

Création des particules et l'équation de DKP dans un espace-temps courbe en présence d'un champ électrique

4.1 Introduction

Il existe deux cas différents de la production des particules par un champ extérieur classique qui sont d'intérêt cosmologique. Le premier est la production par le champ gravitationnel et le deuxième est la transformation de l'inflaton en particules élémentaires. Pour un champ électrique le phénomène de la création des particules ne peut être observé sauf si le champ extérieur est supérieur à sa valeur critique ($E_c = \frac{m^2 c^2}{|e|\hbar}$). Alors actuellement la possibilité de création des paires n'existe pas dans le laboratoire. Cependant, le champ gravitationnel près des trous noirs ainsi que le champ de coulomb des trous noirs chargés est suffisamment intense pour créer des particules. La production des particules par la gravité pourrait être essentielle dans l'univers très tôt près de la singularité cosmologique quand la force du champ gravitationnelle est proche de la valeur de Planck. Ce qui explique la nature non perturbative du problème de sorte qu'il soit nécessaire de produire une méthode d'analyse exacte.

Dans l'univers de Friedmann-Robertson-Walker l'étude de la création de particules a été lancée par Parker[5] et développée dans une série de papiers. Dans cette partie nous proposons d'étudier la création des paires dans un univers en expansion. Nous considérons des facteurs d'échelle qui mènent à des solutions analytiques et exactes pour l'équation de DKP pour les particules massives de spin-1.

4.2 La transformation canonique de Bogoliubov

Il existe différentes techniques pour calculer le nombre de création des particules telles que la méthode de diagonaliser le Hamiltonien, la méthode de Feynman des intégrales de chemins, l'approche de la fonction de Green, l'approximation semi classique WKB, la méthode adiabatique et la technique de transformation de Bogoliubov (BTT). En raison du comportement asymptotique des états in et out du vide, nous appliquons la technique (BTT) pour déterminer la densité de création des particules, ainsi la probabilité de crée des paires.

Dans la théorie quantique des champs, l'équation de champs admet deux ensembles des solutions orthogonales φ .

$$\varphi(t) = \sum_i a_i \varphi_i + a_i^+ \varphi_i^* = \sum_j b_j \varphi_j + b_j^+ \varphi_j^* \quad (4.1)$$

où (a_i^+, b_j^+) et (a_i, b_j) sont les opérateurs de création et d'annihilation respectivement qui vérifient les relations de commutations

$$[a_i, a_j] = [b_j, b_i] = 0, \quad (4.2)$$

$$[a_i^+, a_j^+] = [b_j^+, b_i^+] = 0, \quad (4.3)$$

$$[a_i, a_j^+] = [b_j, b_i^+] = \delta_{ij}. \quad (4.4)$$

Comme l'ensemble $\{\varphi_{out}, \varphi_{out}^*\}$ forme une base, nous pouvons écrire le deuxième ensemble $\{\varphi_{in}, \varphi_{in}^*\}$ comme des combinaisons linéaires des fonctions φ_{out} et φ_{out}^* .

$$\varphi_{in} = \alpha \varphi_{out} + \beta \varphi_{out}^*,$$

$$\varphi_{in}^* = \alpha^* \varphi_{out}^* + \beta^* \varphi_{out}.$$

Cette écriture est dite transformation de Bogoliubov où les coefficients de Bogoliubov α et β vérifient la condition de normalisation

$$|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1.$$

De plus, on en déduit

$$a_{out} = \alpha a_{in} + \beta b_{in}^+, \quad (4.5)$$

$$b_{out}^+ = \beta^* a_{in} + \alpha^* b_{in}^+. \quad (4.6)$$

Les opérateurs de création et d'annihilation engendrent deux bases dans l'espace de Fock. Ces deux bases sont définies à partir des états du vide

$$a_{in} |0_{in}\rangle = 0, \quad a_{out} |0_{out}\rangle = 0 \quad (4.7)$$

Ce qu'implique que l'opérateur de nombre des particules $\hat{N}_{out}$ sur un état de vide $|0_{in}\rangle$ est

$$\langle 0_{in} | \hat{N}_{out} | 0_{in} \rangle = \langle 0_{in} | a_{out}^+ a_{out} | 0_{in} \rangle = |\beta|^2. \quad (4.8)$$

Ce qui montre que le vide $|0_{in}\rangle$ contient des particules "out" pour $\beta \neq 0$. Selon la théorie quantique des champs, l'amplitude de transition est définie comme

$$Amp(vide - vide) = \langle 0_{out} | a_{out} b_{out} | 0_{in} \rangle. \quad (4.9)$$

Compte tenu des équations (4.5) et (4.6), b_{out} peut s'écrire

$$b_{out} = \frac{1}{\alpha^*} b_{in} + \frac{\beta^*}{\alpha^*} a_{out}^+ \quad (4.10)$$

Alors, l'amplitude se réduit à

$$Amp(vide - vide) = \frac{\beta^*}{\alpha^*} \langle 0_{out} | 0_{in} \rangle. \quad (4.11)$$

Donc, la probabilité de création des paires est donnée par

$$P = \left| \frac{\beta^*}{\alpha^*} \right|^2. \quad (4.12)$$

[16].

4.3 Création des particules

4.3.1 -Cas d'un facteur d'échelle $a(t) = e^{Ht}$

Les deux solutions de l'équation (3.56) peuvent être écrites en fonction des fonctions de Bessel de première espèce (et se notent $J_\nu(z)$ et $J_{-\nu}(z)$) ou de fonctions de Hankel de première

et de deuxième espèce (et se notent $H_\nu^{(1)}(z)$ et $H_\nu^{(2)}(z)$)

$$(\chi_1 - \chi_2)_1 = \frac{N_1}{\sqrt{\eta}} J_\nu(z) \quad (4.13)$$

$$(\chi_1 - \chi_2)_2 = \frac{N_2}{\sqrt{\eta}} J_{-\nu}(z) \quad (4.14)$$

$$(\chi_1 - \chi_2)_3 = \frac{N_3}{\sqrt{\eta}} H_\nu^{(1)}(z) \quad (4.15)$$

$$(\chi_1 - \chi_2)_4 = \frac{N_4}{\sqrt{\eta}} H_\nu^{(2)}(z), \quad (4.16)$$

où les N_i se sont des constantes arbitraires et z et ν sont donnés par

$$z = k_x \eta, \quad \nu = i|\tilde{\nu}| = i\sqrt{\frac{m^2}{4H^2} - \frac{1}{4}}. \quad (4.17)$$

Pour déterminer les solutions relatives aux états "in" et "out", on va étudier le comportement asymptotique de ces solutions quand $\eta \rightarrow -\infty$ et $\eta \rightarrow 0$.

utilisant les relations

$$J_\nu(z) = \left(\frac{1}{2}z\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{1}{4}z^2\right)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)}, \quad |\arg z| < \pi. \quad (4.18)$$

$$H_\nu^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i\left(z - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)} \left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right], \quad -\pi < \arg z < 2\pi \quad (4.19)$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-i\left(z - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)} \left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right], \quad -2\pi < \arg z < \pi. \quad (4.20)$$

Nous pouvons voir que les solutions (4.18), (4.19) et (4.20) se comportent asymptotiquement comme

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} J_\nu(k_x \eta) \sim \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)} (k_x \eta)^\nu = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)} \left(-\frac{k_x}{H}\right)^\nu e^{-iH|\tilde{\nu}|t} \quad (4.21)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} J_{-\nu}(k_x \eta) \sim \frac{1}{2^{-\nu} \Gamma(-\nu + 1)} (k_x \eta)^{-\nu} = \frac{1}{2^{-\nu} \Gamma(-\nu + 1)} \left(-\frac{k_x}{H}\right)^{-\nu} e^{iH|\tilde{\nu}|t} \quad (4.22)$$

et

$$\lim_{\eta \rightarrow -\infty} H_\nu^{(1)}(k_x \eta) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi k_x \eta}} e^{i\left(k\eta - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)} \quad (4.23)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow -\infty} H_\nu^{(2)}(k_x \eta) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi k_x \eta}} e^{-i\left(k\eta - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)} \quad (4.24)$$

