Création des particules dans un espace non commutatif : Cartes de Seiberg Witten

6.1 Introduction

Le principal résultat du chapitre précédent est que la non-commutativité de l'espace-temps introduite par le décalage de Bopp n'a aucun effet sur la création de particules à partir du vide par un champ électromagnétique. L'objectif de ce chapitre est d'étudier la création des particules de spin $\frac{1}{2}$ dans un espace non commutative en utilisant les cartes de Seiberg-Witten qui montrent via l'équivalence de jauge, les corrections que l'on doit apporter aux champs. Nous commençons d'abord par l'écriture de la densité lagrangienne modifiée, et ensuite nous dérivons de cette densité l'équation de Dirac non commutative. Pour un champ électrique constant et homogène, nous étudions la création des particules par deux méthodes :

1) La méthode canonique basée sur la solution de l'équation de Dirac

2) La méthode de l'action effective.

6.2 La densité lagrangienne du champ spinoriel

Considérons maintenant une particule de spin $\frac{1}{2}$, de masse m et de charge $(-e)$ qui se propage en présence d'un champ électromagnétique dans un espace-temps non comutatif. Cette particule est décrite par un champ spinoriel non commutatif qui a l'action

$$S = \int dx\, \mathcal{L}, \tag{6.1}$$

avec la densité lagrangienne non commutative

$$\mathcal{L} = i\widehat{\bar{\psi}} \star \gamma^{\mu} \partial_{\mu} \widehat{\psi} - m\widehat{\bar{\psi}} \star \widehat{\psi} - e\widehat{\bar{\psi}} \star \gamma^{\mu} \widehat{A}_{\mu} \star \widehat{\psi}. \tag{6.2}$$

Suivant les cartes de Seiberg-Witten les champ non commutatifs s'écrivent en fonction des champs commutatifs comme suit

$$\begin{aligned} \widehat{\psi} &= \psi - \frac{e}{2}\theta^{\kappa\lambda} A_{\kappa} \left(\partial_{\lambda}\psi\right) & (6.3) \\ \widehat{\bar{\psi}} &= \bar{\psi} - \frac{e}{2}\theta^{\alpha\beta} A_{\alpha} \left(\partial_{\beta}\bar{\psi}\right) & (6.4) \\ \widehat{A}_{\mu} &= A_{\mu} + \frac{e}{2}\theta^{\rho\sigma} A_{\rho} \left(F_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma} A_{\mu}\right) & (6.5) \end{aligned}$$

A l'ordre 1 en $\theta^{\alpha\beta}$ nous avons les corrections suivantes :

1. Corrections dûs au terme $m\widehat{\bar{\psi}} \star \widehat{\psi}$: En remplaçant les champs $\widehat{\psi}$ et $\widehat{\bar{\psi}}$ par leurs expression en fonction de champ commutatif, nous obtenons

$$\begin{aligned} m\widehat{\bar{\psi}} \star \widehat{\psi} &= m\left(\bar{\psi} - e\frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta} A_{\alpha}\left(\partial_{\beta}\bar{\psi}\right)\right)\left(\psi - \frac{1}{2}\theta^{\kappa\lambda} e A_{\kappa}\left(\partial_{\lambda}\psi\right)\right) + m\frac{i}{2}\theta^{\rho\sigma}\,\left(\partial_{\rho}\bar{\psi}\right)\left(\partial_{\sigma}\psi\right) + \ldots \\ &= m\bar{\psi}\psi + m\theta^{\alpha\beta}\left[\frac{e}{2}\left(\partial_{\beta}A_{\alpha}\right)\bar{\psi}\psi + \frac{i}{2}\,\left(\partial_{\alpha}\bar{\psi}\right)\left(\partial_{\beta}\psi\right)\right]. & (6.6) \end{aligned}$$

2. Correction dûs au terme $i\widehat{\bar{\psi}} \star \gamma^{\mu} \partial_{\mu} \widehat{\psi}$: Ce terme peut être développé comme suit

$$\begin{aligned} i\widehat{\bar{\psi}} \star \gamma^{\mu} \partial_{\mu} \widehat{\psi} &= i\left(\bar{\psi} - e\frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta} A_{\alpha}\left(\partial_{\beta}\bar{\psi}\right)\right)\gamma^{\mu}\left(\partial_{\mu}\psi - \frac{1}{2}\theta^{\kappa\lambda} e\partial_{\mu}\left(A_{\kappa}\left(\partial_{\lambda}\psi\right)\right)\right) \\ &\quad -\frac{1}{2}\theta^{\rho\sigma}\,\left(\partial_{\rho}\bar{\psi}\right)\left(\partial_{\sigma}\partial_{\mu}\psi\right) \end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned} i\widehat{\bar{\psi}} \star \gamma^{\mu} \partial_{\mu} \widehat{\psi} &= i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi & (6.7) \\ &\quad + \theta^{\alpha\beta}\left(-i\frac{e}{2}\bar{\psi}\gamma^{\;\mu}\left(\partial_{\mu}A_{\alpha}\right)\left(\partial_{\beta}\psi\right) + i\frac{e}{2}\bar{\psi}\gamma^{\;\mu}\left(\partial_{\beta}A_{\alpha}\right)\left(\partial_{\mu}\psi\right) - \frac{1}{2}\,\left(\partial_{\alpha}\bar{\psi}\right)\left(\partial_{\beta}\partial_{\mu}\psi\right)\right) \end{aligned}$$

3. Correction dûs au terme $e\widehat{\bar{\psi}} \star \gamma^{\mu} \widehat{A}_{\mu} \star \widehat{\psi}$: Comme le produit de Moyal est associatif nous pouvons développer le terme $e\widehat{\bar{\psi}} \star \gamma^{\mu} \widehat{A}_{\mu} \star \widehat{\psi}$ en calculons d'abord le produit $\left(\widehat{A}_{\mu} \star \widehat{\psi}\right)$

$$\widehat{A}_{\mu} \star \widehat{\psi} = \hat{A}_{\mu}\hat{\psi} + \frac{i}{2}\theta^{\rho\sigma}\,\left(\partial_{\rho}\hat{A}_{\mu}\right)\left(\partial_{\sigma}\hat{\psi}\right). \tag{6.8}$$

