Différentielles quadratiques et champs de vecteurs

Dans ce chapitre, nous présentons une étude d'objets intervenant en théorie de Teichmüller : formes de Beltrami, différentielles quadratiques, champs de vecteurs quasiconformes. Ces différents objets interviennent dans la description des espaces tangents et cotangents des espaces de Teichmüller, et vont donc jouer un rôle important dans l'étude des déformations infinitésimales d'un système dynamique f. Ce chapitre sera consacré à une étude purement analytique et non dynamique.

On étudiera l'action de certaines différentielles quadratiques comme formes linéaires sur un espace de champs de vecteurs continus, ainsi que l'obstruction à représenter une telle forme linéaire par une différentielle quadratique. Cette étude aura des applications techniques dans le chapitre suivant. Le résultat principal du chapitre est le théorème 1.3.

1.1 Généralités

Les notations et conventions suivantes seront utilisées dans toute la suite :

— $\mathcal{S}$ est une 1-variété complexe, qui n'est pas nécessairement connexe. Le terme surface de Riemann imdiquera toujours que l'on suppose que $\mathcal{S}$ est connexe.

— $\mathbb{P}^1$ est la sphère de Riemann.

— Ω est un ouvert hyperbolique de $\mathbb{P}^1$ (éventuellement non connexe : dans ce cas, le fait que Ω soit hyperbolique signifie que toutes ses composantes connexes sont hyperboliques).

— $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ est une fraction rationnelle de degré $d \geq 2$.

— Si $\mathcal{S}$ est hyperbolique, $\rho_{\mathcal{S}}$ est la métrique hyperbolique sur $\mathcal{S}$. Si $\mathcal{S}$ n'est pas connexe, $\rho_{\mathcal{S}}$ désigne la métrique hyperbolique de chaque composante connexe de $\mathcal{S}$. Plus précisément, si $v \in T_s\mathcal{S}$ est un vecteur tangent attaché à un point $s \in \mathcal{S}$, alors $\rho_{\mathcal{S}}(s; v)$ est la longueur de v mesurée dans la métrique hyperbolique de la composante connexe de $\mathcal{S}$ contenant s. Si ξ est un champ de vecteur sur $\mathcal{S}$, $\rho_{\mathcal{S}}(\xi)$ désigne la fonction $s \mapsto \rho_{\mathcal{S}}(s; \xi(s))$.

Dans toute cette section, la régularité des objets que l'on considère (différentielles quadratiques, champs de vecteurs, etc.) n'est sauf mention explicite du contraire que mesurable. Dans les applications, la régularité sera systématiquement précisée (holomorphe, méromorphe, C^1, continue, localement intégrable, L^∞...).

Cependant, comme on définira un $\overline{\partial}$ de certains objets (voir définition 1.1.3), les objets dont on prendra le $\overline{\partial}$ seront supposés avoir une plus grande régularité. Cette hypothèse de régularité sera alors systématiquement explicitée.

Définition 1.1.1. Une différentielle quadratique sur une surface de Riemann $\mathcal{S}$ est une section du fibré $T^*\mathcal{S} \otimes T^*\mathcal{S}$ (produit tensoriel sur $\mathbb{C}$). Autrement dit, c'est un champ de formes quadratiques complexes sur les plans tangents.

Définition 1.1.2. Si μ est une section de $\overline{\mathrm{Hom}}(T\mathcal{S}, T\mathcal{S})$, i.e. une section du fibré des endomorphismes anti-$\mathbb{C}$-linéaires des plans tangents, et $z \in \mathcal{S}$, alors $|\mu|(z)$ désigne la norme de l'endomorphisme $\mu(z)$ de $T_z\mathcal{S}$. Ainsi, $|\mu|$ est une fonction bien définie sur S. Si μ est une telle section vérifiant la propriété $|\mu| \in L^\infty(\mathcal{S})$, on dit que μ est une différentielle de Beltrami. Si de plus $\|\mu\|_{L^\infty(\mathcal{S})} < 1$, on dit que μ est une forme de Beltrami.

Plus généralement, il sera utile de définir :

Définition 1.1.3. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Notons $\Gamma(T^*\mathcal{S}^{\otimes k})$ l'espace des sections de $(T^*\mathcal{S})^{\otimes k}$ si $k \geq 0$, et l'espace des sections de $(T\mathcal{S})^{\otimes |k|}$ si $k < 0$ (produits tensoriels sur $\mathbb{C}$).

En coordonnées locales, on écrit $\phi = \phi(z)dz^k$ si $k \geq 0$ et $\phi = \phi(z)\frac{d}{dz^{|k|}}$ si $k < 0$. Parfois, par abus de notations, on notera également $\phi = \phi(z)dz^k$ même si $k < 0$. Dans de nouvelles coordonnées $w = h^{-1}(z)$, le changement de coordonnées s'écrit : $\phi = \phi \circ h(w)h'(w)^k dw^k$ si $k \geq 0$ et $\phi = \phi \circ h(w)h'(w)^k \frac{d}{dw^k}$ si $k < 0$.

En général, une connexion est nécessaire pour définir la différentielle d'une section d'un fibré. Rappelons cependant que si ϕ est une section d'un fibré vectoriel holomorphe E sur une surface de Riemann $\mathcal{S}$ avec une régularité suffisante, alors il existe une définition intrinsèque de $\overline{\partial}\phi$ ne nécessitant pas de connexion. Dans ce cas, $\overline{\partial}\phi$ est naturellement une section du fibré $\Lambda^{0,1}(T\mathcal{S})\otimes E$.

Définition 1.1.4. Soit ϕ une section d'un fibré vectoriel holomorphe E sur une surface de Riemann $\mathcal{S}$. On peut écrire localement $\phi = h\psi$, où h est une fonction et ψ est une section locale holomorphe de E. On définit alors, si h est L^1_{loc} et $\overline{\partial}h$ (au sens des distributions) est L^1_{loc} :

$$\overline{\partial}\phi := \overline{\partial}h \otimes \psi.$$

Ici, $\overline{\partial}h$ désigne la dérivée au sens des distributions de h. On dira que la section ϕ est faiblement dérivable lorsque le h de la définition ci-dessus est dans L^1_{loc} et que $\overline{\partial}h$ au sens des distributions est L^1_{loc}. On vérifie sans peine que cette définition est indépendante du choix de section locale.

Remarque 1.1.5. Attention : si $E = \Omega^{1,0}(\mathcal{S})$ est le fibré des formes différentielles de type $(1,0)$, cette définition ne coïncide pas tout à fait avec la définition habituelle du $\overline{\partial}$. En effet, si $\omega \in \Omega^{1,0}(\mathcal{S})$, $\overline{\partial}\omega$ dans le sens classique est une $(1,1)$-forme différentielle alternée, tandis que $\overline{\partial}\omega$ dans le sens de la définition précédente est une forme sesquilinéaire. Cependant, on peut passer de l'une à l'autre par un isomorphisme canonique (en antisymétrisant).

Soit $\phi \in \Gamma(E)$ une section faiblement dérivable. Voici des cas particuliers qui nous intéresseront :

- Si $E = T\mathcal{S}$ et $\phi \in \Gamma(E)$ (i.e. ϕ est un champ de vecteurs), alors $\overline{\partial}\phi$ est une différentielle de Beltrami.
- Si $E = T^*\mathcal{S}$, alors $\overline{\partial}\phi$ est une forme sesquilinéaire. Après antisymétrisation elle devient une forme volume que l'on peut naturellement intégrer sur $\mathcal{S}$.

En coordonnées locales, si $\phi = \phi(z)dz^k$, alors $\overline{\partial}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial\overline{z}}(z)d\overline{z} \otimes dz^k$.

Définition 1.1.6. Soit $\phi \in \Gamma(T^*\mathcal{S}^{\otimes m})$ et $\psi \in \Gamma(T^*\mathcal{S}^{\otimes n})$, où $m, n \in \mathbb{Z}$.

- $\phi \cdot \psi$ définit naturellement une section de $(T^*\mathcal{S})^{\otimes m+n}$, donnée par soit par une contraction soit par un produit tensoriel, selon les signes de m et n.
- Supposons que ψ soit faiblement dérivable. Alors $\phi \cdot \overline{\partial}\psi$ définit naturellement une section de $\Lambda^{0,1}(T\mathcal{S}) \otimes (T^*\mathcal{S})^{\otimes m+n}$ de la façon suivante : écrivons localement $\overline{\partial}\psi = \psi_1 \otimes \psi_2$ où $\psi_1 \in \Omega^{0,1}(\mathcal{S})$ et $\psi_2 \in \Gamma((T^*\mathcal{S})^{\otimes n})$, et posons $\phi \cdot \overline{\partial}\psi := \psi_1 \otimes (\phi \cdot \psi_2)$.

Lorsque $m + n = 1$, $\phi \cdot \overline{\partial}\psi$ est une forme sesquilinéaire sur $\mathcal{S}$. Quitte à antisymétriser, elle définit de manière canonique une forme volume sur $\mathcal{S}$. On peut donc intégrer cet objet sur $\mathcal{S}$. Notons que l'antisymétrisation définit un isomorphisme canonique entre formes sesquilinéaires et formes volumes en dimension complexe 1 ; on identifiera donc $\phi \cdot \overline{\partial}\psi$ à une forme volume.

Supposons que ϕ et ψ s'écrivent en coordonnées locales $\phi = \phi(z)dz^m$ et $\psi = \psi(z)dz^n$. Alors :

$$\phi \cdot \psi = \phi(z)\psi(z)dz^{m+n}$$

$$\phi \cdot \overline{\partial}\psi = \phi(z)\frac{\partial\psi}{\partial\overline{z}}(z)dz^{m+n}d\overline{z}$$

Cela rend évidentes les propriétés suivantes, qui justifient la notation $\cdot$:

$$\phi \cdot (\psi \cdot \xi) = (\phi \cdot \psi) \cdot \xi$$
$$\phi \cdot \psi = \psi \cdot \phi$$
$$\overline{\partial}(\phi \cdot \psi) = (\overline{\partial}\phi) \cdot \psi + \phi \cdot \overline{\partial}\psi$$

On utilisera donc par la suite ces propriétés sans justification supplémentaire.
Voici quelques cas particuliers notables :

- Si q est une différentielle quadratique et ξ est un champ de vecteurs, alors $q \cdot \xi$ est une $(1,0)$-forme différentielle et peut donc être naturellement intégrée sur des courbes, et possède une notion bien définie de résidu.
- Si q est une différentielle quadratique et μ est une différentielle de Beltrami, alors $q \cdot \mu$ est une forme sequilinéaire. Après antisymétrisation, elle devient une $(1,1)$-forme différentielle alternée et peut donc être intégrée sur $\mathcal{S}$. Ceci inclut le cas où $\mu = \overline{\partial}\xi$, où ξ est un champ de vecteur.
- Si q est une différentielle quadratique et ξ est un champ de vecteurs, alors $\overline{\partial}q \cdot \xi$ est aussi une forme sesquilinéaire, et donc définit une forme volume après antisymétrisation.