Donc, les états "in" et "out" sont

$$(\chi_1 - \chi_2)_{out}^+ = \frac{N_{out}}{\sqrt{\eta}} J_\nu(z) \quad (4.25)$$

$$(\chi_1 - \chi_2)_{out}^- = \frac{N_{out}}{\sqrt{\eta}} J_{-\nu}(z) \quad (4.26)$$

$$(\chi_1 - \chi_2)_{in}^- = \frac{N_{in}}{\sqrt{\eta}} H_\nu^{(1)}(z) \quad (4.27)$$

$$(\chi_1 - \chi_2)_{in}^+ = \frac{N_{in}}{\sqrt{\eta}} H_\nu^{(2)}(z), \quad (4.28)$$

Maintenant, pour déterminer les coefficients de Bogoliubov nous utilisons les relations entre les fonctions de Bessel et les fonctions de Hankel

$$H_\nu^{(1)}(k_x \eta) = \frac{J_{-\nu}(k_x \eta) - e^{-i\nu\pi} J_\nu(k_x \eta)}{i \sin(\pi\nu)} \quad (4.29)$$

$$H_\nu^{(2)}(k_x \eta) = \frac{e^{i\nu\pi} J_\nu(k_x \eta) - J_{-\nu}(k_x \eta)}{i \sin(\pi\nu)} \quad (4.30)$$

Alors, les coefficients de Bogoliubov sont

$$\alpha^* = -\frac{N_{in}}{N_{out}} \frac{1}{\sinh(\pi\tilde{\nu})} \quad (4.31)$$

$$\beta^* = \frac{N_{in}}{N_{out}} \frac{e^{-\pi\tilde{\nu}}}{\sinh(\pi\tilde{\nu})}. \quad (4.32)$$

Donc, la probabilité de création d'une paire de particules dans l'univers de de Sitter est

$$P = \frac{|\beta|^2}{|\alpha|^2} = e^{-2\pi\tilde{\nu}}, \quad (4.33)$$

et la densité des particules créées est

$$n = |\beta|^2 = \frac{1}{e^{2\pi\tilde{\nu}} - 1} \quad \text{où} \quad \tilde{\nu} = \sqrt{\frac{m^2}{4H^2} - \frac{1}{4}} \quad (4.34)$$

On peut voir que cette expression est valide quand $\frac{m^2}{4H^2} \succeq \frac{1}{4}$.

De l'équation (4.34), on peut voir que le processus de création de paire est plus important pour des valeurs faibles de masse et $n(k) \rightarrow 0$ lorsque $m \gg 1$.

4.3.2 -Cas d'un facteur d'échelle $a(t) = a_0 t$

En tout nous avons quatre solutions

$$(\chi)_1 = N_1 J_\nu(z) \quad (4.35)$$

$$(\chi)_2 = N_2 J_{-\nu}(z) \quad (4.36)$$

$$(\chi)_3 = N_3 H_\nu^{(1)}(z) \quad (4.37)$$

$$(\chi)_4 = N_4 H_\nu^{(2)}(z), \quad (4.38)$$

Etudions maintenant le comportement asymptotique de chaque solution quand $t \rightarrow \infty$ et $t \rightarrow 0$.

$$\lim_{t \rightarrow 0} J_\nu\left(\frac{M}{2}t\right) \sim \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \left(\frac{M}{2}t\right)^\nu = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \left(\frac{M}{2}\right)^\nu e^{ia_0|\tilde{\nu}|\eta} \quad (4.39)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} J_{-\nu}\left(\frac{M}{2}t\right) \sim \frac{1}{2^{-\nu} \Gamma(-\nu+1)} \left(\frac{M}{2}t\right)^{-\nu} = \frac{1}{2^{-\nu} \Gamma(-\nu+1)} \left(\frac{M}{2}\right)^{-\nu} e^{-ia_0|\tilde{\nu}|\eta} \quad (4.40)$$

et

$$\lim_{t \rightarrow \infty} H_\nu^{(1)}\left(\frac{M}{2}t\right) \sim \sqrt{\frac{4}{\pi M t}} e^{i\left(\frac{M}{2}t - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)} \quad (4.41)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} H_\nu^{(2)}\left(\frac{M}{2}t\right) \sim \sqrt{\frac{4}{\pi M t}} e^{-i\left(\frac{M}{2}t - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)}. \quad (4.42)$$

Donc, les états "in" et "out" sont

$$(h_1 - h_2)_{out}^+ = N_{out} \sqrt{t} H_\nu^{(2)}(z) \quad (4.43)$$

$$(h_1 - h_2)_{out}^- = N_{out} \sqrt{t} H_\nu^{(1)}(z) \quad (4.44)$$

$$(h_1 - h_2)_{in}^- = N_{in} \sqrt{t} J_\nu(z) \quad (4.45)$$

$$(h_1 - h_2)_{in}^+ = N_{in} \sqrt{t} J_{-\nu}(z), \quad (4.46)$$

En fait à l'aide des propriétés de transformation des fonctions de Bessel

$$H_\nu^{(1)}(z) = \frac{J_{-\nu}(z) - e^{-i\nu\pi} J_\nu(z)}{i \sin(\pi\nu)} \quad (4.47)$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = \frac{e^{i\nu\pi} J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{i \sin(\pi\nu)}, \quad (4.48)$$

nous pouvons définir les coefficients de Bogoliubov

$$\alpha = -\frac{N_{in}}{N_{out}} \frac{1}{\sinh(\pi\tilde{\nu})} \quad (4.49)$$

$$\beta = \frac{N_{in}}{N_{out}} \frac{e^{-\pi\tilde{\nu}}}{\sinh(\pi\tilde{\nu})}. \quad (4.50)$$

Donc, la probabilité de création d'une paire de particules est

$$P_k = \frac{|\beta|^2}{|\alpha|^2} = e^{-2\pi\tilde{\nu}}, \quad (4.51)$$

et la densité des particules créées est

$$n(k) = |\beta|^2 = \frac{1}{e^{2\pi\tilde{\nu}} - 1} \text{ où } \tilde{\nu} = \frac{k_x}{a_0} \quad (4.52)$$

De l'équation (4.52) on peut voir que le processus de création de paire est plus important pour l'impulsion faible et $n(k) \rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow \infty$ (c.-à-d $k \gg 1$).

4.3.3 -Cas d'un facteur d'échelle $a(t) = \sqrt{\Gamma + \Lambda t}$

Considérons maintenant les quatre solutions possibles

$$(\varphi)_1 = N_1 J_\nu(z) \quad (4.53)$$

$$(\varphi)_2 = N_2 J_{-\nu}(z) \quad (4.54)$$

$$(\varphi)_3 = N_3 H_\nu^{(1)}(z) \quad (4.55)$$

$$(\varphi)_4 = N_4 H_\nu^{(2)}(z), \quad (4.56)$$

Pour déterminer la densité des particules créées, nous étudions d'abord le comportement asymptotique de chaque solution quand $\eta \rightarrow \infty$ et $\eta \rightarrow 0$.

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} J_\nu(z) \sim \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} (M\eta)^\nu = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} (M)^\nu e^{i\frac{\Lambda}{2}|\tilde{\nu}|\tau} \quad (4.57)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} J_{-\nu}(z) \sim \frac{1}{2^{-\nu} \Gamma(-\nu+1)} (M\eta)^{-\nu} = \frac{1}{2^{-\nu} \Gamma(-\nu+1)} (M)^{-\nu} e^{-i\frac{\Lambda}{2}|\tilde{\nu}|\tau} \quad (4.58)$$

et

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} H_\nu^{(1)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i(z - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4})} = \sqrt{\frac{2}{\pi M\eta}} e^{i(M\eta - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4})} \quad (4.59)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} H_\nu^{(2)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-i(z - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4})} = \sqrt{\frac{2}{\pi M\eta}} e^{-i(M\eta - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4})} \quad (4.60)$$

Donc, les états "in" et "out" sont

$$(\varphi)_{out}^+ = N_{out} H_\nu^{(2)}(z) \quad (4.61)$$

$$(\varphi)_{out}^- = N_{out} H_\nu^{(1)}(z) \quad (4.62)$$

$$(\varphi)_{in}^- = N_{in} J_\nu(z) \quad (4.63)$$

$$(\varphi)_{in}^+ = N_{in} J_{-\nu}(z), \quad (4.64)$$

Selon les propriétés de transformation des fonctions de Bessel (4.47, 4.48), nous pouvons définir les coefficients de Bogoliubov

$$\alpha = -\frac{N_{in}}{N_{out}} \frac{1}{\sinh(\pi\tilde{\nu})} \quad (4.65)$$

$$\beta = \frac{N_{in}}{N_{out}} \frac{e^{-\pi\tilde{\nu}}}{\sinh(\pi\tilde{\nu})} \quad (4.66)$$

Donc, la probabilité de création d'une paire de particules est

$$P_k = \frac{|\beta|^2}{|\alpha|^2} = e^{-2\pi\tilde{\nu}}, \quad (4.67)$$

et la densité des particules créées est

$$n(k) = |\beta|^2 = \frac{1}{e^{2\pi\tilde{\nu}} - 1} \text{ où } \tilde{\nu} = \frac{2k_x}{\Lambda}. \quad (4.68)$$

Il est clair que le processus de création de paire est plus important pour l'impulsion faible et $n(k) \rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow \infty$.