Le résultat final est donc

$$
\begin{aligned}
e\widehat{\bar{\psi}} \star \gamma^\mu \widehat{A}_\mu \star \widehat{\psi} &= e\hat{\bar{\psi}} \star \gamma^\mu \left[\hat{A}_\mu \hat{\psi} + \frac{i}{2}\theta^{\rho\sigma} \left(\partial_\rho \hat{A}_\mu\right) \left(\partial_\sigma \hat{\psi}\right)\right] \\
&= e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu \psi + \frac{e^2}{2}\theta^{\alpha\beta}\left(A_\alpha F_{\mu\beta} - \frac{1}{2}A_\mu F_{\alpha\beta}\right)\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \\
&\quad + \frac{i}{2}\theta^{\alpha\beta} e \left(\partial_\alpha \hat{A}_\mu\right)\bar{\psi}\gamma^\mu \left(\partial_\beta \psi\right) \qquad (6.9)
\end{aligned}
$$

Finalement nous pouvons écrire ces corrections comme

$$
\begin{aligned}
i\widehat{\bar{\psi}} \star \gamma^\mu \partial_\mu \widehat{\psi} &= i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + \theta^{\alpha\beta} D_{\alpha\beta} \qquad (6.10) \\
m\hat{\bar{\psi}} \star \hat{\psi} &= m\bar{\psi}\psi + \theta^{\alpha\beta} M_{\alpha\beta} \qquad (6.11) \\
e\widehat{\bar{\psi}} \star \gamma^\mu \widehat{A}_\mu \star \widehat{\psi} &= e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi + \theta^{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} \qquad (6.12)
\end{aligned}
$$

où $D_{\alpha\beta}$, $M_{\alpha\beta}$ et $A_{\alpha\beta}$ sont donnés par

$$
\begin{aligned}
D_{\alpha\beta} &= -i\frac{e}{2}\bar{\psi}\gamma^{\ \mu}\left(\partial_\mu A_\alpha\right)\left(\partial_\beta\psi\right) - i\frac{e}{4}\bar{\psi}\gamma^{\ \mu} F_{\alpha\beta}\left(\partial_\mu\psi\right) \\
M_{\alpha\beta} &= -\frac{e}{4} m F_{\alpha\beta}\bar{\psi}\psi \\
A_{\alpha\beta} &= \frac{e^2}{2}\left(A_\alpha F_{\mu\beta} - \frac{1}{2}A_\mu F_{\alpha\beta}\right)\bar{\psi}\gamma^\mu\psi + \frac{i}{2}e\left(\partial_\alpha \hat{A}_\mu\right)\bar{\psi}\gamma^\mu \left(\partial_\beta\psi\right)
\end{aligned}
$$

La densité Lagranienne peut s'écrire alors sous la forme

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi + \theta^{\alpha\beta}\left(D_{\alpha\beta} - M_{\alpha\beta} - A_{\alpha\beta}\right) \\
&= \mathcal{L}_0 + \theta^{\alpha\beta}\mathcal{L}_{\alpha\beta} \qquad (6.13)
\end{aligned}
$$

avec

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\alpha\beta} &= D_{\alpha\beta} - M_{\alpha\beta} - A_{\alpha\beta} \\
&= -i\frac{e}{2}\bar{\psi}\gamma^{\ \mu}\left(\partial_\mu A_\alpha\right)\left(\partial_\beta\psi\right) - \frac{i}{2}e\left(\partial_\alpha \hat{A}_\mu\right)\bar{\psi}\gamma^\mu\left(\partial_\beta\psi\right) - i\frac{e}{4}\bar{\psi}\gamma^{\ \mu}F_{\alpha\beta}\left(\partial_\mu\psi\right) \\
&\quad + \frac{e}{4} m F_{\alpha\beta}\bar{\psi}\psi - \frac{e^2}{2}\left(A_\alpha F_{\mu\beta} - \frac{1}{2}A_\mu F_{\alpha\beta}\right)\bar{\psi}\gamma^\mu\psi. \qquad (6.14)
\end{aligned}
$$

6.3 Equation de Dirac non commutative

Suivant le principe de moindre action ($\delta S = 0$), l'équation de Dirac non commutative pour le champ ψ se dérive à partir de la densité lagrangienne $\mathcal{L}$ via l'équation d'Euler-Lagrange

$$
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\bar{\psi}\right)}\right) = 0 \qquad (6.15)
$$

Comme $\mathcal{L}$ ne dépend pas des dérivées $\partial_\mu \bar{\psi}$, l'équation d'Euler-Lagrange se réduit à

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} &= \gamma^\mu \left(i\partial_\mu - i\frac{e}{4}\theta^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}\partial_\mu - i\frac{e}{2}\theta^{\alpha\beta}\left(\partial_\mu A_\alpha\right)\partial_\beta - \frac{i}{2}e\theta^{\alpha\beta}\left(\partial_\alpha \hat{A}_\mu\right)\partial_\beta \right)\psi \\ &\quad -\gamma^\mu \left(eA_\mu + \frac{e^2}{2}\theta^{\alpha\beta}\left(A_\alpha F_{\mu\beta} - \frac{1}{2}A_\mu F_{\alpha\beta}\right)\right)\psi \\ &\quad -m\left(1 - \frac{e}{4}\theta^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right)\psi = 0. \end{aligned} \tag{6.16}$$

