(1-a)\pi}{2} \cot(\pi Z), \quad \sup_{Z \in \mathcal{S}_w} |\cot(\pi Z)| \in O\left(|w|^{-1/4}\right).$$

Par conséquent,

$$\sup_{Z \in \mathcal{S}_w} |\chi_w'(Z) - 1| \in O\left(|w|^{1/4}\right).$$

Si $\chi_w(\mathcal{Z}_1) = \chi_w(\mathcal{Z}_2)$, alors

$$|\mathcal{Z}_2 - \mathcal{Z}_1| = |(\chi_w(\mathcal{Z}_1) - \mathcal{Z}_1) - (\chi_w(\mathcal{Z}_2) - \mathcal{Z}_2)| \leq \sup_{[\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2]} |\chi'_w(\mathcal{Z}) - 1| \cdot |\mathcal{Z}_2 - \mathcal{Z}_1|.$$

Lorsque w est suffisamment proche de 0, le supremum est inférieur à 1 et on a nécessairement $\mathcal{Z}_1 = \mathcal{Z}_2$.

La seconde assertion du lemme est une conséquence directe de la définition de χ_w et du fait que sur $\mathcal{S}_w \cap \{\Im(\mathcal{Z}) < 1\}$, $|\sin(\pi \mathcal{Z})| \geq c|w|^{1/4}$ pour une certaine constante c . \square

On supposera dorénavant que w est suffisamment proche de 0 pour que $\chi_w : \mathcal{S}_w \rightarrow \mathbb{C}$ soit univalente.

Définition 3.4.3. Les coordonnées de Fatou approchées φ_w sont les applications

$$\varphi_w := \chi_w \circ \psi_w^{-1} : V_w \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{avec} \quad w \in B_r.$$

Nous allons montrer que ces coordonnées de Fatou approchées vérifient les propriétés 1, 2 and 3.

3.4.3 Comparaison avec la coordonnée de Fatou approchée

Dans ce paragraphe, nous prouverons que les coordonnées de Fatou approchées φ_w vérifient la propriété 1, c'est-à-dire que lorsque $w \rightarrow 0$ dans B_r , $D_w^{\text{att}} \subset \phi_f(V_w)$ et

$$\sup_{Z \in D_w^{\text{att}}} \left| \frac{2}{\sqrt{w}} \cdot \varphi_w \circ \phi_f^{-1}(Z) - Z \right| \rightarrow 0. \quad (3.4.5)$$

Rappelons que $R_w = |w|^{-\alpha/2}$, $r_w = |w|^{1/2}R_w = |w|^{(1-\alpha)/2}$, et $D_w^{\text{att}} = D(R_w, R_w/10)$.

Démonstration de la propriété 1.

Étape 1. Commençons par prouver que $D_w^{\text{att}} \subset \phi_f(V_w)$. Remarquons que $R_w \rightarrow +\infty$ lorsque $w \rightarrow 0$, et donc $D_w^{\text{att}} \subset \phi_f(P_f^{\text{att}})$ pour w proche de 0. Si $z \in \phi_f^{-1}(D_w^{\text{att}})$, alors

$$\phi_f(z) = -\frac{1}{z} + o\left(\frac{1}{z}\right) = O(R_w).$$

De plus,

$$\zeta^\pm(w) = \pm \frac{\pi i}{2} \sqrt{w} (1 + o(1)), \quad \frac{\zeta^\pm(w)}{z} = O(r_w).$$

En particulier,

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{z - \zeta^+(w)}{z - \zeta^-(w)}\right) &= \log\left(1 - \frac{\zeta^+(w)}{z}\right) - \log\left(1 - \frac{\zeta^-(w)}{z}\right) \\ &= -\frac{\zeta^+(w)}{z} + \frac{\zeta^-(w)}{z} + O(r_w^2) = -\pi i \frac{\sqrt{w}}{z} + O(r_w^2). \end{aligned}$$

Comme $\alpha > 1/2$, on a $r_w^2 = |w|^{1-\alpha} = o(|w|^{1/2})$, et il s'ensuit que

$$\mathcal{Z} := \frac{1}{2\pi i} \log\left(\frac{z - \zeta^+(w)}{z - \zeta^-(w)}\right) = -\frac{\sqrt{w}}{2z} + O(r_w^2) = -\frac{\sqrt{w}}{2z} + o(|w|^{1/2}). \quad (3.4.6)$$

Donc, la partie réelle de \mathcal{Z} est comparable à r_w et comme $|w|^{1/4} = o(r_w)$, on en déduit que $\mathcal{Z} \in \mathcal{S}_w$, donc $z = \psi_w(\mathcal{Z}) \in V_w$ pour $w \in B_r$ suffisamment proche de 0.

Étape 2. Nous allons maintenant prouver (3.4.5). Remarquons que

$$\sup_{Z \in D_w^{\text{att}}} \left| \frac{2}{\sqrt{w}} \cdot \varphi_w \circ \phi_f^{-1}(Z) - Z \right| = \sup_{z \in \phi_f^{-1}(D_w^{\text{att}})} \left| \frac{2}{\sqrt{w}} \cdot \varphi_w(z) - \phi_f(z) \right|.$$

Observons d'abord que quand w tend vers 0, le domaine $\phi_f^{-1}(D_w^{\text{att}})$ tend aussi vers 0. Donc, si $z \in \phi_f^{-1}(D_w^{\text{att}})$, alors

$$\phi_f(z) = -\frac{1}{z} - (1-a) \log \left(-\frac{1}{z} \right) + o(1).$$

Par ailleurs,

$$\frac{2 \sin(\pi Z)}{\pi \sqrt{w}} = \frac{2}{\sqrt{w}} (Z + o(Z)) = -\frac{1}{z} + o\left(\frac{1}{z}\right).$$

Donc, avec l'estimation (3.4.6) on en déduit que

$$\begin{aligned} \varphi_w(z) = \chi_w(Z) &= Z - \frac{\sqrt{w} \cdot (1-a)}{2} \log \left(\frac{2 \sin(\pi Z)}{\pi \sqrt{w}} \right) \\ &= -\frac{\sqrt{w}}{2z} + o(|w|^{1/2}) - \frac{\sqrt{w} \cdot (1-a)}{2} \log \left(-\frac{1}{z} + o\left(\frac{1}{z}\right) \right) \\ &= \frac{\sqrt{w}}{2} \left(-\frac{1}{z} - (1-a) \log \left(-\frac{1}{z} \right) + o(1) \right) \\ &= \frac{\sqrt{w}}{2} (\phi_f(z) + o(1)), \end{aligned} \tag{3.4.7}$$

ce qui achève la preuve. \square

3.4.4 Comparaison avec les coordonnées de Fatou répulsives

Dans ce paragraphe, nous allons prouver la propriété 2, c'est-à-dire que lorsque $w \rightarrow 0$ in B_r ,

$$\mathcal{D}'_w := 1 + \frac{\sqrt{w}}{2} \cdot D_w^{\text{rep}} \subset \varphi_w \left(V_w \cap P_f^{\text{rep}} \right)$$

et

$$\sup_{Z \in D_w^{\text{rep}}} \left| \psi_f^{-1} \circ \varphi_w^{-1} \left(1 + \frac{\sqrt{w}}{2} Z \right) - Z \right| \rightarrow 0.$$

La preuve est comparable à celle de 1.

Démonstration de la propriété 2.

Étape 1. Commençons par prouver que pour $w \in B_r$ suffisamment proche de 0, le disque \mathcal{D}'_w est inclus dans $\varphi_w(V_w)$. Remarquons que si l'on note encore $r_w = |w|^{1/2} R_w = |w|^{(1-\alpha)/2}$, on a

$$\mathcal{D}'_w = D \left(1 - \frac{\sqrt{w} R_w}{2}, \frac{r_w}{20} \right).$$

Comme $\alpha > 1/2$, on a $|w|^{1/4} = o(r_w)$. De plus, $\Re(\sqrt{w}) > \frac{\sqrt{2}}{2} |w|^{1/2}$ pour $w \in B_r$, et donc

$$\mathcal{D}''_w := D \left(1 - \frac{\sqrt{w} R_w}{2}, \frac{r_w}{10} \right) \subset \mathcal{S}_w.$$

De plus, d'après le lemme 3.4.2, $\chi_w(Z) = Z + o(r_w)$ pour $Z \in \mathcal{D}''_w$, donc

$$\mathcal{D}'_w \subset \chi_w(\mathcal{D}''_w) \subset \chi_w(\mathcal{S}_w) = \varphi_w(V_w).$$

Étape 2. Étant donné $Z \in D_w^{\text{rep}}$, on pose

$$\mathcal{X} := \chi_w^{-1} \left(1 + \frac{\sqrt{w}}{2} Z \right).$$

Remarquons que $\sqrt{w}Z$ a un module égal à r_w . Posons aussi

$$z := \varphi_w^{-1} \left(1 + \frac{\sqrt{w}}{2} Z \right) = ic_1 \sqrt{w} \cot(\pi \mathcal{X}) + c_2 w. \quad (3.4.8)$$