4.4 Conclusion

A partir des ensembles des solutions obtenus au chapitre précédant, nous avons classées les modes in et out en utilisons le comportement asymptotique de ces solutions. Ensuite, nous avons déterminé les probabilités de création une paire et le nombre des particules créées en appliquant la transformation canonique de Bogoliubov.

L'équation de DKP dans un espace-temps courbe en presence d'un champ électrique

5.1 Introduction

Dans cette partie, nous écrivons l'équation Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) pour les particules massives de spin-1 dans un espace-temps courbe (Robertson-Walker) à la présence du champ électriques en considérant trois modèles cosmologique différents. Ensuite, nous essayons de la résoudre et trouver les différents ensembles des solutions. D'autre par, nous identifions les états "in" et "out" en classant ces solutions par le recours au comportement asymptotique des fonctions spéciales. A la fin, nous pouvons déterminer la densité des particules créées, ainsi la probabilité de création une paire en appliquant la méthode canonique de Bogoliubov.

5.2 L'équation de DKP dans un espace-temps courbe en presence d'un champ électrique

L'équation covariante de DKP dans un espace-temps courbe à la présence d'un champ électromagnétique externe est donnée par

$$\left[i\tilde{\beta}^\mu (\partial_\mu - \Sigma_\mu - ieA_\mu) - m \right] \Psi_k(x) = 0 \quad (5.1)$$

où m est la masse de la particule massive de spin-1, A_μ est le potentiel vectoriel, e est la charge, et $\tilde{\beta}^\mu$ sont les matrices de Kemmer qui sont exprimées par les matrices habituelles de Dirac γ^μ .

L'équation de DKP pour une métrique générale (1 + 1) dimensionnelle donnée par l'équation (3.42) peut être écrite comme suit :

$$\left[\frac{1}{C_0} \beta^0 \partial_0 + \frac{1}{C_1} \beta^1 \partial_1 - \frac{1}{C_0} \beta^0 \Sigma_0 - \frac{1}{C_1} \beta^1 \Sigma_1 + i \frac{1}{C_0} \beta^0 A_0 + i \frac{1}{C_1} \beta^1 A_1 + m \right] \Psi_k(x) = 0 \quad (5.2)$$

Passons maintenant aux applications en suivant la même procédure que nous l'avons vu auparavant (chapitre 3).

5.2.1 -Cas d'un facteur d'échelle $a(t) = e^{Ht}$ et un potentiel $A_\mu(0, -\frac{E}{H}e^{Ht})$

Dans l'espace temps de (1 + 1)-dimensions les matrices de Dirac γ sont remplacées par les matrices Pauli σ et les matrices β_μ sont représentées comme suit [24]

$$\beta^\mu = \sigma^\mu \otimes I + I \otimes \sigma^\mu \quad (5.3)$$

Les Connexions spinoriales pour l'espace temps de de Sitter sont données en fonction de temps conforme η par

$$\sum_1 = \frac{1}{2\eta} (\sigma^1 \otimes I + I \otimes \sigma^1) \quad (5.4)$$

$$\sum_0 = 0 \quad (5.5)$$

En considérant (3.44), (3.49) et (3.51) et en prenant le potentiel vectoriel sous la forme

$$A_\mu = \left(0, -\frac{E_0}{H} e^{Ht} = \frac{E_0}{\eta H^2} \right), \quad (5.6)$$

nous obtenons

$$\left[\beta^0 \partial_\eta + \beta^1 \left(ik_x - \frac{1}{2\eta} (\sigma^1 \otimes I + I \otimes \sigma^1) + \frac{ieE}{\eta H^2} \right) - \frac{im}{\eta H} \right] \chi(\eta) = 0.$$

Utilisant l'équation (3.43) nous arrivons à

$$\begin{cases} \left(\partial_\eta + \frac{1}{2\eta} - \frac{im}{2\eta H} \right) \chi_1 - \left(ik_x + \frac{ieE_0}{\eta H^2} \right) \chi_0 + \frac{1}{2\eta} \chi_2 = 0 \\ \left(\partial_\eta + \frac{1}{2\eta} + \frac{im}{2\eta H} \right) \chi_2 - \left(ik_x + \frac{ieE_0}{\eta H^2} \right) \chi_0 + \frac{1}{2\eta} \chi_1 = 0 \\ \left(ik_x + \frac{ieE_0}{\eta H^2} \right) (\chi_1 - \chi_2) - \frac{im}{\eta H} \chi_0 = 0, \end{cases} \quad (5.7)$$

avec

$$\chi_0 = \chi_{\bar{0}}. \quad (5.8)$$

On obtient à partir de ce système des nouvelles équations différentielles

$$\chi_0 = \frac{\eta H}{m} \left(k_x + \frac{eE_0}{\eta H^2} \right) (\chi_1 - \chi_2) \quad (5.9)$$

$$\chi_1 + \chi_2 = \frac{2\eta H}{im} \partial_\eta (\chi_1 - \chi_2) \quad (5.10)$$

$$\left(\partial_\eta + \frac{1}{\eta} \right) (\chi_1 + \chi_2) = \frac{im}{2\eta H} (\chi_1 - \chi_2) + 2i \left(k_x + \frac{eE_0}{\eta H^2} \right) \chi_0 \quad (5.11)$$

Après un calcul simple, nous obtenons l'équation différentielle

$$\left[\partial_\eta^2 + \frac{2}{\eta} \partial_\eta + \left(k_x + \frac{eE}{\eta H} \right)^2 + \frac{m^2}{4\eta^2 H^2} \right] (\chi_1 - \chi_2) = 0 \quad (5.12)$$

Par le changement $\chi = \frac{1}{\eta} \varphi$, on réduit (5.12) à l'équation

$$\left[\partial_\eta^2 + \left(k_x + \frac{eE}{\eta H} \right)^2 + \frac{m^2}{4\eta^2 H^2} \right] (\varphi_1 - \varphi_2)_1 = 0 \quad (5.13)$$

de type Whittaker

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} - \frac{1}{4} + \frac{\lambda}{z} + \frac{\frac{1}{4} - \mu^2}{z^2} \right] W_{\lambda, \mu}(z) = 0, \quad (5.14)$$

D'où ces solutions peuvent être écrites sous la forme

$$(\varphi_1 - \varphi_2) = N_1 W_{\lambda, \mu}(z) + N_2 M_{\lambda, \mu}(z) \quad (5.15)$$

où

$$(\varphi_1 - \varphi_2) = N_3 W_{-\lambda, -\mu}(-z) + N_4 M_{-\lambda, -\mu}(-z). \quad (5.16)$$

où les N_i se sont des constantes arbitraires et avec λ , μ et z sont donnés par

$$\lambda = i\tilde{\lambda} = \frac{-ieE_0}{H^2}, \quad \mu = i\tilde{\mu} = i \left[\left(\frac{e^2 E_0^2}{H^4} + \frac{m^2}{4H^2} \right) - \frac{1}{4} \right]^{\frac{1}{2}} \text{ et } z = 2ik_x \eta. \quad (5.17)$$

A l'aide des équations (5.9) et (5.10) et la relation de récurrence des fonctions Whittaker

$$z \frac{d}{dz} W_{\lambda,\mu}(z) + W_{\lambda+1,\mu}(z) = \left(\frac{1}{2} z - \lambda \right) W_{\lambda,\mu}(z), \quad (5.18)$$

on détermine aisément

$$\chi_1 = \frac{1}{2\eta} \left\{ 1 + \frac{2iH}{m} (1 + k - ik_x\eta) W_{\lambda,\mu}(z) - \frac{2iH}{m} W_{\lambda+1,\mu}(z) \right\} \quad (5.19)$$

$$\chi_2 = \frac{1}{2\eta} \left\{ -1 + \frac{2iH}{m} ((1 + k - ik_x\eta)) W_{\lambda,\mu}(z) - \frac{2iH}{m} W_{\lambda+1,\mu}(z) \right\} \quad (5.20)$$

$$\chi_0 = \chi_{\bar{0}} = \frac{H}{m} \left(k_x + \frac{eE}{\eta H} \right) W_{\lambda,\mu}(z) \quad (5.21)$$