La dernière équation peut s'écrire sous la forme

$$\left[\gamma^\mu \left(i\mathcal{D}_\mu - e\mathcal{A}_\mu\right) - \mathcal{M}\right]\psi = 0 \tag{6.17}$$

où $\mathcal{M}$, $\mathcal{D}_\mu$ et $\mathcal{A}_\mu$ sont donnés par

$$\mathcal{M} = m\left(1 - \frac{e}{4}\theta^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right) \tag{6.18}$$

$$\mathcal{A}_\mu = A_\mu + \frac{e}{2}\theta^{\alpha\beta}\left(A_\alpha F_{\mu\beta} - \frac{1}{2}A_\mu F_{\alpha\beta}\right) \tag{6.19}$$

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - \frac{e}{4}\theta^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\partial_\mu - \frac{e}{2}\theta^{\alpha\beta}\left(\partial_\mu A_\alpha\right)\partial_\beta - \frac{e}{2}\theta^{\alpha\beta}\left(\partial_\alpha A_\mu\right)\partial_{\beta.} \tag{6.20}$$

Il est à noter, ici, que les corrections apportées à m et A_μ sont dues aux cartes de Seiberg Witten et c'est parail pour les deux premières corrections à ∂_μ. Par contre, la troisième correction dans l'expression de $\mathcal{D}_\mu$ résulte du décalage de Bopp. Pour voir ça, considérons le développemt de $A_\mu\left(x - \delta x\right)$

$$A_\mu\left(x - \delta x\right) = eA_\mu\left(x\right) - \left(\partial_\alpha A_\mu\right)\delta x^\alpha + ... \tag{6.21}$$

Dans ce cas, l'opérateur de Bopp $i\partial_\mu - eA_\mu\left(x - \frac{1}{2}\tilde{p}\right)$ apparant de l'équation de Dirac, devient

$$\begin{aligned}\pi_\mu &= i\partial_\mu - eA_\mu\left(x - \frac{1}{2}\tilde{p}\right) \\ &= i\partial_\mu - eA_\mu\left(x\right) - \frac{e}{2}\left(\partial_\alpha A_\mu\right)\tilde{p}^\alpha \\ &= i\tilde{D}_\mu - eA_\mu\left(x\right)\end{aligned}$$

avec

$$\tilde{D}_\mu = \partial_\mu - \frac{e}{2}\theta^{\alpha\beta}\left(\partial_\alpha A_\mu\right)\partial_\beta.$$

6.4 Création de particules

6.4.1 Méthode de l'action effective

Partons de la densité lagrangienne $\mathcal{L}$ qui peut se mettre sous la forme

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}\mathcal{O}\psi \tag{6.22}$$

où l'opérateur $\mathcal{O}$ est donné par

$$\mathcal{O} = \gamma^\mu \left(i\mathcal{D}_\mu - e\mathcal{A}_\mu\right) - \mathcal{M}.$$

Comme dans le cas commutatif, nous avons

$$\det \mathcal{O} = \prod_i \lambda_i = \det \mathcal{O}^\dagger = \left[\det \mathcal{O}\mathcal{O}^\dagger\right]^{\frac{1}{2}}$$

avec

$$\mathcal{O}^\dagger = -\gamma^\mu \left(i\mathcal{D}_\mu - e\mathcal{A}_\mu\right) - \mathcal{M}.$$

Le produit $\mathcal{O}\mathcal{O}^\dagger$ est donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}\mathcal{O}^\dagger &= \left[\gamma^\mu \left(i\mathcal{D}_\mu - e\mathcal{A}_\mu\right) - \mathcal{M}\right]\left[-\gamma^\mu \left(i\mathcal{D}_\mu - e\mathcal{A}_\mu\right) - \mathcal{M}\right] \\
&= -\gamma^\mu\gamma^\nu \left(i\mathcal{D}_\mu - e\mathcal{A}_\mu\right)\left(i\mathcal{D}_\nu - e\mathcal{A}_\nu\right) + \mathcal{M}^2
\end{aligned}$$

En tenant compte de la propriété des matrices de Dirac

$$\gamma^\mu\gamma^\nu = g^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\left[\gamma^\mu, \gamma^\nu\right],$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}\mathcal{O}^\dagger &= -\left(g^{\mu\nu}\left(i\mathcal{D}_\mu - e\mathcal{A}_\mu\right)\left(i\mathcal{D}_\nu - e\mathcal{A}_\nu\right)\right) + \mathcal{M}^2 \\
&\quad -\frac{1}{2}\left[\gamma^\mu, \gamma^\nu\right]\left(i\mathcal{D}_\mu - e\mathcal{A}_\mu\right)\left(i\mathcal{D}_\nu - e\mathcal{A}_\nu\right).
\end{aligned}$$

La deuxième ligne de l'équation précédente peut se simplifier en deux étapes. En premier lieu nous écrivons

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left[\gamma^\mu, \gamma^\nu\right]\left(i\mathcal{D}_\mu - e\mathcal{A}_\mu\right)\left(i\mathcal{D}_\nu - e\mathcal{A}_\nu\right) &= \frac{1}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu\left(i\mathcal{D}_\mu - e\mathcal{A}_\mu\right)\left(i\mathcal{D}_\nu - e\mathcal{A}_\nu\right) \\
&\quad -\frac{1}{2}\gamma^\nu\gamma^\mu\left(i\mathcal{D}_\mu - e\mathcal{A}_\mu\right)\left(i\mathcal{D}_\nu - e\mathcal{A}_\nu\right) \\
&= \frac{1}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu\left[\left(i\mathcal{D}_\mu - e\mathcal{A}_\mu\right), \left(i\mathcal{D}_\nu - e\mathcal{A}_\nu\right)\right] \qquad (6.23)
\end{aligned}$$

et ensuite, nous développons le commutateur $\left[\left(i\mathcal{D}_\mu - e\mathcal{A}_\mu\right), \left(i\mathcal{D}_\nu - e\mathcal{A}_\nu\right)\right]$