Traditionnellement, on écrit les formes de Beltrami en coordonnées sous la forme $\mu = \mu(z)\frac{\overline{dz}}{dz}$. Nous conserverons cette notation. Cependant, dans le cadre du formalisme développé plus haut, une notation légèrement plus cohérente aurait été $\mu = \mu(z)d\overline{z} \otimes \frac{d}{dz}$.

Exemple 1.1.7. — Soit ξ le champ de vecteur défini par $\xi(z) = \overline{z}^2\frac{d}{dz}$. Alors

$$\overline{\partial}\xi = 2\overline{z}\frac{d\overline{z}}{dz}.$$

— Soit q la différentielle quadratique définie par $q = \frac{dz^2}{z}$. Alors :

$$|q| = \frac{|dz|^2}{|z|}$$
$$q \cdot \xi = \frac{\overline{z}^2}{z}dz$$
$$q \cdot \overline{\partial}\xi = \frac{2\overline{z}}{z}d\overline{z} \wedge dz$$

Définition 1.1.8. Soit ξ un champ de vecteurs sur une surface de Riemann $\mathcal{S}$. On dit que ξ est quasiconforme si $\overline{\partial}\xi$ (au sens des distributions) est une différentielle de Beltrami. Autrement dit, ξ est quasiconforme s'il existe une différentielle de Beltrami $\mu \in L^\infty$ telle que pour toute différentielle quadratique lisse sur $\mathbb{P}^1$,

$$\int_{\mathbb{P}^1} \overline{\partial}q \cdot \xi = -\int_{\mathbb{P}^1} q \cdot \mu.$$

Proposition 1.1.9 (Stokes pour les champs de vecteurs quasiconformes)**.** Soit U un ouvert de $\mathbb{P}^1$ dont le bord est de classe C^1 par morceaux, q une différentielle quadratique de classe C^1 au voisinage de $\overline{U}$ et ξ un champ de vecteur quasiconforme sur $\mathbb{P}^1$. Alors

$$\int_U q \cdot \overline{\partial}\xi + \int_U \xi \cdot \overline{\partial}q = \int_{\partial U} q \cdot \xi$$

Démonstration. Si ξ est un champ de vecteur de classe C^1, c'est une application directe du théorème de Stokes classique. En effet, $q{\cdot}\xi$ est une $(1,0)$-forme différentielle donc $d(q{\cdot}\xi) = \overline{\partial}(q{\cdot}\xi)$. De plus, $\overline{\partial}(q{\cdot}\xi) = \overline{\partial}q{\cdot}\xi + q{\cdot}\overline{\partial}\xi$. On déduit le cas général où $\overline{\partial}\xi$ n'existe qu'au sens des distributions par un raisonnement par densité : soit ξ un champ de vecteur quasiconforme et ξ_n une suite de champ de vecteurs de classe C^1 au voisinage de $\overline{U}$ qui converge uniformément vers ξ sur $\overline{U}$ (une telle suite existe car ξ est continu). Alors ξ_n converge vers ξ en tant que distribution sur U, donc $\overline{\partial}\xi_n$ converge vers $\overline{\partial}\xi$ au sens des distributions (par continuité de l'opérateur $\overline{\partial}$ pour la topologie des distributions). Comme on sait que la distribution $\overline{\partial}\xi$ est en fait une différentielle de Beltrami L^∞, on en déduit que pour toute différentielle quadratique test ϕ (c'est-à-dire lisse et à support compact dans U), on a :

$$\lim_{n\to\infty} \int_U \phi \cdot \overline{\partial}\xi_n = \int_U \phi \cdot \overline{\partial}\xi$$

Mais comme les différentielles quadratiques lisses à support compact sont denses pour la norme L^1, ceci est encore vrai pour tout différentielle quadratique ϕ intégrable sur U, donc pour q.

Ainsi, $\lim_{n\to\infty} \int_U q \cdot \overline{\partial}\xi_n = \int_U q \cdot \overline{\partial}\xi$ et comme ξ_n converge uniformément sur $\overline{U}$, on a aussi

$$\lim_{n\to\infty} -\int_U \xi_n \cdot \overline{\partial}q + \int_{\partial U} q \cdot \xi_n = -\int_U \xi \cdot \overline{\partial}q + \int_{\partial U} q \cdot \xi.$$

□

Définition 1.1.10. Soit $\mathcal{S}$ une surface de Riemann, $z_0 \in \mathcal{S}$ et $\xi(z_0) \in T_{z_0}\mathcal{S}$. Si q est une différentielle quadratique méromorphe ayant un pôle simple en z_0, on définit le résidu de $q \cdot \xi$ en z_0 comme le résidu de $q \cdot \tilde{\xi}$ en z_0, où $\tilde{\xi}$ est un champ de vecteur holomorphe au voisinage de z_0 avec $\xi(z_0) = \tilde{\xi}(z_0)$.

Cette définition ne dépend pas du choix de $\tilde{\xi}$.

Proposition 1.1.11. Soit $\Omega \subset \mathbb{P}^1$ un ouvert à bord lisse, et q une différentielle quadratique méromorphe au voisinage de $\overline{\Omega}$ dont les pôles sont simples et inclus dans un ensemble fini $P \subset \Omega$. Soit ξ un champ de vecteur quasiconforme sur Ω, qui se prolonge continûment sur $\overline{\Omega}$. Alors :

$$\int_\Omega q \cdot \overline{\partial}\xi = 2i\pi \sum_{z\in P} \mathrm{Res}(q \cdot \xi, z) - \int_{\partial\Omega} q \cdot \xi$$

Démonstration. Comme dans la proposition 1.1.9, commençons par prouver le résultat dans le cas où ξ est régulier ; on traitera le cas général par densité. Supposons donc que ξ est un champ de vecteur lisse défini au voisinage de $\overline{\Omega}$ et que ξ est holomorphe au voisinage de chaque $z \in P$. Let $U = \Omega - \bigcup_{z_i\in P} D_i$, où D_i désigne un disque lisse centré en $z_i \in P$ suffisamment petit pour qu'il soit inclus dans Ω et que ξ soit holomorphe sur chaque D_i. Alors d'après la proposition 1.1.9 :

$$\int_\Omega q \cdot \overline{\partial}\xi = \int_U q \cdot \overline{\partial}\xi = -\int_{\partial U} q \cdot \xi$$

De plus :

$$\int_{\partial U} q \cdot \xi = \int_{\partial\Omega} q \cdot \xi - \sum_{z_i\in P} \int_{\partial D_i} q \cdot \xi.$$

Comme ξ est holomorphe sur tous les disques D_i, la formule des résidus donne :

$$\int_{\partial U} q \cdot \xi = \int_{\partial\Omega} q \cdot \xi - 2i\pi \sum_{z_i\in P} \mathrm{Res}(q \cdot \xi, z_i).$$

Ceci achève la preuve dans le cas où ξ est lisse et holomorphe au voisinage de P.

Remarquons que ces champs de vecteurs sont denses dans l'espace des champs de vecteurs sur $\overline{\Omega}$ muni de la topologie de la convergence uniforme. En effet, en travaillant en coordonnées locales, la condition d'être holomorphe au voisinage de P est vérifiée par les champs de vecteurs localement constants dans ces coordonnées, et cette condition est clairement dense pour la convergence uniforme parmi les champs de vecteurs lisses, qui sont eux-mêmes denses dans les champs de vecteurs continus.

De plus, le terme droit de l'égalité $-\int_{\partial\Omega} q \cdot \xi + 2i\pi \sum_{z_i \in P} \operatorname{Res}(q \cdot \xi, z_i)$ dépend continument de ξ pour la convergence uniforme. Le même argument de densité que celui de la preuve de la proposition 1.1.9 donne la continuité séquentielle du terme de gauche $\int_\Omega q \cdot \overline{\partial}\xi$ par rapport à ξ, ce qui achève la preuve. □

Remarquons que dans le cas particulier où $\Omega = \Delta$ et $q = \frac{dz^2}{z}$, on retrouve la formule de Cauchy-Pompéiu.

Il est souvent naturel de travailler modulo transformation de Möbius, c'est-à-dire modulo les biholomorphismes de la sphère de Riemann $\mathbb{P}^1$. Cependant, travailler directement dans des espaces quotients présente des désavantages : par exemple, l'espace rat_d obtenu en quotientant l'espace Rat_d des fractions rationnelles de degré $d \geq 2$ par $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ perd la structure de variété complexe : c'est un orbifold. On préfèrera donc travailler dans des espaces normalisés de manière à être transverses à l'action de $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$.

Dans tout le reste, Z désignera un triplet de points de $\mathbb{P}^1$.

Définition 1.1.12. Un champ de vecteur ξ sur $\mathbb{P}^1$ sera dit Z-normalisé s'il s'annule sur Z.

1.2 Généralités sur les différentielles quadratiques

Définition 1.2.1. Soit q une différentielle quadratique. On note $|q|$ la métrique hermitienne associée à la forme quadratique réelle définie par $|q|_s : T_s\mathcal{S} \ni v \mapsto |q(s; v)|$. On dit que q est intégrable si $\int_\mathcal{S} |q|$ est finie ; dans ce cas, on note

$$\|q\| = \int_\mathcal{S} |q|.$$

On notera $Q(\mathcal{S})$ l'espace des différentielles quadratiques holomorphes sur $\mathcal{S}$.

On vérifie facilement qu'une différentielle quadratique méromorphe est intégrable au voisinage d'un pôle si et seulement si ce pôle est simple.

Définition 1.2.2. Soit $K \subset \mathbb{P}^1$ un ensemble compact. On note $Q(K)$ l'espace des différentielles quadratiques intégrables, holomorphes en dehors de K.

Par exemple, lorsque $K \subset \mathbb{P}^1$ est un ensemble de mesure de Lebesgue nulle, alors $Q(\mathbb{P}^1 - K)$ et $Q(K)$ sont canoniquement isomorphes. Si l'on note $L^1(K)$ l'espace des différentielles quadratiques L^1 sur K pour la mesure de Lebesgue (sans demander plus de régularité que le fait d'être mesurable), on a alors :

$$Q(K) \simeq Q(\mathbb{P}^1 - K) \oplus L^1(K).$$

L'espace $Q(K)$ est non-trivial si K contient au moins 4 points. C'est un espace de Banach.