D'après le lemme 3.4.2 on a

$$\mathcal{X} - 1 = \frac{\sqrt{w}}{2} Z \cdot (1 + o(1)) = O(r_w),$$

et donc

$$\cot(\pi \mathcal{X}) = \cot(\pi(\mathcal{X} - 1)) = \frac{2}{\pi \sqrt{w} Z} (1 + o(1)).$$

En se souvenant que $c_1 = \pi i/2$, d'après (3.4.8) on peut déduire :

$$z = \frac{2ic_1}{\pi Z} \cdot (1 + o(1)) \quad \text{avec} \quad \frac{2ic_1}{\pi Z} = -\frac{1}{Z} \in D \left(|w|^{\alpha/2}, \frac{|w|^{\alpha/2}}{2} \right).$$

Donc, lorsque $w \in B_r$ est suffisamment proche de 0, $z \in P_f^{\text{rep}}$ et

$$\psi_f^{-1}(z) = -\frac{1}{z} - (1-a) \log \left(\frac{1}{z} \right) + o(1).$$

De plus,

$$\frac{2 \sin(\pi \mathcal{X})}{\pi \sqrt{w}} = -\frac{2 \sin(\pi(\mathcal{X} - 1))}{\pi \sqrt{w}} = -\frac{2}{\sqrt{w}} \left(\frac{\sqrt{w}}{2} Z \cdot (1 + o(1)) \right) = \frac{1}{z} + o\left(\frac{1}{z}\right).$$

Enfin, comme dans (3.4.7), on calcule :

$$\begin{aligned} Z &= \frac{2}{\sqrt{w}} (\chi_w(\mathcal{X}) - 1) = -\frac{1}{z} + o(1) - (1-a) \log \left(\frac{1}{z} + o\left(\frac{1}{z}\right) \right) \\ &= \psi_f^{-1}(z) + o(1) \\ &= \psi_f^{-1} \circ \varphi_w^{-1} \left(1 + \frac{\sqrt{w}}{2} Z \right) + o(1). \end{aligned}$$

ceci achève la preuve de la propriété 2. □

3.4.5 Propriété de translation approchée

Dans ce paragraphe, nous prouverons que les coordonnées de Fatou approchées φ_w vérifient la propriété 3, c'est-à-dire : lorsque $w \rightarrow 0$ dans B_r , on a les inclusions $\mathcal{R}_w \subset \varphi_w(V_w)$ et $f_w \circ \varphi_w^{-1}(\mathcal{R}_w) \subset V_{g(w)}$ (rappelons que le rectangle \mathcal{R}_w a été défini en (3.4.2)), et

$$\sup_{Z \in \mathcal{R}_w} \left| \varphi_{g(w)} \circ f_w \circ \varphi_w^{-1}(Z) - Z - \frac{\sqrt{w}}{2} \right| = o(w).$$

Esquisse de preuve. Soit

$$\psi^0 := \psi_w, \quad \psi^2 := \psi_{g(w)}, \quad \chi^0 := \chi_w, \quad \text{and} \quad \chi^2 := \chi_{g(w)}.$$

Pour surmonter la difficulté venant du fait que $f_w \circ \zeta^\pm$ n'est pas exactement égal à $\zeta^\pm \circ g$ (voir le lemme 3.4.1), plutôt que de travailler directement avec $\psi_2 \circ f_w \circ \psi_0^{-1}$, on introduit un changement de coordonnées intermédiaire

$$\psi^1 : \mathbb{C} \ni Z \mapsto \frac{f_w(\zeta^-(w)) \cdot e^{2\pi i Z} - f_w(\zeta^+(w))}{e^{2\pi i Z} - 1} \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{f_w(\zeta^+(w)), f_w(\zeta^-(w))\}.$$

Soit \mathcal{H} la bande verticale

$$\mathcal{H} := \{Z \in \mathbb{C} ; -1 < \Im(Z) < 1\}.$$

Nous verrons qu'il existe des relevés $\mathcal{F}^0 : \mathcal{S}_w \rightarrow \mathbb{C}$, $\mathcal{F}^1 : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ et une application $\mathcal{F} : \mathcal{R}_w \rightarrow \mathbb{C}$ telles que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathcal{R}_w & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathbb{C} \\
 & \nearrow \varphi_w & \uparrow \chi^0 & & \uparrow \chi^2 \\
 & & \mathcal{Q}_w & \xrightarrow{\mathcal{F}^0} & \mathcal{S}_{g(w)} \\
 & & \downarrow \psi^0 & & \downarrow \psi^2 \\
 & & \psi^0(\mathcal{Q}_w) & \xrightarrow{f_w} & V_{g(w)} \\
 & & & \xrightarrow{\text{id}} & V_{g(w)} \\
 & & & & \downarrow \varphi_{g(w)} \\
 & & & & \mathbb{C}
 \end{array}$$

Étape 1. Prouvons que $\mathcal{R}_w \subset \varphi_w(V_w) = \chi^0(\mathcal{S}_w)$ et que

$$\sup_{Z \in \mathcal{R}_w} |\varphi_w^{-1}(Z)| = O(|w|^{\alpha/2}).$$

Posons $\mathcal{Q}_w := (\chi^0)^{-1}(\mathcal{R}_w) \subset \mathcal{S}_w$.

Étape 2. Nous allons définir \mathcal{F}^0 sur \mathcal{S}_w et prouver que pour $Z \in \mathcal{Q}_w$,

$$\mathcal{F}^0(Z) = Z + \frac{\sqrt{w}}{2} + \frac{\pi(1-a)w}{4} \cot(\pi Z) + o(w). \tag{3.4.9}$$

En particulier, pour w suffisamment proche de 0, $\mathcal{F}^0(Z) = Z + O(|w|^{1/2})$, et donc $\mathcal{F}^0(\mathcal{Q}_w) \subset \mathcal{H}$.

Étape 3. On définit \mathcal{F}^1 sur \mathcal{H} et on prouve que pour $Z \in \mathcal{H}$,

$$\mathcal{F}^1(Z) = Z + o(w).$$

En particulier, pour w suffisamment proche de 0, $\mathcal{F}^1 \circ \mathcal{F}^0(Z) = \mathcal{F}^0(Z) + o(w)$, d'où l'on déduit que

$$\mathcal{F}^1 \circ \mathcal{F}^0(\mathcal{Q}_w) \subset \mathcal{S}_{g(w)} \quad \text{donc} \quad f_w \circ \varphi_w^{-1}(\mathcal{R}_w) \subset V_{g(w)}.$$

Étape 4. On utilise χ^0 et χ^2 pour éliminer le troisième terme dans le terme de droite de (3.4.9). Plus précisément, on définit \mathcal{F} sur \mathcal{R}_w et on prouve que pour $Z \in \mathcal{R}_w$,

$$\mathcal{F}(Z) = Z + \frac{\sqrt{w}}{2} + o(w).$$

La propriété 3 est alors prouvée. □

3.4.5.1 Démonstration de l'étape 1

On prouve que $\mathcal{R}_w \subset \varphi_w(V_w)$ et que

$$\sup_{Z \in \mathcal{R}_w} |\varphi_w^{-1}(Z)| = O\left(|w|^{\alpha/2}\right).$$

Soit $\mathcal{R}'_w \subset \mathcal{S}_w$ le rectangle

$$\mathcal{R}'_w := \left\{ Z \in \mathcal{S}_w ; \frac{r_w}{20} < \Re(Z) < 1 - \frac{r_w}{20} \text{ and } -1 < \Im(Z) < 1 \right\},$$

avec comme précédemment $r_w := |w|^{(1-\alpha)/2}$. On voit que $\mathcal{R}_w \subset \mathcal{R}'_w$ et la distance entre les frontières est $r_w/20$. Par ailleurs, d'après le lemme 3.4.2, pour $Z \in \mathcal{R}'_w$, $\chi_w(Z) = Z + o(r_w)$. Il s'ensuit que $\chi_w(\partial\mathcal{R}'_w)$ entoure \mathcal{R}_w , et donc

$$\mathcal{R}_w \subset \chi_w(\mathcal{R}'_w) \subset \chi_w(\mathcal{S}_w) = \varphi_w(V_w),$$

ce qu'il fallait montrer.