$$\left[\left(i\mathcal{D}_\mu - e\mathcal{A}_\mu\right), \left(i\mathcal{D}_\nu - e\mathcal{A}_\nu\right)\right] = -\left[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu\right] - ie\left[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{A}_\nu\right] + ie\left[\mathcal{D}_\nu, \mathcal{A}_\mu\right]. \tag{6.24}$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned}\mathcal{O}\mathcal{O}^{\dagger} &= -g^{\mu\nu}\left(i\mathcal{D}_{\mu}-e\mathcal{A}_{\mu}\right)\left(i\mathcal{D}_{\nu}-e\mathcal{A}_{\nu}\right)+\mathcal{M}^{2}\\ &+\frac{1}{2}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\left[\mathcal{D}_{\mu},\mathcal{D}_{\nu}\right]+ie\frac{1}{2}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\left[\mathcal{D}_{\mu},\mathcal{A}_{\nu}\right]-ie\frac{1}{2}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\left[\mathcal{D}_{\nu},\mathcal{A}_{\mu}\right].\end{aligned} \tag{6.25}$$

Considérons maintenant, le cas d'un champ électrique constant et homogène, dirigé suivant l'axe (OZ). Dans ce cas nous pouvons choisir la jauge $A_{\mu}=\left(A_{0}\left(z\right),0,0,0\right)$ avec

$$A_{0}\left(z\right)=-Ez. \tag{6.26}$$

Les composantes non nulles du tenseur énergie impulsion sont

$$F_{03}=-F_{30}=E \tag{6.27}$$

Pour les paramètres $\theta^{\mu\nu}$, nous supposons que

$$\begin{aligned}\theta^{03} &= -\theta^{30}=\theta\\ \theta^{02} &= -\theta^{20}=\theta\\ \theta^{01} &= -\theta^{10}=\theta\\ \theta^{12} &= -\theta^{21}=\theta\\ \theta^{13} &= -\theta^{31}=\theta\\ \theta^{23} &= -\theta^{32}=\theta.\end{aligned}$$

Nous avons alors

$$\theta^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}=\theta^{03}F_{03}+\theta^{30}F_{30}=2\theta E. \tag{6.28}$$

Les quantités $\mathcal{M}$ et $\mathcal{A}_{\mu}$ et les opérateurs $\mathcal{D}_{\mu}$ deviennent alors

$$\mathcal{M}=m\left(1-\frac{eE\theta}{2}\right),$$

$$\left\{\begin{array}{l}\mathcal{A}_{0}=A_{0}=-Ez\\ \mathcal{A}_{1}=A_{1}=0\\ \mathcal{A}_{2}=A_{2}=0\\ \mathcal{A}_{3}=A_{3}=0\end{array}\right. \tag{6.29}$$

et

$$\left\{\begin{array}{l}\mathcal{D}_{0}=\partial_{0}+\frac{eE\theta}{2}\left(\partial_{1}+\partial_{2}\right)\\ \mathcal{D}_{1}=\left(1-\frac{eE\theta}{2}\right)\partial_{1}\\ \mathcal{D}_{2}=\left(1-\frac{eE\theta}{2}\right)\partial_{2}\\ \mathcal{D}_{3}=\partial_{3}+\frac{eE\theta}{2}\left(\partial_{1}+\partial_{2}\right)\end{array}\right. \tag{6.30}$$

Parmi les commutateurs $[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{A}_\nu]$, le seul non nul est

$$[\mathcal{D}_3, \mathcal{A}_0] = \left[\partial_3 + \frac{eE\theta}{2}(\partial_1 + \partial_2), -Ez\right] = -E$$

Les commutateurs $[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu]$ sont tous nuls

$$[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] = 0.$$

Il vient donc

$$\mathcal{O}\mathcal{O}^\dagger = (\mathcal{D}_0 + ie\mathcal{A}_0)^2 - (\mathcal{D}_1)^2 - (\mathcal{D}_2)^2 - (\mathcal{D}_3)^2 + m^2\left(1 - \frac{eE\theta}{2}\right)^2 + ieE\gamma^0\gamma^3$$

qui s'écrit explicitement

$$\begin{aligned}\mathcal{O}\mathcal{O}^\dagger &= \left(\partial_0 + \frac{eE\theta}{2}(\partial_1 + \partial_2) - ieEz\right)^2 - \left(\partial_3 + \frac{eE\theta}{2}(\partial_1 + \partial_2)\right)^2 \\ &\quad - \left(1 - \frac{eE\theta}{2}\right)(\partial_1)^2 - \left(1 - \frac{eE\theta}{2}\right)(\partial_2)^2 + m^2\left(1 - \frac{eE\theta}{2}\right)^2 + ieE\gamma^0\gamma^3\end{aligned}$$

Cherchons maintenant les valeurs propres de l'opérateur $\mathcal{O}\mathcal{O}^\dagger$. En prenant en compte le fait que $(\gamma^0\gamma^3)^2 = 1$, qui implique que les valeurs propres de la matrice $\gamma^0\gamma^3$ sont $\kappa = \pm 1$, nous pouvons écrire pour l'opérateur $\mathcal{O}\mathcal{O}^\dagger$ l'équation aux valeurs propres

$$\mathcal{O}\mathcal{O}^\dagger U\chi(x) = \lambda U\chi(x)$$

où U_κ est le vecteur propre de la matrice $\gamma^0\gamma^3$ qui correspond à la valeur propre κ

$$\gamma^0\gamma^3 U_\kappa = \kappa U_\kappa.$$

Comme le potentiel A_μ ne dépend que de la coordonnée z, il est très commode d'écrire la fonction $\chi(x)$ sous la forme

$$\chi(x) = \exp\left[-i(\omega t - p_x x - p_y y)\right] F(z) \tag{6.31}$$

La fonction $F(z)$ vérifie alors l'équation

$$\begin{aligned}&\left[\left(-i\omega + i\frac{eE\theta}{2}(p_x + p_y) - ieEz\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial z} + i\frac{eE\theta}{2}(p_x + p_y)\right)^2\right. \\ &\left.+ m_\perp^2\left(1 - \frac{eE\theta}{2}\right)^2 + i\kappa eE\right] F(z) = \lambda F(z)\end{aligned} \tag{6.32}$$