Donc, la solution régulière de l'équation (5.1) à l'infinie est

$$\Psi_{\kappa}(\eta, x) = \frac{N_{\infty}}{\sqrt{2\pi}} e^{(ik_x x)} \begin{pmatrix} \frac{1}{2\eta} \left\{ 1 + \frac{2iH}{m} (1 + k - ik_x\eta) W_{\lambda,\mu}(z) - \frac{2iH}{m} W_{\lambda+1,\mu}(z) \right\} \\ \frac{H}{m} \left(k_x + \frac{eE}{\eta H} \right) W_{\lambda,\mu}(z) \\ \frac{H}{m} \left(k_x + \frac{eE}{\eta H} \right) W_{\lambda,\mu}(z) \\ \frac{1}{2\eta} \left\{ -1 + \frac{2iH}{m} ((1 + k - ik_x\eta)) W_{\lambda,\mu}(z) - \frac{2iH}{m} W_{\lambda+1,\mu}(z) \right\} \end{pmatrix}. \quad (5.22)$$

5.2.2 -Cas d'un facteur d'échelle $a(t) = a_0 t$ et un potentiel $A_{\mu}(0, -Et)$

Suivant les mêmes étapes précédentes, nous obtenons pour la métrique [25]

$$ds^2 = -dt^2 + (a_0 t)^2 dx^2, \quad (5.23)$$

et le potentiel vectoriel

$$A_{\mu} = (0, -Et) \quad (5.24)$$

les équations différentielles couplées suivantes

$$\left(2\partial_0 + \frac{\dot{a}}{a} + iM \right) \Psi_1 + \left(-\frac{1}{a} \partial_1 + i \frac{eEt}{a} \right) \Psi_0 + \left(-\frac{1}{a} \partial_1 + i \frac{eEt}{a} \right) \Psi_{\bar{0}} + \frac{\dot{a}}{a} \Psi_2 = 0 \quad (5.25)$$

$$\left(-\frac{1}{a} \partial_1 + i \frac{eEt}{a} \right) \Psi_1 - iM \Psi_0 + \left(\frac{1}{a} \partial_1 - i \frac{eEt}{a} \right) \Psi_2 = 0 \quad (5.26)$$

$$\left(-\frac{1}{a} \partial_1 + i \frac{eEt}{a} \right) \Psi_1 - iM \Psi_{\bar{0}} + \left(\frac{1}{a} \partial_1 - i \frac{eEt}{a} \right) \Psi_2 = 0 \quad (5.27)$$

$$\left(2\partial_0 + \frac{\dot{a}}{a} - iM \right) \Psi_2 - \left(\frac{1}{a} \partial_1 - i \frac{eEt}{a} \right) \Psi_0 - \left(\frac{1}{a} \partial_1 - i \frac{eEt}{a} \right) \Psi_{\bar{0}} + \frac{\dot{a}}{a} \Psi_1 = 0 \quad (5.28)$$

Considérons la fonction d'onde $\Psi_\kappa(\eta, x)$ sous la forme

$$\begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_0 \\ \Psi_{\bar{0}} \\ \Psi_2 \end{pmatrix} = a^{\frac{-1}{2}}(t) \frac{e^{ik_x x}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_0(t) \\ h_{\bar{0}}(t) \\ h_2(t) \end{pmatrix} \quad (5.29)$$

Nous obtenons le système couplé suivant

$$\left(\partial_0 + i\frac{M}{2}\right) h_1 - i\left(\frac{k_x - eEt}{a}\right) h_0 + \frac{\dot{a}}{2a} h_2 = 0 \quad (5.30)$$

$$\left(\frac{-k_x + eEt}{a}\right) h_1 - Mh_0 + \left(\frac{k_x - eEt}{a}\right) h_2 = 0 \quad (5.31)$$

$$\left(\partial_0 - i\frac{M}{2}\right) h_2 - i\left(\frac{k_x - eEt}{a}\right) h_0 + \frac{\dot{a}}{2a} h_1 = 0 \quad (5.32)$$

où

$$h_0(t) = h_{\bar{0}}(t)$$

Par un simple calcul nous arrivons aux équations

$$h_0 = \frac{-1}{M} \left(\frac{k_x - eEt}{a}\right) (h_1 - h_2) \quad (5.33)$$

$$(h_1 + h_2) = \frac{2i}{M} \left(\partial_0 - \frac{\dot{a}}{2a}\right) (h_1 - h_2) \quad (5.34)$$

$$\left(\partial_0 + \frac{\dot{a}}{2a}\right) (h_1 + h_2) + i\frac{M}{2} (h_1 - h_2) - 2i\left(\frac{k_x - eEt}{a}\right) h_0 = 0 \quad (5.35)$$

A partir de ces équations on obtient

$$\left[\partial_0^2 + \frac{\dot{a}^2 - 2a\ddot{a}}{4a^2} + \left(\frac{M}{2}\right)^2 + \left(\frac{k_x - eEt}{a}\right)^2\right] (h_1 - h_2) = 0 \quad (5.36)$$

Considérons maintenant le facteur d'échelle $a(t) = a_0 t$ et en remplaçant dans l'équation(5.36).

Il vient alors

$$\left[\partial_0^2 + \left(\frac{1}{4} + \frac{k_x^2}{a_0^2}\right) \frac{1}{t^2} - \frac{2k_x e E}{a_0^2 t} + \left(\frac{M^2 a_0^2 + 4e^2 E^2}{4a_0^2}\right)^2\right] (h_1 - h_2) = 0 \quad (5.37)$$

Par le changement

$$z = \frac{t}{\rho}$$

on se réduit (5.37) à l'équation

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} - \frac{1}{4} + \frac{\lambda}{z} + \frac{\frac{1}{4} - \mu^2}{z^2} \right] W_{\lambda, \mu}(z) = 0, \quad (5.38)$$

D'où ces solutions peuvent être écrites sous la forme

$$(h_1 - h_2) = N_1 W_{\lambda, \mu}(z) + N_2 M_{\lambda, \mu}(z) \quad (5.39)$$

où

$$(h_1 - h_2) = N_3 W_{-\lambda, -\mu}(-z) + N_4 M_{-\lambda, -\mu}(-z). \quad (5.40)$$

où les N_i se sont des constantes arbitraires et avec λ, μ et z sont donnés par

$$\lambda = i\tilde{\lambda} = \frac{2ieEk_x}{a_0\sqrt{M^2a_0^2 + 4e^2E^2}}, \quad \mu = i\tilde{\mu} = i\left[\frac{k_x^2}{a_0^2}\right]^{\frac{1}{2}} \text{ et } z = \frac{t}{\rho} = \frac{i\sqrt{M^2a_0^2 + 4e^2E^2}}{a_0}t. \quad (5.41)$$

A l'aide des équations (5.33) et (5.34) et la relation de récurrence des fonctions Whittaker

$$z \frac{d}{dz} W_{\lambda, \mu}(z) + W_{\lambda+1, \mu}(z) = \left(\frac{1}{2}z - \lambda\right) W_{\lambda, \mu}(z), \quad (5.42)$$

on détermine aisément

$$h_1 + h_2 = \left(\frac{it - 2ik_x\rho - i\rho}{M\rho t}\right) W_{\kappa, \mu}\left(\frac{t}{\rho}\right) - \frac{2i}{Mt} W_{\kappa+1, \mu}\left(\frac{t}{\rho}\right) \quad (5.43)$$

$$h_1 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{it - 2ik_x\rho - i\rho + M\rho t}{M\rho t}\right) W_{\kappa, \mu}\left(\frac{t}{\rho}\right) - \frac{2i}{Mt} W_{\kappa+1, \mu}\left(\frac{t}{\rho}\right) \right] \quad (5.44)$$

$$h_2 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{it - 2ik_x\rho - i\rho - M\rho t}{M\rho t}\right) W_{\kappa, \mu}\left(\frac{t}{\rho}\right) - \frac{2i}{Mt} W_{\kappa+1, \mu}\left(\frac{t}{\rho}\right) \right] \quad (5.45)$$

$$h_0 = -\left(\frac{k_x - eEt}{Ma_0t}\right) W_{\kappa, \mu}\left(\frac{t}{\rho}\right) \quad (5.46)$$