Définition 1.2.3. Soit $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ deux surfaces de Riemann, et $f : \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$ une application holomorphe non constante. Soit q une différentielle quadratique sur $\mathcal{S}_2$. Le tiré en arrière de q par f est :

$$f^*q(z; u) = q(f(z); Df(z) \cdot u).$$

Si q est holomorphe sur $\mathcal{S}_2$, alors f^*q est une différentielle quadratique holomorphe sur $\mathcal{S}_1 - V_f$, où V_f désigne l'ensemble des valeurs critiques de f.

En coordonnées,

$$f^*q(z) = q \circ f(z) f'(z)^2.$$

Définition 1.2.4. Soit $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ deux surfaces de Riemann, et $f : \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$ un revêtement ramifié holomorphe. Soit q une différentielle quadratique sur $\mathcal{S}_1$. Le poussé en avant de q par f est (lorsque la somme converge localement uniformément) :

$$f_*q = \sum_i g_i^* q$$

où les g_i sont les branches inverses de f.

Les deux propositions suivantes sont classiques, et peuvent être prouvées de façon élémentaire en travaillant en coordonnées.

Proposition 1.2.5. Soit q une différentielle quadratique rationnelle sur $\mathbb{P}^1$ dont les pôles sont inclus dans un ensemble P, et f une fraction rationnelle. Alors f_*q est encore une différentielle quadratique rationnelle, dont les pôles sont inclus dans $f(P) \cup V_f$.

Proposition 1.2.6. Soit q une différentielle quadratique intégrable sur $\mathbb{P}^1$, et $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ une fraction rationnelle non constante. Alors f_*q est une différentielle quadratique rationnelle intégrable.

Proposition 1.2.7. Toute différentielle quadratique méromorphe sur $\mathbb{P}^1$ a au moins 4 pôles comptés avec multiplicité.

Définition 1.2.8. Une différentielle quadratique sur $\mathbb{P}^1$ sera dite élémentaire si elle est méromorphe et si elle a exactement 4 pôles, tous simples.

D'après la proposition suivante, les différentielles quadratiques ayant exactement quatre pôles simples sont donc en quelque sorte les plus "simples" possibles parmi les différentielles quadratiques méromorphes sur $\mathbb{P}^1$. Nous allons voir qu'elles jouent un rôle particulier.

Proposition 1.2.9. Soit $A \subset \mathbb{P}^1$ un ensemble fini. L'espace $Q(A)$ des différentielles quadratiques intégrables, holomorphes sur $\mathbb{P}^1 - A$ est de dimension $\max(\mathrm{card}\, A - 3, 0)$.

En particuliers, les différentielles quadratiques élémentaires à pôles prescrits forment une droite vectorielle complexe. Nous allons voir que cette droite a des éléments privilégiés. Bien sûr, on peut toujours normaliser en prenant une différentielle quadratique de norme L^1 unitaire ; nous allons voir qu'il existe une autre façon naturelle de choisir une différentielle quadratique élémentaire à pôles (ordonnés) prescrits.

Définition 1.2.10. Soit $z_1 \neq z_2$ deux points de $\mathbb{P}^1$. On note ω_{z_1,z_2} l'unique 1-forme méromorphe ayant exactement deux pôles simples sur $\mathbb{P}^1$, avec un résidu 1 en z_1 et -1 en z_2. Si $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in (\mathbb{P}^1)^4$ sont distincts, on note

$$q_{z_1,z_2,z_3,z_4} = \omega_{z_1,z_2} \otimes \omega_{z_3,z_4}.$$

Notons qu'en coordonnées, $\omega_{z_1,z_2} = \dfrac{(z_1 - z_2)}{(z - z_1)(z - z_2)} dz$ et

$$q_{z_1,z_2,z_3,z_4} = \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)} dz^2.$$

Remarquons également que q_{z_1,z_2,z_3,z_4} dépend de l'ordre des z_i.

L'intérêt principal de ce type particuliers de différentielles quadratiques est donné par la proposition suivante :

Définition 1.2.11. Soit $z_i \in \mathbb{P}^1$, $1 \leq i \leq 4$ quatre points distincts. On note $\mathrm{BR}(z_i)$ leur birapport.

Proposition 1.2.12. Soit $v_i \in T_{z_i}\mathbb{P}^1$, $1 \leq i \leq 4$. Alors

$$\sum_{i=1}^{4} \operatorname{Res}(q \cdot v_i, z_i) = \frac{d}{dt} \log \operatorname{BR}(z_i + tv_i).$$

Autrement dit, la différentielle quadratique q_{z_1,z_2,z_3,z_4} encode la variation relative du birapport des points z_i, c'est-à-dire leur "position à biholomorphisme de $\mathbb{P}^1$ près". Nous renvoyons le lecteur à [Eps09] pour une preuve de cette proposition.

Définition 1.2.13. Si f est une fraction rationnelle, on notera $\Delta_f = \mathrm{Id} - f^*$ et $\nabla_f = \mathrm{Id} - f_*$, où f^* et f_* désignent respectivement le tiré en arrière des champs de vecteurs par f, et le poussé en avant des différentielles quadratiques par f, suivant les notations de [Eps09].

1.3 Scindement de champs de vecteurs quasiconformes

Définition 1.3.1. Soit $\mathcal{S}$ une surface de Riemann hyperbolique et ξ un champ de vecteurs sur $\mathcal{S}$. On dit que ξ est hyperboliquement borné sur $\mathcal{S}$ si et seulement si $\rho(\xi) \in L^\infty(\mathcal{S})$, où ρ désigne la métrique hyperbolique de $\mathcal{S}$.

Théorème 1.3.2. *Soit ξ un champ de vecteur continu sur $\mathbb{P}^1$, quasiconforme et hyperboliquement borné sur un ouvert hyperbolique Ω de $\mathbb{P}^1$, et nul en dehors de Ω. Alors ξ est globalement quasiconforme sur $\mathbb{P}^1$.*

De plus, on a $\|\rho(\xi)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 4\|\overline{\partial}\xi\|_{L^\infty(\Omega)}$.

Démonstration. Le point clé est le lemme suivant :

Lemme 1.3.3. *Soit q une différentielle quadratique intégrable de classe C^∞ sur Ω, et ξ un champ de vecteurs quasiconforme hyperboliquement borné sur Ω. Supposons que $\xi \cdot \overline{\partial} q$ soit intégrable sur Ω. Alors :*

$$\int_\Omega \overline{\partial}\xi \cdot q = -\int_\Omega \xi \cdot \overline{\partial} q$$

Démonstration. Soit Ω_i la famille (au plus dénombrable) des composantes connexes de Ω. Pour tout i, choisissons un point $z_i \in \Omega_i$ arbitraire. Soit $\delta(z) = d_{\Omega_i}(z, z_i)$ pour tout $z \in \Omega_i$, où d_{Ω_i} est la distance hyperbolique sur Ω_i. Soit $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction lisse telle que $\phi(x) = 1$ pour $x \in [0, 1]$ et $\phi(x) = 0$ pour $x \geq 2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, définissons $\phi_n : \Omega \to \mathbb{R}^+$ par

$$\phi_n(z) = \phi\left(\frac{\delta(z)}{n}\right).$$

Soit $\mu = \overline{\partial}\xi$.

Soit q une différentielle quadratique comme dans l'énoncé du lemme. Comme $\phi_n q$ est à support compact dans Ω, on a :

$$\int_\Omega \mu \cdot (\phi_n q) = -\int_\Omega \xi \cdot \overline{\partial}(\phi_n q) = \int_\Omega \xi \cdot (\phi_n \overline{\partial} q) + \xi \cdot (q \cdot \overline{\partial}\phi_n)$$

De plus, $\int_\Omega \xi \cdot (q \cdot \overline{\partial}\phi_n) = \int_\Omega q \cdot (\xi \cdot \overline{\partial}\phi_n)$. Calculons maintenant la norme L^∞ de la différentielle de Beltrami $\overline{\partial}\phi_n \cdot \xi$. Comme δ est une fonction localement lipschitz sur Ω, elle a des dérivées au sens des distributions localement bornées. On a :

$$\overline{\partial}\phi_n = \frac{1}{n}\phi'(\delta/n)\overline{\partial}\delta.$$

Soit $z \in \Omega$ et $u \in T_z\mathbb{P}^1$. On a $\overline{\partial}\phi_n \cdot \xi(z) : u \mapsto \overline{\partial}\phi_n(u)\xi(z)$, et la norme de cet endomorphisme pour n'importe quelle métrique hermitienne est $|\overline{\partial}\phi_n \cdot \xi|(z)$. On peut donc travailler avec la métrique hyperbolique ρ_Ω. Comme δ est 1-lipschitz pour la métrique hyperbolique sur Ω, la dérivée $\overline{\partial}\delta$ a presque partout une norme hyperbolique inférieure ou égale à 1. On a :

$$\begin{aligned}
\overline{\partial}\phi_n \cdot \xi(z;u) &= \frac{1}{n}\phi'\left(\frac{\delta(z)}{n}\right)\overline{\partial}\delta(z;u) \times \xi(z) \\
\rho_\Omega(\overline{\partial}\phi_n \cdot \xi(z;u)) &\leq \frac{\sup_{\mathbb{R}^+}|\phi'|}{n}\|\rho_\Omega(\xi)\|_{L^\infty(\Omega)}\rho_\Omega(u) \\
|\overline{\partial}\phi_n \cdot \xi(z)| &\leq \frac{\sup_{\mathbb{R}^+}|\phi'|}{n}\|\rho_\Omega(\xi)\|_{L^\infty(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Et donc : $\|\overline{\partial}\phi_n \cdot \xi\|_{L^\infty} = O(1/n)$ et $\left|\int_\Omega q \cdot (\xi \cdot \overline{\partial}\phi_n)\right| \leq \|q\|_{L^1}\|\overline{\partial}\phi_n \cdot \xi\|_{L^\infty} = O(1/n)$.