Pour prouver l'estimation sur $\varphi_w^{-1}(Z)$, posons $Q_w := \chi_w^{-1}(\mathcal{R}_w)$. Comme $\varphi_w = \chi_w \circ \psi_w^{-1}$, on voit que $\varphi_w^{-1}(\mathcal{R}_w) = \psi_w(Q_w)$. La suite d'inclusions précédente montre que $Q_w \subset \mathcal{R}'_w$. Donc, de

$$\psi_w(Z) = ic_1\sqrt{w} \cot(\pi Z) + c_2w,$$

on déduit que

$$\begin{aligned} \sup_{Z \in \mathcal{R}_w} |\varphi_w^{-1}(Z)| &= \sup_{Z \in Q_w} |\psi_w(Z)| \leq \sup_{Z \in \mathcal{R}'_w} |\psi_w(Z)| \\ &= O\left(\frac{|w|^{1/2}}{r_w}\right) + O(w) = O\left(|w|^{\alpha/2}\right). \end{aligned}$$

Ceci achève la preuve de l'étape 1.

3.4.5.2 Démonstration de l'étape 2

On définit \mathcal{F}^0 sur \mathcal{S}_w et on prouve que pour $Z \in Q_w$,

$$\mathcal{F}^0(Z) = Z + \frac{\sqrt{w}}{2} + \frac{\pi(1-a)w}{4} \cot(\pi Z) + o(w) = Z + O\left(|w|^{1/2}\right).$$

Étape 2.1. Commençons par définir \mathcal{F}^0 . Il sera pratique de poser $w = \varepsilon^2$ pour que les développements limités par rapport à \sqrt{w} deviennent des développements limités en ε . Soit

$$\zeta_0^\pm(\varepsilon) := \zeta^\pm(\varepsilon^2) = \pm c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2, \quad \zeta_1^\pm(\varepsilon) := f_{\varepsilon^2} \circ \zeta_0^\pm(\varepsilon) \text{ and } \zeta_2^\pm(\varepsilon) := \zeta^\pm \circ g(\varepsilon^2).$$

Fixons $r_1 > 0$ suffisamment petit pour que la seule préimage de 0 par f dans $D(0, 2r_1)$ soit 0. Choisissons $r_2 > 0$ tel que pour $\varepsilon \in D(0, r_2)$, la seule préimage de $\zeta_1^\pm(\varepsilon) := f_{\varepsilon^2}(\zeta_0^\pm(\varepsilon))$ par f_{ε^2} dans $D(0, r_1)$ soit $\zeta_0^\pm(\varepsilon)$. La fonction

$$(z, \varepsilon) \mapsto \frac{f_{\varepsilon^2}(z) - \zeta_1^+(\varepsilon)}{z - \zeta_0^+(\varepsilon)} \cdot \frac{z - \zeta_0^-(\varepsilon)}{f_{\varepsilon^2}(z) - \zeta_1^-(\varepsilon)}$$

se prolonge holomorphiquement à $\Delta := D(0, r_1) \times D(0, r_2)$ et ne s'y annule pas. De plus, elle est constante égale à 1 pour $\varepsilon = 0$. On pose

$$u : (z, \varepsilon) \mapsto \frac{1}{2\pi i} \log \left(\frac{f_{\varepsilon^2}(z) - \zeta_1^+(\varepsilon)}{z - \zeta_0^+(\varepsilon)} \cdot \frac{z - \zeta_0^-(\varepsilon)}{f_{\varepsilon^2}(z) - \zeta_1^-(\varepsilon)} \right)$$

où la branche du logarithme est choisie pour que $u(z, 0) \equiv 0$. Considérons l'application \mathcal{F}^0 définie sur \mathcal{S}_w par

$$\mathcal{F}^0(\mathcal{Z}) := \mathcal{Z} + u(\psi^0(\mathcal{Z}), \varepsilon).$$

Alors, pour $\mathcal{Z} \in \mathcal{S}_w$, on pose

$$z := \psi^0(\mathcal{Z}) \in V_w \quad \text{et donc} \quad \mathcal{Z} = \frac{1}{2\pi i} \log \left(\frac{z - \zeta_0^+(\varepsilon)}{z - \zeta_0^-(\varepsilon)} \right).$$

Lorsque \mathcal{Z} prend ses valeurs dans \mathcal{S}_w , z évite les points $\zeta_0^\pm(\varepsilon)$ et reste dans un petit disque centré en 0, donc $f_{\varepsilon^2}(z)$ évite les points $\zeta_1^\pm(\varepsilon) = f_{\varepsilon^2}(\zeta_0^\pm(\varepsilon))$. On peut donc définir

$$\mathcal{Z}_1 := \frac{1}{2\pi i} \log \left(\frac{f_{\varepsilon^2}(z) - \zeta_1^+(\varepsilon)}{f_{\varepsilon^2}(z) - \zeta_1^-(\varepsilon)} \right)$$

où la branche est choisie pour que

$$\mathcal{Z}_1 - \mathcal{Z} = u(z, \varepsilon) = u(\psi^0(\mathcal{Z}), \varepsilon) = \mathcal{F}^0(\mathcal{Z}) - \mathcal{Z}.$$

On a donc :

$$\psi^1 \circ \mathcal{F}^0(\mathcal{Z}) = \psi^1(\mathcal{Z}_1) = f_{\varepsilon^2}(z) = f_{\varepsilon^2} \circ \psi^0(\mathcal{Z}).$$

En d'autres termes, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_w & \xrightarrow{\mathcal{F}^0} & \mathbb{C} \\ \psi^0 \downarrow & & \downarrow \psi^1 \\ V_w & \xrightarrow{f_w} & \mathbb{P}^1(\mathbb{C}). \end{array}$$

Étape 2.2. Nous allons maintenant prouver que pour $(z, \varepsilon) \in \Delta$, on a l'estimation suivante :

$$2\pi i u(z, \varepsilon) = 2c_1\varepsilon - 2c_1(1-a)\varepsilon z + O(\varepsilon z^2) + O(\varepsilon^3).$$

En effet, observons que :

$$\frac{f_{\varepsilon^2}(z) - \zeta_1^+(\varepsilon)}{z - \zeta_0^+(\varepsilon)} \cdot \frac{z - \zeta_0^-(\varepsilon)}{f_{\varepsilon^2}(z) - \zeta_1^-(\varepsilon)} = \frac{f(z) - f(\zeta_0^+(\varepsilon))}{z - \zeta_0^+(\varepsilon)} \cdot \frac{z - \zeta_0^-(\varepsilon)}{f(z) - f(\zeta_0^-(\varepsilon))},$$

d'où

$$2\pi i u(z, \varepsilon) = \log \left(\frac{1 - f(\zeta_0^+(\varepsilon))/f(z)}{1 - \zeta_0^+(\varepsilon)/z} \right) - \log \left(\frac{1 - f(\zeta_0^-(\varepsilon))/f(z)}{1 - \zeta_0^-(\varepsilon)/z} \right).$$

Rappelons que $\zeta_0^\pm(\varepsilon) = \pm c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2$, donc

$$f(\zeta_0^\pm(\varepsilon)) = \pm c_1\varepsilon + c_3\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) \quad \text{avec} \quad c_3 := c_2 + c_1^2.$$

Comme u est holomorphe sur Δ et $u(z, 0) \equiv 0$, u admet un développement de la forme : $u(z, \varepsilon) = u_1(z)\varepsilon + u_2(z)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)$ sur Δ . Pour déterminer u_1 et u_2 on écrit

$$\begin{aligned} \log \left(\frac{1 - f(\zeta_0^\pm(\varepsilon))/f(z)}{1 - \zeta_0^\pm(\varepsilon)/z} \right) &= \pm c_1 \cdot \left(-\frac{1}{f(z)} + \frac{1}{z} \right) \cdot \varepsilon \\ &\quad + \left(-\frac{c_3}{f(z)} - \frac{c_1^2}{2(f(z))^2} + \frac{c_2}{z} + \frac{c_1^2}{2z^2} \right) \cdot \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \end{aligned}$$

et en considérant la différence entre les deux expressions on obtient :

$$\begin{aligned} 2\pi i u(z, \varepsilon) &= 2c_1 \cdot \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{f(z)} \right) \cdot \varepsilon + O(\varepsilon^3) \\ &= 2c_1 \varepsilon - 2c_1(1-a)\varepsilon z + O(\varepsilon z^2) + O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Étape 2.3. Nous allons maintenant prouver (3.4.9). Si $Z \in Q_w$ et

$$z := \psi^0(Z) = ic_1 \varepsilon \cot(\pi Z) + c_2 \varepsilon^2 = ic_1 \varepsilon \cot(\pi Z) + o(\varepsilon),$$

on déduit de l'étape 1 de la preuve (voir (3.4.10)) que $z = O(|\varepsilon|^\alpha)$. Comme $\alpha > 1/2$ on voit que $O(\varepsilon z^2) = O(|\varepsilon|^{1+2\alpha}) \subset o(\varepsilon^2)$.¹ Donc, pour $Z \in Q_w$,

$$\begin{aligned} u(\psi^0(Z), \varepsilon) &= \frac{2c_1}{2\pi i} \varepsilon - \frac{c_1^2 \cdot (1-a)}{\pi} \varepsilon^2 \cot(\pi Z) + o(\varepsilon^2) \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\pi(1-a)\varepsilon^2}{4} \cot(\pi Z) + o(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Comme $\mathcal{F}^0(Z) = Z + u(\psi^0(Z), \varepsilon)$, on obtient l'estimation souhaitée (3.4.9), ce qui achève la preuve de l'étape 2.