Nous faisons encore la factorization

$$F(z) = \exp\left[i\frac{eE\theta}{2}(p_x + p_y) z\right] f(z) \tag{6.33}$$

pour obtenir l'équation

$$\begin{aligned}&\left[-\frac{\partial^2}{\partial z^2} - e^2E^2\left(z + \frac{\omega}{eE} - \frac{\theta}{2}(p_x + p_y)\right)^2\right.\\ &\left.+m_\perp^2\left(1 - \frac{eE\theta}{2}\right)^2 + i\kappa eE\right] f(z) = \lambda f(z)\,. \end{aligned}\tag{6.34}$$

Maintenons nous faisons le changement du variable z en ξ avec

$$\xi = z + \frac{\omega}{eE} - \frac{\theta}{2}(p_x + p_y)\,, \tag{6.35}$$

pour écrire finalement l'équation (6.34) sous la forme

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - e^2E^2\xi^2 + m_\perp^2\left(1 - \frac{eE\theta}{2}\right)^2 + i\kappa eE\right]\tilde{f}(\xi) = \lambda\tilde{f}(\xi) \tag{6.36}$$

où $\tilde{f}(\xi) \equiv f(z)$. Compte tenu du fait que la dernière équation se ressemble à l'équation (**??**) du deuxième chapitre nous obtenons

$$\lambda = \left(m^2 + p_x^2 + p_y^2\right)(1 - eE\theta) + i(2n+1)eE + i\kappa eE. \tag{6.37}$$

Dans ce cas, suivant la méthode préscrite dans le deuxième chapite, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} S_{eff} &= -\frac{i}{2}\operatorname{tr}\left(\ln \mathcal{O}\mathcal{O}^\dagger\right)\\ &= i\int\frac{d\omega dp_xdp_y}{(2\pi)^3}\sum_n\sum_{\nu=\pm1}\int_0^\infty\frac{ds}{s}\\ &\quad \exp\left[\left(i\left(m^2 + p_x^2 + p_y^2\right)(1 - eE\theta) - (2n+1)eE + \kappa eE\right)s\right] \end{aligned}\tag{6.38}$$

Après quelques intégrations nous obtenons

$$2\operatorname{Im} S_{eff} = L^3T\frac{2e^2E^2}{(2\pi)^3(1 - eE\theta)^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\exp\left(-n\pi\frac{m^2}{eE}(1 - eE\theta)\right) \tag{6.39}$$

En posons

$$e\mathcal{E} = eE(1 + eE\theta) \tag{6.40}$$

nous obtenons finalement la partie imaginaire de l'action effective

$$2\operatorname{Im} S_{eff} = L^3T\frac{2e^2\mathcal{E}^2}{(2\pi)^3}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\exp\left(-n\pi\frac{m^2}{e\mathcal{E}}\right). \tag{6.41}$$

6.4.2 Méthode de la transformation de Bogoliubov

En multipliant l'équation (**??**) par $\left(1+\frac{e}{4}\theta^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right)$, nous obtenons l'équation

$$\left[\gamma^{\mu}\left(i\widetilde{\mathcal{D}}_{\mu}-e\widetilde{\mathcal{A}}_{\mu}\right)-m\right]\psi=0 \tag{6.42}$$

où cette fois-ci $\widetilde{\mathcal{D}}_{\mu}$ et $\widetilde{\mathcal{A}}_{\mu}$ sont donnés par

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{A}}_{\mu} &= A_{\mu}+\frac{e}{2}\theta^{\alpha\beta}A_{\alpha}F_{\mu\beta}\\ \widetilde{\mathcal{D}}_{\mu} &= \partial_{\mu}-\frac{e}{2}\theta^{\alpha\beta}\left(\partial_{\mu}A_{\alpha}\right)\partial_{\beta}-\frac{e}{2}\theta^{\alpha\beta}\left(\partial_{\alpha}A_{\mu}\right)\partial_{\beta}.\end{aligned}$$

Cherchons maintenant la forme quadratique de l'équation (6.42). Pour cela nous introduisons un nouveau champ φ défini par

$$\psi=\left[\gamma^{\nu}\left(i\widetilde{\mathcal{D}}_{\nu}-e\widetilde{\mathcal{A}}_{\nu}\right)+m\right]\varphi. \tag{6.43}$$

Ce nouveau champ φ vérifie alors l'équation

$$\left[\gamma^{\mu}\left(i\widetilde{\mathcal{D}}_{\mu}-e\widetilde{\mathcal{A}}_{\mu}\right)-m\right]\left[\gamma^{\nu}\left(i\widetilde{\mathcal{D}}_{\nu}-e\widetilde{\mathcal{A}}_{\nu}\right)+m\right]\varphi=0 \tag{6.44}$$

qui s'écrit aussi sous la forme

$$\left[\gamma^{\mu}\left(i\widetilde{\mathcal{D}}_{\mu}-e\widetilde{\mathcal{A}}_{\mu}\right)\gamma^{\nu}\left(i\widetilde{\mathcal{D}}_{\nu}-e\widetilde{\mathcal{A}}_{\nu}\right)-m^{2}\right]\varphi=0. \tag{6.45}$$