On en déduit :

$$\int_\Omega \overline{\partial}\xi \cdot (\phi_n q) = \int_{\mathbb{P}^1} (\overline{\partial}\xi \cdot q)\phi_n = -\int_\Omega \phi_n(\xi \cdot \overline{\partial}q) + O(1/n)$$

donc

$$\int_\Omega (\overline{\partial}\xi \cdot q)\phi_n = -\int_\Omega \phi_n(\xi \cdot \overline{\partial}q) + O(1/n)$$

Par hypothèse, $\xi \cdot \overline{\partial}q$ et $|q|$ sont integrables, donc on peut appliquer le théorème de convergence dominée :

$$\int_\Omega \overline{\partial}\xi \cdot q = -\int_\Omega \xi \cdot \overline{\partial}q.$$

□

Si l'on se donne maintenant une différentielle quadratique q de classe C^∞ sur $\mathbb{P}^1$, sa restriction à Ω vérifie les hypothèses du lemme précédent. On a donc :

$$\int_{\mathbb{P}^1} \mu \cdot q = -\int_{\mathbb{P}^1} \xi \cdot \overline{\partial}q,$$

où $\mu = \overline{\partial}\xi$ sur Ω et 0 ailleurs. Ceci signifie exactement que $\overline{\partial}\xi = \mu$ au sens des distributions, ce qui montre la première assertion.

Pour le second point : appelons $\tilde{\xi} = p^*\xi$ le champ de vecteur tiré en arrière par un revêtement universel $p : \Delta \to \Omega$ envoyant 0 sur un point $z_0 \in \Omega$ arbitraire. La proposition 1.1.11 appliquée à $\tilde{\xi}$ donne :

$$\operatorname{Res}\left(\frac{dz^2}{z} \cdot \tilde{\xi}, 0\right) = dz(\tilde{\xi}(0)) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\Delta_r} \overline{\partial}\tilde{\xi}(z) \cdot \frac{dz^2}{z} + \frac{1}{2i\pi}\int_{S_r} \tilde{\xi}(z) \cdot \frac{dz^2}{z}$$

où Δ_r et S_r désignent respectivement le disque de rayon r et le cercle de rayon r. Mais comme par hypothèse $\rho(\tilde{\xi}) \leq C$, le second terme converge vers 0 quand r tend vers 1. On en déduit :

$$dz(\tilde{\xi})(0) = \frac{1}{2i\pi}\int_\Delta \overline{\partial}\tilde{\xi}(z) \cdot \frac{dz^2}{z}$$

et donc

$$\rho_\Delta(\tilde{\xi})(0) = 2|\tilde{\xi}(0)| \leq 2\frac{1}{2\pi}\|\frac{dz^2}{z}\|_{L^1(\Delta)}\|\overline{\partial}p^*\xi\|_{L^\infty}.$$

Comme $\|\frac{dz^2}{z}\|_{L^1(\Delta)} = 4\pi$ et $\overline{\partial}p^*\xi = p^*\overline{\partial}\xi$, on en déduit

$$\rho_\Delta(\tilde{\xi})(0) = \rho_\Omega(\xi)(z_0) \leq 4\|\overline{\partial}\xi\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Comme z_0 est arbitraire, ceci conclue la preuve de la seconde assertion. □

Ce résultat dit que si un champ de vecteur quasiconforme sur Ω est hyperboliquement borné, alors on peut le recoller en dehors de Ω avec le champ de vecteur nul, et ce recollement est encore quasiconforme. Le résultat suivant fournit un peu plus que la réciproque. Nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 1.3.4. *Soit Ω un ouvert hyperbolique de $\mathbb{P}^1$, et X un ensemble dénombrable dense dans $\partial\Omega$. Soit (X_n) une suite croissante de parties finies de X avec $\cup_n X_n = X$ et* card$X_n \geq 3$ *pour tout $n \in \mathbb{N}$, et notons $\Omega_n = \mathbb{P}^1 - X_n$. Alors la métrique hyperbolique ρ_n de Ω_n converge simplement sur Ω vers la métrique hyperbolique ρ de Ω.*

Démonstration. Soit $z \in \Omega$ et notons $\pi : \Delta \to \Omega$ un revêtement universel de Ω envoyant 0 sur z. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\pi_n : \Delta \to \Omega_n$ un revêtement universel envoyant encore 0 sur z. L'inclusion $i : \Omega \subset \Omega_n$ se relève en une application $\psi_n : \Delta \to \Delta$ fixant 0 et telle que $\pi_n \circ \psi_n = i \circ \pi = \pi$. D'après le lemme de Schwarz, $|\psi_n'(0)| \leq 1$ et donc $|\pi'(0)| \leq |\pi_n'(0)|$.

De plus, la famille (π_n) évite l'ensemble X_1 de cardinal 3, et donc forme une famille normale d'après le théorème de Montel. Soit ϕ une limite d'une suite extraite convergente de (π_n). Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\pi_n'(0)| \geq |\pi'(0)| > 0$, ϕ n'est pas constante, donc est ouverte. Donc $\phi(\Delta)$ est un ouvert de $\mathbb{P}^1$, connexe, contenant z mais disjoint de X. Donc $\phi(\Delta)$ est inclus dans la composante connexe de $\mathbb{P}^1 - \overline{X} = \mathbb{P}^1 - \partial\Omega$ contenant z, c'est-à-dire Ω. De même, le lemme de Schwarz appliqué à $\phi : \Delta \to \Omega$ montre que $|\phi'(0)| \leq |\pi'(0)|$. Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\limsup_{m\to\infty} |\pi_m'(0)| \leq |\pi'(0)| \leq |\pi_n'(0)|$$

et donc $\lim_{n\to\infty} |\pi_n'(0)| = |\pi'(0)|$. On a donc montré que $\lim_{n\to\infty} \rho_n(z) = \rho(z)$, et $z \in \Omega$ est arbitraire, ce qui achève la preuve. $\square$

Proposition 1.3.5. Soit ξ un champ de vecteur quasiconforme sur $\mathbb{P}^1$, et qui s'annule sur un compact K. Soit Ω une composante connexe hyperbolique de $\mathbb{P}^1 - K$. Alors :

$$\|\rho_\Omega(\xi)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 4\|\overline{\partial}\xi\|_{L^\infty(\Omega)}$$

où ρ_Ω est la métrique hyperbolique sur Ω.

Démonstration. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de parties finies de $\partial\Omega$ dont l'union est dense dans $\partial\Omega$, avec card$X_n \geq 3$. Alors d'après le lemme 1.3.4, la métrique hyperbolique ρ_n associée à $\Omega_n = \mathbb{P}^1 - X_n$ converge simplement vers la métrique hyperbolique ρ associée à Ω sur Ω. Il suffit alors de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sup_\Omega \rho_n(\xi) \leq 4\|\overline{\partial}\xi\|_{L^\infty(\Omega)}$. Ceci découlera du lemme suivant :

Lemme 1.3.6. *Soit ξ un champ de vecteurs quasiconforme sur une surface de Riemann compacte $\mathcal{S}$, s'annulant sur un ensemble fini P (de cardinal au moins 3). Alors la restriction $\xi_{|\mathcal{S}-P}$ est hyperboliquement bornée sur $\Omega = \mathcal{S} - P$.*

Démonstration du lemme 1.3.6. Comme $\rho_\Omega(\xi)$ est une fonction continue sur $\Omega = \mathcal{S} - P$, il suffit de montrer que $\rho_\Omega(\xi)$ est bornée au voisinage de chaque point $z \in P$. Soit donc $z_0 \in P$, et $r > 0$ tel que le disque épointé $D_r(z_0)$ de centre z_0 et de rayon r soit inclus dans Ω (c'est-à-dire ne rencontre pas d'autres points de P). Alors par le lemme de Schwarz, la métrique hyperbolique associée à Ω est plus petite que celle associée à $D_r(z_0)$, donc on a, pour tout $z \in U = D_r(z_0)$:

$$\rho_\Omega(\xi)(z) \leq \rho_U(\xi)(z) \leq C'|z - z_0| \log|z - z_0|^{-1}.$$

La deuxième inégalité est une estimation de la métrique hyperbolique du disque épointé au voisinage de z_0 (voir par exemple [GL00] ou [Hub06]), la constante dépendant de r. Par ailleurs, ξ a un module de continuité en $-\epsilon \log \epsilon$ par quasiconformalité (cf [GL00], théorème 7 p. 56), donc il existe une constante C (ne dépendant que de ξ et du choix de coordonnée) telle que dans la coordonnée z :

$$|\xi(z)| = |\xi(z) - \xi(z_0)| \leq C|z - z_0| \log |z - z_0|^{-1}.$$

On obtient donc, pour tout $z \in D_r(z_0)$

$$\rho_\Omega(\xi)(z) \leq C,$$

ce qui achève la preuve du lemme. □

En appliquant le lemme 1.3.6 à ξ sur Ω_n, on en déduit qu'il existe une constante $C_n > 0$ telle que $\rho_{\Omega_n}(\xi) \leq C_n$ sur Ω_n. Le théorème 1.3.2 appliqué à ξ sur Ω_n permet d'obtenir une borne indépendante de n :

$$\|\rho_{\Omega_n}(\xi)\|_{L^\infty(\Omega_n)} \leq 4\|\overline{\partial}\xi\|_{L^\infty(\Omega_n)} \leq 4\|\overline{\partial}\xi\|_{L^\infty(\mathbb{P}^1)}.$$

Donc par passage à la limite, on en déduit que :

$$\|\rho_\Omega(\xi)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 4\|\overline{\partial}\xi\|_{L^\infty(\mathbb{P}^1)},$$

et une deuxième application du même théorème permet d'en déduire finalement

$$\|\rho_\Omega(\xi)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 4\|\overline{\partial}\xi\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

□

En combinant les résultats du théorème 1.3.2 et de la proposition 1.3.5, on obtient :

Théorème A. Soit Ω un ouvert hyperbolique de $\mathbb{P}^1$ et ξ un champ de vecteur quasiconforme sur Ω. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) On a $\|\rho_\Omega(\xi)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 4\|\overline{\partial}\xi\|_{L^\infty(\Omega)}$, où ρ_Ω est la métrique hyperbolique sur Ω

ii) Le champ de vecteur ξ est hyperboliquement borné

iii) Il existe une extension quasiconforme $\hat{\xi}$ de ξ sur tout $\mathbb{P}^1$ avec $\hat{\xi} = 0$ sur $\partial\Omega$

iv) L'extension $\hat{\xi}(z) = \xi(z)$ si $z \in \Omega$ et 0 sinon est quasiconforme sur $\mathbb{P}^1$, et $\overline{\partial}\hat{\xi}(z) = 0$ pour presque tout $z \notin \Omega$

Corollaire 1.3.1. Soit Ω un ouvert hyperbolique de $\mathbb{P}^1$ et ξ un champ de vecteur quasiconforme qui s'annule sur $\mathbb{P}^1 - \Omega$. Soit $\Omega = \bigsqcup_i \Omega_i$ une partition dénombrable de Ω en ouverts Ω_i. Alors

$$\xi = \sum_i \xi_i$$

où ξ_i est un champ de vecteur quasiconforme qui coïncide avec ξ sur Ω_i et s'annule en dehors de Ω_i.