3.4.5.3 Preuve de l'étape 3

Nous allons définir \mathcal{F}^1 sur la bande verticale \mathcal{H} et prouver que

$$\mathcal{F}^1(Z) = Z + o(w).$$

L'idée est que comme la distance $|\zeta_2^\pm - \zeta_1^\pm|$ est bien plus petite que $|\zeta_1^+ - \zeta_1^-|$, $(\psi^2)^{-1} \circ \psi^1$ est très proche de l'identité.

Étape 3.1. Commençons par définir \mathcal{F}^1 . Soit $\mu_1 : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et $\mu_2 : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ les transformations de Möbius définies par (rappelons que $\varepsilon = \sqrt{w}$) :

$$\mu_1(z) := \frac{z - \zeta_1^+(\varepsilon)}{z - \zeta_1^-(\varepsilon)}, \quad \mu_2(z) := \frac{z - \zeta_2^+(\varepsilon)}{z - \zeta_2^-(\varepsilon)}.$$

La transformation de Möbius $\mu := \mu_2 \circ \mu_1^{-1} : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ envoie $\mu_1 \circ \zeta_2^+(\varepsilon)$ sur 0, $\mu_1 \circ \zeta_2^-(\varepsilon)$ to ∞ et fixe 1. Posons

$$\delta^+ := \mu_1 \circ \zeta_2^+(\varepsilon) = \frac{\zeta_2^+(\varepsilon) - \zeta_1^+(\varepsilon)}{\zeta_2^+(\varepsilon) - \zeta_1^-(\varepsilon)}, \quad \delta^- := \frac{1}{\mu_1 \circ \zeta_2^-(\varepsilon)} = \frac{\zeta_2^-(\varepsilon) - \zeta_1^-(\varepsilon)}{\zeta_2^-(\varepsilon) - \zeta_1^+(\varepsilon)}.$$

Remarquons que

$$\zeta_2^\pm(\varepsilon) - \zeta_1^\pm(\varepsilon) = O(\varepsilon^4) \quad \text{alors que} \quad \zeta_2^\pm(\varepsilon) - \zeta_1^\mp(\varepsilon) = i\pi\varepsilon \cdot (1 + o(1)),$$

donc

$$\delta^+ = O(\varepsilon^3), \quad \delta^- = O(\varepsilon^3).$$

Donc, l'image de la bande horizontale $\mathcal{H} = \{-1 < \Im(Z) < 1\}$ par la fonction exponentielle

$$\exp : \mathbb{C} \ni Z \mapsto e^{2\pi i Z} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

1. C'est à cause de ce calcul qu'on a fait le choix de borne inférieure pour α .

évite δ^+ et $1/\delta^-$ et $\mu : \exp(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ se relève en une application $\mathcal{F}^1 : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{H} & \xrightarrow{\mathcal{F}^1} & \mathbb{C} \\
 \downarrow \text{exp} & & \downarrow \text{exp} \\
 \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) & \xrightarrow{\mu} & \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \\
 \uparrow \mu_1 & & \uparrow \mu_2 \\
 \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{P}^1(\mathbb{C})
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \psi^1 \swarrow \quad \searrow \psi^2 \\
 \end{array}$$

Comme $\mu(1) = 1$, le choix de relevé est complètement déterminé par $\mathcal{F}^1(0) = 0$.

Étape 3.2. Nous allons estimer $\mathcal{F}^1(\mathcal{Z}) - \mathcal{Z}$. Comme $\mu(\delta^+) = 0$, $\mu(1/\delta^-) = \infty$ et $\mu(1) = 1$, on en déduit que

$$\mu(z) = z \cdot \frac{1 - \delta^-}{1 - \delta^+} \cdot \frac{1 - \delta^+/z}{1 - \delta^-/z}.$$

Par conséquent,

$$\mathcal{F}^1(\mathcal{Z}) - \mathcal{Z} = \log(1 - \delta^-) - \log(1 - \delta^+) + \log(1 - \delta^+/z) + \log(1 - \delta^-/z),$$

où \log est la branche principale du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ (les arguments des quatre logarithmes sont proches de 1). Comme $\delta^+ = O(\varepsilon^3)$ and $\delta^- = O(\varepsilon^3)$, on en déduit que

$$\sup_{\mathcal{Z} \in \mathcal{H}} |\mathcal{F}^1(\mathcal{Z}) - \mathcal{Z}| = O(\varepsilon^3) \subset o(\varepsilon^2) = o(w),$$

ce qu'il fallait démontrer.

Étape 3.3. Prouvons que $\mathcal{F}^1 \circ \mathcal{F}^0(Q_w) \subset \mathcal{S}_{g(w)}$. Tout d'abord, on a vu dans l'étape 1 que $Q_w \subset \mathcal{R}'_w$. Comme w est petit,

$$|g(w)|^{1/4} = |w|^{1/4} + o(|w|^{1/4}),$$

hence $\mathcal{R}'_w \subset \mathcal{S}_{g(w)}$ et la distance entre les frontières est comparable à $|w|^{1/4}$. Comme $\mathcal{F}^1 \circ \mathcal{F}^0(\mathcal{Z}) = \mathcal{Z} + O(|w|^{1/2})$ sur Q_w et $|w|^{1/2} = o(|w|^{1/4})$, on voit que $\mathcal{F}^1 \circ \mathcal{F}^0(Q_w) \subset \mathcal{S}_{g(w)}$.

On en déduit que

$$f_w \circ \varphi_w^{-1}(\mathcal{R}_w) = f_w \circ \psi_w(Q_w) = \psi_{g(w)}(\mathcal{F}^1 \circ \mathcal{F}^0(Q_w)) \subset \psi_{g(w)}(\mathcal{S}_{g(w)}) = V_{g(w)},$$

ce qui achève la preuve de l'étape 3.

3.4.5.4 Démonstration de l'étape 4

Nous allons définir \mathcal{F} sur \mathcal{R}_w et prouver que

$$\mathcal{F}(\mathcal{Z}) = \mathcal{Z} + \frac{\sqrt{w}}{2} + o(w).$$

Soit

$$\mathcal{F} := \chi^2 \circ (\mathcal{F}^1 \circ \mathcal{F}^0) \circ (\chi^0)^{-1} : \mathcal{R}_w \rightarrow \mathbb{C},$$

tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{R}_w & \xrightarrow{\mathcal{F}} & & & \mathbb{C} \\
 \uparrow \chi^0 & & & & \uparrow \chi^2 \\
 Q_w & \xrightarrow{\mathcal{F}^0} & \mathcal{F}^0(Q_w) & \xrightarrow{\mathcal{F}^1} & \mathcal{S}_{g(w)}.
 \end{array}$$

Pour $Z \in \mathcal{Q}_w$, posons

$$v(Z) := \frac{\sqrt{w}}{2} + \frac{\pi(1-a)w}{4} \cot(\pi Z) = \frac{\sqrt{w}}{2} + o(|w|^{1/2}),$$

où la seconde égalité se déduit du fait que $\cot(\pi Z) = O(r_w^{-1})$ sur \mathcal{Q}_w . Écrivons alors

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\chi^0(Z)) &= \chi^2(Z + v(Z) + o(w)) \\ &= Z + v(Z) + o(w) + \frac{\sqrt{g(w)}(1-a)}{2} \cdot \log\left(\frac{2 \sin(\pi Z + \pi v(Z) + o(w))}{\sqrt{g(w)}}\right). \end{aligned} \quad (3.4.10)$$

En utilisant

$$\sqrt{g(w)} = \sqrt{w + O(w^2)} = \sqrt{w} + O(|w|^{3/2}),$$

et avec le même argument que dans le lemme 3.4.2, on voit que le logarithme dans (3.4.10) est $O(\log |w|)$. On en déduit donc :

$$\mathcal{F}(\chi^0(Z)) = Z + v(Z) - \frac{\sqrt{w}(1-a)}{2} \log\left(\frac{2 \sin(\pi Z + \pi v(Z))}{\pi \sqrt{w}}\right) + o(w),$$

par conséquent :

$$\mathcal{F}(\chi^0(Z)) - \chi^0(Z) = v(Z) - \frac{\sqrt{w}(1-a)}{2} \log\left(\frac{\sin(\pi Z + \pi v(Z))}{\sin(\pi Z)}\right) + o(w).$$

De l'estimation $v(Z) = \sqrt{w}/2 + o(|w|^{1/2})$, on déduit

$$\begin{aligned} \frac{\sin(\pi Z + \pi v(Z))}{\sin(\pi Z)} &= \frac{\sin(\pi Z) + \frac{\pi \sqrt{w}}{2} \cos(\pi Z) + o(|w|^{1/2})}{\sin(\pi Z)} \\ &= 1 + \frac{\pi \sqrt{w}}{2} \cdot \cot(\pi Z) + o(|w|^{1/2}). \end{aligned}$$

Enfin :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\chi^0(Z)) - \chi^0(Z) &= \frac{\sqrt{w}}{2} + \frac{\pi(1-a)w}{4} \cot(\pi Z) \\ &\quad - \frac{\sqrt{w}(1-a)}{2} \cdot \frac{\pi \sqrt{w}}{2} \cot(\pi Z) + o(w) \\ &= \frac{\sqrt{w}}{2} + o(w). \end{aligned}$$

Ceci achève la preuve de l'étape 4, et donc de la propriété 3 des coordonnées de Fatou approchées. \square

3.5 Preuve du résultat clé

Le but de cette section est de prouver le théorème clé 3.1.5.