Donc, la solution régulière à l'infinie est

$$\Psi_{\kappa}(\eta, x) = \frac{N_{\infty}}{\sqrt{2\pi}} a^{-\frac{1}{2}}(t) e^{ik_x x} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{it - 2ik_x\rho - i\rho + M\rho t}{M\rho t}\right) W_{\kappa, \mu}\left(\frac{t}{\rho}\right) - \frac{2i}{Mt} W_{\kappa+1, \mu}\left(\frac{t}{\rho}\right) \right] \\ - \left(\frac{k_x - eEt}{Ma_0t}\right) W_{\kappa, \mu}\left(\frac{t}{\rho}\right) \\ - \left(\frac{k_x - eEt}{Ma_0t}\right) W_{\kappa, \mu}\left(\frac{t}{\rho}\right) \\ h_2 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{it - 2ik_x\rho - i\rho - M\rho t}{M\rho t}\right) W_{\kappa, \mu}\left(\frac{t}{\rho}\right) - \frac{2i}{Mt} W_{\kappa+1, \mu}\left(\frac{t}{\rho}\right) \right] \end{pmatrix}. \quad (5.47)$$

5.2.3 -Cas d'un facteur d'échelle $a(t) = \sqrt{\Gamma + \Lambda t}$ et un potentiel $A_\mu(0, -Ea(t))$

En considérant (3.86), et en prenant le potentiel vectoriel sous la forme [26]

$$A_\mu = (0, -Ea(t)), \quad (5.48)$$

nous obtenons

$$\left[a\beta^0\partial_0 + \frac{1}{a}\beta^1\left(\partial_1 - \sum_1 -ieE_0a\right) - m \right] \Psi(t, x) = 0 \quad (5.49)$$

Nous cherchons des solutions sous la forme

$$\Psi_\kappa(t, x) = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_0 \\ \Psi_{\bar{0}} \\ \Psi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{(ik_x x)} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_0 \\ h_{\bar{0}} \\ h_2 \end{pmatrix} \quad (5.50)$$

Portons les équations (3.93), (5.50) et (3.43) dans l'équation (5.49). Il vient

$$\begin{cases} (2a\partial_0 + \dot{a} + im)h_1 - 2i\left(\frac{k}{a} - eE_0\right)h_0 + \dot{a}h_2 = 0 \\ (2a\partial_0 + \dot{a} - im)h_2 - 2i\left(\frac{k}{a} - eE_0\right)h_0 + \dot{a}h_1 = 0 \\ i\left(\frac{k}{a} - eE_0\right)(h_1 - h_2) + imh_0 = 0 \end{cases} \quad (5.51)$$

Par un simple calcul nous arrivons aux équations

$$h_0 = \frac{-1}{m} \left(\frac{k}{a} - eE_0 \right) (h_1 - h_2) \quad (5.52)$$

$$h_1 + h_2 = i \frac{a\partial_0}{m} (h_1 - h_2) \quad (5.53)$$

$$(2a\partial_0 + 2\dot{a})(h_1 + h_2) + im(h_1 - h_2) - 4i\left(\frac{k_x}{a} + eE_0\right)h_0 = 0 \quad (5.54)$$

A partir de ces équations on obtient

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + 2\frac{\dot{a}}{a}\frac{d}{dt} + \left(\frac{m}{2}\right)^2 \frac{1}{a^2} + \left(\frac{k}{a^2} - \frac{eE_0}{a}\right)^2 \right] (h_1 - h_2) = 0 \quad (5.55)$$

Remplaçons $a(t) = \sqrt{\Gamma + \Lambda t}$ et $\chi(t) = (h_1 - h_2)$. Il vient alors

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + \frac{\Lambda}{\Gamma + \Lambda t} \frac{d}{dt} + \left(\frac{m}{2}\right)^2 \frac{1}{\Gamma + \Lambda t} + \left(\frac{k}{\Gamma + \Lambda t} - \frac{eE_0}{\sqrt{\Gamma + \Lambda t}}\right)^2 \right] \chi(t) = 0 \quad (5.56)$$

Par le changement du variable $u = \sqrt{\Gamma + \Lambda t}$, il vient directement

$$\frac{d}{dt} = \frac{1}{2} \frac{\Lambda}{\sqrt{\Gamma + \Lambda t}} \frac{d}{du} = \frac{\Lambda}{2u} \frac{d}{du}, \quad (5.57)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} &= \frac{1}{4} \frac{\Lambda^2}{\Gamma + \Lambda t} \frac{d^2}{du^2} - \frac{\Lambda^2}{4(\Gamma + \Lambda t)^{\frac{3}{2}}} \frac{d}{du} \\ &= \frac{\Lambda^2}{4u^2} \frac{d^2}{du^2} - \frac{\Lambda^2}{4u^3} \frac{d}{du}. \end{aligned} \quad (5.58)$$

Insérons les éqs.(5.57) et (5.58) dans (5.56) , on obtient la nouvelle équation

$$\left[\frac{d^2}{du^2} + \frac{1}{u} \frac{d}{du} + \frac{m^2}{\Lambda^2} + \frac{4}{\Lambda^2} \left(\frac{k}{u} - eE_0 \right)^2 \right] \chi(u) = 0 \quad (5.59)$$

Pour déterminer les solutions de cette équation, nous faisons un deuxième changement $\chi(u) = \frac{1}{\sqrt{u}} \varphi(u)$, Il vient alors

$$\frac{d}{du} \chi(u) = \frac{1}{\sqrt{u}} \frac{d}{du} \varphi(u) - \frac{1}{2u^{\frac{3}{2}}} \varphi(u), \quad (5.60)$$

$$\frac{d^2}{du^2} \chi(u) = \frac{1}{\sqrt{u}} \frac{d^2}{du^2} \varphi(u) - \frac{1}{u^{\frac{3}{2}}} \frac{d}{du} \varphi(u) + \frac{3}{4u^{\frac{5}{2}}} \varphi(u) \quad (5.61)$$

En substituant ces quantités dans (5.59), il vient

$$\left[\frac{d^2}{du^2} + \left(\frac{1}{4} + \left(\frac{2k}{\Lambda} \right)^2 \right) \frac{1}{u^2} - \frac{8ekE_0}{\Lambda^2} \frac{1}{u} + \left(\frac{2eE_0}{\Lambda} \right)^2 + \left(\frac{m}{\Lambda} \right)^2 \right] \varphi(u) = 0. \quad (5.62)$$

Par comparaison avec l'équation de Whittaker, nous choisissons $z = \beta u$

$$où \beta = 2i \sqrt{\left(\frac{m}{\Lambda} \right)^2 + \left(\frac{2eE_0}{\Lambda} \right)^2} \quad (5.63)$$

. Alors l'équation (5.62) devient

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \left(\frac{1}{4} + \left(\frac{2k}{\Lambda} \right)^2 \right) \frac{1}{z^2} - \frac{8ekE_0}{\Lambda^2 \beta} \frac{1}{z} + \left(\frac{m}{\Lambda} \right)^2 - \frac{1}{4} \right] \varphi(z) = 0 \quad (5.64)$$

Cette dernière équation est de type Whittaker

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} - \frac{1}{4} + \frac{\kappa}{z} + \frac{\frac{1}{4} - \mu^2}{z^2} \right] W_{\kappa, \mu}(z) = 0 \quad (5.65)$$

D'où ces solutions peuvent être écrites sous la forme

$$(\varphi_1 - \varphi_2) = N_1 W_{\kappa, \mu}(z) + N_2 M_{\kappa, \mu}(z) \quad (5.66)$$

où

$$(\varphi_1 - \varphi_2) = N_3 W_{-\kappa, -\mu}(-z) + N_4 M_{-\kappa, -\mu}(-z) \quad (5.67)$$

où les N_i se sont des constantes arbitraires et avec κ , μ et β sont donnés par

$$\kappa = i\tilde{\kappa} = -\frac{4ek_x E_0}{\Lambda^2 \beta}, \quad \mu = i\tilde{\mu} = \frac{2ik_x}{\Lambda} \quad (5.68)$$

$$\text{et } \beta = 2i \left[\left(\frac{m}{\Lambda} \right)^2 + \left(\frac{2eE_0}{\Lambda} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \text{ et } z = \beta u \quad (5.69)$$