Démonstration. D'après le point *iv)* du théorème A, les champs de vecteurs ξ_i sont quasiconformes. □

Le résultat suivant est un théorème dû à Bers et Lakic. Sa démonstration utilise classiquement une certaine suite régularisante introduite par Ahlfors (le "mollifier d'Ahlfors"), voir [GL00], théorème 9 p. 63. La suite régularisante ϕ_n de la preuve du théorème 1.3.2 remplace cette suite régularisante.

Corollaire 1.3.2 (Théorème de densité de Bers-Lakic)**.** Soit K un compact de $\mathbb{P}^1$ contenant au moins 3 points, et Z un ensemble dense dans K. L'espace des différentielles quadratiques à pôles simples dans Z est dense (pour la norme L^1) dans l'espace des différentielles quadratiques intégrables holomorphes en dehors de K.

Démonstration. Il suffit de montrer que toute forme linéaire continue sur l'espace des différentielles quadratiques intégrables sur $\mathbb{P}^1$ et holomorphes sur Ω annulant toutes les différentielles quadratiques méromorphes à pôles simples dans K est nulle. Une telle forme linéaire peut être représentée par une différentielle de Beltrami sur $\mathbb{P}^1$, d'après le théorème de Hahn-Banach. Soit donc μ une différentielle de Beltrami et ξ un champ de vecteurs quasiconforme tel que $\mu = \overline{\partial}\xi$, et supposons que

$$\int_{\mathbb{P}^1} q \cdot \overline{\partial}\xi = 0$$

pour toute différentielle quadratique à pôles simples dans K. Soit $A \subset Z$ un ensemble de cardinal 3 : quitte à ajouter à ξ un champ de vecteur holomorphe, on peut supposer que ξ s'annule sur A. Alors d'après la proposition 1.1.11 appliquée avec $\Omega = \mathbb{P}^1$, q une différentielle quadratique ayant des pôles simples exactement en A et en $z \in Z \backslash A$, on voit que ξ doit s'annuler en z. Par continuité, ξ s'annule donc sur K. Donc d'après le théorème A, ξ est hyperboliquement borné sur Ω. Soit q une différentielle quadratique intégrable et holomorphe sur Ω. En particuliers, q est C^∞ et intégrable sur Ω, et le lemme 1.3.3 donne :

$$\int_\Omega q \cdot \overline{\partial}\xi = -\int_\Omega \overline{\partial} q \cdot \xi = 0.$$

De plus, d'après le théorème A, on a $\overline{\partial}\xi = 0$ presque partout sur K, donc :

$$\int_K q \cdot \overline{\partial}\xi = 0,$$

ce qui achève la preuve. □

Définition 1.3.7. Une différentielle de Beltrami μ sur une surface de Riemann $\mathcal{S}$ est infinitésimalement triviale si $\int_{\mathcal{S}} q \cdot \mu = 0$ pour toute différentielle quadratique q holomorphe sur $\mathcal{S}$.

Cette terminologie vient du fait que l'espace tangent au point base de l'espace de Teichmüller de $\mathcal{S}$, $T_0\mathrm{Teich}(\mathcal{S})$, s'identifie canoniquement au quotient de l'espace des différentielles de Beltrami sur $\mathcal{S}$ par le sous-espace des différentielles de Beltrami infinitésimalement triviales (voir [GL00] ou [Hub06]). Nous reviendrons sur ce point dans le chapitre suivant.

Corollaire 1.3.3. Soit $\mathcal{S}$ une surface de Riemann hyperbolique et $\mu \in \mathrm{bel}(\mathcal{S})$. Alors μ est infinitésimalement triviale si et seulement si il existe un champ de vecteur quasiconforme ξ sur $\mathcal{S}$ tel que $\mu = \overline{\partial}\xi$ et

$$\rho(\xi)\|_{L^\infty(\mathcal{S})} \leq 4\|\overline{\partial}\xi\|_{L^\infty(\mathcal{S})}$$

Démonstration du corollaire 1.3.3. Soit μ une différentielle de Beltrami sur $\mathcal{S}$ qui est infinitésimalement triviale. Soit $\pi : \Delta \to \mathcal{S}$ un revêtement universel. Soit $q \in Q(\Delta)$. On a :

$$\int_\Delta q \cdot \pi^*\mu = \int_{\mathcal{S}} \pi_* q \cdot \mu = 0.$$

Donc $\pi^*\mu \in \mathrm{Bel}(\Delta)$ est infinitésimalement triviale. On a montré dans la preuve du corollaire 1.3.2 que ceci implique que $\pi^*\mu$ est de la forme $\overline{\partial}\xi$, où ξ est un champ de vecteurs quasiconforme sur $\mathbb{P}^1$ s'annulant en dehors de Δ. Donc d'après le théorème A, ξ est hyperboliquement borné sur Δ, et $\|\rho_\Delta(\xi)\|_{L^\infty(\Delta)} \leq 4\|\overline{\partial}\xi\|_{L^\infty(\Delta)}$.

Il suffit maintenant de prouver que ξ passe au quotient en un champ de vecteurs sur $\mathcal{S}$. Soit γ un élément du groupe de Galois de π. Il suffit de prouver que ξ est γ-invariant. Comme γ est une isométrie pour la métrique hyperbolique, $\xi - \gamma^*\xi$ est hyperboliquement borné. De plus, $\xi - \gamma^*\xi$ est holomorphe puisque $\overline{\partial}\xi - \gamma^*\overline{\partial}\xi = 0$ sur Δ. Mais le seul champ de vecteur holomorphe et hyperboliquement borné sur Δ est le champ de vecteurs identiquement nul : ξ est donc invariant par γ. Donc, ξ passe au quotient en un champ de vecteur $\hat{\xi}$ sur $\mathcal{S}$, tel que $\overline{\partial}\hat{\xi} = \mu$ et $\|\rho_{\mathcal{S}}(\hat{\xi})\|_{L^\infty(\mathcal{S})} \leq 4\|\overline{\partial}\hat{\xi}\|_{L^\infty(\mathcal{S})}$.

Réciproquement, supposons que $\mu = \overline{\partial}\hat{\xi}$ où $\hat{\xi}$ est un champ de vecteurs quasiconforme sur $\mathcal{S}$ tel que $\|\rho_{\mathcal{S}}(\hat{\xi})\|_{L^\infty(\mathcal{S})} \leq 4\|\overline{\partial}\hat{\xi}\|_{L^\infty(\mathcal{S})}$. Soit $q \in Q(\mathcal{S})$. D'après le théorème 4 p. 50 de [GL00], l'opérateur de poussé en avant $\pi_* : Q(\Delta) \to Q(\mathcal{S})$ est surjectif, donc on peut supposer que $q = \pi_*\phi$, où $\phi \in Q(\Delta)$. Comme $\pi^*\mu$ est de la forme $\pi^*\mu = \overline{\partial}\pi^*\hat{\xi}$, où $\pi^*\hat{\xi}$ est un champ de vecteur quasiconforme hyperboliquement borné sur Δ, on a $\int_\Delta \phi \cdot \pi^*\mu = 0$. Donc :

$$\int_{\mathcal{S}} q \cdot \mu = \int_\Delta \phi \cdot \pi^*\mu = 0$$

ce qui prouve que μ est infinitésimalement triviale sur $\mathcal{S}$. □

1.4 Différentielles quadratiques et dual des champs de vecteurs

Nous introduisons ici l'espace dual des champs de vecteurs continus, que l'on va relier à un certain espace de différentielles quadratiques intégrables. Plus précisément, l'espace de champs de vecteurs tests considéré sera celui des champs de vecteurs continus sur la sphère de Riemann. Nous allons voir que pour certaines différentielles quadratiques q, $\overline{\partial}q$ définit de manière naturelle une forme linéaire sur cet espace de champs de vecteurs tests. Il sera parfois utile de manipuler ces formes linéaires plutôt que des différentielles quadratiques.

Les deux résultats importants de cette section sont le théorème 1.4.8, qui servira à inverser l'opérateur $\overline{\partial}$ pour associer une différentielle quadratique à une forme linéaire, et la proposition 1.4.11, qui permet de voir comment se poussent en avant ces formes linéaires.

Commençons par développer un peu de formalisme. Rappelons qu'une forme linéaire sur l'espace des fonctions continues sur un compact s'identifie naturellement aux mesures de Radon. Ici, on s'intéresse aux formes linéaires sur l'espace des champs de vecteurs continus. La description intrinsèque de ces objets fait donc intervenir à la fois des mesures de Radon mais aussi des formes différentielles.

Définition 1.4.1. On note $\Gamma(T\mathbb{P}^1)^*$ l'espace des formes linéaires continues sur l'espace des champs de vecteurs continus sur $\mathbb{P}^1$, muni de la topologie de la norme uniforme. Le support de $u \in \Gamma(T\mathbb{P}^1)^*$ est le complémentaire de l'union des ouverts $\omega \subset \mathbb{P}^1$ tels que $\langle u, \xi\rangle = 0$ pour tout champ de vecteurs ξ à support dans ω. Si $h \in C^0(\mathbb{P}^1, \mathbb{C})$ et $u \in \Gamma(T\mathbb{P}^1)^*$, alors $hu \in \Gamma(T\mathbb{P}^1)^*$ est définie par

$$\langle hu, \xi\rangle = \langle u, h\xi\rangle.$$

Proposition 1.4.2. Soit $\mathcal{M}$ l'espace des mesures de Radon complexes sur $\mathbb{P}^1$, et $A = C^0(\mathbb{P}^1, \mathbb{C})$. L'application

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \otimes_A \Omega^{1,0}(\mathbb{P}^1) &\to \Gamma(T\mathbb{P}^1)^* \\ \mu \otimes \alpha &\mapsto \left(\xi \mapsto \int_{\mathbb{P}^1} \alpha(\xi) d\mu\right) \end{aligned}$$

est un isomorphisme de A-module, et donc aussi de $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Remarque 1.4.3. Comme $\Omega^{1,0}(\mathbb{P}^1)$ est un A-module de rang 1 (on peut en effet construire une $(1,0)$-forme continue ne s'annulant pas sur $\mathbb{P}^1$), tout élément de $\Omega^{1,0}(\mathbb{P}^1) \otimes_A \mathcal{M}$ peut s'écrire sous la forme $\alpha \otimes_A \mu$, où $\alpha \in \Omega^{1,0}(\mathbb{P}^1)$ et $\mu \in \mathcal{M}$.