Compte tenu du fait que $\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}=g^{\mu\nu}+\frac{1}{2}\left[\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}\right]$, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\left(i\widetilde{\mathcal{D}}_{\mu}-e\widetilde{\mathcal{A}}_{\mu}\right)\left(i\widetilde{\mathcal{D}}_{\nu}-e\widetilde{\mathcal{A}}_{\nu}\right) &= g^{\mu\nu}\left(i\widetilde{\mathcal{D}}_{\mu}-e\widetilde{\mathcal{A}}_{\mu}\right)\left(i\widetilde{\mathcal{D}}_{\nu}-e\widetilde{\mathcal{A}}_{\nu}\right)\\ &\quad+\frac{1}{2}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\left(i\widetilde{\mathcal{D}}_{\mu}-e\widetilde{\mathcal{A}}_{\mu}\right)\left(i\widetilde{\mathcal{D}}_{\nu}-e\widetilde{\mathcal{A}}_{\nu}\right)\\ &\quad-\frac{1}{2}\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\left(i\widetilde{\mathcal{D}}_{\mu}-e\widetilde{\mathcal{A}}_{\mu}\right)\left(i\widetilde{\mathcal{D}}_{\nu}-e\widetilde{\mathcal{A}}_{\nu}\right)\end{aligned} \tag{6.46}$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\left(i\widetilde{\mathcal{D}}_{\mu}-e\widetilde{\mathcal{A}}_{\mu}\right)\left(i\widetilde{\mathcal{D}}_{\nu}-e\widetilde{\mathcal{A}}_{\nu}\right) &= g^{\mu\nu}\left(i\widetilde{\mathcal{D}}_{\mu}-e\widetilde{\mathcal{A}}_{\mu}\right)\left(i\widetilde{\mathcal{D}}_{\nu}-e\widetilde{\mathcal{A}}_{\nu}\right)\\ &\quad+\frac{1}{2}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\left[\left(i\widetilde{\mathcal{D}}_{\mu}-e\widetilde{\mathcal{A}}_{\mu}\right),\left(i\widetilde{\mathcal{D}}_{\nu}-e\widetilde{\mathcal{A}}_{\nu}\right)\right]\end{aligned} \tag{6.47}$$

En écrivant le commutateur

$$\left[\left(i\widetilde{\mathcal{D}}_{\mu}-e\widetilde{\mathcal{A}}_{\mu}\right),\left(i\widetilde{\mathcal{D}}_{\nu}-e\widetilde{\mathcal{A}}_{\nu}\right)\right]=-\left[\widetilde{\mathcal{D}}_{\mu},\widetilde{\mathcal{D}}_{\nu}\right]-ie\left[\widetilde{\mathcal{D}}_{\mu},\widetilde{\mathcal{A}}_{\nu}\right]+ie\left[\widetilde{\mathcal{D}}_{\nu},\widetilde{\mathcal{A}}_{\mu}\right] \tag{6.48}$$

Nous obtenons l'équation quadratique

$$\left[g^{\mu\nu}\left(i\widetilde{\mathcal{D}}_\mu - e\widehat{\mathcal{A}}_\mu\right)\left(i\widetilde{\mathcal{D}}_\nu - e\widetilde{\mathcal{A}}_\nu\right) + \frac{i}{2}\sigma^{\mu\nu}\mathcal{D}_{\mu\nu} - \frac{e}{2}\sigma^{\mu\nu}\mathcal{F}_{\mu\nu} - m^2\right]\varphi = 0 \tag{6.49}$$

où les tenseur $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ et $\mathcal{D}_{\mu\nu}$ sont donnés par

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \left[\widetilde{\mathcal{D}}_\mu, \widehat{\mathcal{A}}_\nu\right] - \left[\widetilde{\mathcal{D}}_\nu, \widetilde{\mathcal{A}}_\mu\right] \tag{6.50}$$

et

$$\mathcal{D}_{\mu\nu} = \left[\widetilde{\mathcal{D}}_\mu, \widetilde{\mathcal{D}}_\nu\right] = \frac{e}{2}\theta^{\alpha\beta}\left[\left(\partial_\nu F_{\alpha\beta}\right)\partial_\mu + \left(\partial_\alpha F_{\mu\nu}\right)\partial_\beta\right] \tag{6.51}$$

Pour la jauge (6.26) nous avons

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{A}}_0 &= \left(1 + \frac{e}{2}\theta E\right)A_0 = -\left(1 + \frac{e}{2}\theta E\right)Ez \\
\widetilde{\mathcal{A}}_1 &= 0 \\
\widetilde{\mathcal{A}}_2 &= 0 \\
\widetilde{\mathcal{A}}_3 &= 0
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{D}}_0 &= \left(1 - \frac{eE\theta}{2}\right)\partial_0 - \frac{eE\theta}{2}\left(\partial_1 + \partial_2\right) \\
\widetilde{\mathcal{D}}_1 &= \partial_1 \\
\widetilde{\mathcal{D}}_2 &= \partial_2 \\
\widetilde{\mathcal{D}}_3 &= \left(1 + \frac{eE\theta}{2}\right)\partial_3 - \frac{eE\theta}{2}\left(\partial_1 + \partial_2\right)
\end{aligned}$$

Le tenseur $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ est dans ce cas

$$\mathcal{F}_{30} = -E\left(1 + \frac{eE\theta}{2}\right)^2 = -\mathcal{E} = -\mathcal{F}_{03}.$$

L'équation (6.49) devient

$$\begin{aligned}
&\left[\left(\left(1 - \frac{eE\theta}{2}\right)\omega + \frac{eE\theta}{2}\left(p_x + p_y\right) + e\left(1 + \frac{e}{2}\theta E\right)Ez\right)^2 - p_x^2 - p_y^2\right. \\
&\left. -\left(i\left(1 + \frac{eE\theta}{2}\right)\partial_3 + \frac{eE\theta}{2}\left(p_x + p_y\right)\right)^2 - ie\gamma^0\gamma^3 E\left(1 - \frac{e}{2}\theta E\right) - m^2\right]F(z) = 0
\end{aligned}$$

où nous avons posé $\varphi = \exp\left[-i\left(\omega t - p_x x - p_y y\right)\right]F(z)$.