3.5.1 Notations

Soit C_f un compact inclus dans \mathcal{B}_f et C_g un compact inclus dans \mathcal{B}_g . Il s'agit de montrer que la suite d'applications

$$\mathbb{C}^2 \ni (z, w) \mapsto P^{\circ 2n+1}(z, g^{\circ n^2}(w)) \in \mathbb{C}^2$$

converge uniformément sur $C_f \times C_g$ vers l'application

$$C_f \times C_g \ni (z, w) \mapsto (\mathcal{L}_f(z), 0) \in \mathbb{C} \times \{0\}.$$

Pour $(z, w) \in C_f \times C_g$ et pour $m \geq 0$, posons

$$w_m := g^{\circ m}(w).$$

Cette suite converge uniformément vers 0 sur C_g , donc la difficulté consiste à prouver que la première coordonnée converge uniformément vers $\mathcal{L}_f(z)$.

Dans ce but, nous allons devoir estimer plusieurs quantités qui dépendent d'un entier $k \in [0, 2n + 1]$ (correspondant à un itéré $m = n^2 + k \in [n^2, (n + 1)^2]$). Nous adoptons la convention suivant laquelle la notation $o(\cdot)$ or $O(\cdot)$ désigne une estimation uniforme sur $C_f \times C_g$, et ne dépendant que de n , c'est-à-dire une estimation uniforme en $k \in [0, 2n + 1]$.

Pour $m_2 \geq m_1 \geq 0$, posons

$$\mathbf{f}_{m_2, m_1} := f_{w_{m_2-1}} \circ \cdots \circ f_{w_{m_1}} \quad \text{avec} \quad f_w(z) := f(z) + \frac{\pi^2}{4}w.$$

Par convention, une composition vide est l'identité, donc $\mathbf{f}_{m, m} = \text{id}$. Ainsi :

$$P^{\circ 2n+1}(z, g^{\circ n^2}(w)) = (\mathbf{f}_{(n+1)^2, n^2}(z), w_{(n+1)^2})$$

donc nous devons prouver que

$$\mathbf{f}_{(n+1)^2, n^2}(z) = \mathcal{L}_f(z) + o(1).$$

3.5.2 Schéma de la preuve

Rappelons que $R > 0$ a été choisi suffisamment grand pour que $F : Z \mapsto -1/f(-1/Z)$ vérifie

$$\sup_{|Z| > R} |F(Z) - Z - 1| < \frac{1}{10}, \quad \sup_{|Z| > R} |F'(Z) - 1| < \frac{1}{10}. \quad (3.5.1)$$

Le pétale répulsif P_f^{rep} est l'image de $-\mathbb{H}_R$ par l'application univalente ψ_f , et la notation ψ_f^{-1} est réservée pour la branche inverse $\psi_f^{-1} : P_f^{\text{rep}} \rightarrow \mathbb{H}_R$.

Posons

$$k_n := \lfloor n^\alpha \rfloor = o(n) \quad \text{où} \quad \frac{1}{2} < \alpha < \frac{2}{3} \quad \text{comme dans (3.4.1).}$$

La preuve sera découpée en quatre propositions que l'on énoncera indépendamment, correspondant aux trois parties de la transition entre n^2 et $(n + 1)^2$ itérées. Les preuves seront données dans les sections 3.5.4 à 3.5.7.

Commençons par montrer que pour les k_n premières itérations, l'orbite reste proche d'une orbite de f (la borne $\alpha < 2/3$ est utilisée ici).

Proposition 3.5.1 (Entrée dans le batteur à oeufs). Soit $z \in C_f$ et soit x_n^ι défini par $x_n^\iota := \mathbf{f}_{n^2+k_n, n^2}(z)$.²

Alors, $x_n^\iota \sim -1/k_n$, d'où $x_n^\iota \in \mathcal{B}_f$ pour n suffisamment grand. De plus,

$$\phi_f(x_n^\iota) = \phi_f\left(f^{\circ k_n}(z)\right) + o(1) \quad \text{quand} \quad n \rightarrow +\infty.$$

Les deux propositions suivantes ont pour objet la phase où le nombre d'itération est compris entre $n^2 + k_n$ et $(n + 1)^2 - k_n$.

2. L'exposant ι désigne *incoming* (entrant), et dans la proposition 3.5.4 ci-dessous, o désigne *outgoing* (sortant). Cette convention a été introduite dans [BSU12].

Proposition 3.5.2 (Longueur de transition). Lorsque $n \rightarrow \infty$,

$$2n \cdot \left(\sum_{m=n^2+k_n}^{n^2+2n-k_n} \frac{\sqrt{w_m}}{2} \right) = 2n - 2k_n + o(1).^3$$

Proposition 3.5.3 (Passage dans le batteur à oeufs). Soit $(x_n^t)_{n \geq 0}$ une suite telle que $x_n^t \sim -1/k_n$, et donc $x_n^t \in \mathcal{B}_f$ pour n suffisamment grand. Posons

$$x_n^o := \mathbf{f}_{(n+1)^2-k_n, n^2+k_n}(x_n^t).$$

Alors, $x_n^o \sim 1/k_n$, et donc $x_n^o \in P_f^{\text{rep}}$ pour n suffisamment grand. De plus, lorsque $n \rightarrow \infty$,

$$\psi_f^{-1}(x_n^o) = \phi_f(x_n^t) + 2n \cdot \left(\sum_{m=n^2+k_n}^{n^2+2n-k_n} \frac{\sqrt{w_m}}{2} \right) - 2n + o(1) = \phi_f(x_n^t) - 2k_n + o(1).$$

La dernière proposition est similaire à la proposition 3.5.1.

Proposition 3.5.4 (Sortie du batteur à oeufs). Soit $(x_n^o)_{n \geq 0}$ une suite contenue dans P_f^{rep} telle que $\psi_f^{-1}(x_n^o) = -k_n + O(1)$ quand $n \rightarrow +\infty$. Alors

$$\mathbf{f}_{(n+1)^2, (n+1)^2-k_n}(x_n^o) = f^{\circ k_n}(x_n^o) + o(1) \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty.$$

Démonstration de la proposition 3.1.5. Commençons par la proposition 3.5.1 : si $z \in C_f$, alors

$$x_n^t := \mathbf{f}_{n^2+k_n, n^2}(z)$$

vérifie $x_n^t \sim -1/k_n$ et quand $n \rightarrow +\infty$,

$$\phi_f(x_n^t) = \phi_f(f^{\circ k_n}(z)) + o(1) = \phi_f(z) + k_n + o(1).$$

D'après la proposition 3.5.3,

$$x_n^o := \mathbf{f}_{(n+1)^2-k_n, n^2+k_n}(x_n^t) = \mathbf{f}_{(n+1)^2-k_n, n^2}(z)$$

vérifie $x_n^o \sim 1/k_n$ et quand $n \rightarrow +\infty$,

$$\psi_f^{-1}(x_n^o) = \phi_f(z) + k_n - 2k_n + o(1) = \phi_f(z) - k_n + o(1).$$

Enfin, comme $\phi_f(z) - k_n + o(1) = -k_n + O(1)$, la proposition 3.5.4 implique que quand $n \rightarrow +\infty$,

$$\mathbf{f}_{(n+1)^2, n^2}(z) = \mathbf{f}_{(n+1)^2, (n+1)^2-k_n}(x_n^o) = f^{\circ k_n}(x_n^o) + o(1).$$

Ceci achève donc la preuve de la proposition 3.1.5 puisque

$$\begin{aligned} f^{\circ k_n}(x_n^o) &= f^{\circ k_n} \circ \psi_f \circ \psi_f^{-1}(x_n^o) = \psi_f \left(\psi_f^{-1}(x_n^o) + k_n \right) \\ &= \psi_f(\phi_f(z) + o(1)) = \mathcal{L}_f(z) + o(1). \end{aligned} \quad \square$$

3. Rappelons que \sqrt{w} est la racine carré qui a une partie réelle positive.

3.5.3 Comparaison avec l'implosion parabolique classique

Les propositions 3.5.1, 3.5.3 et 3.5.4 restent valides si au lieu de travailler avec la suite ($w_m := g^{om}(w)$), on utilise la suite (w'_m) définie par

$$w'_m := \frac{1}{n^2} \quad \text{if } n^2 \leq m \leq (n+1)^2 - 1.$$

Dans ce cas, la seule modification nécessaire est dans la proposition 3.5.2 qui doit être remplacée par :

$$2n \cdot \left(\sum_{m=n^2+k_n}^{n^2+2n-k_n} \frac{\sqrt{w'_m}}{2} \right) = 2n \cdot \left(\sum_{m=n^2+k_n}^{n^2+2n-k_n} \frac{1}{2n} \right) = 2n - 2k_n + 1 + o(1).$$

En suivant la preuve de la proposition 3.1.5, on obtient :

$$f_{1/n^2}^{o(2n+1)}(z) = \psi_f(\phi_f(z) + 1 + o(1)) = f \circ \mathcal{L}_f(z) + o(1).$$

On peut donc voir que dans notre contexte non autonome, où la dynamique décélère lentement au fur et à mesure que l'orbite passe dans le batteur à oeufs, il faut exactement une itération supplémentaire pour faire la transition que dans le cas classique en dimension un.