Démonstration. L'application considérée est clairement un morphisme injectif de A-module. Il suffit donc de justifier qu'il est surjectif. Soit $u \in \Gamma(T\mathbb{P}^1)^*$.

Si le support de u est inclus dans un domaine de carte (U, z), il est facile de vérifier à l'aide du théorème de Riesz que u peut s'écrire sous la forme $u = dz \otimes_A \mu$, où μ est une mesure de Radon de support inclus dans U. A l'aide d'une partition de l'unité, on ne perd pas de généralité à supposer que ce soit le cas. □

On identifiera donc dans la suite $\Gamma(T\mathbb{P}^1)^*$ à $\Omega^{1,0}(\mathbb{P}^1) \otimes_A \mathcal{M}$.

Définition 1.4.4. Soit f une fraction rationnelle et soit $u = \alpha \otimes \mu \in \Gamma(T\mathbb{P}^1)^*$ telle que $\frac{\|\alpha\|}{\|Df\|} \in L^1(|\mu|)$ (dans la métrique sphérique). Alors on définit le poussé en avant de u, noté $f_* u$, par :

$$\langle f_* u, \xi \rangle = \langle u, f^* \xi \rangle = \int_{\mathbb{P}^1} \alpha(f^* \xi) d\mu.$$

On voit alors que $f_* u \in \Gamma(T\mathbb{P}^1)^*$.

En particuliers, si $u \in \Gamma(T\mathbb{P}^1)^*$ a un support K qui ne rencontre pas $\mathrm{Crit}(f)$, alors $f_* u$ est bien défini et a comme support $f(K)$. Notons que l'opérateur linéaire f_* n'est pas continu, et n'est défini que sur un sous-espace dense de $\Gamma(T\mathbb{P}^1)^*$.

Définition 1.4.5. Soit q une différentielle quadratique intégrable. On dit que q est régulière si l'application

$$\overline{\partial} q : \xi \mapsto - \int_{\mathbb{P}^1} q \cdot \overline{\partial} \xi$$

est continue sur l'espace des champs de vecteurs quasiconformes (muni de la topologie de la norme du supremum associée à la métrique sphérique). Si c'est le cas, $\overline{\partial} q$ se prolonge par densité de façon unique en une forme linéaire continue sur l'espace des champs de vecteurs continus et définit un élément de $\Gamma(T\mathbb{P}^1)^*$, que l'on note encore $\overline{\partial} q$.

Notons que si q s'écrit en coordonnées $q = h(z) dz^2$, alors q est régulière si et seulement si $\frac{\partial h}{\partial \bar{z}}$ (au sens des distributions) est une mesure complexe de Radon. C'est le cas en particulier pour toutes les différentielles quadratiques méromorphes à pôles simples, dont le $\overline{\partial}$ est une somme de diracs.

Une conséquence immédiate du lemme de Weyl est que si q est une différentielle quadratique régulière telle que $\overline{\partial} q$ a un support inclus dans un compact K, alors q est holomorphe en dehors de K.

Définition 1.4.6. Introduisons les notations suivantes :
— Notons $\mathcal{R}(\mathbb{P}^1)$ l'espace des différentielles quadratiques intégrables sur $\mathbb{P}^1$ et régulières.
— Notons $\mathcal{H}(\mathbb{P}^1)$ l'espace des champs de vecteurs holomorphes sur $\mathbb{P}^1$.

Remarque 1.4.7. L'espace $\mathcal{H}(\mathbb{P}^1)$ est de dimension complexe 3. On peut vérifier facilement que ce sont exactement les champs de vecteurs s'écrivant en coordonnées affines sous la forme $\xi = P(z) \frac{d}{dz}$, où P est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2.

Le théorème suivant permet de déterminer quand il est possible de résoudre l'équation $\overline{\partial} q = u$, avec $u \in \Gamma(T\mathbb{P}^1)^*$. D'après la définition de $\overline{\partial} q$, il est évident que $\overline{\partial} q \in \mathcal{H}(\mathbb{P}^1)^\perp$. Le résultat important est l'autre inclusion.

Ce résultat de surjectivité du $\overline{\partial}$ est lié à la simple connexité de $\mathbb{P}^1$. On pourrait probablement énoncer un résultat plus général faisant intervenir la cohomologie de Dolbeault, mais nous n'en aurons pas besoin.

Théorème 1.4.8 (Résolution du $\overline{\partial}$). *Soit Z un triplet de points de $\mathbb{P}^1$, et $\Gamma(T\mathbb{P}^1)^*_Z$ l'ensemble des éléments de $\Gamma(T\mathbb{P}^1)^*$ de support inclus dans Z. Alors*

$$\Gamma(T\mathbb{P}^1)^* = \overline{\partial} \mathcal{R}(\mathbb{P}^1) \oplus \Gamma(T\mathbb{P}^1)^*_Z.$$

Corollaire 1.4.1. On a :

$$\overline{\partial} \mathcal{R}(\mathbb{P}^1) = \mathcal{H}(\mathbb{P}^1)^\perp$$

Démonstration du corollaire 1.4.1. Soit Z un triplet de points de $\mathbb{P}^1$. Soit $u \in \mathcal{H}(\mathbb{P}^1)^\perp$. D'après le théorème 1.4.8, on peut écrire

$$u = \overline{\partial} q + u'$$

où $q \in \mathcal{R}(\mathbb{P}^1)$ et $u' \in \Gamma(T\mathbb{P}^1)^*$ a un support inclus dans Z. Comme u et $\overline{\partial} q$ appartiennent à $\mathcal{H}(\mathbb{P}^1)^\perp$, on a aussi $u' \in \mathcal{H}(\mathbb{P}^1)^\perp$. En considérant les champs de vecteurs de la forme $\xi = P(z)\frac{d}{dz}$, où P décrit les polynômes de degré 2 s'annulant en exactement deux points de Z, on vérifie alors que $u' = 0$, ce qui montre que $\mathcal{H}(\mathbb{P}^1)^\perp \subset \overline{\partial}\mathcal{R}(\mathbb{P}^1)$. □

Démonstration du théorème 1.4.8. Soit $u \in \Gamma(T\mathbb{P}^1)^*$. On a vu que l'on ne perd pas de généralité à écrire u sous la forme $u = \alpha \otimes \mu$, où μ est une mesure de Radon complexe et α une $(1,0)$-forme différentielle continue. De plus, quitte à écrire μ comme une somme de deux mesures de Radon μ_1 et μ_2 et à traiter séparément $\alpha \otimes \mu_1$ et $\alpha \otimes \mu_2$, on ne perd pas non plus de généralité à supposer que le support de μ est disjoint d'au moins un point de Z.

Pour $y \in \mathbb{P}^1$, notons ϕ_y l'unique différentielle quadratique à pôles simples et inclus dans $Z \cup \{y\}$, telle que l'application

$$\begin{aligned} T_y\mathbb{P}^1 &\to \mathbb{C} \\ \mathbf{v} &\mapsto \mathrm{Res}(\phi_y \cdot \mathbf{v}, y) \end{aligned}$$

coïncide avec α_y en tant qu'élément de $T_y^*\mathbb{P}^1$. L'existence et l'unicité d'une telle différentielle quadratique est une conséquence du fait que l'espace des différentielles quadratiques élémentaires à pôles dans $Z \cup \{y\}$ est une droite vectorielle de dimension complexe un, et qu'une différentielle quadratique méromorphe sur $\mathbb{P}^1$ avec exactement trois pôles tous simples est nulle. Soit q la différentielle quadratique définie par :

$$q = \int_{\mathbb{P}^1} \phi_y d\nu(y).$$

Nous allons maintenant travailler dans une coordonnées affine z dans laquelle $Z = \{0, 1, \infty\}$, où ∞ n'est pas dans le support de ν. Soit $\alpha = a(z)dz$ l'expression de la forme différentielle α dans la coordonnée z : a est une fonction continue sur $\mathbb{C}$. Dans ces coordonnées, l'expression de q est :

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{P}^1} a(y) \left(\frac{1}{z-y} + \frac{y-1}{z} - \frac{y}{z-1} \right) d\nu(y) \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{P}^1} a(y) \frac{y(y-1)}{z(z-1)(z-y)} d\nu(y). \end{aligned}$$

L'expression de la première ligne montre que q est intégrable sur tout compact de $\mathbb{C}$, et la seconde que q est intégrable au voisinage de l'infini (puisque q est méromorphe au voisinage de l'infini, et que $q(z) = O(\frac{1}{z^3})$, ce qui implique que q n'a au pire qu'un pôle simple à l'infini). Donc q est intégrable sur $\mathbb{P}^1$.

La fin de la preuve du théorème repose sur le lemme :

Lemme 1.4.9. *La différentielle quadratique q est régulière et $\overline{\partial} q - u$ a un support inclus dans Z.*

Démonstration du lemme. Soit ξ un champ de vecteur quasiconforme, et notons K le support de la mesure ν.

On a :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{P}^1} q \cdot \overline{\partial}\xi &= \int_{\mathbb{P}^1} \left(\int_K \phi_y d\nu(y) \right) \cdot \overline{\partial}\xi \\
&= \int_K \left(\int_{\mathbb{P}^1} \phi_y \cdot \overline{\partial}\xi \right) d\nu(y) \\
&= \int_K \left(2i\pi \sum_{Z\cup\{y\}} \mathrm{Res}(\phi_y \cdot \xi) \right) d\nu(y) \\
&= \int_K \alpha(y)\xi(y) d\nu(y) + \int_K \left(2i\pi \sum_Z \mathrm{Res}(\phi_y \cdot \xi) \right) d\nu(y).
\end{aligned}$$

Soit $u' \in \Gamma(T\mathbb{P}^1)^*$ définie par :

$$\langle u', \xi \rangle = 2i\pi \sum_{z\in Z} \int_K \mathrm{Res}(\phi_y \cdot \xi, z) d\nu(y)$$

Clairement u' a un support inclus dans Z. On a donc :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{P}^1} q \cdot \overline{\partial}\xi &= \int_K \alpha(\xi)(y) d\nu(y) + \langle u', \xi \rangle \\
&= \langle \alpha \otimes \nu, \xi \rangle + \langle u', \xi \rangle.
\end{aligned}$$

Donc q est régulière, et $\overline{\partial}q = u + u'$ où u' a un support inclus dans Z, ce qui achève la preuve du lemme. □

Le lemme ci-dessus montre que $\Gamma(T\mathbb{P}^1)^* = \overline{\partial}\mathcal{R}(\mathbb{P}^1) + \Gamma(T\mathbb{P}^1)^*_Z$. Il ne reste donc qu'à montrer que la somme est directe. Mais si q est une différentielle quadratique régulière telle que $\overline{\partial}q$ ait un support inclus dans le triplet Z, ceci impliquerait que q est holomorphe en dehors de Z et intégrable, et donc que q ait au plus trois pôles tous simples. Donc $q = 0$, et on a bien $\overline{\partial}\mathcal{R}(\mathbb{P}^1) \oplus \Gamma(T\mathbb{P}^1)^*_Z$. □

Proposition 1.4.10. Soit q une différentielle quadratique régulière et f une fraction rationnelle. Alors f_*q est régulière.