Maintenant, nous écrivons $F(z)$ sous la forme

$$F(z) = \exp\left(i\frac{eE\theta}{2\left(1+\frac{eE\theta}{2}\right)}(p_x+p_y)\,z\right)f(z) \tag{6.52}$$

et nous introduisons le changement

$$z \rightarrow \xi = z + \frac{\left(1-\frac{eE\theta}{2}\right)\omega + \frac{eE\theta}{2}(p_x+p_y)}{e\left(1+\frac{e}{2}\theta E\right)E} \tag{6.53}$$

pour obtenir l'équation

$$\left[e^2E^2\xi^2 + \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} - i\kappa eE - \frac{m_\perp^2}{\left(1+\frac{e}{2}\theta E\right)^2}\right]\tilde{f}(\xi) = 0 \tag{6.54}$$

En faisant encore le changement de variable

$$\eta = \sqrt{2ieE}\,\xi$$

nous obtenons

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} - \frac{1}{4}\eta^2 + \gamma + \frac{1}{2}\right]\bar{f}(\eta) = 0$$

avec

$$\gamma = -\frac{1}{2} + i\frac{m_\perp^2}{2eE}(1 - eE\theta)$$

Dans ce cas suivant le résultats du deuxième chapitre les états "in" et "out" sont donnés par

$$\begin{aligned}
F_{in}^{-}(x) &= D_{\gamma^*}\left[(1-i)\sqrt{eE}\,(z+z_0)\right], && (6.55)\\
F_{in}^{+}(x) &= D_{\gamma}\left[-(1+i)\sqrt{eE}\,(z+z_0)\right], && (6.56)\\
F_{out}^{-}(x) &= D_{\gamma}\left[(1+i)\sqrt{eE}\,(z+z_0)\right], && (6.57)\\
F_{out}^{+}(x) &= D_{\gamma^*}\left[-(1-i)\sqrt{eE}\,(z+z_0)\right]. && (6.58)
\end{aligned}$$

où

$$z_0 = \frac{\left(1-\frac{eE\theta}{2}\right)\omega + \frac{eE\theta}{2}(p_x+p_y)}{e\left(1+\frac{e}{2}\theta E\right)E} \tag{6.59}$$

En utilisant la formule (3.54), nous obtenons les coefficients de Bogoliubov

$$\alpha = e^{-\frac{i\pi\gamma}{2}}\frac{\sqrt{2eE}}{[ik_\perp + m]\left(1-\frac{e}{2}E\theta\right)}e^{-i\frac{3\pi}{4}}\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\gamma)} \tag{6.60}$$

et

$$\beta = e^{-i\pi\gamma}. \tag{6.61}$$

Nous avons alors le résultat final

$$P = \frac{\exp\left[-\pi \frac{m_\perp^2}{eE(1+eE\theta)}\right]}{1 - \exp\left[-\pi \frac{m_\perp^2}{eE(1+eE\theta)}\right]}. \tag{6.62}$$

et

$$n = \exp\left[-\pi \frac{m_\perp^2}{eE\left(1+eE\theta\right)}\right]. \tag{6.63}$$

6.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié la création des particules de Dirac dans un espace non commutatif en considérant les cartes de Seiberg-Witten. Après avoir calculé les corrections apportées aux champs non commutatifs pour préserver l'invariance de jauge. Nous avons utilisé les deux méthodes présentées dans le deuxième chapitre pour calculer la probabilité de création des paires de particules. Le résultat essentiel de cette étude est que la non commutativité de l'espace temps influe considérablement le phénomène de création des particules.

Dans un espace non commutatif les particules sentent un champ effectif $e\mathcal{E} = eE\left(1 + eE\theta\right)$.

Chapitre 7

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons voulu étudier la création des particules à partir du vide par un champ électrique dans un espace non commutatif. Ce problème a été étudié pour la première fois dans la référence [16], où les auteurs on considéré le décalage de Bopp.

Dans le deuxième chapitre, nous nous sommes intéressés aux champs quantiques en présence d'un champ électromagnétique dans l'espace commutatif de Minkowski. Nous avons exposé d'abord la théorie quantique des champs en présence d'un champ électrique où nous avons montré que l'Hamiltonien de ce système n'est pas toujours diagonal. Ainsi, nous avons défini en premier lieu les modes "in" et "out" qui rendent l'Hamiltonien diagonal et nous permettent donc une interprétation en termes de particules. A partir de la relation entre les modes "in" et "out" nous avons pu exprimer la probabilité de création d'une paire en termes de coefficients de Bogoliubov. En deuxième partie, nous avons montré comment définir l'amplitude de transition vide-vide pour le champ scalaire complexe et le champ spinoriel et comment extraire de cette amplitude la probabilité de création de particules.

Dans le troisième chapitre, nous avons considéré l'exemple simple que constitue le champ électrique constant et homogène, pour lequel calculé la probabilité de création des paires par les deux méthode décrites dans le chapitre précédent. A travers cette étude nous avons montré que

1) le processus de création des particules par un champ électrique ne dépend pas de la jauge choisie.

2) Les deux méthodes sont équivalentes

Dans le quatrième chapitre nous avons exposé les différentes formulations de la théorie quantique dans le cadre de la géométrie non commutative. Il s'agit de la méthode du décalage de Bopp, la méthode du produit de Moyal et la carte de Seiberg Witten. Les trois méthodes consistent à relier l'algèbre non commutative à l'algèbre standard par une classe de transformations linéaires. Nous avons vu que la méthode de décalage de Bopp est équivalente à la méthode du produit de Moyal et que la carte Seiberg Witten est une version très avancée qui préserve l'invariance de jauge.