3.5.4 Longueur de transition

Dans ce paragraphe, nous allons prouver la proposition 3.5.2, qui concerne seulement la dynamique de g . Il s'agit de montrer que

$$\sum_{m=n^2+k_n}^{n^2+2n-k_n} \frac{\sqrt{w_m}}{2} = 1 - \frac{k_n}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

Rappelons que $\phi_g : \mathcal{B}_g \rightarrow \mathbb{C}$ désigne la coordonnée de Fatou attractive de g . Pour tout $k \geq 0$, on a :

$$\phi_g(w_{n^2+k}) = \phi_g(w) + n^2 + k = n^2 + k + O(1).^4$$

Par conséquent, pour $k \in [k_n, 2n - k_n]$ on a :

$$w_{n^2+k} = \phi_g^{-1}(n^2 + k + O(1)) = \frac{1}{n^2 + k + O(\log n)}$$

et

$$\sqrt{w_{n^2+k}} = \frac{1}{\sqrt{n^2 + k + O(\log n)}} = \frac{1}{n} - \frac{k}{2n^3} + O\left(\frac{\log n}{n^3}\right).$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \sum_{k=k_n}^{2n-k_n} \sqrt{w_{n^2+k}} &= \frac{2n - 2k_n + 1}{n} - \frac{2n(2n - 2k_n + 1)}{4n^3} + O\left(\frac{\log n}{n^2}\right) \\ &= 2 - \frac{2k_n}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve. □

4. Rappelons que les notations $o(\cdot)$ et $O(\cdot)$ signifient que les estimations sont uniformes sur $C_f \times C_g$ et par rapport à $k \in [0, 2n + 1]$.

3.5.5 Entrée dans le batteur à oeufs

Dans ce paragraphe, nous allons prouver la proposition 3.5.1, c'est-à-dire : si $z \in C_f$ et $x'_n := \mathbf{f}_{n^2+k_n, n^2}(z)$, alors, quand $n \rightarrow +\infty$,

$$x'_n \sim -\frac{1}{k_n}, \quad \phi_f(x'_n) = \phi_f(f^{\circ k_n}(z)) + o(1).$$

3.5.5.1 Entrée dans le pétale attractif

Fixons $\kappa_0 \geq 1$ suffisamment grand pour que

$$f^{\circ \kappa_0}(C_f) \subset P_f^{\text{att}}.$$

Pour chaque $k \geq 0$ fixé, la suite de polynômes $(f_{w_{n^2+k}})_{n \geq 0}$ converge localement uniformément vers f . Il s'ensuit que pour tout $k \in [1, \kappa_0]$, la suite \mathbf{f}_{n^2+k, n^2} converge uniformément vers $f^{\circ k}$ sur C_f . En particulier, si n est suffisamment grand, alors

$$\mathbf{f}_{n^2+k, n^2}(C_f) \subset \mathcal{B}_f \text{ pour } k \in [1, \kappa_0], \text{ et } \mathbf{f}_{n^2+\kappa_0, n^2}(C_f) \subset P_f^{\text{att}}.$$

De plus, comme $\mathbf{f}_{n^2+\kappa_0, n^2}(z)$ est proche de $f^{\circ \kappa_0}(z)$, alors pour n suffisamment grand on a également

$$k_n > \frac{10}{|\mathbf{f}_{n^2+\kappa_0, n^2}(z)|} \text{ pour } z \in C_f. \quad (3.5.2)$$

3.5.5.2 L'orbite reste dans le pétale attractif

Nous allons maintenant prouver que si n est suffisamment grand et $k \in [\kappa_0, k_n]$, alors $\mathbf{f}_{n^2+k, n^2}(C_f) \subset P_f^{\text{att}}$.

Pour cela, nous allons travailler dans la coordonnée $Z = -1/z$. Pour $m \geq 0$, considérons la fraction rationnelle F_m définie par :

$$F_m(Z) := -\frac{1}{f_{w_m}(-1/Z)} = F(Z) - \frac{\pi^2 w_m \cdot [F(Z)]^2}{4 + \pi^2 w_m \cdot F(Z)}.$$

Il faut penser à la fraction rationnelle F_m comme à une perturbation de F . Remarquons pourtant que le terme d'erreur $F_m(Z) - F(Z)$ n'est pas négligeable par rapport à $F(Z)$ quand $Z \rightarrow \infty$, et donc il faut contrôler précisément pour quelles valeurs de Z cette erreur est effectivement petite.

Comme $F(Z) \sim Z$ quand $z \rightarrow \infty$ et comme $w_{n^2+k} \in O(1/n^2)$ pour $k \in [0, k_n]$, on a :

$$\sup_{|Z|=R} |F_{n^2+k}(Z) - F(Z)| = o(1) \text{ and } \sup_{|Z|=2k_n} |F_{n^2+k}(Z) - F(Z)| = O\left(\frac{k_n^2}{n^2}\right) = o(1).$$

En particulier, d'après le principe du maximum et le choix de R (voir (3.5.1)) pour n suffisamment grand, si $k \in [0, k_n]$ alors

$$\sup_{R < |Z| < 2k_n} |F_{n^2+k}(Z) - Z - 1| < \frac{1}{10}.$$

Une récurrence facile sur k montre que pour tout $k \in [\kappa_0, k_n]$ et pour tout $z \in C_f$,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\mathbf{f}_{n^2+k, n^2}(z)} &\in \overline{D}\left(-\frac{1}{\mathbf{f}_{n^2+\kappa_0, n^2}(z)} + k - \kappa_0, \frac{k - \kappa_0}{10}\right) \\ &\subset \{Z \in \mathbb{C} ; \Re(Z) > R \text{ and } |Z| < 2k_n\}. \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

En effet, l'hypothèse de récurrence est clairement vraie pour $k = \kappa_0$ et si elle est vraie pour $k \in [\kappa_0, k_n - 1]$, alors

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\mathbf{f}_{n^2+k+1, n^2}(z)} &= F_{n^2+k} \left(-\frac{1}{\mathbf{f}_{n^2+k, n^2}(z)} \right) \in \overline{D} \left(-\frac{1}{\mathbf{f}_{n^2+k, n^2}(z)} + 1, \frac{1}{10} \right) \\ &\subset \overline{D} \left(-\frac{1}{\mathbf{f}_{n^2+\kappa_0, n^2}(z)} + k - \kappa_0 + 1, \frac{k - \kappa_0}{10} + \frac{1}{10} \right). \end{aligned}$$

Si Z appartient à ce dernier disque, alors

$$\Re(Z) > \Re \left(-\frac{1}{\mathbf{f}_{n^2+\kappa_0, n^2}(z)} \right) + k - \kappa_0 + 1 - \frac{k - \kappa_0 + 1}{10} > R + \frac{9}{10}(k - \kappa_0 + 1) > R$$

et en utilisant (3.5.2),

$$|Z| < \left| -\frac{1}{\mathbf{f}_{n^2+\kappa_0, n^2}(z)} \right| + k - \kappa_0 + 1 + \frac{k - \kappa_0 + 1}{10} < \frac{1}{10}k_n + \frac{11}{10}k_n < 2k_n.$$

Ceci montre que $\mathbf{f}_{n^2+k, n^2}(z) \in P_f^{\text{att}}$ pour tout $k \in [\kappa_0, k_n]$ et pour tout $z \in C_f$.