Puisque $z = \beta u$ et $(h_1 - h_2) = \chi(u) = \frac{1}{\sqrt{u}} \varphi(z)$, ceci implique les quatre solutions suivantes

$$(h_1 - h_2)_1 = \frac{N_1}{\sqrt{u}} W_{\kappa, \mu}(\beta u) \quad (5.70)$$

$$(h_1 - h_2)_2 = \frac{N_2}{\sqrt{u}} M_{\kappa, \mu}(\beta u) \quad (5.71)$$

$$(h_1 - h_2)_3 = \frac{N_3}{\sqrt{u}} W_{-\kappa, -\mu}(-\beta u) \quad (5.72)$$

$$(h_1 - h_2)_4 = \frac{N_4}{\sqrt{u}} M_{-\kappa, -\mu}(-\beta u) \quad (5.73)$$

A l'aide des équations (5.52) et (5.53) et la relation de récurrence des fonctions Whittaker

$$z \frac{d}{du} W_{\kappa, \mu}(z) + W_{\kappa+1, \mu}(z) = \left(\frac{1}{2} z - \kappa \right) W_{\kappa, \mu}(z), \quad (5.74)$$

on détermine aisément la solution régulière de l'équation (5.1) à l'infinie

$$\Psi_{\kappa}(t, x) = \frac{N_{\infty} e^{(ik_x x)}}{\sqrt{2\pi u}} \quad (5.75)$$

$$\times \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{i\Lambda\beta}{2m} - \frac{i\Lambda}{2m\sqrt{\Gamma+\Lambda t}} + \frac{i\Lambda\kappa}{m\sqrt{\Gamma+\Lambda t}} \right) W_{\kappa, \mu}(\beta u) - \frac{i\Lambda}{2m\sqrt{\Gamma+\Lambda t}} W_{\kappa+1, \mu}(\beta u) \right] \\ - \frac{1}{m} \left(\frac{k}{\sqrt{\Gamma+\Lambda t}} - eE_0 \right) W_{\kappa, \mu}(\beta u) \\ - \frac{1}{m} \left(\frac{k}{\sqrt{\Gamma+\Lambda t}} - eE_0 \right) W_{\kappa, \mu}(\beta u) \\ \frac{1}{2} \left[\left(-1 + \frac{i\Lambda\beta}{2m} - \frac{i\Lambda}{2m\sqrt{\Gamma+\Lambda t}} + \frac{i\Lambda\kappa}{m\sqrt{\Gamma+\Lambda t}} \right) W_{\kappa, \mu}(\beta u) - \frac{i\Lambda}{2m\sqrt{\Gamma+\Lambda t}} W_{\kappa+1, \mu}(\beta u) \right] \end{pmatrix},$$

$$\text{où } u = \sqrt{\Gamma + \Lambda t}.$$

5.3 La densité de creation des paires

5.3.1 -Cas d'un facteur d'échelle $a(t) = e^{Ht}$ et un potentiel $A_\mu(0, -\frac{E}{H}e^{Ht})$

Puisque l'équation de Whittaker ne varie pas lorsqu'on change μ en $-\mu$, ou qu'on change simultanément λ en $-\lambda$ et z en $-z$, elle admet comme solutions les fonctions

$$(\chi_1 - \chi_2)_1 = \frac{N_1}{\eta} W_{\lambda, \mu}(z) \quad (5.76)$$

$$(\chi_1 - \chi_2)_2 = \frac{N_2}{\eta} M_{\lambda, \mu}(z) \quad (5.77)$$

$$(\chi_1 - \chi_2)_3 = \frac{N_3}{\eta} W_{-\lambda, -\mu}(-z) = \frac{N_3}{\eta} W_{-\lambda, \mu}(-z) \quad (5.78)$$

$$(\chi_1 - \chi_2)_4 = \frac{N_4}{\eta} M_{\lambda, \mu}(z) = \frac{N_4}{\eta} M_{-\lambda, -\mu}(-z) = \frac{N_4}{\eta} (-1)^{-\mu+\frac{1}{2}} M_{\lambda, -\mu}(z), \quad (5.79)$$

où les N_i se sont des constantes arbitraires et λ , μ et z sont donnés par

$$\lambda = i\tilde{\lambda} = \frac{-ieE_0}{H^2}, \quad \mu = i\tilde{\mu} = i \left[\left(\frac{e^2 E_0^2}{H^4} + \frac{m^2}{4H^2} \right) - \frac{1}{4} \right]^{\frac{1}{2}} \text{ et } z = 2ik_x \eta. \quad (5.80)$$

Etudions maintenant le comportement asymptotique de chaque solution quand $\eta \rightarrow -\infty$ et $\eta \rightarrow 0$.

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} W_{\lambda, \mu}(z) \approx z^\lambda e^{-\frac{z}{2}}, \quad |\arg z| \leq \frac{3\pi}{2} - \delta \quad (5.81)$$

avec δ est un petit constant arbitraire positif.

$$\lim_{z \rightarrow 0} M_{\lambda, \mu}(z) \approx z^{\mu+\frac{1}{2}}, \quad 2\mu \neq -1; -2; -3; \dots \quad (5.82)$$

En déduisant alors les états "in" et "out"

$$(\chi_1 - \chi_2)_{in}^+ = \frac{N_{in}}{\eta} W_{\lambda, \mu}(z) \quad (5.83)$$

$$(\chi_1 - \chi_2)_{in}^- = \frac{N_{in}}{\eta} W_{-\lambda, \mu}(-z) \quad (5.84)$$

$$(\chi_1 - \chi_2)_{out}^+ = \frac{N_{out}}{\eta} M_{\lambda, \mu}(z) \quad (5.85)$$

$$(\chi_1 - \chi_2)_{out}^- = \frac{N_{out}}{\eta} (-1)^{-\mu+\frac{1}{2}} M_{\lambda, -\mu}(z), \quad (5.86)$$

Pour déterminer les coefficients de Bogoliubov nous utilisons la propriété de transformation des fonctions de Whittaker

$$W_{\kappa, \mu}(z) = \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2} - \mu - \lambda)} M_{\lambda, \mu}(z) + \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2} + \mu - \lambda)} M_{\lambda, -\mu}(z)$$

Alors, les coefficients de Bogoliubov sont

$$\alpha = \frac{N_{in}}{N_{out}} \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2} - \mu - \lambda)} \quad (5.87)$$

$$\beta = \frac{N_{in}}{N_{out}} \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2} + \mu - \lambda)} (e^{i\pi})^{\mu - \frac{1}{2}}. \quad (5.88)$$

Donc, la probabilité de création d'une paire de particules dans l'univers de de Sitter est

$$P_k = \frac{|\beta|^2}{|\alpha|^2} = \left| \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - \mu - \lambda)}{\Gamma(\frac{1}{2} + \mu - \lambda)} \right|^2 e^{-2\pi\tilde{\mu}}, \quad (5.89)$$

Maintenant, nous appliquons les propriétés des fonctions gamma

$$\left| \Gamma\left(\frac{1}{2} + iz\right) \right|^2 = \frac{\pi}{\cosh \pi z}, \quad (5.90)$$

nous obtenons

$$P_k = \frac{\cosh \pi y}{e^{2\pi|\tilde{\mu}|} \cosh \pi \tilde{y}} \quad (5.91)$$

où

$$\tilde{y} = \tilde{\mu} - \tilde{\lambda}, \quad (5.92)$$

$$y = \tilde{\mu} + \tilde{\lambda}. \quad (5.93)$$

Pour déterminer la densité des particules créées, nous utilisons la condition de normalisation

$$|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1, \quad (5.94)$$

et l'équation (5.91). Nous arrivons à

$$n = |\beta|^2 = \frac{1}{e^{2\pi\tilde{\mu}} \frac{\cosh \pi \tilde{y}}{\cosh \pi y} - 1} = \frac{\cosh \pi y}{e^{2\pi\tilde{\mu}} \cosh \pi \tilde{y} - \cosh \pi y}. \quad (5.95)$$