Démonstration. Soit q une différentielle quadratique régulière : on peut supposer que $\overline{\partial}q = \alpha \otimes \nu$. Soit Z un triplet de points quelconque de $\mathbb{P}^1$. Le lemme 1.4.9 donne :

$$q = \int_{\mathbb{P}^1} \phi_y d\nu(y)$$

où ϕ_y est une différentielle quadratique élémentaire à pôles dans $Z \cup \{y\}$. On en déduit :

$$f_*q = \int_{\mathbb{P}^1} f_*\phi_y d\nu(y)$$

Soit ξ un champ de vecteur quasiconforme. On a :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{P}^1} f_*q \cdot \overline{\partial}\xi &= \int_{\mathbb{P}^1} \left(\int_{\mathbb{P}^1} f_*\phi_y d\nu(y) \right) \cdot \overline{\partial}\xi \\
&= \int_{\mathbb{P}^1} \left(\int_{\mathbb{P}^1} f_*\phi_y \cdot \overline{\partial}\xi \right) d\nu(y) \\
&= \int_{\mathbb{P}^1} \left(2i\pi \sum_{z\in Z\cup\{y\}} \mathrm{Res}(f_*\phi_y \cdot \xi, z) \right) d\nu(y).
\end{aligned}$$

La dernière expression définit bien une forme linéaire continue. □

Proposition 1.4.11. Soit q une différentielle quadratique régulière, et f une fraction rationnelle. Supposons que $f_*\overline{\partial}q$ et $\overline{\partial}f_*q$ soient bien définies comme éléments de $\Gamma(T\mathbb{P}^1)^*$. Alors supp $(\overline{\partial}f_*q - f_*\overline{\partial}q) \subset V_f$.

Démonstration. Soit ξ un champ de vecteur quasiconforme qui s'annule sur un voisinage de V_f. Alors $f^*\xi$ est encore un champ de vecteur quasiconforme (nul au voisinage de $\mathrm{Crit}(f)$) et $\overline{\partial}f^*\xi = f^*\overline{\partial}\xi$. Donc :

$$\langle \overline{\partial}f_*q, \xi\rangle = \langle f_*\overline{\partial}q, \xi\rangle,$$

et donc $\langle f_*\overline{\partial}q - \overline{\partial}f_*q, \xi\rangle = 0$. D'où le résultat par définition du support d'un élément de $\Gamma(T\mathbb{P}^1)^*$. □

Nous allons maintenant énoncer et prouver un théorème dû à Makienko, qui servira à prouver l'absence de différentielles quadratiques régulières invariantes.

Définition 1.4.12. Un compact $K \subset \mathbb{P}^1$ est appelé un C-compact s'il vérifie la propriété suivante : toute fonction continue sur K peut être approchée uniformément par des restrictions à K de fonctions holomorphes sur un voisinage de K.

Notons qu'un C-compact doit nécessairement être d'intérieur vide. La proposition suivante (voir [Mak10]) donne plusieurs conditions suffisantes pour qu'un compact soit un C-compact. Sa preuve est basée sur le théorème de Vitushkin.

Proposition 1.4.13. Soit K un compact de $\mathbb{P}^1$. Chacune des propriétés suivantes implique que K est un C-compact :

i) K est de mesure de Lebesgue nulle.
ii) K est inclus dans une union finie de frontières de composantes de $\mathbb{P}^1 - K$.

Un C-compact doit nécessairement être d'intérieur vide, mais peut avoir une mesure de Lebesgue positive (le théorème suivant est d'ailleurs vide lorsque ce n'est pas le cas). Il s'appliquera donc typiquement dans le cas *ii*) de la proposition ci-dessus.

Théorème 1.4.14 (Makienko, [Mak10])**.** *Soit K un C-compact, et q une différentielle quadratique régulière à support dans K. Alors $q = 0$ (Lebesgue presque partout).*

Démonstration. Soit q une différentielle quadratique régulière à support dans un C-compact K. Nous allons prouver que $\overline{\partial}q = 0$ en tant qu'élément de $\Gamma(T\mathbb{P}^1)^*$. Par définition d'un C-compact, les champs de vecteurs continus sur K peuvent être approchés uniformément sur K par des champs de vecteurs holomorphes au voisinage de K. Comme le support de $\overline{\partial}q$ est inclus dans K, il suffit de prouver que $\overline{\partial}q$ annule tous les champs de vecteurs lisses et holomorphes au voisinage de K. Soit ξ un tel champ de vecteur, et soit U un voisinage de K sur lequel ξ est holomorphe. On a :

$$\langle \overline{\partial}q, \xi\rangle = \int_{\mathbb{P}^1} q \cdot \overline{\partial}\xi$$
$$\langle \overline{\partial}q, \xi\rangle = \int_U q \cdot \overline{\partial}\xi + \int_{\mathbb{P}^1 - U} q \cdot \overline{\partial}\xi$$

Comme le support de q est inclus dans K, on a $\int_{\mathbb{P}^1 - U} q \cdot \overline{\partial}\xi = 0$. Comme ξ est holomorphe sur U, on a $\int_U q \cdot \overline{\partial}\xi = 0$. Donc $\overline{\partial}q, \xi\rangle = 0$ et donc $\overline{\partial}q = 0$. Donc q est holomorphe sur $\mathbb{P}^1$ tout entière, et donc $q = 0$. □

1.4.1 Calculs de poussé en avant

Soit ν une mesure de Radon, et α une $(1,0)$-forme différentielle. Supposons que $f_*(\alpha \otimes \nu)$ existe : on sait alors que $f_*(\alpha \otimes \nu)$ peut s'écrire sous la forme $\beta \otimes \lambda$, avec $\beta \in \Omega^{1,0}(\mathbb{P}^1)$ et $\lambda \in \mathcal{M}$. Dans cette section, nous allons calculer β et λ en fonction de α, ν et f. Ce calcul est une adaptation du cadre classique du poussé en avant $f_*(h\nu)$ d'une mesure $h\nu$ à densité par rapport à ν (où h est alors une fonction et non pas une forme différentielle).

En particulier, nous verrons que sous une certaine condition sur la mesure ν, λ sera à densité par rapport à ν.

Commençons par rappeler la notion de jacobien d'une mesure. Cette notion peut se définir dans un cadre plus général, mais dans un souci de simplicité nous donnerons des définitions correspondant au cadre qui nous intéresse.

Définition 1.4.15. Soit ν une mesure de Radon sur un compact K, et $f : K \to K$ une application continue n'ayant jamais plus de d préimages. On définit la mesure tiré en arrière $f^*\nu$ par : pour tout $\phi \in C^0(K)$,

$$\int_K \phi d(f^*\nu) = \int_K (f_*\phi) d\nu = \int_K \sum_{y \in f^{-1}(z)} \phi(y) d\nu(z)$$

Lemme 1.4.16. *Si A est un borélien sur lequel $f_{|A}$ est injective, alors $f^*\nu(A) = \nu(f(A))$.*

Démonstration. Soit A un tel borélien. On a :

$$f^*\nu(A) = \int \sum_{y \in f^{-1}(x)} \mathbb{1}_A(y) d\nu(x) = \nu(f(A)).$$

La dernière égalité vient du fait que si $x \notin f(A)$, alors $\sum_{y \in f^{-1}(x)} \mathbb{1}_A(y) = 0$ et si $x \in A$, alors par injectivité de f sur A, il n'y a qu'une seule préimage $y \in A$ et donc $\sum_{y \in f^{-1}(x)} \mathbb{1}_A(y) = 1$. $\square$

Le cas qui nous intéresse est lorsque f est une fraction rationnelle de degré d et K est un compact invariant de $\mathbb{P}^1$.

Définition 1.4.17. Soit ν une mesure de Radon sur $\mathbb{P}^1$, de support K invariant par f. On dit que ν est régulière pour f si pour tout borélien $A \subset K$, $\nu(A) = 0$ implique que $\nu(f(A)) = 0$.

De manière équivalente, d'après le lemme 1.4.16, une mesure ν est régulière si et seulement si $f^*\nu$ est absolument continue par rapport à ν.

Définition 1.4.18. Soit ν une mesure régulière par rapport à f sur K. On définit son jacobien (noté J_ν) par rapport à f par :

$$J_\nu = \frac{d(f^*\nu)}{d\nu}$$

(au sens de Radon-Nykodim).

Exemple 1.4.19. Si $K = \{0\}$ est un point fixe de f, alors la mesure $\nu = \delta_0$ (dirac en 0) est régulière pour f sur K et son jacobien est la fonction $J_\nu : 0 \mapsto 1$.

Si $K = S^1$, que $f(z) = z^d$ et que ν est la mesure de Lebesgue, alors ν est régulière et $J_\nu = d$.

Dans toute la suite, ν désignera une mesure régulière pour f sur K.

Définition 1.4.20. On définit l'opérateur de Ruelle (ou opérateur de transfert) associé à ν par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\nu : L^1(\nu) &\to L^1(\nu) \\ g &\mapsto \left(x \mapsto \sum_{y \in f^{-1}(x)} \frac{g(y)}{J_\nu(y)} \right) \end{aligned}$$

Insistons sur le fait que l'opérateur $\mathcal{L}_\nu$ agit sur un espace de fonctions (qui sont en réalité des fonctions densités pour la mesure ν). Son intérêt est justifié par la propriété suivante :

Proposition 1.4.21. Soit $g \in L^1(\nu)$. Alors $f_*(g\nu) = \mathcal{L}_\nu(g)\nu$. En particuliers, si ν est invariante, alors $\mathcal{L}_\nu(1) = 1$.