3.5.5.3 Estimations en coordonnée de Fatou attractive

Nous allons enfin prouver que pour $k \in [0, k_n]$

$$\phi_f(\mathbf{f}_{n^2+k, n^2}(z_n)) = \phi_f(f^{\circ k}(z)) + o(1).$$

Ceci est clairement vrai pour $k \in [1, \kappa_0]$ puisque pour chaque k , la suite $(\mathbf{f}_{n^2+k, n^2})$ converge uniformément vers $f^{\circ k}$ sur C_f . Il suffit donc de prouver cette estimation pour $k \in [\kappa_0, k_n]$.

On a : $\phi'_f(z) \sim 1/z^2$ as $z \rightarrow 0$ in P_f^{att} . Par ailleurs, on a vu dans (3.5.3) que pour $k \in [\kappa_0, k_n]$,

$$\left| \frac{1}{\mathbf{f}_{n^2+k, n^2}(z_n)} \right| \leq 2k_n.$$

Il s'ensuit que pour $k \in [\kappa_0, k_n - 1]$ et $z \in C_f$,

$$\sup_{I_k} |\phi'_f| \in O(k_n^2) \quad \text{avec} \quad I_k := [f \circ \mathbf{f}_{n^2+k, n^2}(z), \mathbf{f}_{n^2+k+1, n^2}(z)],$$

et donc

$$\begin{aligned} \phi_f(\mathbf{f}_{n^2+k+1, n^2}(z)) &= \phi_f \left(f(\mathbf{f}_{n^2+k, n^2}(z)) + \frac{\pi^2}{4} w_{n^2+k} \right) \\ &= \phi_f \circ f(\mathbf{f}_{n^2+k, n^2}(z)) + w_{n^2+k} \cdot \sup_{I_k} |\phi'_f| \cdot O(1) \\ &= \phi_f(\mathbf{f}_{n^2+k, n^2}(z)) + 1 + O\left(\frac{k_n^2}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Par conséquent, pour $k \in [\kappa_0, k_n]$,

$$\begin{aligned} \phi_f(\mathbf{f}_{n^2+k, n^2}(z)) &= \phi_f(\mathbf{f}_{n^2+\kappa_0, n^2}(z)) + k - \kappa_0 + O\left(\frac{k_n^3}{n^2}\right) \\ &= \phi_f(f^{\circ \kappa_0}(z)) + k - \kappa_0 + o(1) \\ &= \phi_f(f^{\circ k}(z)) + o(1), \end{aligned}$$

où la seconde inégalité vient de l'estimation $\mathbf{f}_{n^2+\kappa_0, n^2}(z) = f^{\circ \kappa_0}(z) + o(1)$ et du fait que $k_n^3 = O(n^{3\alpha})$ puisque $\alpha < 2/3$.

En prenant $k = k_n$, on en déduit que

$$\phi_f(x_n^t) = \phi_f(\mathbf{f}_{n^2+k_n, n^2}(z)) + o(1) = \phi_f(z) + k_n + o(1) = k_n + O(1)$$

et donc, $x_n^t \sim -1/\phi_f(x_n^t) \sim -1/k_n$. La preuve de la proposition 3.5.1 est alors achevée. \square

3.5.6 Passage dans le batteur à oeufs

Dans cette section, nous allons prouver la proposition 3.5.3, c'est-à-dire : si $(x_n^t)_{n \geq 0}$ est une suite telle que $x_n^t \sim -1/k_n$ et si

$$x_n^o := \mathbf{f}_{(n+1)^2 - k_n, n^2 + k_n}(x_n^t),$$

alors, quand $n \rightarrow +\infty$,

$$x_n^o \sim \frac{1}{k_n}, \psi_f^{-1}(x_n^o) = \phi_f(x_n^t) + n \cdot \left(\sum_{m=n^2+k_n}^{n^2+2n-k_n} \sqrt{w_m} \right) - 2n + o(1).$$

La preuve utilise les coordonnées de Fatou approchées construites dans la section 3.4. On reprendra toutes les notations développées dans cette section (en particulier les propriétés 1, 2 et 3).

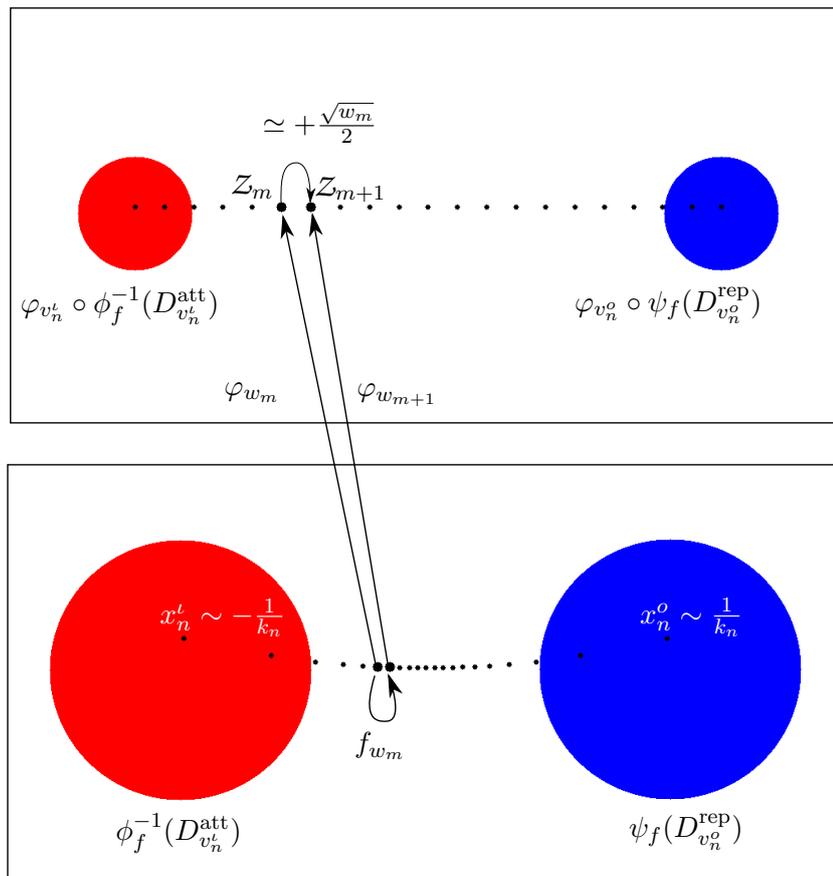


FIGURE 3.5.1 – L'application $\varphi_{w_{m+1}} \circ f_{w_m} \circ \varphi_{w_m}^{-1}$ est proche de la translation de vecteur $\frac{\sqrt{w_m}}{2}$.

Démonstration. Soit $v_n^t := w_{n^2+k_n}$ dans B_r pour n suffisamment grand.

Étape 1. Si $x_n^t \sim -1/k_n$, alors pour n suffisamment grand, $x_n^t \in P_f^{\text{att}}$. Posons $Y_n := \phi_f(x_n^t)$ et remarquons que

$$Y_n \sim -\frac{1}{x_n^t} \sim k_n \sim n^\alpha \sim |v_n^t|^{-\alpha/2} \text{ et donc } Y_n \in D_{v_n^t}^{\text{att}} \text{ pour } n \text{ suffisamment grand.}$$

D'après la propriété 1, pour n suffisamment grand, $x_n^t = \phi_f^{-1}(Y_n) \in V_{v_n^t}$ et

$$\frac{2}{\sqrt{v_n^t}} \cdot \varphi_{v_n^t}(x_n^t) = \frac{2}{\sqrt{v_n^t}} \cdot \varphi_{v_n^t} \circ \phi_f^{-1}(Y_n) = Y_n + o(1) = \phi_f(x_n^t) + o(1). \quad (3.5.4)$$

Étape 2. Nous allons maintenant prouver par récurrence sur m que pour tout $m \in [n^2 + k_n, (n+1)^2 - k_n]$,

$$\mathbf{f}_{m, n^2+k_n}(x_n^t) \in V_{w_m}$$

et

$$Z_m := \varphi_{w_m} \circ \mathbf{f}_{m, n^2+k_n}(x_n^t) = \varphi_{w_m}(x_n^t) + \sum_{j=n^2+k_n}^{m-1} \left(\frac{\sqrt{w_j}}{2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right).$$

En effet, pour $m = n^2 + k_n$, on a : $w_m = v_n^t$ et d'après l'étape 1,

$$\mathbf{f}_{m, n^2+k_n}(x_n^t) = x_n^t \in V_{v_n^t} = V_{w_m},$$

donc l'hypothèse de récurrence est vraie dans ce cas.