A la limite

$$|\tilde{\mu} \pm \tilde{\lambda}| \gg 1, \quad (5.96)$$

nous remarquons que la densité de particules créées se ressemble à une distribution thermique

$$n = |\beta|^2 \approx e^{-\frac{2\pi}{H^2} \left[\left(e^2 E_0^2 + M^2 H^2 - \frac{H^4}{4} \right)^{\frac{1}{2}} - e E_0 \right]}.$$

En réalité c'est la condition adiabatique

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \left| \frac{\dot{\omega}}{\omega^2} \right| \ll 1, \quad (5.97)$$

qui impose la limite (5.96). Par conséquent, la production de particules n'est bien définie que lorsque

$$\left[\left(\frac{e^2 E_0^2}{H^4} + \frac{m^2}{4H^2} \right) - \frac{1}{4} \right]^{\frac{1}{2}} \pm \frac{eE_0}{H^2} \gg 1. \quad (5.98)$$

5.3.2 -Cas d'un facteur d'échelle $a(t) = a_0 t$ et un potentiel $A_\mu(0, -Et)$

Suivant les mêmes étapes que le premier cas, nous déduisant alors les états "in" et "out"

$$(h_1 - h_2)_{out}^+ = N_{out} W_{\lambda, \mu}(z) \quad (5.99)$$

$$(h_1 - h_2)_{out}^- = N_{out} W_{-\lambda, \mu}(-z) \quad (5.100)$$

$$(h_1 - h_2)_{in}^+ = N_{in} M_{\lambda, \mu}(z) \quad (5.101)$$

$$(h_1 - h_2)_{in}^- = N_{in} (-1)^{-\mu + \frac{1}{2}} M_{\lambda, -\mu}(z), \quad (5.102)$$

Pour déterminer les coefficients de Bogoliubov nous utilisons la propriété de transformation des fonctions de Whittaker

$$W_{\kappa, \mu}(z) = \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2} - \mu - \lambda)} M_{\lambda, \mu}(z) + \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2} + \mu - \lambda)} M_{\lambda, -\mu}(z) \quad (5.103)$$

Alors, les coefficients de Bogoliubov sont

$$\alpha = \frac{N_{out}}{N_{in}} \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2} - \mu - \lambda)} \quad (5.104)$$

$$\beta = \frac{N_{out}}{N_{in}} \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2} + \mu - \lambda)} (e^{i\pi})^{\mu - \frac{1}{2}}. \quad (5.105)$$

Donc, la probabilité de création d'une paire de particules est

$$P_k = \frac{|\beta|^2}{|\alpha|^2} = \left| \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - \mu - \lambda)}{\Gamma(\frac{1}{2} + \mu - \lambda)} \right|^2 e^{-2\pi\tilde{\mu}}, \quad (5.106)$$

Maintenant, nous appliquons les propriétés des fonctions gamma

$$\left| \Gamma\left(\frac{1}{2} + iz\right) \right|^2 = \frac{\pi}{\cosh \pi z}, \quad (5.107)$$

nous obtenons

$$P_k = \frac{1}{e^{2\pi|\tilde{\mu}|} \frac{\cosh \pi y}{\cosh \pi \tilde{y}}} = \frac{1}{e^{2\pi|\tilde{\mu}|} f(y, \tilde{y})} \quad (5.108)$$

où

$$y = \tilde{\mu} + \tilde{\lambda}, \quad (5.109)$$

$$\tilde{y} = \tilde{\mu} - \tilde{\lambda} \quad (5.110)$$

$$f(y, \tilde{y}) = \frac{\cosh \pi y}{\cosh \pi \tilde{y}} \quad (5.111)$$

Pour déterminer la densité des particules créées, nous utilisons la condition de normalisation

$$|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1, \quad (5.112)$$

et l'équation (5.108). Nous arrivons à

$$n(k) = |\beta|^2 = \frac{1}{e^{2\pi|\tilde{\mu}|} f(y, \tilde{y}) - 1}. \quad (5.113)$$

Nous remarquons que la densité de particules créées se ressemble à une distribution thermique

$$n(k) = |\beta|^2 \approx e^{-2\pi \left(\frac{k_x}{a_0} - \frac{2eEk_x}{a_0 \sqrt{M^2 a_0^2 + 4e^2 E^2}} \right)}$$

à la limite adiabatique

$$\left| \frac{k_x}{a_0} \pm \frac{2eEk_x}{a_0 \sqrt{M^2 a_0^2 + 4e^2 E^2}} \right| \gg 1.$$

5.3.3 -Cas d'un facteur d'échelle $a(t) = \sqrt{\Gamma + \Lambda t}$ et un potentiel $A_\mu(0, -Ea(t))$

Par la même méthode appliquée précédemment, nous déduisant les états "in" et "out"

$$(h_1 - h_2)_{out}^+ = \frac{N_{out}}{\sqrt{u}} W_{\lambda, \mu}(z) \quad (5.114)$$

$$(h_1 - h_2)_{out}^- = \frac{N_{out}}{\sqrt{u}} W_{-\lambda, \mu}(-z) \quad (5.115)$$

$$(h_1 - h_2)_{in}^+ = \frac{N_{in}}{\sqrt{u}} M_{\lambda, \mu}(z) \quad (5.116)$$

$$(h_1 - h_2)_{in}^- = \frac{N_{in}}{\sqrt{u}} (-1)^{-\mu + \frac{1}{2}} M_{\lambda, -\mu}(z), \quad (5.117)$$

Pour déterminer les coefficients de Bogoliubov nous utilisons la propriété de transformation des fonctions de Whittaker

$$W_{\kappa,\mu}(z) = \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2} - \mu - \lambda)} M_{\lambda,\mu}(z) + \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2} + \mu - \lambda)} M_{\lambda,-\mu}(z) \quad (5.118)$$

et la relation de Bogoliubov

$$\varphi_{out} = \alpha \varphi_{in} + \beta \varphi_{in}^* \quad (5.119)$$

Alors, les coefficients de Bogoliubov sont

$$\alpha = \frac{N_{in}}{N_{out}} \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2} - \mu - k)} \quad (5.120)$$

$$\beta = \frac{N_{in}}{N_{out}} \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2} + \mu - k)} (e^{i\pi})^{\mu - \frac{1}{2}}. \quad (5.121)$$

Donc, la probabilité de création d'une paire de particules est

$$P_k = \frac{|\beta|^2}{|\alpha|^2} = \left| \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - \mu - k)}{\Gamma(\frac{1}{2} + \mu - k)} \right|^2 e^{-2\pi\tilde{\mu}} = \frac{\cosh \pi\tilde{y}}{\cosh \pi y} e^{-2\pi\tilde{\mu}}, \quad (5.122)$$

et la densité des particules créées

$$n(k) = |\beta|^2 = \frac{1}{e^{2\pi\tilde{\mu}} f(y, \tilde{y}) - 1}. \quad (5.123)$$

où

$$y = \tilde{\mu} + \tilde{k}, \quad (5.124)$$

$$\tilde{y} = \tilde{\mu} - \tilde{k} \quad (5.125)$$

$$f(y, \tilde{y}) = \frac{\cosh \pi y}{\cosh \pi \tilde{y}} \quad (5.126)$$

Nous remarquons que la densité de particules créées se ressemble à une distribution thermique

$$n(k) = |\beta|^2 \approx e^{-2\pi \left(\frac{2k_x}{\Lambda} - \frac{2ek_x E_0}{\Lambda^2 \left[\left(\frac{m}{\Lambda} \right)^2 + \left(\frac{2eE_0}{\Lambda} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \right)}. \quad (5.127)$$

à la limite adiabatique

$$\left| \frac{2k_x}{\Lambda} \pm \frac{2ek_x E_0}{\Lambda^2 \left[\left(\frac{m}{\Lambda} \right)^2 + \left(\frac{2eE_0}{\Lambda} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \right| \gg 1. \quad (5.128)$$

5.4 Représentation graphique du nombre de particules créées

5.4.1 -Cas d'un facteur d'échelle $a(t) = e^{Ht}$ et un potentiel $A_\mu(0, -\frac{E}{H}e^{Ht})$

Nous avons constaté que le nombre de densité des particules créées à la présence d'un champ électrique dans l'espace-temps courbe n'est pas thermique, comme dans le cas du spin 0 et spin (1/2) [14, 15, 16]. Pour étudier la dépendance du n au champ électrique, nous représentons le nombre de densité des particules créées en fonction du champ électrique en fixant la masse et la charge.

$$n = \frac{\cosh\left(\pi\left(\sqrt{(E_0^2 + \frac{3}{4})} + E_0\right)\right)}{e^{2\pi\sqrt{(E_0^2 + \frac{3}{4})}} \cosh\left(\pi\left(\sqrt{(E_0^2 + \frac{3}{4})} - E_0\right)\right) - \cosh\left(\pi\left(\sqrt{(E_0^2 + \frac{3}{4})} + E_0\right)\right)}. \quad (5.129)$$

:/Users/BB/AppData/Local/Temp/graphics/swp0000_1.pdf

FIG. 5.1 – variation de n en fonction de E où $H = 1$, $m = 2$ et $e = 1$.