Dans le cinquième chapitre, nous avons considéré d'abord l'équation de Klein Gordon non commutative résultante du décalage de Bopp pour un champ magnétique où nous avons montré que la non commutativité de l'espace temps ne modifie pas les niveaux de Landau connus pour le champ magnétique constant. Ensuite nous avons considéré la création des particules de Klein Gordon et de Dirac. Principalement, nous avons refait les calculs de la référence [16] concernant la création des particules de Dirac par un champ électromagnétique dans un espace non commutatif en considérant le décalage de Bopp. Nous avons montré ainsi que la non commutativité de l'espace temps comme implémentée par le décalage de Bopp, n'a aucune influence sur la création des particules.

Dans le sixième chapitre, nous avons étudié la création des particules de Dirac par un champ électrique en géométrie non commutative à partir des cartes de Seiberg-Witten. Après avoir déterminé les corrections apportées aux champs non commutatifs pour préserver l'invariance de jauge, nous avons calculé la probabilité de création des particules par les deux méthodes présentées dans le deuxième chapitre. Le résultat essentiel de ce chapitre est que la non commutativité de l'espace temps influe considérablement le phénomène de création des particules.

Bibliographie

[1] Padmanabhan, T., “Physical Significance of Planck Length”, Ann. Phys. (N.Y.), 165, 38–58 (1985).

[2] H.S. Snyder, Phys. Rev. 71, 38 (1947).

[3] A. Connes, Noncommutative Differential Geometry, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. 62 (1985) 257

[4] N. D. Birrell and P. C. W. Davies, Quantum Fields in Curved Space (Cambridge Univ. Press. Cambridge, 1982).

[5] S. A. Fulling, Aspects of Quantum Field Theory in Curved Space-Time (Campridge University. Press, Campridge 1985).

[6] V. F.Mukhanov and S. Winitzki, Intoduction of Quantum Effects in Gravity (Campridge Univ. Press, Campridge 2007).

[7] L. Parker and D. J. Toms, Quantum Field Theory in Curved Space-Time : Quantized Fields and Gravity (Campridge University. Press, Campridge 2009).

[8] M.R. Douglas, D.N. Kabat, , P. Pouliot, and S.H. Shenker,Nucl. Phys. B, 485, 85–127 (1997).

[9] M.R. Douglas and N.A. Nekrasov, Rev. Mod. Phys., 73, 977–1029 (2001).

[10] O. Klein, Z. Phys. **53** (1929) 157

[11] A. Calogeracos, N. Dombey, Contemp. Phys. **40** (1999) 313.

[12] R. Ruffini, G. Vereshchagin, S-S. Xue, Phys. Rep. **487** (2010)

[13] R. Schuetzhold, H. Gies, G. Dunne, Phys. Rev. Lett. **101** (2008) 130404

[14] A. Di Piazza, E. Lotstedt, A. I. Milstein, C.H. Keitel, Phys. Rev. Lett. **103** (2009) 170403.

[15] M. J. A. Jansen and C. Müller, Phys. Rev. **A 88** (2013) 052125

[16] N. Chair, M.M. Sheikh-Jabbari, Phys.Lett. B504 (2001) 141.

[17] J. Schwinger, Phys. Rev. **82** (1951) 664.

[18] E. Bresin and C. Itzykson, Phys. Rev. **D 2** (1970) 1191.

[19] M. S. Marinov and V. S. Popov, Sov. J. Nucl. Phys. **15** (1972) 702.

[20] S.P. Gavrilov, D.M. Gitman, Phys.Rev. **D 53** (1996) 7162

[21] S. P. Kim and D. N. Page, Phys. Rev. **D 73** (2006) 065020

[22] E. T. Akhmedov and P. Burda, Phys Lett **B 687** (2010) 267

[23] S. Haouat and L. Chetouani, Phys. Scr. **75** (2007) 759

[24] G.V. Dunne and C. Schubert, Phys. Rev. **D 72** (2005) 105004

[25] S. Biswas, J. Guha and N. G. Sarkar, Class. Quantum Grav. **12,** 1591 (1995)

[26] S. Biswas, A. Shaw and P. Misra, Gen. Rel. Grav. **34,** 665 (2002)

[27] S. Biswas and I. Chowdhury, Int. J. Mod. Phys. **D 15,** 937 (2006)

[28] N. B. Narozhny and A. I. Nikishov, Sov. J. Nucl. Phys. **11** (1970) 596

[29] H. Aoyama and M. Kobayashi, Prog. Theor. Phys. **64** (1980) 1045

[30] S. A. Baran and I. H. Duru, J. Sov. Laser Res. **13** (1992) 241

[31] I. H. Duru, J. Phys. A : Math. Gen. **28** (1995) 5883

[32] E. S. Fradkin, D.M. Gitman and S.M. Shvartsman, Quantum Electrodynamics with Unstable Vacuum (Springer-Verlag, Berlin 1991)

[33] H. Groenewold, Physica 12 (1946)405.

[34] A. A.Grib, S. G. Mamayev, and V.M.Mostepanenko,Vacuum Quantum Effects in Strong Fields (Friedmann Lab. Publ.,St. Petersburg 1994).

[35] A. Hansen, F. Ravndal, Physica Scripta **23** (1981) 1036.

[36] R. Adjimi, mémoire de Master, universite de Jijel 2012.

[37] B. R. Holstein, Am. J. Phys. 66, 507 (1998).

[38] A.R.Camacho and R.J.Szabo, Introduction to Non-commutative Field Theory, (2009).

[39] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, Table of Integrals, Series, and Products, Academic Press, New York, 1979.

[40] W. Greiner, B. Müller, J. Rafelski, Quantum Electrodynamics of Strong Field (Springer-Verlag, 1985).

[41] J. Moyal, Proc. Camb. Phil. Soc. **45** (1949) 99.

[42] Bopp F. 1956, La mecanique quantique est-elle une mecanique statistique particuliere ?, Ann. Inst. H. Poincaré 1581.

[43] T. Curtright, D. Fairlie, and C. Zachos, Phys. Rev. D58, 025002 (1998).

[44] N. Seiberg and E. Witten, JHEP 9909, 032 (1999).