Démonstration. Soit h une fonction continue sur K. Nous allons montrer que :

$$\int h\mathcal{L}_\nu(g)d\nu = \int hf_*(g\nu).$$

On a :

$$\begin{aligned}
\int h\mathcal{L}_\nu(g)d\nu &= \int h(x) \sum_{y \in f^{-1}(x)} \frac{g(y)}{J_\nu(y)} d\nu(x) \\
&= \int \sum_{y \in f^{-1}(x)} \frac{h(f(y))g(y)}{J_\nu(y)} d\nu(x) \\
&= \int \frac{h(f(x))g(x)}{J_\nu(x)} J_\nu(x) d\nu(x) \\
&= \int hf_*(g\nu).
\end{aligned}$$

Dans l'avant dernière égalité, on a utilisé la définition de J_ν, à savoir que

$$\int \sum_{y \in f^{-1}(x)} \phi(y) d\nu(x) = \int \phi(x) J_\nu(x) d\nu(x)$$

pour toute fonction $\phi \in L^1(\nu)$.

Pour le reste de la proposition : le fait que $\mathcal{L}_\nu(1) = 1$ quand $f_*\nu = \nu$ est un cas particuliers du résultat que l'on vient de démontrer. □

Définition 1.4.22. On définit l'opérateur de Ruelle modifié associé à ν par :

$$\tilde{\mathcal{L}}_\nu : \alpha \ \mapsto \sum_i \frac{g_i^*\alpha}{J_\nu \circ g_i} = \sum_i \frac{g_i^*\alpha}{g_i^* J_\nu}$$

pour tout $\alpha \in \Omega^{1,0}(\mathbb{P}^1)$, où les g_i sont les branches inverses de f.

En coordonnées,

$$\tilde{\mathcal{L}}_\nu : \alpha \mapsto \left(x \mapsto \sum_{y \in f^{-1}(x)} \frac{\alpha(y)}{J_\nu(y) f'(y)} \right).$$

Insistons sur la différence entre l'opérateur de Ruelle $\mathcal{L}_\nu$ et l'opérateur de Ruelle modifié $\tilde{\mathcal{L}}_\nu$: le premier est un opérateur sur un espace de fonctions, et l'autre sur un espace de $(1,0)$-formes différentielles.

Proposition 1.4.23. Soit $u = \alpha \otimes \nu \in \Gamma(T\mathbb{P}^1)^*$, et f une fraction rationnelle. Supposons que f_*u existe et que ν est régulière pour f. Alors

$$f_*u = \tilde{\mathcal{L}}_\nu(\alpha) \otimes \nu.$$

Démonstration. Soit X un champ de vecteur continu. On a :

$$\begin{aligned}
\langle f_* u, X\rangle &= \int_K \alpha(f^* X) d\nu \\
&= \int_K \alpha(y) \frac{X \circ f(y)}{f'(y)} d\nu(y) \\
&= \int_K \alpha(y) \frac{X \circ f(y)}{f'(y)} d\nu(y) \\
&= \int_K \mathcal{L}_\nu \left(\frac{\alpha}{f'}\right) X d\nu(y) \\
&= \int_K \tilde{\mathcal{L}}_\nu(\alpha) X d\nu(y) \\
&= \langle \tilde{\mathcal{L}}_\nu(\alpha) \otimes \nu, X\rangle.
\end{aligned}$$

□

Rappelons qu'un compact K invariant est dit hyperbolique de constante $A > 1$, s'il existe une métrique pour laquelle pour tout $z \in K$, $\|Df^n(z)\| \geq A^n$.

Proposition 1.4.24. Soit ν une mesure de Radon régulière pour f, de support K hyperbolique invariant, et $u \in \Gamma(T\mathbb{P}^1)^*$ de la forme $u = \alpha \otimes \nu$. Il existe une unique solution v à l'équation cohomologique

$$\nabla_f v = u$$

et elle est de la forme $v = \beta \otimes \lambda$ où $\lambda \in \mathcal{M}$ est absolument continue par rapport à ν.

Démonstration. Commençons par remarquer que comme K est hyperbolique, il ne contient pas de point critique et donc les poussés en avant $f_*^n u$ sont bien définis. Soit $A = \frac{1}{\lambda} > 1$ une constante d'hyperbolicité pour K, et $\|\cdot\|$ une métrique associée. On a donc :

$$\sup_K \|(f^n)^* X\| \leq \lambda^n \sup_K \|X\|$$

et donc par dualité, $\|f_*^n u\| \leq \lambda^n \|u\|$. Donc la série $v = \sum_{n\geq 0} f_*^n u$ converge normalement, et il est facile de vérifier que c'est l'unique solution de l'équation cohomologique.

Par ailleurs, la formule de la proposition 1.4.23 montre que v est de la forme $\beta \otimes \nu$, où β est une forme différentielle (pas nécessairement continue). □

1.5 Formes de Beltrami et théorème d'Ahlfors-Bers

Jusqu'à présent, les objets que l'on a étudiés (différentielles de Beltrami, différentielles quadratiques, champs de vecteurs quasiconformes) correspondent à la théorie infinitésimale des espaces de Teichmüller, comme on le verra dans le chapitre suivant. Leur étude relève de l'analyse fonctionnelle linéaire.

Par opposition, les objets au coeur de cette section, à savoir les formes de Beltrami, vont relever de l'analyse non-linéaire. Il convient de penser aux *différentielles* de Beltrami comme à des vecteurs tangents à l'ouvert des *formes* de Beltrami, même si ces deux types d'objets vivent dans le même espace. Nous allons maintenant mentionner sans preuve le théorème fondamental à la base de la théorie de Teichmüller, à savoir le théorème d'Ahlfors-Bers.

Définition 1.5.1. Un homéomorphisme quasiconforme $\phi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ est un homéomorphisme dont les dérivées $\partial\phi$ et $\overline{\partial}\phi$ (au sens des distributions) sont L^2_{loc}, tel que la forme de Beltrami associée $\mu = \partial\phi^{-1} \circ \overline{\partial}\phi$ soit dans la boule unité de L^∞. On notera $K(\phi)$ sa *dilatation maximale*, définie par :

$$K(\phi) = \frac{1 + \|\mu\|_{L^\infty}}{1 - \|\mu\|_{L^\infty}} \geq 1.$$

Remarque 1.5.2. En coordonnées, $\mu = \frac{\overline{\partial}\phi(z)}{\partial\phi(z)} \frac{d\overline{z}}{dz}$.

En particulier, si ϕ est un homéomorphisme quasiconforme, alors $K(\phi) = 1$ équivaut à $\mu = 0$ et donc au fait que ϕ soit une transformation de Möbius.

Il existe d'autres caractérisations équivalentes de la quasiconformité, que nous ne mentionnerons pas ici. Cette classe de fonctions possède des propriétés analytiques particulières, et a été beaucoup étudiée. Mentionnons par exemple le fait qu'un homéomorphisme quasiconforme est $\frac{1}{K}$-Hölder.

Définition 1.5.3. Soit μ une forme de Beltrami. L'équation de Laplace-Beltrami, d'inconnue un homéomorphisme quasiconforme $\phi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$, est :

$$\overline{\partial}\phi = \mu \circ \partial\phi.$$

Théorème 1.5.4 (Morrey-Ahlfors-Bers)**.** *Soit μ une forme de Beltrami. L'équation de Laplace-Beltrami admet une solution, qui est unique à post-composition par une transformation de Möbius près.*

De plus, si $\lambda \mapsto \mu_\lambda$ est une famille holomorphe (respectivement continue) de formes de Beltrami, et que ϕ_λ est l'unique solution de l'équation de Laplace-Beltrami de paramètre μ_λ normalisée pour fixer $0, 1, \infty$, alors pour tout $z \in \mathbb{P}^1$, l'application $\lambda \mapsto \phi_\lambda(z)$ est holomorphe (respectivement continue).

Définition 1.5.5. Soit $f : \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$ une fonction holomorphe entre surfaces de Riemann, et μ une forme de Beltrami sur $\mathcal{S}_2$. On définit le tiré en arrière de μ par f de la façon suivante :

$$f^*\mu(z) := \mu \circ f(z) \frac{\overline{f'(z)}}{f'(z)}.$$

On vérifie sans peine que cette définition est indépendante des coordonnées. En particulier, l'opérateur de tiré en arrière (par une application holomorphe) est une isométrie pour la norme L^∞.

La proposition suivante est une observation cruciale : elle permet de traduire la condition qu'un homéomorphisme quasiconforme ϕ conjugue une fraction rationnelle à une autre fraction rationnelle en une condition *linéaire* et fermée sur la forme de Beltrami correspondante.

Proposition 1.5.6. Soit $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ une fraction rationnelle, et μ une forme de Beltrami sur $\mathbb{P}^1$. Soit ϕ un homéomorphisme quasiconforme dont la forme de Beltrami est μ. Alors l'application $\phi \circ f \circ \phi^{-1}$ est une fraction rationnelle si et seulement si $\mu = f^*\mu$.

Pour éviter de travailler en quotientant par l'action du groupe $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ des transformations de Möbius (qui présente le désavantage de ne pas toujours donner des espaces réguliers), on préfèrera souvent normaliser les solutions de l'équation de Laplace-Beltrami, d'où la convention suivante :

Définition 1.5.7. Soit $Z \subset \mathbb{P}^1$ un triplet de points. Un homéomorphisme quasiconforme ϕ : $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ est dit Z-normalisé si ϕ fixe Z point par point.

En d'autres termes, le théorème d'Ahlfors-Bers établit une bijection canonique entre formes de Beltrami et homéomorphismes quasiconformes (à composition par une transformation de Möbius près). Cette correspondance est à la base de la théorie de Teichmüller, puisqu'elle permet d'obtenir une structure complexe héritée de la structure complexe de la boule unité de L^∞, dans laquelle vivent les formes de Beltrami. La dépendance holomorphe par rapport au paramètre est également un point crucial. De plus, les formes de Beltrami sont des objets extrêmement maniables qui présentent deux grands avantages :

— Ils n'ont quasiment aucune contrainte de régularité (seulement d'être L^∞ et de norme strictement inférieure à 1), ce qui permet de les recoller sans problème
— Ils se tirent en arrière de manière isométrique par une fonction holomorphe.

Concluons ce chapitre en remarquant que le théorème d'Ahlfors-Bers est un résultat profond d'analyse en une variable complexe, qui ne se généralise pas de manière satisfaisante en dimension supérieure. Cette absence de généralisation explique la spécificité de la théorie de Teichmüller à la dimension un, et également (a posteriori) le fait que le théoreme de non-errance de Sullivan (voir le théorème 2.4.28 et le chapitre 3) ne se généralise pas en dimension supérieure.