Maintenant pour faire une comparaison entre le taux de création des particules par le champ gravitationnel pur et le champ électrique pur nous supprimons respectivement le champ électrique et la constante de Hubble.

La création des particules par le champ gravitationnel pure ($E=0$)

Dans ce cas, le champ électrique est nul et la densité de création des particules créées est devenue thermique de type Bose-Einstein distribution.

$$n_{GR} \simeq |\beta|^2 = \frac{1}{e^{\frac{2\pi}{H}(M^2 - \frac{H^2}{4})^{\frac{1}{2}}} - 1} = \frac{1}{e^{2\pi\frac{\omega}{H}} - 1}, \quad (5.130)$$

où

$$\text{la température } T = \frac{H}{2\pi} \text{ et l'énergie } \omega = \left(M^2 - \frac{H^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (5.131)$$

Ce résultat était déjà obtenu au chapitre 4. Si nous fixons la masse $m = 2$, la représentation graphique de

$$n_{GR} = \frac{1}{e^{\frac{2\pi}{H}\left(1-\frac{H^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}} - 1}, \quad (5.132)$$

devient

:/Users/BB/AppData/Local/Temp/graphics/swp0000₂.pdf

FIG. 5.2 – *variation de n en fonction de H où $m = 2$.*

La création des particules par le champ électrique pure ($H \rightarrow 0$).

L'exposant dans l'expression de n peut être réécrit

$$\frac{-2\pi}{H^2} \left[\left(e^2 E_0^2 + M^2 H^2 - \frac{H^4}{4} \right)^{\frac{1}{2}} - e E_0 \right] = \frac{-2\pi e E_0}{H^2} \left[\left(1 + \frac{M^2 H^2}{e^2 E_0^2} - \frac{H^4}{4e^2 E_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right]. \quad (5.133)$$

A la limite $H \rightarrow 0$

$$\lim_{H \rightarrow 0} \left\{ \left[1 + \left(\frac{M^2 H^2}{e^2 E_0^2} - \frac{H^4}{4e^2 E_0^2} \right) \right]^{1/2} - 1 \right\} \rightarrow \left(\frac{M^2 H^2}{2e^2 E_0^2} - \frac{H^4}{8e^2 E_0^2} \right). \quad (5.134)$$

Alors, on obtient facilement la densité des particules créées à la limite plate (l'espace plat de Minkowski en présence du champ électrique).

$$n_{plat} = \lim_{H \rightarrow 0} |\beta|^2 \simeq e^{-\frac{\pi}{e E_0} M^2}. \quad (5.135)$$

La représentation graphique de n_{plat} pour ($m = 2$ et $e = 1$) est

$$n_{plat} = e^{-\frac{\pi}{E_0}}. \quad (5.136)$$

Discussion

-Nous remarquons que la densité de particules créées se ressemble à une distribution thermique à la limite adiabatique $\left| \left[\left(\frac{e^2 E_0^2}{H^4} + \frac{m^2}{4H^2} \right) - \frac{1}{4} \right]^{\frac{1}{2}} \pm \frac{eE_0}{H^2} \right| \gg 1$. Ceci explique la nature thermique de l'effet.

-En comparant les figures (5.2) et (??), il est facile de voir qu'une augmentation considérable du taux de création de particules se produit en présence de champs électriques dépendant du temps. Pour la création de particules spin-1, le champ électrique joue le rôle dominant par rapport aux champs gravitationnels.

-D'après la figure (??), la probabilité de création est nulle à la limite ($H \rightarrow 0$ et $E = 0$) (l'espace plat de Minkowski libre).

5.4.2 -Cas d'un facteur d'échelle $a(t) = a_0 t$ et un potentiel $A_\mu(0, -Et)$

Dans ce cas, nous représentons aussi le nombre de densité des particules créées en fonction du champ électrique en fixant $k_x = 1$, $a_0 = 1$, $M = 1$ et $e = 1$.

$$n(k) = \frac{\cosh \left[\pi \left(1 + \frac{2E}{\sqrt{1+4E^2}} \right) \right]}{e^{2\pi} \cosh \left[\pi \left(1 - \frac{2E}{\sqrt{1+4E^2}} \right) \right] - \cosh \left[\pi \left(1 + \frac{2E}{\sqrt{1+4E^2}} \right) \right]} \quad (5.137)$$

On passe maintenant aux cas particuliers possibles.

La création des particules par le champ gravitationnel pure ($E=0$)

Pour un champ électrique nul, la densité de création des particules créées devient

$$n_{GR} \simeq |\beta|^2 = \frac{1}{e^{\frac{2\pi k}{a}} - 1} \quad (5.138)$$

avec la température $T = \frac{a}{2\pi}$ et l'énergie $\omega = k$.

C'est le même résultat que nous avons obtenu au chapitre 4. Si nous fixons $k_x = 1$, il vient

$$n_{GR} \simeq |\beta|^2 = \frac{1}{e^{\frac{2\pi}{a}} - 1} \quad (5.139)$$

Discussion

-En comparant les figures (??) et (??), nous observons une augmentation considérable du taux de création de particules se produit en présence du champ électrique dépendant du temps.

5.4.3 -Cas d'un facteur d'échelle $a(t) = \sqrt{\Gamma + \Lambda t}$ et un potentiel $A_\mu(0, -Ea(t))$

Comme dans les deux cas précédents, nous représentons le nombre de densité des particules créées en fonction du champ électrique en fixant $k_x = 1$, $e = 1$, $M = 1$ et $\Lambda = 1$.

$$n = \frac{\cosh \left[\pi \left(2 + \frac{2E}{(1+4E^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \right]}{e^{4\pi} \cosh \left[\pi \left(2 - \frac{2E}{(1+4E^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \right] - \cosh \left[\pi \left(2 + \frac{2E}{(1+4E^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \right]}. \quad (5.140)$$

La création par le champ gravitationnel pure ($E = 0$) En supprimant le champ électrique, la densité de création des particules créées se réduit à

$$n_{GR} \simeq |\beta|^2 = \frac{1}{e^{4\pi \frac{\omega}{\Lambda}} - 1} \quad (5.141)$$

avec la température $T = \frac{\Lambda}{4\pi}$, l'énergie $\omega = k$.

C'est le même résultat que nous avons obtenu au chapitre 4. Si nous fixons $k_x = 1$, il vient

$$n_{GR} \simeq |\beta|^2 = \frac{1}{e^{\frac{4\pi}{\Lambda}} - 1} \quad (5.142)$$

:/Users/BB/AppData/Local/Temp/graphics/swp0000₃.pdf

FIG. 5.3 – *variation de n en fonction de Λ où $k_x = 1$.*

Discussion

-En comparant les figures (??) et (5.3), il est clair que le taux de création de particules augmente en présence du champ électrique.

-D'après la figure (5.3), la probabilité de création est nulle à la limite ($\Lambda \rightarrow 0$ et $E = 0$) (l'espace plat de Minkowski libre).

5.4.4 conclusion

Dans cette partie, nous présentons l'équation Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) pour les particules massives de spin-1 dans un espace-temps courbe (Robertson-Walker) à la présence du champ électriques en considérant trois modèles cosmologique différents. La solution exacte est déterminée pour les trois cas, où les fonctions d'onde sont exprimées par les fonctions Whittaker. Selon les solutions, la densité de création des particules est calculée en présence des champs gravitationnel et électrique par la technique de transformation de Bogoliubov. Pour tester nos résultats, nous avons étudié quelques cas particuliers en représentant le nombre de densité des particules créées en fonction du champ électrique où nous avons constaté pour les trois cas que le champ électrique amplifie de manière significative la création de particules plus que le champ gravitationnel.