Supposons maintenant que l'hypothèse de récurrence soit vraie pour un certain $m \in [n^2 + k_n, (n+1)^2 - k_n - 1]$. D'après l'étape 1,

$$\varphi_{v_n^t}(x_n^t) = \frac{\sqrt{v_n^t}}{2} \cdot (\phi_f(x_n^t) + o(1)) = \frac{k_n}{2n} + o\left(\frac{k_n}{n}\right). \quad (3.5.5)$$

De plus,

$$\sqrt{w_m} = \frac{1}{\sqrt{n^2 + O(n)}} = \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Il s'ensuit que

$$Z_m = \frac{k_n}{2n} + o\left(\frac{k_n}{n}\right) + (m - n^2 - k_n) \cdot \left(\frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) = \frac{m - n^2}{2n} + o\left(\frac{k_n}{n}\right),$$

et donc

$$\frac{k_n}{2n} + o\left(\frac{k_n}{n}\right) \leq \Re(Z_m) \leq 1 - \frac{k_n}{2n} + o\left(\frac{k_n}{n}\right), \quad \Im(Z_m) = o(1).$$

Comme $r_{w_m} = |w_m|^{(1-\alpha)/2} \sim k_n/n$, on voit que pour n suffisamment grand, $Z_m \in \mathcal{R}_{w_m}$. D'après la propriété 3,

$$\mathbf{f}_{m+1, n^2+k_n}(x_n^t) = f_{w_m} \circ \mathbf{f}_{m, n^2+k_n}(x_n^t) \in V_{w_{m+1}}$$

et

$$\begin{aligned} Z_{m+1} &= \phi_{w_{m+1}} \circ f_{w_m} \circ \phi_{w_m}^{-1}(Z_m) = Z_m + \frac{\sqrt{w_m}}{2} + o(w_m) \\ &= \varphi_{v_n^t}(x_n^t) + \sum_{j=n^2+k_n}^{m-1} \left(\frac{\sqrt{w_j}}{2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) + \frac{\sqrt{w_m}}{2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \varphi_{v_n^t}(x_n^t) + \sum_{j=n^2+k_n}^m \left(\frac{\sqrt{w_j}}{2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right). \end{aligned}$$

Étape 3. Nous allons maintenant traiter le cas où $m := (n+1)^2 - k_n$; posons

$$v_n^o := w_{(n+1)^2-k_n}, \quad x_n^o := \mathbf{f}_{(n+1)^2-k_n, n^2+k_n}(x_n^t).$$

D'après l'étape 2 de la preuve, $x_n^o \in V_{v_n^o}$ et

$$\varphi_{v_n^o}(x_n^o) = \varphi_{v_n^t}(x_n^t) + \sum_{j=n^2+k_n}^{n^2+2n-k_n} \left(\frac{\sqrt{w_j}}{2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right). \quad (3.5.6)$$

En particulier, en utilisant (3.5.5) et la proposition 3.5.2 on obtient

$$\varphi_{v_n^o}(x_n^o) = \frac{k_n}{2n} + o\left(\frac{k_n}{n}\right) + 1 - \frac{k_n}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{k_n}{2n} + o\left(\frac{k_n}{n}\right) \quad (3.5.7)$$

Posons

$$X_n := \frac{2}{\sqrt{v_n^o}} \cdot (\varphi_{v_n^o}(x_n^o) - 1) \quad \text{et donc} \quad \varphi_{v_n^o}(x_n^o) = 1 + \frac{\sqrt{v_n^o}}{2} \cdot X_n.$$

Comme $2/\sqrt{v_n^o} \sim 2n$, de (3.5.7) on déduit que $X_n = -k_n \cdot (1 + o(1))$. Comme de plus $k_n \sim (v_n^o)^{(1-\alpha)/2}$ il s'ensuit que pour n suffisamment grand, $X_n \in D_{v_n^o}^{\text{rep}}$. On calcule alors :

$$\begin{aligned} \psi_f^{-1}(x_n^o) &= \psi_f^{-1} \circ \varphi_{v_n^o}^{-1} \left(1 + \frac{\sqrt{v_n^o}}{2} \cdot X_n \right) = X_n + o(1) \\ &= \frac{2}{\sqrt{v_n^o}} \cdot \left(\varphi_{v_n^o}(x_n^o) + \left(\sum_{j=n^2+k_n}^{n^2+2n-k_n} \frac{\sqrt{w_j}}{2} \right) + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{v_n^o}} \cdot \left(\frac{\sqrt{v_n^o}}{2} (\phi_f(x_n^o) + o(1)) + \left(\sum_{j=n^2+k_n}^{n^2+2n-k_n} \frac{\sqrt{w_j}}{2} \right) + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right) \\ &= \phi_f(x_n^o) + 2n \cdot \left(\sum_{j=n^2+k_n}^{n^2+2n-k_n} \frac{\sqrt{w_j}}{2} \right) - 2n + o(1) \end{aligned}$$

où l'on déduit la première ligne de la propriété 2, la seconde ligne suit de (3.5.6), la troisième ligne de la propriété 1, et la dernière ligne vient de $v_n^o \sim v_n^t \sim \frac{1}{n^2}$. Ceci achève la preuve. \square

3.5.7 Sortie du batteur à oeufs

Dans ce paragraphe, nous allons prouver la proposition 3.5.4, c'est-à-dire : si $(x_n^o)_{n \geq 0}$ est une suite contenue dans le pétale P_f^{rep} et si

$$\psi_f^{-1}(x_n^o) = -k_n + O(1),$$

alors, quand $n \rightarrow +\infty$,

$$\mathbf{f}_{(n+1)^2, (n+1)^2 - k_n}(x_n^o) = f^{o k_n}(x_n^o) + o(1).$$

Posons $x_{n,0}^o := x_n^o$ et pour $k \in [1, k_n]$, posons

$$x_{n,k}^o := \mathbf{f}_{(n+1)^2 - k_n + k, (n+1)^2 - k_n}(x_n^o)$$

3.5.7.1 Dans le pétale répulsif

Soit κ_1 un entier tel que pour tout $n \geq 0$,

$$\Re(\psi_f^{-1}(x_n^o)) + k_n + R < \kappa_1.$$

Nous allons prouver par récurrence sur k que pour n suffisamment grand, si $k \in [0, k_n - \kappa_1]$, alors

$$x_{n,k}^o \in P_f^{\text{rep}}, \quad \psi_f^{-1}(x_{n,k}^o) = \psi_f^{-1}(x_n^o) + k + k \cdot O\left(\frac{k_n^2}{n^2}\right).$$

Tout d'abord, l'hypothèse de récurrence est clairement vraie pour $k = 0$. Supposons donc qu'elle est vérifiée pour un certain $k \in [0, k_n - \kappa_1 - 1]$. Comme dans la proposition 3.5.1, comme $\alpha < 2/3$ et $k \leq k_n$, $kO(k_n^2/n^3) \subset o(1)$. Il s'ensuit que pour n suffisamment grand,

$$\Re(\psi_f^{-1}(x_{n,k}^o)) = \Re(\psi_f^{-1}(x_n^o)) + k + o(1) < k + \kappa_1 - k_n - R \leq -R - 1.$$

Comme $x_{n,k+1}^o = f_{w_{(n+1)^2-k_n+k}}(x_{n,k}^o) = f(x_{n,k}^o) + o(1)$ et $f \circ \psi_f = \psi_f \circ T_1$, quitte à choisir n plus grand s'il le faut, $x_{n,k+1}^o$ appartient au pétale répulsif P_f^{rep} .

Ensuite, comme

$$(\psi_f^{-1})'(z) \sim \frac{1}{z^2} \text{ quand } z \rightarrow 0 \text{ in } P_f^{\text{rep}},$$

comme dans la proposition 3.5.1 on voit que

$$\begin{aligned} \psi_f^{-1}(x_{n,k+1}^o) &= \psi_f^{-1} \left(f(x_{n,k}^o) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \\ &= \psi_f^{-1} \circ f(x_{n,k}^o) + O\left(\frac{1}{n^2|x_{n,k}^o|^2}\right) \\ &= \psi_f^{-1}(x_{n,k}^o) + 1 + O\left(\frac{k_n^2}{n^2}\right) \\ &= \psi_f^{-1}(x_n^o) + k + 1 + (k+1) \cdot O\left(\frac{k_n^2}{n^2}\right), \end{aligned}$$

d'où le résultat par récurrence.

3.5.7.2 Sortie du pétale répulsif

D'après l'étape précédente, on a :

$$\psi_f^{-1}(x_{n,k_n-\kappa_1}^o) = \psi_f^{-1}(x_n^o) + k_n - \kappa_1 + o(1) = \psi_f^{-1} \circ f^{\circ k_n - \kappa_1}(x_n^o) + o(1).$$

En appliquant ψ_f des deux côtés, on obtient :

$$x_{n,k_n-\kappa_1}^o = f^{\circ k_n - \kappa_1}(x_n^o) + o(1).$$

Comme la suite de polynômes $\mathbf{f}_{(n+1)^2, (n+1)^2 - \kappa_1}$ converge localement uniformément vers $f^{\circ \kappa_1}$, on en déduit que

$$x_{n,k_n}^o = \mathbf{f}_{(n+1)^2, (n+1)^2 - k_n}(x_n^o) = f^{\circ k_n}(x_n^o) + o(1),$$

ce qui achève la preuve de la proposition 3.5.4. □